МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №5
«Численные методы»
Вариант 1

Бобовоза Владислава Сергеевича
студента 3 курса, 6 группы
специальность «прикладная математика»

Преподаватель:
Репников В.И.

Минск, 2024

Постановка задач

Задача 1. Используя способ Рунге-Кутта, построить трехстадийный метод второго порядка точности.

Задача 2. Определить порядок точности метода

$$y_{j+1} = y_j + \tau \frac{f\left(t_j + \tau, y_{j+1}\right)}{1 - \tau \dfrac{\partial f\left(t_j + \tau, y_{j+1}\right)}{\partial y}}.$$

Задача 3. Найти интервал устойчивости метода $y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{4}\left(3f_j + f_{j-1}\right)$

Решение задачи 1

Будем рассматривать задачу Коши для ОДУ первого порядка следующего вида:

$$u'(x) = f(x, u(x)),\ x_0 \le x \le X,$$

где x – независимая переменная, а $f(x, u(x))$ – заданная функция. В таком случае, зададим начальное условие: $u(x_0) = u_0$.

Построим трехстадийный метод типа Рунге-Кутта:

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 = \\ = y_n + A_0 hf(x_n; y_n) + A_1 hf(x_n + \alpha_1 h; y_n + \beta_{10}\varphi_0) \\ + A_2 hf(x_n + \alpha_2 h; y_n + \ + \beta_{20}\varphi_0 + \beta_{21}\varphi_1). \end{gathered}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты A_0, A_1, A_2, α_0, α_1, α_2, β_{10}, β_{20}, β_{21}, воспользуемся методом, который основан на требовании, чтобы разложения функций $u(x_n + h) - u(x_n)$ и $\sum_{i=0}^{q} A_i\varphi_i$ по степеням h совпадали до членов с возможно более высокими степенями h. Это можно сделать путем выбора A, α, β.

Разложим $u(x_n + h) - u(x_n)$ по степеням h:

$$u(x_n + h) - u(x_n) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u^{\}}(x_n) + O\left(h^3\right) - u(x_n) =$$
$$= hf_n + \frac{h^2}{2!}(f_x + f_u f)_n + O\left(h^3\right).$$

Теперь разложим $A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2$ по степеням h:

$$A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 \\ = h(A_0 + A_1 + A_2)\, f_n \\ + h^2\left((f_x)_n (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2) + (ff_u)_n (A_1\beta_{10} + A_2\beta_{20} + A_2\alpha_2\beta_{21})\right) + O\left(h^3\right).$$

Таким образом получим систему уравнений, которую необходимо решить:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = \dfrac{1}{2} \\ \beta_{20} + \beta_{21} = \alpha_2 \\ \beta_{10} = \alpha_1 \end{cases}$$

Решим систему используя Python + SymPy:

```
from sympy import symbols, Eq, solve

A0, A1, A2 = symbols('A0 A1 A2', real=True)
alpha1, alpha2 = symbols('alpha1 alpha2', real=True)
beta10, beta20, beta21 = symbols('beta10 beta20 beta21', real=True)

equations = (Eq(A0 + A1 + A2, 1),
            Eq(A1 * alpha1 + A2 * alpha2, 1/2),
            Eq(beta20 + beta21, alpha2),
            Eq(beta10, alpha1))

solution = solve(equations, (A0, A1, A2, beta10, beta20, beta21), real=True)

print(solution)
```

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_0 = A_2\dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_1 - \frac{1}{2}}{\alpha_1} \\ A_1 = -\dfrac{A_2\alpha_2}{\alpha_1} + \dfrac{1}{2\alpha_1} \\ \beta_{20} = \alpha_2 - \beta_{21} \\ \beta_{10} = \alpha_1 \end{cases}$$

Положим $A_2 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, тогда можем найти остальные неизвестные. В итоге получим следующие коэффициенты:

$$
\begin{cases}
A_0 = 1 \\
A_1 = -1 \\
A_2 = 1 \\
\alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\
\alpha_2 = 1 \\
\beta_{10} = \dfrac{1}{2} \\
\beta_{20} = \dfrac{1}{2} \\
\beta_{21} = \dfrac{1}{2}
\end{cases},
$$

тогда можем выписать трехстадийный метод Рунге-Кутта второго порядка точности:

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \varphi_0 - \varphi_1 + \varphi_2 \\
\varphi_0 = hf\,(x_n; y_n) \\
\varphi_1 = hf\left(x_n + \dfrac{1}{2}h; y_n + \dfrac{1}{2}\varphi_0\right) \\
\varphi_2 = hf\left(x_n + h; y_n + \dfrac{1}{2}\varphi_0 + \dfrac{1}{2}\varphi_1\right)
\end{cases}
$$

Решение задачи 2

Локальная погрешность метода – невязка метода над точным решением задачи, т.е. $r(x_n; h) = u(x_{n+1}) - F\left(u\left(x_{n-q}\right), \ldots, u(x_n), u(x_{n+1}), \ldots, u(x_{n+s})\right)$.

Погрешность аппроксимации дифференциальной задачи - величина

$$
\psi(x_n; h) = \frac{u(x_{n+1} - u(x_n))}{h} - \frac{F\left(u\left(x_{n-q}\right), \ldots, u(x_n), u(x_{n+1}), \ldots, u(x_{n+s})\right) - u(x_n)}{h} = \frac{r(x_n; h)}{h}.
$$

Если величина $\psi(x_n; h)$ представима в виде:

$$
\psi(x_n; h) = O(h^p),\ p \geq 1,
$$

то метод называют методом p-го порядка аппроксимации.

Оценить локальную погрешность метода, которая имеет вид:

$$r\left(t_j\right)=u\left(t_j+\tau\right)-u\left(t_j\right)-\tau\frac{f\left(t_j+\tau,u\left(t_j\right)\right)}{1-\tau\frac{\partial f\left(t_j+\tau,u\left(t_j\right)\right)}{\partial y}}.$$

Для начала разложим имеющиеся функции по степеням τ:

$$u\left(t_{j+1}\right)=u\left(t_j+\tau\right)=u\left(t_j\right)+\tau u'\left(t_j\right)+0.5\tau^2u''\left(t_j\right)+O\left(\tau^3\right)$$

$$f\left(t_j+\tau,u\left(t_j\right)\right)=f\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+\tau f_t\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2f_{tt}\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+O\left(\tau^3\right),$$

$$f_u\left(t_j+\tau,u\left(t_j\right)\right)=$$
$$=f_u\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+\tau f_{ut}\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2f_{utt}\left(t_j,u\left(t_j\right)\right)+O\left(\tau^3\right)$$

Подставим полученные разложения в формулу локальной погрешности и упростим все что получится:

$$r(t_j;\tau)=u(t_j)+\tau u'(t_j)+0.5\tau^2u''(t_j)-u(t_j)-$$

$$-\tau\frac{f\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+\tau f_t\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2f_{tt}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)}{1-\tau\left(f_u\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+\tau f_{ut}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2f_{utt}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)\right)}+O(\tau^3)=$$

$$=\tau u'(t_j)+0.5\tau^2u''(t_j)-\tau\left(f\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+\tau f_t\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2f_{tt}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\tau\left(f_u\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+\tau f_{ut}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)+0.5\tau^2\ f_{utt}\left(t_j;u\left(t_j\right)\right)\right)\right)+O(\tau^3)=$$

$$=\tau u'+0.5\tau^2u''-\tau(f+\tau ff_u+\tau^2f_{ut}f+0.5\tau^3f_{utt}f+\tau f_t+\tau^2f_tf_u+\tau^3f_tf_{ut}+$$

$$+0.5\tau^4f_tf_{utt}+0.5\tau^2f_{tt}+0.5\tau^3f_{tt}f_u+0.5\tau^4f_{tt}f_{ut}+0.25\tau^5f_{tt}f_{utt}).$$

Теперь, все члены со степенями больше τ^3, занесем в $O(\tau^3)$, в добавок к этому учтем, что $u'(t_j)=f(t_j;u(t_j))$:

$$r(t_j;\tau)=\tau u'+0.5\tau^2u''-\tau u'-\tau^2u'f_u-\tau^2f_t+O(\tau^3)=$$
$$=\tau^2\left(0.5u''(t_j)-u'(t_j)\frac{\partial f(x_i;u(t_j))}{\partial u}-\frac{\partial f(t_j;u(t_j))}{\partial t}\right)+O(\tau^3)=O(\tau^2).$$

Тогда имеем $\psi(t_j;\tau)=\frac{O(\tau^2)}{\tau}=O(\tau)$. Метод первого порядка точности.

Решение задачи 3

Рассмотрим $y_{j+1}=y_j+\frac{\tau}{4}\left(3f_j+f_{j-1}\right)$, учитывая что $f_j=\lambda y_j$. Тогда, используя последнее равенство, получим новое выражение:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{\tau}{4}\left(3\lambda y_j + \lambda y_{j-1}\right).$$

Раскроем скобки, перенесем все влево:

$$y_{j+1} - y_j - \frac{3}{4}\tau\lambda y_j - \frac{1}{4}\tau\lambda y_{j-1} = 0.$$

Введем замену $z = \lambda\tau$ и выпишем характеристическое уравнение:

$$q^2 - \left(1 + \frac{3}{4}z\right)q - \frac{1}{4}z = 0.$$

Выразим z:

$$q^2 - q - \frac{3}{4}zq - \frac{1}{4}z = 0, \ \ => \ z\left(\frac{3}{4}q + \frac{1}{4}\right) = q^2 - q, \ \ => \ z = \frac{q^2 - q}{\frac{3}{4}q + \frac{1}{4}}.$$

Обозначим $q = e^{i\varphi}$, тогда получим:

$$z = z(\varphi) = \frac{e^{2i\varphi} - e^{i\varphi}}{\frac{3}{4}e^{i\varphi} + \frac{1}{4}}, \ \ \varphi \in [0; \pi].$$

В итоге получим:

$$z(0) = 0, \ \ z(\pi) = \frac{4(\cos 2\pi - \cos\pi)}{1 + 3\cos\pi} = -4.$$

Тогда интервалом устойчивости будет являться: [-4; 0].