МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №2
«Уравнения математической физики»
Вариант 1

Бобовоза Владислава Сергеевича
студента 3 курса, 6 группы
специальность «прикладная математика»

Преподаватель:
Козловская И.С.

Минск, 2024

Постановка задачи

Найти решение указанной задачи для неоднородного уравнения с правой частью, зависящей только от x.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x \\ u_x|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение задачи

Так как правая часть уравнения зависит только от x, то решение будем искать в виде:

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

Для начала найдем $v(x)$ как решение следующей задачи:

$$\begin{cases} -v''(x) = x \\ v_x|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

Решая уравнение получим:

$$v(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Воспользуемся первым граничным условием, тогда:

$$\left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \; => \; C_1 = 0$$

Воспользуемся вторым граничным условием, подставляя $C_1 = 0$:

$$\left(-\frac{x^3}{6} + C_2\right)\Bigg|_{x=l} = -\frac{l^3}{6} + C_2 = 0, \; => \; C_2 = \frac{l^3}{6}$$

Тогда имеем, что:

$$v(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{l^3}{6} = \frac{l^3 - x^3}{6}$$

Теперь поставим задачу для $w(x,t)$:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 \\ w_x|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = \dfrac{x^3 - l^3}{6} \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = X(x)T(t)$$

Тогда, после подстановки в уравнение, получим:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

А это можно записать как два уравнения:

$$T' + \lambda^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

Воспользуемся первым граничным условием, тогда:

$$w_x|_{x=0} = X'(0)T(t) = 0, \ => \ X'(0) = 0$$

Воспользуемся вторым граничным условием, тогда:

$$w|_{x=l} = X(l)T(t) = 0, \ => \ X(l) = 0$$

В итоге получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

Отсюда очевидно, что:

$$X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$$

$$X'(x) = \lambda A\cos\lambda x - \lambda B\sin\lambda x$$

Т.к. $X'(0) = 0$, то очевидно что $\lambda A = 0$, а отсюда следует что $A = 0$. Воспользуемся тем, что $X(l) = 0$ и $A = 0$, получим:

$$X(l) = B\cos\lambda l = 0$$

Полагаем что $B = 1$, тогда $\cos\lambda l = 0, \ => \ \lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, k = 0, 1, ...;$

Тогда имеем $X_k(x) = \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$.

Вернемся к уравнению относительно $T_k(t)$, но уже вместо λ_k подставим полученное значение:

$$T_k' + \frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2} T_k = 0, \ => \ T_k = A_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{4l^2}}$$

Подставляя все в $w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = X(x)T(t)$ получим:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} A_k e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{4l^2}}$$

Подставим $t = 0$:

$$w|_{t=0} = \frac{x^3 - l^3}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} A_k, \;=>$$

$$A_k = \frac{\int_0^l \frac{x^3 - l^3}{6} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx}{\int_0^l \cos^2\frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

Вычислим I_1 и I_2 используя Wolfram Mathematica:

Листинг и вывод программы на Wolfram Mathematica по вычислению I_1:

```
In[6]:= Integrate[(x^3 - l^3) / 6 * Cos[(2 * k + 1) * Pi * x / (2 * l)], {x, 0, l}]

Out[6]= -(2 l^4 (-8 + 4 (1 + 2 k) π Cos[k π] + (-8 + (π + 2 k π)^2) Sin[k π])) / (π + 2 k π)^4
```

Листинг и вывод программы на Wolfram Mathematica по вычислению I_2:

```
In[5]:= Integrate[(Cos[(2 * k + 1) * Pi * x / (2 * l)])^2, {x, 0, l}]

Out[5]= 1/2 (l - l Sin[2 k π] / (π + 2 k π))
```

После преобразований получим:

$$I_1 = -\frac{2l^4\left(-8 + (4\pi + 8\pi k)(-1)^k\right)}{\pi + 2\pi k}$$

$$I_2 = \frac{l}{2}$$

Тогда имеем что:

$$A_k = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{4l^3\left(-8 + (4\pi + 8\pi k)(-1)^k\right)}{\pi + 2\pi k}$$

Теперь подставим полученное значение A_k в выражение для $w(x,t)$, а $w(x,t)$ в выражение для $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{l^3 - x^3}{6} + \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{4l^3\left(-8 + (4\pi + 8\pi k)(-1)^k\right)}{\pi + 2\pi k} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 t}{4l^2}}.$$