МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа №7
по дисциплине «Исследование операций»
Вариант 2

Бобовоза Владислава Сергеевича
студента 3 курса, 6 группы
специальность «прикладная математика»

Минск, 2024

№1. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

Решение:

$\alpha(A) = 3$; $\beta(A) = 4$; $\Rightarrow \alpha(A) \neq \beta(A)$

Решаем в смешанных стратегиях:

Для 1-го игрока:

$$\begin{cases} 3p_1 + 5p_2 = y; \\ 4p_1 + p_2 = y; \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases}$$

$$p = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right);$$

Для 2-го игрока:

$$\begin{cases} 3q_1 + 4q_2 = y; \\ 5q_1 + q_2 = y; \\ q_1 + q_2 = 1; \end{cases}$$

$$q = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right);$$

$$\boxed{y = \frac{17}{5}}$$

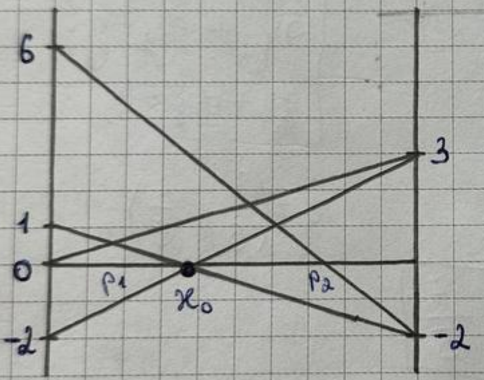
№2. Найдите решение игр, заданных матрицами

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 3 \\ 6 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

Решение $A_{2,1}$:

$\alpha(A_{2,1}) = -2;$ $\beta(A_{2,1}) = 1;$ $\Rightarrow \alpha(A_{2,1}) \neq \beta(A_{2,1});$

Решать будем в смешанных стратегиях граф. методом:



$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{3}{8}; \\ p_2 = \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{8};$$

Найдем минимаксную стратегию 2-го игрока:

$q_1 = 0;$ $q_4 = 0,$ $q_2 = q^0;$ $q_3 = 1 - q^0;$

$$\begin{cases} 3q^0 - 2(1-q^0) = -\dfrac{1}{8}; \\ -2q^0 + 1 - q^0 = -\dfrac{1}{8}; \end{cases}$$

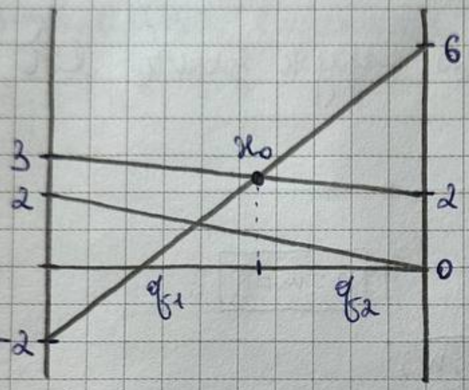
$q^0 = \frac{3}{8};$ $\Rightarrow q_2 = \frac{3}{8};$ $q_3 = \frac{5}{8};$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} &p = \left(\tfrac{3}{8}; \tfrac{5}{8}\right); \\ &q = \left(0; \tfrac{3}{8}; \tfrac{5}{8}; 0\right) \\ &y = -\tfrac{1}{8}; \end{aligned}}$$

Решение $A_{2,2}$:

$\alpha(A_{2,2}) = 2$; $\beta(A_{2,2}) = 3$; $\Rightarrow \alpha(A_{2,2}) \neq \beta(A_{2,2})$;

Решать будем в смешанных стратегиях граф. методом



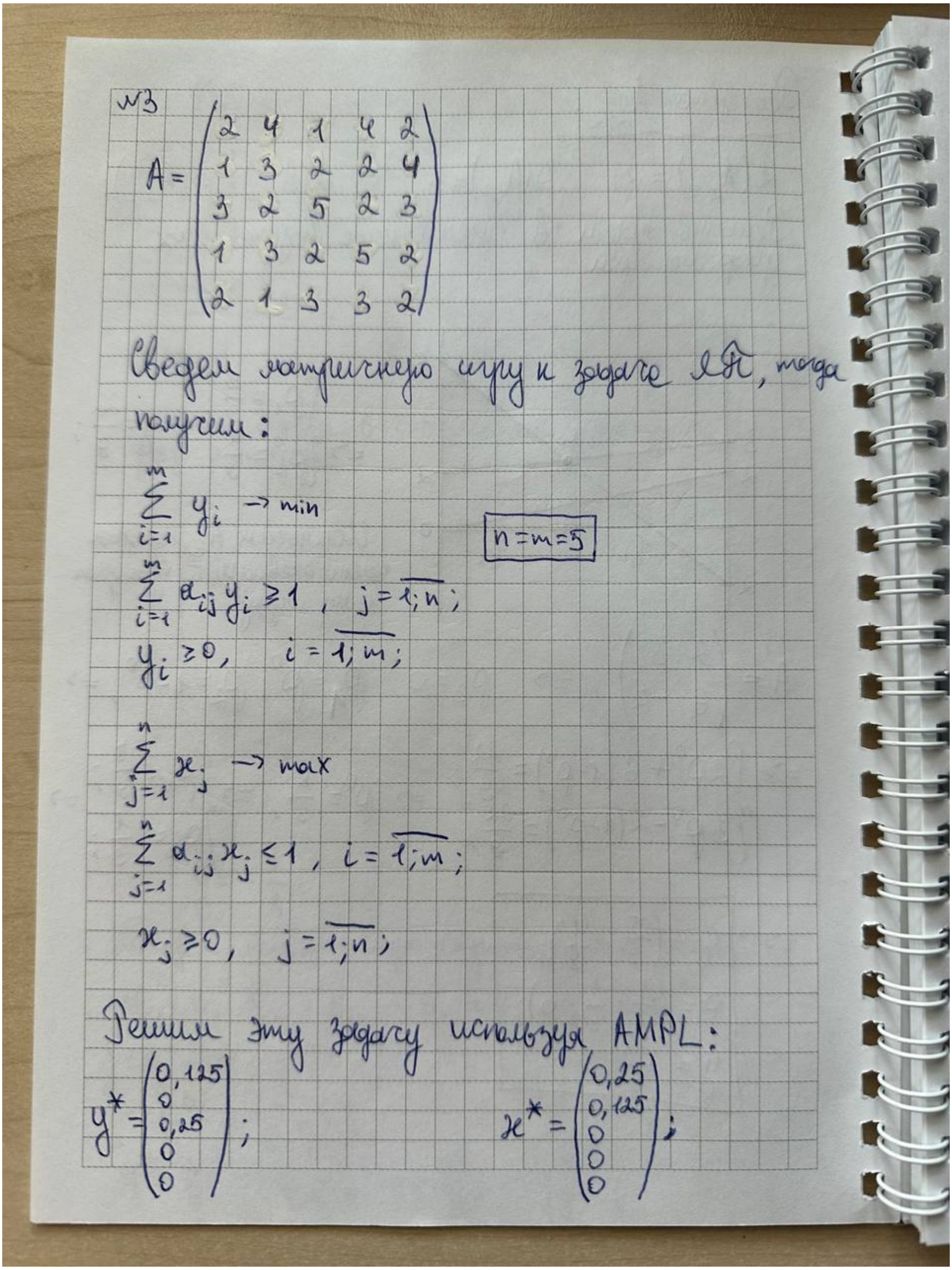
$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{5}{9}; \\ p_2 = \frac{4}{9}; \end{cases} \Rightarrow y = \frac{22}{9}$;

Исключим A_3, которая дает очевидный проигрыш 1-му игроку

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $\Rightarrow$ $p_3 = 0$; $p_1 = p^0$; $p_2 = 1 - p^0$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2p^0 + 6(1-p^0) = \frac{22}{9}; \\ 3p^0 - 2(1-p^0) = \frac{22}{9}; \end{cases} \Rightarrow p^0 = \frac{8}{9}, \Rightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{8}{9}; \\ p_2 = \frac{1}{9}; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} & q = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right); \\ & p = \left(\frac{8}{9}; \frac{1}{9}; 0\right); \\ & y = \frac{22}{9}; \end{aligned}}$



№3

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Сведем матричную игру к задаче ЛП, тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \to \min \qquad \boxed{n=m=5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j=\overline{1;n};$$

$$y_i \geq 0, \quad i=\overline{1;m};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, \quad i=\overline{1;m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1;n};$$

Решим эту задачу используя AMPL:

$$y^*=\begin{pmatrix} 0,125 \\ 0 \\ 0,25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x^*=\begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Листинг программы AMPL:

```
#model.mod
```

```
set n;
param A{n, n};

#var y{n};
#minimize z1: sum{i in n} y[i];
#subject to condition1{j in n}: sum{i in n} A[i,j]*y[i] >= 1;
#subject to constraint1{i in n}: 0 <= y[i];

var x{n};
maximize z2: sum{j in n} x[j];
subject to condition2{i in n}: sum{j in n} A[i,j]*x[j] <= 1;
subject to constraint2{j in n}: 0 <= x[j];
```

```
#data.dat

set n = 1 2 3 4 5;
param A: 1 2 3 4 5 :=
1 2 4 1 4 2
2 1 3 2 2 4
3 3 2 5 2 3
4 1 3 2 5 2
5 2 1 3 3 2;
```

```
#run.run

reset;
model model.mod;
data data.dat;

option solver cplex;
solve;

display x;
#display y;
```

$$\nu = \frac{1}{0{,}375} \approx 2{,}667 \;, \Rightarrow v(A) = \nu \approx 2{,}667$$

Оптимальная стратегия 1-го игрока:

$p^{\circ} = \nu y^{*};$

Оптимальная стратегия 2-го игрока:

$q^{\circ} = \nu x^{*};$

№4

$p = 350$; $c = 60$; $k = 70$;

p — цена за ед. товара

c — расход по хранению

k — расход по завозу

Решение:

есть \ нужно	5	6	7	8
5	$5p$	$6p-k$	$7p-2k$	$8p-3k$
6	$5p-c$	$6p$	$7p-k$	$8p-2k$
7	$5p-2c$	$6p-c$	$7p$	$8p-k$
8	$5p-3c$	$6p-2c$	$7p-c$	$8p$

$\Downarrow$

есть \ нужно	5	6	7	8
5	1750	2030	2310	2590
6	1690	2100	2380	2660
7	1630	2040	2450	2730
8	1570	1980	2390	2800

Крит. Вальда: $W = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$;

Найдем $\min\limits_j a_{ij}$: $\alpha_1 = 1750$; $\alpha_3 = 1630$; =>

$\alpha_2 = 1690$; $\alpha_4 = 1570$;

=> $W = \max\limits_i \alpha_i = 1750$ => опт. стратегия это завоз 5 ед.

Крит. Сэвиджа: $S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$, $r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij}$

Построим матрицу r:

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 70 & 140 & 210 \\ 60 & 0 & 70 & 140 \\ 120 & 60 & 0 & 70 \\ 180 & 120 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

=> $S = \min\{210; 140; 120; 180\} = 120$, =>

=> выбираем стратегию 3

Крит. Гурвица: $H = \max(0{,}5 \max\limits_j a_{ij} + 0{,}5 \min\limits_j a_{ij})$;

$H = \max\{2170; 2175; 2180; 2185\} = 2185$, => выбираем стратегию 4

Крит. Лапласа: $L = \max\limits_{i \in \overline{1,m}} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \max\{2170;$ $2207{,}5; 2212{,}5; 2185\} = 2212{,}5$, => выбираем стратегию 3