МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №1
«Уравнения математической физики»
Вариант 1

Бобовоза Владислава Сергеевича
студента 3 курса, 6 группы
специальность «прикладная математика»

Преподаватель:
Козловская И.С.

Минск, 2024

Постановка задачи

1) Найти решение данной задачи Коши;
2) Проверить полученное решение путем подстановки в уравнение и условия задачи;
3) Построить график поверхности $z = u(x,y)$, где u – решение задачи.

$$\begin{cases} u_{xy} + u_x + u_y + u = x^2 + y^2 \\ u|_{x=y} = 0 \\ u_x|_{x=y} = 2y^2 \end{cases}$$

Решение задачи

В уравнении сделаем замену $v = u_y + u$. Тогда оно преобразуется к следующему виду:

$$v_x + v = x^2 + y^2.$$

Решив это уравнение, подставим полученное решение в выражение для замены, откуда будем иметь общее решение исходного уравнения.

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
eq = Derivative[1,1][u][x,y]+Derivative[1,0][u][x,y]+Derivative[0,1][u][x,y]+u[x,y]==x^2+y^2;
ic = {u[y,y]==0,Derivative[1,0][u][y,y]==2*y^2};
vsol=DSolve[Derivative[1,0][v][x,y]+v[x,y]==x^2+y^2,v,{x,y}]
```

Выполнение этого фрагмента:

$\{\{v \to \text{Function}[\{x, y\}, 2 - 2x + x^2 + y^2 + e^{-x} c_1[y]]\}\}$

Подставим полученную функцию v в уравнение относительно u.

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
usol=DSolve[Derivative[0,1][u][x,y]+u[x,y]==v[x,y]/.vsol[[1]]
```

Выполнение этого фрагмента:

$\{\{u \to \text{Function}[\{x, y\}, e^{-y} c_2[x] + e^{-y} \int_1^y e^{-x+K[1]} (2e^x - 2e^x x + e^x x^2 + e^x K[1]^2 + c_1[K[1]]) \, dK[1]]\}\}$

Рассмотрим полученное решение. Его можно записать в следующем виде:

$$u(x,y) = e^{-y} C_2(x) + e^{-y} \int_1^y e^{-x+t} (2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + t^2 e^x + C_1(t))\, dt.$$

В подынтегральной функции фигурирует произвольная функция $C_1(t)$. Но при помощи надлежащих преобразований можно добиться, чтобы вместо этой функции под интегралом возникла некоторая другая функция вне интеграла:

$$u(x,y) =$$

$$= e^{-y} C_2(x) + e^{-y} \left(\int_1^y e^{-x+t} (2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + t^2 e^x)\, dt + e^{-x} \int_1^y e^t C_1(t)\, dt \right).$$

Здесь, во втором интеграле стоит, вообще говоря, некоторая функция от t, первообразная которой может быть обозначена как новая произвольная функция. С учетом верхнего переменного предела, зависящего от y, окончательно имеем:

$$u(x,y) =$$

$$= e^{-y} C_2(x) + e^{-y} \left(\int_1^y e^{-x+t} (2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + t^2 e^x)\, dt + e^{-x} C_1(y) \right) =$$

$$= e^{-y} C_2(x) + e^{-y} \int_1^y e^{-x+t} (2e^x - 2xe^x + x^2 e^x + t^2 e^x)\, dt + e^{-y-x} C_1(y).$$

Тогда мы можем переопределить замену *usol* согласно всем этим выкладкам:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
usol = u → Function[{x, y}, E^(-y) * C[2][x] + E^(-y - x) * C[1][y] + E^(-y) * Inactive[Integrate][E^(-x + K[1]) * (2 *
    E^x - 2 * x * E^x + x^2 * E^x + K[1]^2 * E^x), {K[1], 1, y}]];
```

Подставим эту функцию в условия исходной задачи. При этом используем также функцию Activate, раскрывающую так называемые неактивные интегралы:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
newic = Activate[ic /. usol]
```

Выполнение этого фрагмента:

$\{e^{-y} (-e (3 + (-2 + y) y) + e^y (4 + 2 (-2 + y) y)) + e^{-2y} c_1[y] + e^{-y} c_2[y] == 0,\ 2 e^{-y} (-e + e^y) (-1 + y) - e^{-2y} c_1[y] + e^{-y} c_2'[y] == 2 y^2\}$

Таким образом, имеем следующую систему уравнений относительно функций C_1 и C_2:

$$\begin{cases} e^{-y} \left(-e\left(3 + (-2 + y) y\right) + e^y \left(4 + 2(-2 + y) y\right)\right) + e^{-2y} C_1(y) + e^{-y} C_2(y) = 0, \\ 2e^{-y} \left(-e + e^y\right) (-1 + y) - e^{-2y} C_1(y) + e^{-y} C_2'(y) = 2y^2. \end{cases}$$

Из этой системы можно заметить, что для упрощения уравнений можно сложить первое и второе уравнение, а также применить функцию Simplify:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
c2eq = Simplify[newic[[1, 1]] + newic[[2, 1]] == newic[[1, 2]] + newic[[2, 2]]]
```

Выполнение этого фрагмента:

```
e^-y (e - 2 e^y + 2 e^y y + e y^2 - c2[y] - c2'[y]) == 0
```

Решаем полученное дифференциальное уравнение:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
c2sol = DSolve[c2eq, C[2], y, GeneratedParameters → A]
```

Выполнение этого фрагмента:

$$\left\{\left\{c_2 \to \text{Function}\left[\{y\},\ e^{y}\left(-\frac{3}{2}+y\right)+e\,(3-2y+y^2)+e^{-y}\,A[1]\right]\right\}\right\}$$

Подставим найденную функцию в первое уравнение системы newic:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
newic[[1]] /. c2sol[[1]]
```

Выполнение этого фрагмента:

$$e^{-y}\left(-e\,(3+(-2+y)\,y)+e^{y}\,(4+2\,(-2+y)\,y)\right)+e^{-y}\left(e^{y}\left(-\frac{3}{2}+y\right)+e\,(3-2y+y^2)+e^{-y}\,A[1]\right)+e^{-2y}\,c_1[y]==0$$

Отсюда найдем функцию C_1:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
c1sol = RSolve[%, C[1], y]
```

Выполнение этого фрагмента:

$$\left\{\left\{c_1 \to \text{Function}\left[\{y\},\ \frac{1}{2}\left(-5\,e^{2y}+6\,e^{2y}\,y-4\,e^{2y}\,y^2-2\,A[1]\right)\right]\right\}\right\}$$

Были найдены функции C_1 и C_2. Подставим их в общее решение, а полученное выражение упростим:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
Simplify[Activate[u[x, y] /. usol /. c1sol[[1]] /. c2sol[[1]]]]
```

Выполнение этого фрагмента:

$$4+e^{x-y}\left(-\frac{3}{2}+x\right)-2x+x^2-2y+y^2+e^{-x+y}\left(-\frac{5}{2}+3y-2y^2\right)$$

Подставим эту функцию в исходную задачу:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
{eq, ic} /. u → Function[{x, y}, 4 + E^(x - y) * (-3 / 2 + x) - 2 * x + x^2 - 2 * y + y^2 + E^(-x + y) * (-5 / 2 + 3 * y - 2 * y^2)]
```

Выполнение этого фрагмента:

$$\left\{x^2+y^2+e^{-x+y}\left(-\frac{5}{2}+3y-2y^2\right)+e^{-x+y}\left(\frac{5}{2}-3y+2y^2\right)==x^2+y^2,\ \{\text{True},\ \text{True}\}\right\}$$

Упростим чтобы убедиться, что найденная функция действительно является решением исходной задачи:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
% // Simplify
```

Выполнение этого фрагмента:

```
{True, {True, True}}
```

Построим график этой функции:

Листинг этого фрагмента на Wolfram Mathematica:

```
Plot3D[4 + E^(x - y) * (-3/2 + x) - 2 * x + x^2 - 2 * y + y^2 + E^(-x + y) * (-5/2 + 3 * y - 2 * y^
  2), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotRange → {-250, 50}]
```

Выполнение этого фрагмента: