БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра численных методов и программирования

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

Задания и методические рекомендации по вычислительному практикуму для студентов специальностей G31 03 01 «Математика»

МИНСК
2006

УДК 517.927(075.8)
ББК 22.161.1я73
Ч69

Авторы – составители:
А. И. Кравчук, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень.

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент *М. В. Игнатенко*

Утверждено на заседании
кафедры численных методов и программирования,
протокол № 5 от 5 декабря 2006 г.

Ч69 Численные методы линейной алгебры. Вычислительный практикум. Учеб.-метод. пособие / Авт.-сост. А. И. Кравчук, Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень. – Мн. : БГУ, 2006.– 123 с.

В пособии изложены задания и методические рекомендации по вычислительному практикуму. Предназначено для студентов 3-4 курсов механико-математического факультета дневной формы обучения. В пособии представлены 15 лабораторных работ по методам вычислений по темам "Векторные и матричные нормы. Элементы теории возмущений", "Численные методы решения систем ЛАУ", "Спектральные задачи линейной алгебры".

УДК 517.927(075.8)
ББК 22.161.1я73

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие ориентировано на студентов механико-математического факультета БГУ, изучающих численные методы на 3-4 курсах.

В пособии представлены 15 лабораторных работ по методам вычислений по темам "Векторные и матричные нормы. Элементы теории возмущений", "Численные методы решения систем ЛАУ", "Спектральные задачи линейной алгебры".

Каждая лабораторная работа содержит теоретический материал, необходимый для её выполнения. Для закрепления теории во многих лабораторных работах приведен набор теоретических задач.

Расчётные задачи ориентированы не просто на использование тех или иных алгоритмов, а на качественное изучение этих алгоритмов, фактически на проведение небольшой исследовательской работы.

В конце каждой лабораторной работы приведены контрольные вопросы, ответы на которые являются неотъемлемой часть сдачи студентом лабораторных работ.

Рекомендуемая литература приведена в конце каждой темы. Её деление на основную и дополнительную довольно условно. В конце каждой лабораторной работы для основной литературы приведены страницы, рекомендованные к изучению при выполнении данной лабораторной работы.

ВЕКТОРНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ НОРМЫ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Лабораторная работа № 1. Нормы векторов и матриц. Эквивалентность норм

Пусть вектор $x \in R^n$.

Определение 1. *Нормой вектора* x *называется функционал* $\|x\| : R^n \to R$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\|x\| \ge 0$ *для* $\forall x \in R^n$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$, $\forall\, c \in R$, $x \in R^n$.

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall\, x, y \in R^n$ (*неравенство треугольника*).

Приведём примеры наиболее часто используемых норм векторов, имеющих специальные обозначения[1]:

1. Кубическая норма вектора: $\|x\|_\infty = \|x\|_{\mathrm{I}} = \|x\|_C = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$.

2. Октаэдрическая норма вектора: $\|x\|_1 = \|x\|_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

3. Сферическая (евклидова) норма вектора: $\|x\|_2 = \|x\|_{\mathrm{III}} = (x, x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$.

Пример 1. *Является ли* $P(x) = \min\left(|x_1| + 2|x_2|,\ 2|x_1| + |x_2| \right)$ *нормой вектора* $x = (x_1,\ x_2)$ *в* R^2*?*

<u>*Решение*</u>. ♦ Рассмотрим два вектора $x = (1,\ 0)$, $y = (0,\ 1)$. Тогда $x + y = (1,\ 1)$, $P(x) = P(y) = 1$, $P(x + y) = 3$. Значит $P(x + y) > P(x) + P(y)$, т. е. не выполнено неравенство треугольников. Следовательно, $P(x)$ не является нормой вектора в R^2. ■

Пусть $A \in R^{n \times n}$ – квадратная матрица порядка n.

---

[1] Эти обозначения связаны с тем, что перечисленные ниже нормы являются частным случаем норм Гельдера: $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$.

Определение 2. *Нормой матрицы A называется функционал $\|A\|: R^{n\times n} \to R$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\|A\| \ge 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0.$
2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|, \ \forall\, c \in R, \ A \in R^{n\times n}.$
3) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|, \ \ \forall\, A, B \in R^{n\times n}$ *(аксиома аддитивности).*
4) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|, \ \forall\, A, B \in R^{n\times n}$ *(аксиома мультипликативности).*

Если $\|A\|$ удовлетворяет только первым трём аксиомам нормы матрицы, то такую норму называют аддитивной. Если выполняются все четыре аксиомы нормы, то такую норму называют мультипликативной (или операторной) нормой матрицы. Всякую аддитивную норму умножением на достаточно большую положительную константу можно превратить в мультипликативную норму. Везде, где не оговорено иное, под матричной нормой будем подразумевать мультипликативную норму.

Пример 2. *Доказать, что $L(A) = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ является аддитивной нормой матрицы A, но не является мультипликативной (операторной) нормой матрицы A, а $M(A) = n \cdot \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ является мультипликативной (операторной) нормой матрицы A.*

<u>*Решение*</u>. ♦ Проверка первых двух аксиом нормы матрицы для $L(A)$ очевидна. Проверим неравенство треугольника. Для $\forall\, A, B \in R^{n\times n}$ имеем

$$L(A+B) = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij} + b_{ij}| \overset{|x+y|\le|x|+|y|}{\le} \max_{1\le i,j\le n} \left(|a_{ij}| + |b_{ij}|\right) \le \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| +$$

$+ \max\limits_{1\le i,j\le n} |b_{ij}| = \ L(A) + L(B).$ Чтобы показать невыполнение аксиомы мультипликативности для $L(A)$ приведём контрпример. Пусть $A = B$ и $a_{ij} = b_{ij} = 1,$ для всех $i, j = \overline{1, n}.$ Тогда $L(A) = L(B) = 1,$ а $L(AB) = n,$ значит $L(AB) > L(A)L(B)$ и, следовательно, не выполняется аксиома мультипликативности для $L(A).$

Проверка первых трёх аксиом для $M(A)$ аналогична проверке этих аксиом для $L(A).$ Проверим аксиому мультипликативности для $M(A).$

Для $\forall\ A, B \in R^{n\times n}$ имеем $M(AB) = n \max\limits_{1\le i,j\le n} \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}\right| \overset{|x+y|\le|x|+|y|}{\le}$

$$\le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\cdot b_{kj}\right| \overset{|x\cdot y|=|x|\cdot|y|}{=} n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} (|a_{ik}|\cdot|b_{kj}|) \le$$

$$\le n \max_{1\le k,j\le n} |b_{kj}|\cdot\left(\max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} (|a_{ik}|)\right) = M(B)\cdot\left(\max_{1\le i\le n} \sum_{k=1}^{n} (|a_{ik}|)\right) \le$$

$$M(B)\cdot\left(\max_{1\le i,k\le n} |a_{ik}|\cdot \max_{1\le i\le n}\sum_{k=1}^{n} 1\right) = M(B)\cdot\left(\max_{1\le i,k\le n} |a_{ik}|\cdot n\right) = M(A)\cdot M(B).\ \blacksquare$$

Определение 3. *Нормы* $\|\ \|_*$ *и* $\|\ \|^*$ *называются эквивалентными, если существуют положительные константы* γ_1 *и* γ_2, *такие, что* $\gamma_1\|\ \|_* \le \|\ \|^* \le \gamma_2\|\ \|_*$.

Определение 4. *Энергетическим скалярным произведением векторов* x *и* y *по симметрической, положительно определенной матрице* D *называют скалярное произведение* (Dx, y) *и обозначают* $(x, y)_D$.

Определение 5. *Энергетической нормой вектора* x *по симметрической, положительно определенной матрице* D *называют корень квадратный из энергетического скалярного произведения* $(Dx, x)^{1/2}$ *и обозначают* $\|x\|_D$.

Пример 3. *Энергетическая норма вектора* $\|\ \|_D$ *эквивалентна евклидовой норме вектора* $\|\ \|_2$.

<u>*Решение*</u>. ♦ Пусть λ_i – собственные значения симметричной положительно определённой матрицы D. Тогда существует ортогональная матрица S, такая, что $D = S\Lambda S^T$, где $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_n]$, $S\cdot S^T = S^T\cdot S = E$. Следовательно $\|x\|_D^2 = (Dx, x) = (S\Lambda S^T x, x) =$ $= (\Lambda S^T x, S^T x) \underset{S^T x = y}{\overset{\text{обозначим}}{=}} (\Lambda y, y)$. Из последнего равенства следует, что $\lambda_{\min}\|y\|_2^2 \le \|x\|_D^2 \le \lambda_{\max}\|y\|_2^2$. Так как $\|y\|_2^2 = (S^T x, S^T x) = (S S^T x, x) = (x, x) = \|x\|_2^2$, то получим

$\lambda_{\min}\|x\|_2^2 \le \|x\|_D^2 \le \lambda_{\max}\|x\|_2^2$, т. е. энергетическая норма эквивалентна евклидовой с константами $\gamma_1 = \sqrt{\lambda_{\min}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$. ■

Теоретические задачи

1. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\max\limits_k (d_k |x_k|)$ есть норма вектора x.

2. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k |x_k|$ есть норма вектора x.

3. Доказать, что $\max\limits_{1\le i\le n}\left(\left|\sum\limits_{k=1}^{i} x_k\right|\right)$ есть норма вектора x.

4. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1,n}$. Доказать, что $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\, x_k^2}$ есть норма вектора x.

5. Пусть φ_k, $k = 1, 2, \dots, n$ непрерывные на $[a, b]$ линейно независимые функции, и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор. Доказать, что $\| x \| = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \varphi_k \right\|_C = \max\limits_{t\in[a,b]} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \varphi_k(t) \right|$ является нормой вектора.

6. Доказать, что $\| x \|_\infty \le \| x \|_1 \le n \| x \|_\infty$.

7. Доказать, что $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \| x \|_1 \le \| x \|_2 \le \| x \|_1$.

8. Доказать, что $\| x \|_\infty \le \| x \|_2 \le \sqrt{n} \| x \|_\infty$.

9. Найти векторы, на которых достигаются константы эквивалентности, связывающие нормы $\| x \|_\infty$, $\| x \|_1$, $\| x \|_2$ (см. задачи 6-8).

10. Доказать, что любые две нормы $\| x \|_*$ и $\| x \|_{**}$ в конечномерном пространстве R^n эквивалентны. *Указание*: *докажите эквивалентность любой нормы эвклидовой (или кубической)*.

11. Доказать, что модуль собственного значения матрицы не больше любой её нормы.

12. Доказать, что для норм Гельдера при $p \to \infty$ выполняется соотношение $\| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} | x_k |^p \right)^{1/p} \to \| x \|_\infty$.

13. Доказать, что $N(A) = \left(\sum_{i,\, j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 \right)^{1/2}$ является нормой матрицы A.

14. Доказать, что $n \times n$–матрица A при $n \geq 2$ не определяется полностью квадратичной формой (Ax, x), т. е. найдутся две неравные матрицы A и B, для которых $(Ax, x) = (Bx, x)$.

15. Доказать, что если $(Ax, x) > 0$ для всех $x \neq 0$, то существует постоянная $\delta > 0$, не зависящая от x, такая, что $(Ax, x) \geq \delta \| x \|^2$ для всех x.

16. Привести пример положительно определённой в R^n матрицы, спектр которой не является вещественным.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение нормы вектора.

2. Приведите примеры норм вектора: кубическая, октаэдрическая и эвклидова норма вектора.

3. Дайте определение аддитивной и мультипликативной нормы матрицы.

4. Дайте определение эквивалентности норм.

5. Дайте определения положительно определённой матрицы, симметрической матрицы, эрмитовой матрицы, ортогональной матрицы, унитарной матрицы.

6. Дайте определения энергетического скалярного произведения векторов и энергетической нормы вектора.

Литература к лабораторной работе №1: [1, с. 250–253], [2, с. 58–62], [3, с. 793–802], [4, с. 80–87], [5, с. 8–18], [6, с. 104–115], [7, с. 280–293], [8, с. 75], [9, с. 54–56], [10, с. 119–125].

Лабораторная работа № 2.
Согласованность и подчинённость норм

В большинстве случаев приходится одновременно рассматривать матрицы и векторы, и поэтому их нормы целесообразно вводить так, чтобы они были в какой-то мере согласованными.

Определение 1. *Норма* $\| \ \|_{\text{матр}}$ *матрицы* A *называется согласованной с нормой вектора* $\| \ \|_{\text{вект}}$, *если для всякого вектора* x *размерности* n *выполняется неравенство*

$$\|Ax\|_{\text{вект}} \le \|A\|_{\text{матр}} \cdot \|x\|_{\text{вект}}. \qquad (1)$$

Поскольку при $x = 0$ условие (1) верно, перепишем его для $x \ne 0$, обозначив $y = \dfrac{x}{\|x\|}$: $\|Ay\|_{\text{вект}} \le \|A\|_{\text{матр}}, \ \forall y \in R^n : \|y\|_{\text{вект}} = 1.$

Определение 2. *Подчиненной нормой называется наименьшая из всех согласованных норм, т. е.* $\|A\|_{\text{матр}}$ *подчиненная если*

$$\|A\|_{\text{матр}} = \max_{\|x\| \ne 0} \frac{\|Ax\|_{\text{вект}}}{\|x\|_{\text{вект}}} = \max_{\|y\|=1} \|Ay\|_{\text{вект}}. \qquad (2)$$

Отметим, что в равенстве (2) Ay есть непрерывная функция от y, и она рассматривается на ограниченном замкнутом множестве векторов, для которых $\|y\| = 1$. Поэтому максимальное значение $\|Ay\|_{\text{вект}}$ достигается, и существует такой вектор y, что $\|y\|_{\text{вект}} = 1$ и $\|Ay\|_{\text{вект}} =$
$= \max \|Ay\|_{\text{вект}} = \|A\|_{\text{матр}}$.

Пример 1. *Функционал, определённый по формуле (2) действительно является мультипликативной матричной нормой.*

Решение. ♦ Проверим аксиомы 1) – 4) из определения мультипликативной матричной нормы.

1) $\|A\|_{\text{матр}} = \max\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|_{\text{вект}} \ge 0, \|A\|_{\text{матр}} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$

2) $\|cA\|_{\text{матр}} = \max\limits_{\|y\|=1} \|cAy\|_{\text{вект}} = \max\limits_{\|y\|=1} \left(|c| \cdot \|Ay\|_{\text{вект}} \right) = |c| \cdot \max\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|_{\text{вект}} =$

$= |c| \cdot \|A\|_{\text{матр}}, \ \forall \, c \in R, \ A \in R^{n \times n}.$

3) $\|A+B\|_{\text{матр}} = \max\limits_{\|y\|=1} \|(A+B)\,y\|_{\text{вект}} = \max\limits_{\|y\|=1} \|Ay+By\|_{\text{вект}} \le$

$$\le \max_{\|y\|=1}\left(\|Ay\|_{\text{вект}} + \|By\|_{\text{вект}}\right) \le \max_{\|y\|=1}\|Ay\|_{\text{вект}} + \max_{\|y\|=1}\|By\|_{\text{вект}} =$$

$$= \|A\| + \|B\|, \quad \forall\ A, B \in R^{n\times n}.$$

4) $\|AB\|_{\text{матр}} = \max\limits_{x\ne 0} \dfrac{\|ABx\|_{\text{вект}}}{\|x\|_{\text{вект}}} = \max\limits_{x\ne 0} \dfrac{\|ABx\|_{\text{вект}} \cdot \|Bx\|_{\text{вект}}}{\|Bx\|_{\text{вект}} \cdot \|x\|_{\text{вект}}} \le$

$$\le \max_{y\ne 0}\frac{\|Ay\|_{\text{вект}}}{\|y\|_{\text{вект}}} \cdot \max_{x\ne 0}\frac{\|Bx\|_{\text{вект}}}{\|x\|_{\text{вект}}} \le \|A\|_{\text{матр}} \|B\|_{\text{матр}}, \ \forall\ A, B \in R^{n\times n}. \ \blacksquare$$

Пример 2. *Найдём норму матрицы, подчинённую кубической норме вектора* $\|x\|_\infty = \|x\|_{\mathrm{I}} = \|x\|_C = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$.

<u>*Решение*</u>. ♦Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тогда $Ax = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}$.

Для вектора Ax имеем: $\|Ax\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij} x_j\right| \le \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij} x_j| =$

$= \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \ \le \max\limits_{1\le j\le n} |x_j| \cdot \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}| = \|x\|_\infty \cdot \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$. Т. е.

$$\|Ax\|_\infty \le \|x\|_\infty \cdot \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \tag{3}$$

Сравнивая (3) и (1), получаем, что

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{4}$$

является нормой матрицы, согласованной с кубической нормой вектора.

Докажем, что $\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ является нормой матрицы, подчиненной кубической норме вектора. Для этого надо указать вектор y, такой, что $\|y\|_\infty = 1$ и $\|Ay\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| = \|A\|_\infty$.

Пусть m – номер строки матрицы A, в которой сумма модулей элементов максимальна, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{mj}\right| \ge \sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ \forall i=\overline{1,n}.$

Покажем, что $y\in R^n$, такой что $y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_{mj}\ge 0 \\ -1, \text{ если } a_{mj}<0 \end{cases}$ – искомый.

Действительно, $\|y\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left|y_i\right| = 1$, и $\|Ay\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right| = \left|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{mj}y_j\right| = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| = \|A\|_\infty$. Значит, $\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ является нормой матрицы, подчиненной кубической норме вектора. ■

Пример 3. *Найдём норму матрицы, подчинённую октаэдрической норме вектора:* $\|x\|_1 = \|x\|_{\mathrm{II}} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left|x_i\right|$.

<u>*Решение*</u>. ♦Для вектора Ax имеем:

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\cdot\left|x_j\right| = \sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \le \|x\|_1\cdot\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|.$$ Т. е.

$$\|Ax\|_1 \le \|x\|_1\cdot\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|. \tag{5}$$

Сравнивая (5) и (1), получаем, что $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ является нормой матрицы, согласованной с октаэдрической нормой вектора. Докажем, что $\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$ является нормой матрицы, подчиненной октаэдрической норме вектора. Для этого надо указать вектор y, такой, что $\|y\|_1 = 1$ и $\|Ay\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_1$.

Пусть m – номер столбца матрицы A, в которой сумма модулей элементов максимальна, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{im}| \ge \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, $\forall\ j = \overline{1,n}$. Покажем, что вектор $y \in R^n : y_j = \begin{cases} 1, \text{ если } m = j \\ 0, \text{ если } m \ne j \end{cases}$ – искомый. Действительно, $\|y\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i| = 1$, и $\| A \|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} | = \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{im} | = \| Ay \|_1$. Значит, $\max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |$ является нормой матрицы, подчиненной октаэдрической норме вектора. ■

Пример 4. *Докажем, что нормой матрицы, подчинённой евклидовой норме вектора, является* $\sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}$, *где* $\lambda_{\max}(A^* A)$ *– наибольшее собственное значение матрицы* $A^* A$.

<u>*Решение*</u>. ♦ Докажем, что $A^* A$ – эрмитова матрица. Действительно, $\left(A^* A\right)^* = A^* \left(A^*\right)^* = A^* A$. Известно, что эрмитовы матрицы имеют вещественные собственные значения. Поэтому $\lambda_{\max}(A^* A)$ будет вещественным числом. Докажем, что $\lambda_{\max}(A^* A)$ – неотрицательное число. Так как $A^* A$ – эрмитова матрица, то она имеет n линейно-независимых ортонормированных собственных векторов. Обозначим их $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Тогда $(x^{(k)}, x^{(m)}) = \begin{cases} 1, \text{ если } k = m, \\ 0, \text{ если } k \ne m. \end{cases}$

По определению собственного вектора $A^* A \cdot x^{(k)} = \lambda_k \cdot x^{(k)}$. Собственные значения, соответствующие собственным векторам $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, обозначим соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Пусть $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n$. Рассмотрим скалярное произведение $\left(A^* A x^{(k)}, x^{(k)}\right) =$ $= \left(\lambda_k x^{(k)}, x^{(k)}\right) = \lambda_k \left(x^{(k)}, x^{(k)}\right) = \lambda_k \cdot 1 = \lambda_k$.

С другой стороны $\left(A^* A x^{(k)}, x^{(k)}\right) = \left(Ax^{(k)}, Ax^{(k)}\right) = \left\|Ax^{(k)}\right\|_2^2$. То есть $\left\|Ax^{(k)}\right\|_2^2 = \lambda_k$. Значит $\lambda_k > 0$.

Возьмём произвольный вектор x с единичной евклидовой нормой ($\|x\|_2 = 1$) и разложим его по собственным векторам: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}$. Так как $\|x\|_2 = 1$, то $(x, x) = \|x\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1$.

Докажем согласованность нормы матрицы $\sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}$ и евклидовой нормы вектора:

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = \left(A^* A x, x\right) = \left(A^* A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}\right) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^* A x^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i (A^* A) x^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i (A^* A) \le \lambda_{\max}(A^* A) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = \lambda_{\max}(A^* A) \|x\|_2^2.$$

Значит $\|Ax\|_2 \le \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} \cdot \|x\|_2$.

Докажем, что норма $\sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)}$ является подчиненной для евклидовой нормы вектора. Построим вектор, при котором выполняется равенство $\|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^* A)} \cdot \|x\|_2$. В качестве такого вектора можно взять вектор $x^{(1)}$, соответствующий максимальному по модулю собственному значению $\lambda_{\max}(A^* A)$ матрицы. Тогда равенство очевидно. ■

Нормы $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ легко вычисляются. Сложно вычислить $\|A\|_2$. Однако последняя норма чаще других используется в исследованиях.

Теоретические задачи

1. Пусть числа $d_k > 0$, $k = \overline{1, n}$. Найти норму матрицы, подчинённую векторной норме $\max\limits_k (d_k |x_k|)$ вектора x.

2. Пусть числа $d_k > 0,\ \ k = \overline{1, n}.$ Найти норму матрицы, подчинённую векторной норме $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\, x_k^2}$ вектора x.

3. Найти норму матрицы, подчинённую векторной норме $\max\limits_{1 \le i \le n}\left(\left| \sum\limits_{k=1}^{i} x_k \right| \right)$ вектора x.

4. Пусть числа $d_k > 0,\ \ k = \overline{1, n}.$ Найти норму матрицы, подчинённую векторной норме $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\, |x_k|$ вектора x.

5. Докажите $\frac{1}{n}\| A \|_\infty \le \| A \|_1 \le n \| A \|_\infty.$

6. Докажите $\frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_2 \le \| A \|_1 \le \sqrt{n} \| A \|_2.$

7. Докажите $\frac{1}{\sqrt{n}}\| A \|_2 \le \| A \|_\infty \le \sqrt{n} \| A \|_2.$

8. Пусть $M(A) = n \cdot \max\limits_{1 \le i, j \le n} \left| a_{ij} \right|.$ Найти наилучшие константы $\gamma_1,\ \gamma_2$ в матричном неравенстве $\gamma_1 M(A) \le \|A\|_1 \le \gamma_2 M(A).$

9. Пусть $M(A) = n \cdot \max\limits_{1 \le i, j \le n} \left| a_{ij} \right|.$ Найти наилучшие константы $\gamma_1,\ \gamma_2$ в матричном неравенстве $\gamma_1 M(A) \le \|A\|_2 \le \gamma_2 M(A).$

10. Пусть $M(A) = n \cdot \max\limits_{1 \le i, j \le n} \left| a_{ij} \right|.$ Найти наилучшие константы γ_1, γ_2 в матричном неравенстве $\gamma_1 M(A) \le \|A\|_\infty \le \gamma_2 M(A).$

11. Пусть B – неособенная матрица и $\| \cdot \|$ – векторная норма. Докажите, что $\|x\|^* = \|Bx\|$ также является нормой вектора. Найдите выражение для операторной матричной нормы подчинённой векторной норме $\|x\|^*$.

12. Пусть A – вещественная прямоугольная матрица. Доказать, что умножение её слева или справа на ортогональную матрицу соответствующих порядков не меняет её спектральную норму.

13. Пусть $N(A)=\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$. Найти наилучшие константы γ_1, γ_2 в матричном неравенстве $\gamma_1 N(A)\le\|A\|_1\le\gamma_2 N(A)$..

14. Пусть $N(A)=\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$. Найти наилучшие константы γ_1, γ_2 в матричном неравенстве $\gamma_1 N(A)\le\|A\|_2\le\gamma_2 N(A)$.

15. Доказать, что для вектора $x=(x_1,x_2)$ и $h>0$ выражение $\|x\|_h=\max\left(|x_1|,\dfrac{|x_1-x_2|}{h}\right)$ является нормой. Найти матричную норму, подчинённую этой векторной норме.

16. Пусть $N(A)=\left(\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$. Найти наилучшие константы γ_1, γ_2 в матричном неравенстве $\gamma_1 N(A)\le\|A\|_\infty\le\gamma_2 N(A)$.

17. Показать, что для любой матрицы A и любой операторной нормы выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left\|A^k\right\|}=\rho(A)$, где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A.

18. Докажите справедливость следующего неравенства для норм матриц: $\|A\|_2^2\le\|A\|_1\cdot\|A\|_\infty$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение согласованной нормы матрицы.

2. Дайте определение подчинённой нормы матрицы.

3. Как вычисляется норма матрицы, подчинённая кубической норме вектора?

4. Как вычисляется норма матрицы, подчинённая октаэдрической норме вектора?

5. Как вычисляется норма матрицы, подчинённая эвклидовой норме вектора?

Литература к лабораторной работе №2: [1, с. 250–253], [2, с. 58–62], [4, с. 84–87], [5, с. 8–18], [6, с. 108–115], [7, с. 285–293], [8, с. 75], [9, с. 54–56], [10, с. 122–129].

Лабораторная работа № 3.
Матричная теория возмущений

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (ЛАУ)

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A – заданная невырожденная матрица порядка n, f – заданный вектор, x – искомый вектор.

Независимо от метода решения системы ЛАУ (1) возникают погрешности, связанные с неточным заданием матрицы A и вектора f. Например, при вычислении на компьютере возникает погрешность из-за перехода в двоичную систему счисления. Таким образом, реально решается не система (1), а возмущённая система

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f}, \tag{2}$$

где $\tilde{A} = A + \delta A$, $\tilde{f} = f + \delta f$, $\tilde{x} = x + \delta x$. Здесь δA, δf – погрешности задания A и f, а δx – вызванная ими погрешность решения x системы ЛАУ (1). Вторым источником ошибок в x являются погрешности округлений арифметических операций при решении системы ЛАУ (1).

Если небольшие возмущения δA, δf вызывают небольшие возмущения δx, то система ЛАУ (1) называется *хорошо обусловленной*, иначе, если небольшие возмущения δA, δf вызывают большие возмущения δx, то систему ЛАУ (1) называют *плохо обусловленной*.

Наряду с системой (2), рассмотрим систему с возмущённой только правой частью:

$$A\tilde{x} = \tilde{f},\ \ \tilde{f} = f + \delta f,\ \ \tilde{x} = x + \delta x. \tag{3}$$

Определение 1. *Система ЛАУ (1) называется устойчивой по правой части, если при любых f и δf существует независящее от f и δf положительное число $M > 0$, такое что*

$$\|\delta x\| \le M\,\|\delta f\|. \tag{4}$$

Оценка (4) означает непрерывную зависимость решения от правой части, т. е. показывает, что $\|\delta x\| \to 0$ при $\|\delta f\| \to 0$.

Пример 1. *Если* $\det A \neq 0$, *то задача (1) устойчива по правой части.*

<u>*Решение*</u>. ♦ Из (1) и (3) следует уравнение для погрешности: $A(\delta x) = \delta f$, откуда $\delta x = A^{-1}(\delta f)$ $\Rightarrow$

$$\|\delta x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\delta f\|, \tag{5}$$

т. е. выполняется неравенство (4) с константой $M = \left\|A^{-1}\right\|$. ■

Так как

$$\|f\| = \|Ax\| \le \|A\| \|x\|, \tag{6}$$

то, перемножив (5) и (6), получим $\|\delta x\| \, \|f\| = \left\|A^{-1}\delta f\right\| \|Ax\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\delta f\| \|A\| \|x\|$.

Откуда следует:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \left\|A^{-1}\right\| \|A\| \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}. \tag{7}$$

Определение 2. *Число* $\nu(A) = \left\|A^{-1}\right\| \|A\|$ *называется числом обусловленности матрицы A. Оно характеризует степень зависимости относительной погрешности решения от относительной погрешности правой части. Часто для обозначения числа обусловленности используется обозначение* $\mathrm{cond}(A)$.

Для вырожденных матриц $\mathrm{cond}(A) = \infty$. Конкретное значение числа обусловленности зависит от выбора матричной нормы, однако в силу их эквивалентности при практических оценках этим различием можно пренебречь.

Пример 2. *Рассмотрим систему уравнений* $\begin{cases} x_1 + 0{,}99x_2 = 1{,}99, \\ 0{,}99x_1 + 0{,}98x_2 = 1{,}97, \end{cases}$ *для которой, как легко видеть, пара* $(1, 1)$ *является решением. Рассмотрим систему с возмущенной правой частью:* $\begin{cases} \tilde{x}_1 + 0{,}99\tilde{x}_2 = 1{,}989903, \\ 0{,}99\tilde{x}_1 + 0{,}98\tilde{x}_2 = 1{,}970106, \end{cases}$ *для которой решением является пара* $(3, -1{,}0203)$. *Оценить число обусловленности матрицы этой системы.*

Решение. ♦ Так как $\delta f = \begin{pmatrix} -0,000097 \\ 0,000106 \end{pmatrix}$, $\|\delta f\|_2 \approx 10^{-4}\sqrt{2}$, $\|f\|_2 \approx 2\sqrt{2}$, $\|x\|_2 = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\delta x = \begin{pmatrix} 2,0000 \\ -2,0203 \end{pmatrix}$, $\|\delta x\|_2 \approx 2\sqrt{2}$, $\dfrac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \approx 2$, $\dfrac{\|\delta f\|_2}{\|f\|_2} \approx \dfrac{1}{2}10^{-4}$, то $\dfrac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \le 40000\dfrac{\|\delta f\|_2}{\|f\|_2}$. Т. е. получаем $\nu(A) \ge 4\cdot 10^4$. ■

Пример 3. *Рассмотрим задачу вычисления апостериорных оценок приближенного решения $\tilde{x}$ системы $Ax = f$, где A – невырожденная матрица и $f \ne 0$. «Естественная» проверка того, насколько хорошо $\tilde{x}$ удовлетворяет системе $Ax = f$, состоит в анализе вектора невязки $r = f - A\tilde{x}$. Если $r = 0$, то $\tilde{x}$ есть точное решение системы $Ax = f$. Если же вектор невязки r мал, то можно ли ожидать, что вектор $\tilde{x}$ близок к искомому решению системы $Ax = f$?*

Решение. ♦ Домножим равенство $r = f - A\tilde{x}$ слева на A^{-1}, получим: $A^{-1}r = A^{-1}f - A^{-1}A\tilde{x} \iff A^{-1}r = x - \tilde{x}$. Значит

$$\| x-\tilde{x} \| \le \| A^{-1} \| \| r \|. \tag{8}$$

Из $f = Ax$ следует, что $\| f \| = \| Ax \| \le \| A \| \| x \|$, т. е.

$$\| x \| \ge \frac{\| f \|}{\| A \|}. \tag{9}$$

Поделим неравенство (8) на неравенство (9), получим оценку $\dfrac{\| x-\tilde{x} \|}{\| x \|} \le \| A^{-1} \| \| A \| \dfrac{\| r \|}{\| f \|} = \mathrm{cond}(A)\dfrac{\| r \|}{\| f \|} = \mathrm{cond}(A)\dfrac{\| f - A\tilde{x} \|}{\| f \|}$. Отсюда видно, что если матрица A плохо обусловлена, то даже очень маленькая невязка не может гарантировать малость относительной ошибки $\tilde{x}$. Более того, может оказаться, что достаточно точное решение будет иметь большую невязку. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим два примера: 1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1,00001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 2,00001 \\ 2 \end{pmatrix}$ и 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1,00001 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Точным решением первой системы является вектор $x = (1,1)^T$, при этом вектор $\tilde{x} = (2,0)^T$, который никак нельзя назвать близким к x даёт маленькую невязку $r=(10^{-5},0)^T$. Точным решением второй системы является вектор $x=(-100000,100000)^T$, вектор же $\tilde{x}=(-100001,100000)^T$ достаточно близкий к x в смысле малости относительной погрешности, даёт большую невязку $r=(0,1)^T$. ■

Теоретические задачи

1. Докажите следующие три свойства числа обусловленности $\nu(A)$ матрицы A: 1) $\nu(A)\geq 1$; 2) $\nu(A)\geq\left|\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}\right|$, где $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(A)$ – соответственно наибольшее и наименьшее по модулю собственные значения матрицы A; 3) $\nu(A\cdot B)\leq\nu(A)\cdot\nu(B)$.

2. Пусть E – единичная матрица, δE – матрица, такая, что $\|\delta E\|<1$. Доказать, что матрица $E-\delta E$ невырожденная и выполняется оценка $\left\|(E-\delta E)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{1-\|\delta E\|}$.

3. Пусть A – невырожденная матрица, δA – матрица, такая, что $\left\|A^{-1}\delta A\right\|<1$. Доказать, что матрица $A+\delta A$ невырожденная и получить оценку $\left\|(A+\delta A)^{-1}\right\|\leq\frac{\left\|A^{-1}\right\|}{1-\left\|A^{-1}\delta A\right\|}$.

4. Пусть E – единичная матрица, δE – матрица, такая, что $\|\delta E\|<1$. Получить оценку отклонения матрицы $(E-\delta E)^{-1}$ от матрицы E.

5. Пусть A – невырожденная матрица, δA – матрица, такая, что $\left\|A^{-1}\delta A\right\|<1$. Получить оценку отклонения матрицы $(A+\delta A)^{-1}$ от матрицы A^{-1}.

6. Доказать, что число обусловленности $\operatorname{cond}(A)$ матрицы A не меняется при умножении матрицы A на ненулевое число k, т. е. $\operatorname{cond}(A)=\operatorname{cond}(kA)$, $\forall\, k\in R\setminus\{0\}$.

7. Доказать, что для ортогональной матрицы Q число обусловленности $\operatorname{cond}_2(Q)=1$.

8. Можно ли утверждать, что если определитель матрицы мал, то матрица плохо обусловлена? Можно ли утверждать, что если матрица плохо обусловлена, то её определитель мал?

9. Вычислить, при каких значениях $\alpha \in R$ матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 17 \end{bmatrix}$ плохо обусловлена?

10. Для системы $Ax = f$ с матрицей A второго порядка дайте геометрическую трактовку числа обусловленности. Дайте геометрическую интерпретацию влияния возмущения матрицы системы A и правой части f на решение системы.

11. Найти решение двух систем с близкими коэффициентами: $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ x + 3.00001y = 4.00001, \end{cases}$ $\begin{cases} x + 3y = 4, \\ x + 2.99999y = 4.00001 \end{cases}$ и объяснить результат.

12. Пусть $A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix}$. Доказать, что данная матрица имеет наибольшее число обусловленности $\mathrm{cond}_2(A)$ из всех невырожденных матриц второго порядка, элементами которых являются положительные целые числа, меньшие или равные 100.

13. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$ порядка n оценить число обусловленности $\mathrm{cond}_2(A)$.

14. Матрица Уилкинсона $A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 20 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 20 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет наименьшее по модулю собственное значение, равное 1. Как оно изменится в результате возмущения первого элемента последней строки на величину $\varepsilon = 20^{-19} \cdot 20! \approx 5 \cdot 10^{-7}$?

15. Пусть A – квадратная матрица порядка n с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} p, & i = j, \\ q, & i = j - 1, \\ 0, & \text{для остальных индексов.} \end{cases}$$

Вычислить матрицу A^{-1} и показать, что при $|q| < |p|$ матрица A хорошо обусловлена, а при $|q| > |p|$ и больших значениях n – плохо обусловлена.

16. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – жорданова клетка порядка n. Вычислить $\operatorname{cond}_\infty(A)$ и оценить возмущение в компоненте x_1 решения системы $Ax = f$, если компонента f_n вектора f возмущена на ε.

17. Пусть матрица A определена как в предыдущей задаче. Выразить явно решение системы $Ax = f$ через правую часть.

Контрольные вопросы

1. Какие системы ЛАУ называются хорошо обусловленными, какие плохо обусловленными?

2. Дайте определение числа обусловленности.

3. Сформулируйте свойства числа обусловленности (см. теоретическую задачу №1).

4. Дайте геометрическую интерпретацию числа обусловленности для системы ЛАУ $Ax = f$ с матрицей A второго порядка.

Литература к лабораторной работе №3: [1, с. 304–315], [2, с. 63–67], [3, с. 28–34], [4, с. 124–126], [5, с. 112–116], [6, с. 213–218], [7, с. 299–304], [8, с. 74–79], [9, с. 35–36, 55–60], [10, с. 138–147].

Литература к теме
"Векторные и матричные нормы. Элементы теории возмущений"

Основная

1. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков*. – М.: Физматлит, Лаборатория Базовых Знаний, 2001.– 632 с.
2. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях / *Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков.* – М: Высшая школа, 2000. – 190 с.
3. *Вержбицкий, В.М.* Основы численных методов / *В.М. Вержбицкий.* – М.: Высшая школа, 2002.– 847 с.
4. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – М.: Наука, 1976. – 303 с.
5. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный* – Мн.: Наука и техника, 1985.– 279 с.
6. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы высшей математики / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – Минск: Выш. ш., 1972. – 584 с.
7. *Мысовских, И.П.* Лекции по методам вычислений / *И.П. Мысовских* – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998.– 472 с.
8. *Самарский, А. А.* Численные методы / *А. А. Самарский, А. В. Гулин*. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Сборник задач по методам вычислений под ред. *П. И. Монастырного*.– М.: Наука, 1994. – 320 с.
10. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева* – 3-е изд., стер.– СПб.: Лань, 2002.– 733 с.

Дополнительная

11. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов.*– 2-е изд.– М.: Наука, 1975. – 632 с.
12. *Березин, И. С.* Методы вычислений / *И. С. Березин, Н. П. Жидков*. В 2 т. – Т. 2 – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
13. *Волков, Е. А.* Численные методы / *Е. А. Волков*. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
14. *Дробышевич, В. И.* Задачи по вычислительной математике / *В. И. Дробышевич, В. П. Дымкиков, Г. С. Ривич.* – М.: Наука, 1980. – 144 с.
15. *Самарский, А. А.* Задачи и упражнения по численным методам / *А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. С. Самарская*. – М.:Эдиториал УРСС, 2000.– 207 с.
16. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / *Л. И. Турчак.* – М.: Наука, 1987. – 320 с.
17. http://www.srcc.msu.su/num_anal – тематический сервер по численному анализу.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛАУ

Численные методы решения систем ЛАУ $Ax = f$ делятся на две группы: прямые и итерационные.

Определение 1. *Метод решения систем ЛАУ называется прямым методом, если он дает точное решение системы в результате выполнения конечного числа арифметических операций в предположении, что исходные данные заданы точно, и вычисления проводятся точно, без ошибок округления.*

К прямым методам относят методы Гаусса, корня квадратного, Крамера и многие другие. Применяются прямые методы для решения систем ЛАУ порядка ста. Сопоставление прямых методов производится по числу арифметических операций (чаще – по асимптотике числа арифметических операций при больших размерностях n) и требуемой компьютерной памяти. Например, метод Крамера требует порядка $O(n!)$ арифметических операций, а метод Гаусса – порядка $O(n^3)$.

Недостатки прямых методов: довольно большой объём арифметических операций и быстрый рост числа арифметических операций с ростом порядка системы; нет механизма уменьшения вычислительной погрешности; применяются к матрицам невысокого порядка. Преимущество прямых методов заключается в том, что они дают точный результат за конечное число операций.

Определение 2. *Метод называется итерационным, если он теоретически дает решение системы ЛАУ как предел последовательности векторов, вычисленных по некоторому правилу, начиная с некоторых начальных приближений к решению системы ЛАУ.*

В итерационных методах задаётся некоторое начальное приближение $x^{(0)} \approx x^*$, и строится ряд последовательных приближений $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}$. Решение системы $Ax = f$ определяется как $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$, где $x^{(k+1)} = F_k(x^{(0)}, x^{(1)}, ..., x^{(k)})$. Здесь F_k – некоторое правило определения очередного приближения. Поскольку для вычисления F_k требуется помнить все предыдущие приближения, то на практике обычно используют более простые правила, для которых требуется запоминать и хранить только m последних приближений: $x^{(k+1)} = F_k(x^{(k-(m-1))}, ..., x^{(k-1)}, x^{(k)})$. С целью экономии памяти m берут небольшим, обычно $m = 1$, $m = 2$. Правила вычисления очередного приближения решения, которое основывается на использовании последних m приближений, называют методом m-го порядка или $m+1$-слойным методом. Если функция F_k – линейна относительно приближений $x^{(k-(m-1))},\ldots,x^{(k-1)},x^{(k)}$, то алгоритм называют *линейным*, если функция F_k не зависит от k, т.е $x^{(k+1)}=F(x^{(k-(m-1))},\ldots,x^{(k-1)},x^{(k)})$, то метод называется *стационарным*. Итерационные методы (или методы последовательных приближений) позволяют даже при условии, что все вычисления производятся без вычислительных погрешностей округления, найти точное решение лишь за бесконечное число шагов, т. е. решение системы $Ax=f$ находится как предел при $k\to\infty$ последовательных приближений $x^{(k)}$, где k – номер итерации.

Поскольку бесконечное число итераций выполнить нельзя, то вычисления останавливаются при выполнении условия $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\varepsilon$, где x^{*} – точное решение системы ЛАУ $Ax=f$, $\varepsilon>0$ – заданная точность вычисления решения. Число итераций $k=k(\varepsilon)$, которое требуется провести для получения заданной точности ε, т. е. для выполнения оценки $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\|\le\varepsilon$, для многих методов можно найти из теоретических рассмотрений.

К итерационным методам относят метод простой итерации, метод Зейделя, различные вариационные методы и многие другие. Итерационные методы сравнивают по числу итераций $k(\varepsilon)$, необходимому для получения решения с точностью ε, и по количеству арифметических операций на одну итерацию.

Итерационные методы решают задачи с матрицами больших размерностей, но их скорость сходимости, как правило, невысокая. Для применения быстросходящихся итерационных методов зачастую требуется наличие одного или нескольких из ниже перечисленных ограничений: наличие ограничения на спектр матрицы; наличие жёстких метрических ограничений на параметры задачи; требование положительной определённости матрицы; наличие определённой структуры матрицы: симметричности, разреженности, ленточности и т.д.

Лабораторная работа № 4.
Метод Гаусса. Схемы метода Гаусса

Схема единственного деления

Рассмотрим систему ЛАУ:

$$Ax = f, \det A \neq 0, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – известная матрица, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}$ – известный вектор правых частей, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – неизвестный вектор, подлежащий определению.

Метод Гаусса решения системы (1) состоит в последовательном исключении неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ из этой системы.

Прямой ход метода Гаусса состоит в последовательном преобразовании расширенной матрицы системы к верхнему треугольному виду путём следующих преобразований: если ведущий элемент k-й строки $a_{kk}^{(k-1)}$ не равен 0, то разделим на него эту строку, затем обнуляем элементы $a_{ik}^{(k-1)}$ в строках, лежащих ниже данной, путем сложения их с k-й строкой, умноженной на $-\dfrac{1}{a_{ik}^{(k-1)}}$. Прямой ход метода Гаусса можно представить следующей схемой:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & f_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n} & f_{n-1} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & f_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & g_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & f_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12}^{(1)} & \cdots & a_{n-1n}^{(1)} & f_{n-1}^{(1)} \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & f_n^{(1)} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} & g_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} & g_2 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & f_3^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & f_n^{(2)} \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & \cdots & c_{1k-1} & \cdots & c_{1n} & g_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & c_{k-1k} & c_{k-1k-1} & g_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & a_{kn}^{(k-1)} & f_k^{(k-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & a_{nn}^{(k-1)} & f_n^{(k-1)} \end{pmatrix} \to \ldots$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & g_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{n-1n} & g_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & g_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, прямой ход метода Гаусса можно выразить следующими формулами:

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \; j = \overline{k+1, n}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$g_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \; k = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, \quad i = \overline{k+1, n}, \; j = \overline{k+1, n}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4}$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} g_k, \; i = \overline{k+1, n}, \tag{5}$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \; f_i^{(0)} = f_i, \; i = \overline{1, n}.$$

Обратный ход метода Гаусса состоит в последовательном вычислении x_i, $i = \overline{n, 1}$, начиная с последнего, по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_n = g_n, \\ x_i = g_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j, \; i = \overline{n-1, 1}. \end{cases} \tag{6}$$

Пример 1. *Так как операции умножения и деления над числами с* *плавающей точкой требуют большего времени, чем операции сложения и вычитания, то посчитаем, сколько операций умножения и деления требуется выполнить в процессе реализации метода Гаусса.*

<u>*Решение*</u>. ♦ Для обратного хода по формулам (6) необходимо $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ операций;

Для прямого хода по формулам

(2) выполняется $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ операций;

(3) совершается n операций;

(4) совершается $(n-1)^2+\cdots+1^2=\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ операций;

(5) совершается $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ операций.

Всего в методе Гаусса получаем $\dfrac{n^3+3n^2-n}{3}=O\left(\dfrac{n^3}{3}\right)$ операций умножения и деления. Т.е порядка $\dfrac{n^2}{3}$ операций умножения и деления требуется для вычисления одного неизвестного, поэтому нецелесообразно применять метод Гаусса для систем с числом неизвестных больше ста. ■

Учитывая особенности компьютерной реализации метода (цикличность выполняемых операций, нецелесообразность вычисления и хранения нулевых элементов нижней треугольной матрицы и единичных диагональных элементов в прямом ходе), запишем алгоритм метода Гаусса решения системы ЛАУ (1) в виде, удобном для компьютерной реализации:

1. для $k=1,2,\dots,\ n$
- **2.** $f_k := f_k / a_{kk}$
- **3.** для $j=k+1,k+2,\dots,\ n$
  - **4.** $a_{kj} := a_{kj} / a_{kk}$
- **5.** для $i=k+1,k+2,\dots,\ n$
  - **6.** $f_i := f_i - a_{ik}\cdot f_k$
  - **7.** для $j=k+1,k+2,\dots,\ n$
    - **8.** $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik}\cdot a_{kj}$

9. $x_n := f_n$

10. для $i=n-1,n-2,\dots,\ 1$

11. $x_i := f_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k$

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу

Если на k-м шаге исключения $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ или $a_{kk}^{(k-1)} \to 0,$ то в алгоритм метода Гаусса можно будет внести следующее изменение: между строками 1 и 2 вставить

1.а. Найти $m \geq k,$ такое, что $|a_{mk}| = \max\limits_{i \geq k} |a_{ik}|.$

1.б. Если $a_{mk} = 0,$ то остановить работу алгоритма, так как решение не единственное, иначе, если $m > k,$ то поменять местами f_k и $f_m,$ a_{kj} и a_{mj} при всех $j = k, k+1, ..., n.$

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу эквивалентен применению обычного метода исключения Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация уравнений.

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке эквивалентен применению обычного метода исключения Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения проводится соответствующая перенумерация неизвестных. Для реализации этого алгоритма требуется дополнительная память для хранения вектора перестановок. Для реализации выбора ведущего элемента по строке в алгоритм метода Гаусса надо будет внести следующее изменения:

В начале работы алгоритма ввести вектор перестановок p.

0. $p := (1, 2, ..., n).$

Между строками 1 и 2 вставить

1.а. Найти $m \geq k,$ такое, что $|a_{km}| = \max\limits_{j \geq k} |a_{kj}|.$

1.б. Если $a_{km} = 0,$ то остановить работу алгоритма, так как решение не единственное, иначе, если $m > k,$ то поменять местами a_{ik} и a_{im} при всех $i = 1, 2, ..., n$ и в векторе перестановок p поменять местами p_k и $p_m.$

После окончания работы алгоритма вставить строку

12. Используя вектор перестановок $p,$ произвести обратную перестановку координат в вычисленном решении $x.$

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице

Суть метода состоит в поиске на k-м шаге наибольшего элемента во всей оставшейся части матрицы ниже и правее элемента $a_{kk}^{(k-1)}$ с последующей перестановкой строк и (или) столбцов матрицы, чтобы наибольший элемент стал на место $a_{kk}^{(k-1)}$.

Расчётное задание

1. Для нечётного варианта задания написать программу, реализующую метод Гаусса с выбором ведущего элемента по строке, для чётного варианта задания – метод Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице.

2. По схеме единственного деления метода Гаусса решить систему ЛАУ $Ax = f$ при $n \in \{10,\ 50,\ 100,\ 150,\ 200,\ 300\}$, используя символьные вычисления выбранного вами пакета (матрица A и правая часть f определяются в соответствии с номером варианта задания из табл. 8). Результаты эксперимента представить в виде табл. 1.

Таблица 1

n	10	50	100	150	200	300
t						
$\\|r\\|$						

где n – размерность матрицы, t – время счёта (для пакета Mathematica использовать функцию `Timing[expr]`), $\|r\|$ – норма вектора невязки $r = Ax^* - f$, x^* – найденное решение.

Обоснуйте полученные значения вектора-невязки.

3. Вычислите следующие отношения (см. табл. 2):

Таблица 2

$\dfrac{t_{n_i}}{t_{n_j}}$	$\dfrac{t_{50}}{t_{10}}$	$\dfrac{t_{100}}{t_{10}}$	$\dfrac{t_{150}}{t_{10}}$	$\dfrac{t_{200}}{t_{10}}$	$\dfrac{t_{300}}{t_{10}}$	$\dfrac{t_{100}}{t_{50}}$
$\left(\dfrac{n_i}{n_j}\right)^3$	$\left(\dfrac{50}{10}\right)^3$	$\left(\dfrac{100}{10}\right)^3$	$\left(\dfrac{150}{10}\right)^3$	$\left(\dfrac{200}{10}\right)^3$	$\left(\dfrac{300}{10}\right)^3$	$\left(\dfrac{100}{50}\right)^3$

$\dfrac{t_{n_i}}{t_{n_j}}$	$\dfrac{t_{150}}{t_{50}}$	$\dfrac{t_{200}}{t_{50}}$	$\dfrac{t_{300}}{t_{50}}$	$\dfrac{t_{200}}{t_{150}}$	$\dfrac{t_{300}}{t_{150}}$	$\dfrac{t_{300}}{t_{200}}$
$\left(\dfrac{n_i}{n_j}\right)^3$	$\left(\dfrac{150}{50}\right)^3$	$\left(\dfrac{200}{50}\right)^3$	$\left(\dfrac{300}{50}\right)^3$	$\left(\dfrac{200}{150}\right)^3$	$\left(\dfrac{300}{150}\right)^3$	$\left(\dfrac{300}{200}\right)^3$

где t_{n_i}, $n_i \in \{10,\ 50,\ 100,\ 150,\ 200,\ 300\}$ – время решения задачи с матрицей порядка n_i. Проверьте выполняется ли соотношение $\dfrac{t_{n_i}}{t_{n_j}} \approx \left(\dfrac{n_i}{n_j}\right)^3$.

4. В данном пункте задания произвести расчёты в режиме с плавающей точкой (не использовать символьные вычисления). В соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, решить систему ЛАУ $Ax = f$, используя различные схемы метода Гаусса: а) схему единственного деления; б) схему с выбором ведущего элемента по столбцу; в) в зависимости от варианта задания схему с выбором ведущего элемента по строке (для нечётного варианта задания) или по всей матрице (для чётного варианта задания). Матрица A и правая часть f определяются в соответствии с номером варианта задания из табл. 8. Сравнить норму вектора невязки $r = f - Ax$ для всех трёх схем метода Гаусса и норму вектора невязки для решения, полученного стандартной функцией решения систем ЛАУ выбранного математического пакета (например, функцией `LinearSolve` для пакета Mathematica). Вычисления и сопоставления проводить для размерности матрицы $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$. Результаты представить в виде табл. 3.

Таблица 3

	$\lVert r \rVert$ для различных n					
Метод решения	4	6	8	10	12	14
Схема единственного деления						
Схема с выбором ведущего элемента по столбцу						
Схема с выбором ведущего элемента по строке (для нечётного варианта задания) или по всей матрице (для чётного варианта задания)						
Стандартная функция решения систем ЛАУ выбранного математического пакета						

Можно ли судить по значениям невязки о значении погрешности вычисленного решения? Сделать выводы.

5. Рассмотреть систему ЛАУ $Ax = f$, где матрица A, определяется в соответствии с заданием, а элементы вектора правых частей системы f_i полагаются равными сумме элементов соответствующих строк матрицы A: $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, что обеспечивает точное решение $x_i = 1$, $i = \overline{1, n}$.

а) Решить построенную систему ЛАУ для $n \in \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, используя те же схемы метода Гаусса, что и в пункте 4 данного задания, и стандартную функцию решения систем ЛАУ выбранного математического пакета (например, `LinearSolve` для пакета Mathematica).

б) Вычислить значение числа обусловленности матрицы A по определению (можно воспользоваться стандартными функциями пакета). Результаты представить в виде табл. 4.

Таблица 4

	n					
Число обусловленности	4	6	8	10	12	14
$\mathrm{cond}_\infty(A)$						
$\mathrm{cond}_1(A)$						
$\mathrm{cond}_2(A)$						

в) Определить теоретическое значение относительной погрешности решения системы, используя вычисленное в пункте б) число обусловленности и считая возмущение правой части равным погрешности представления числа в ЭВМ (выбор нормы определяется требованиями преподавателя). Результаты представить в виде табл. 5.

Таблица 5

	n					
Теоретическое значение относительной погрешности решения системы	4	6	8	10	12	14
$\dfrac{\lVert \delta x \rVert}{\lVert x \rVert}$						

г) Определить экспериментальное значение относительной погрешности решения системы (выбор нормы определяется требованиями преподавателя). Результаты представить в виде табл. 6.

Таблица 6

	n					
Экспериментальное значение относительной погрешности решения системы	4	6	8	10	12	14
$\dfrac{\lVert \delta x \rVert}{\lVert x \rVert}$						

Сравнить экспериментальное значение относительной погрешности с теоретическим значением относительной погрешности решения системы, полученным в пункте в).

д) Смоделировать возмущение правой части системы, увеличив значение правой части уравнения системы из пункта 3 данного расчётного задания последовательно на величину, не превышающую 0,01%, 0,1%, 1%. Повторить пункты в), г) для систем с возмущенной правой частью. Результаты представить в виде табл. 7.

Таблица 7

		n					
δf	$\dfrac{\lVert \delta x \rVert}{\lVert x \rVert}$	4	6	8	10	12	14
0,01%	теоретическое значение относительной погрешности решения системы						
	экспериментальное значение относительной погрешности решения системы						
0,1%	теоретическое значение относительной погрешности решения системы						
	экспериментальное значение относительной погрешности решения системы						
1%	теоретическое значение относительной погрешности решения системы						
	экспериментальное значение относительной погрешности решения системы						

Сделать вывод о зависимости относительной погрешности от возмущения правой части, числа обусловленности и порядка системы.

Таблица 8

№	A	f
1	$a_{ij}=\begin{cases}1+\dfrac{1}{j}, & i=j,\\ (n-j)^2, & i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=\dfrac{1}{i},\ i=\overline{1,n}.$
2	$a_{ij}=\begin{cases}1+\dfrac{1}{j}, & i=j,\\ (2n-i-j)^2, & i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=\begin{cases}n, & i=1,\\ 1, & i=\overline{2,n}.\end{cases}$
3	$a_{ij}=\dfrac{1}{i+j+1},\ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=\dfrac{1}{i},\ i=\overline{1,n}.$
4	$a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1},\ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=i,\ i=\overline{1,n}.$
5	$a_{ij}=\dfrac{100}{i+j-1},\ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=i+\dfrac{1}{i},\ i=\overline{1,n}.$
6	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{n}{i+j-1}, & i=j,\\ \dfrac{n}{i+j+1}, & i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=n-i,\ i=\overline{1,n}.$
7	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{n}{i^2+j-1}, & i=j,\\ \dfrac{n}{i+j+1}, & i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=i,\ i=\overline{1,n}.$
8	$a_{ij}=\dfrac{(i+j)^2}{i^2+j^2-1},\ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=n-i,\ i=\overline{1,n}.$
9	$a_{ij}=\dfrac{(i+j)^3}{i^2+j^2},\ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=\dfrac{1}{n-i+1},\ i=\overline{1,n}.$

№	A	f
10	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2i}, \ i=j,\\ \dfrac{2i}{(i+j)^2}, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=i-n, \ i=\overline{1,n}.$
11	$a_{ij}=\begin{cases}i+1, \ i=j,\\ 1 \ i>j,\\ 2 \ i<j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=\dfrac{1}{i}, \ i=\overline{1,n}.$
12	$a_{ij}=1+\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^j, \ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=i, \ i=\overline{1,n}.$
13	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^i}{2i}, \ i=j,\\ \dfrac{(-1)^i\,2i}{(i+j)^2}, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=i-n, \ i=\overline{1,n}.$
14	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2i}, \ i=j,\\ \dfrac{i^3+j^3}{i^2j^2}, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=i, \ i=\overline{1,n}.$
15	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{n}{2i}, \ i=j,\\ \dfrac{(-1)^{i+j}n}{i+j}, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=\dfrac{n}{i}, \ i=\overline{1,n}.$
16	$a_{ij}=\begin{cases}\dfrac{n+i}{2i}, \ i=j,\\ \dfrac{n+i}{i+j}, \ i\neq j, \ i,j=\overline{1,n}.\end{cases}$	$f_i=n-\dfrac{n}{i}, \ i=\overline{1,n}.$
17	$a_{ij}=1+\left(1-\dfrac{1}{i}\right)^j, \ i,j=\overline{1,n}.$	$f_i=\dfrac{1}{i}, \ i=\overline{1,n}.$

Контрольные вопросы

1. Какие методы решения систем ЛАУ называют прямыми?

2. Назовите основные преимущества и недостатки прямых методов.

3. По каким критериям сравнивают прямые методы?

4. В чем состоит сущность метода Гаусса для решения систем ЛАУ?

5. Оцените количество арифметических операций, необходимое для реализации прямого и обратного хода в методе Гаусса.

6. Как определить относительную погрешность решения систем ЛАУ при вычислениях на ЭВМ?

7. Дайте определение числа обусловленности. Приведите примеры плохо и хорошо обусловленных матриц.

Литература к лабораторной работе №4: [1, с. 253–258], [3, с. 52–59], [4, с. 91–96], [5, с. 58–65], [6, с. 150–162], [7, с. 305–312], [8, с. 49–67, 79–81], [9, с. 27–38], [10, с. 147–157].

Лабораторная работа № 5. Применение метода Гаусса к вычислению определителей и обращению матриц

Так как выполняемые в прямом ходе метода Гаусса преобразования не изменяют определитель матрицы A, то определитель матрицы A будет равен произведению ведущих (диагональных) элементов на всех шагах исключения, т. е. $\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$.

Так как при реализации алгоритма метода Гаусса мы не вычисляли и не хранили единичную диагональ верхней треугольной матрицы, а оставляли на диагонали ведущие элементы, то при необходимости вычисления определителя $\det A$ дополнительно к решению системы ЛАУ следует дополнить алгоритм метода Гаусса всего одной строкой:

12. $\det A = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Если метод Гаусса используется только для вычисления определителя, то из алгоритма его реализации необходимо удалить строки 6, 9–11 и добавить строку 12.

При использовании метода Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу (или строке, или всей матрице) надо учитывать чётность числа произведенных перестановок. Это означает, что при вычислении $\det A$

методом Гаусса с выбором ведущего элемента вместо строки 12 необходимо вставить строку 12*:

12*. $\det A = (-1)^t \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$, где t – чётность перестановок строк и (или) столбцов.

Для получения матрицы A^{-1}, обратной к матрице A, можно воспользоваться тем фактом, что обратная матрица будет являться решением матричного уравнения

$$AX = E, \tag{1}$$

где E – единичная матрица.

Представим искомую матрицу X как набор вектор-столбцов, а единичную матрицу E как набор единичных векторов (ортов):

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix},\ \ldots,\ x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix};\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное уравнение (1) можно представить в виде эквивалентной системы не связанных между собой векторно-матричных уравнений

$$Ax_1 = e_1,\ Ax_2 = e_2,\ \ldots,\ Ax_n = e_n. \tag{2}$$

Каждое из уравнений (2) может быть решено методом Гаусса. Так как все системы ЛАУ (2) имеют одну и ту же матрицу коэффициентов, то наиболее трудоёмкая часть метода Гаусса – приведение матрицы системы к треугольному виду – общая для всех систем (2). Значит, для обращения матрицы целесообразно не просто применить последовательно n раз метод Гаусса к системам (2), а немного подкорректировать строки 2, 6, 9 и 11, повторив их столько раз, чтобы в роли вектора f оказались все единичные векторы $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$. Тогда, в результате завершения работы алгоритма, будут получаться столбец за столбцом элементы обратной матрицы $X = A^{-1}$.

Расчётное задание

1. Для нечётного варианта задания написать программу, реализующую вычисление определителя методом Гаусса с выбором ведущего элемента по строке, для чётного варианта задания – методом Гаусса с выбором ведущего элемента по всей матрице.

2. В соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, вычислить определитель матрицы A, используя в зависимости от варианта задания схему с выбором ведущего элемента по строке (для нечётного варианта задания) или по всей матрице (для чётного варианта задания). Вычисления провести в режиме числовых вычислений (не в символьном виде) для $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$. Сравнить полученное значение определителя со значением, возвращаемым стандартной функцией пакета (например, `Det[A]` для пакета Mathematica). Матрицу A взять из лабораторной №4.

3. Вычислить обратную матрицу для матрицы A. Оценить относительную погрешность вычисленной обратной матрицы.

Контрольные вопросы

1. Что такое определитель матрицы?

2. Как, используя метод Гаусса, вычислить определитель матрицы?

3. В чём состоит адаптация метода Гаусса для вычисления обратной матрицы?

Литература к лабораторной работе №5: [3, с. 59–62], [4, с. 96–99], [5, с. 69–79], [6, с. 162–173], [7, с. 312–313], [8, с. 67–69], [9, с. 27–38], [10, с. 157–160].

Лабораторная работа № 6. Метод квадратного корня

Рассмотрим систему ЛАУ:

$$Ax = f, \det A \neq 0, \tag{1}$$

где $A = A^*$ – известная эрмитова матрица порядка n, f – известный вектор, x – неизвестный вектор, подлежащий определению.

Суть метода состоит в разложении матрицы A на произведение

$$A = S^* DS, \tag{2}$$

где S – верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, S^* – эрмитово сопряжённая к ней (транспонированная в вещественном случае), D – диагональная матрица, на диагонали которой находятся только числа из множества $\{-1, 1\}$.

Если разложение (2) получено, то решение системы (1) сводится к последовательному решению двух систем ЛАУ с треугольными матрицами: $S^* Dy = f$, $Sx = y$.

Получим расчётные формулы разложения (2). Пусть $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^n$, тогда $S^* = \{\overline{s_{ji}}\}_{i,j=1}^n$. Элемент матрицы $S^* D$, имеющий индексы (i, j), равен $(S^* D)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S^*)_{ik} (D)_{kj} = \overline{s_{ki}} d_{kk}$. Значит $((S^* D)S)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (S^* D)_{ik} (S)_{kj} = = \sum_{k=1}^{n} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj}$. Учитывая условие (2), получим $\sum_{k=1}^{n} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}$. Представим левую часть в виде суммы трёх слагаемых: $\sum_{k=1}^{i-1} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj} + \overline{s_{ii}} d_{ii} s_{ij} + \sum_{k=i+1}^{n} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}$. Так как $\overline{s_{ki}} = 0$ для всех $k > i$, то получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{i-1} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj} + \overline{s_{ii}} d_{ii} s_{ij} = a_{ij}, \ i \le j. \tag{3}$$

Из (3) при $i = j$ получим

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} + |s_{ii}|^2 d_{ii}. \tag{4}$$

Значит из (4) можно получить диагональные элементы

$$d_{ii} = sign\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right), \tag{5}$$

$$s_{ii} = \sqrt{\left| a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |s_{ki}|^2 d_{kk} \right|}. \tag{6}$$

Из (3) при $i < j$ получим

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \overline{s_{ki}} d_{kk} s_{kj}}{\overline{s_{ii}} d_{ii}}. \tag{7}$$

В обратном ходе, решая систему $S^* Dy = f$ с нижней треугольной матрицей $S^* D$, найдём вспомогательный вектор y:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{f_1}{\overline{s_{11}} d_{11}}, \\ y_i = \dfrac{f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \overline{s_{ji}} y_j}{\overline{s_{ii}} d_{ii}}, \quad i = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{8}$$

Затем, решая систему $Sx = y$ с верхней треугольной матрицей S,, вычислим искомое решение x по формулам:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{s_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} s_{ij} x_j}{s_{ii}}, \quad i = \overline{n-1, 1}. \end{cases} \tag{9}$$

Так как при компьютерной реализации алгоритма корня квадратного для хранения диагональной матрицы D достаточно хранить только вектор-диагональ матрицы D, то запишем алгоритм метода корня квадратного для решения системы ЛАУ с симметричной матрицей A в виде, удобном для компьютерной реализации:

По объему операций метод квадратного корня приблизительно в два раза эффективнее метода Гаусса. Положительным свойством метода корня квадратного является сохранение в матрице S структуры матрицы A. Если матрица A является разреженной, то S – также будет разреженной.

Расчётное задание

Рассмотрим систему ЛАУ $Ax = f$, где $a_{ij} = \dfrac{1}{i + j + v}$, $i, j = \overline{1, n}$, v – номер варианта, $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$, а правая часть f определяется таким образом, чтобы вектор $x = a + (b - a)Random$ являлся точным решением системы $Ax = f$ (значения чисел a и b определяются преподавателем, при проверке работы программы, значения вектора x сохранить для вычисления погрешности решения).

1. Используя метод корня квадратного, решить построенную тестовую систему ЛАУ и а) вычислить абсолютную и относительную погрешность решения; б) вычислить норму невязки $\| r \| = \| f - Ax \|$ и $\dfrac{\| r \|}{\| f \|}$. Составить таблицу зависимости относительной погрешности и относительной невязки от размерности $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$.

2. В соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, напишите программу, вычисляющую обратную матрицу для симметричной положительно определённой матрицы с использованием разложения $A = SS^T$, где S – нижняя треугольная матрица.

3. Знание обратной матрицы позволяет находить число обусловленности $\mathrm{cond}(A) = \left\| A^{-1} \right\| \left\| A \right\|$. Составить таблицу чисел обусловленности матрицы A при $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14\}$ для норм матриц, согласованных с кубической, октаэдрической и эвклидовой нормами векторов.

4. Подсчитайте число операций умножения, деления и извлечения корня квадратного в методе корня квадратного.

5. Пусть для симметричной положительно определённой матрицы A получено разложение $A = SS^T$, где S – нижняя треугольная матрица. Как связаны числа обусловленности $\mathrm{cond}_2(A)$ и $\mathrm{cond}_2(S)$?

Контрольные вопросы

1. Какие ограничения накладываются на матрицу A в методе корня квадратного?

2. Как изменится алгоритм корня квадратного для симметричной положительно определённой матрицы?

3. Каково число операций в методе корня квадратного?

4. Опишите основные преимущества и недостатки метода корня квадратного.

Литература к лабораторной работе №6: [1, с. 259–260], [3, с. 72–74], [4, с. 99–101], [5, с. 80–86], [6, с. 174–180], [7, с. 315–318], [8, с. 69–73], [9, с. 38–42], [10, с. 165–168].

Лабораторная работа № 7.
Явный метод простой итерации

Рассмотрим систему ЛАУ

$$Ax = f,\ \det(A) \neq 0. \tag{1}$$

Преобразуем исходное уравнение (1), для этого домножим обе части (1) на невырожденную матрицу $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}$: $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$. К левой части добавим и вычтем x:

$$x - x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f \quad \Rightarrow\ x = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f.$$

Обозначим $H_k = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)$, $\varphi_k = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$ и получим так называемый явный нестационарный двухслойный метод простой итерации: $x^{(k+1)} = H_k x^{(k)} + \varphi_k$. Если $B_{k+1} = B$ и $\tau_{k+1} = \tau$, то получим явный стационарный двухслойный метод простой итерации, который имеет вид:

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + \varphi. \tag{2}$$

Далее будем рассматривать явный стационарный метод простой итерации. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации (2) при любом начальном векторе $x^{(0)}$ к решению x^* системы $x = Hx + \varphi$ является требование, чтобы все собственные значения матрицы H были по модулю меньше единицы: $|\lambda(H)| < 1$.*

Теорема 2. *Для сходимости явного метода простой итерации достаточно, чтобы какая-либо из норм матрицы H была меньше единицы.*

Теорема 3. *Пусть $\|H\| \le q < 1$, тогда для метода простой итерации (2) верны следующие оценки погрешности:*

1) $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\right\|$ *(апостериорная).*

2) $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \frac{q^{k}}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|$ *(априорная).*

Априорная оценка из теоремы 3 позволяет заранее подсчитать число итераций k, достаточное для получения решения x^{*} с заданной точностью при выбранном начальном приближении $x^{(0)}$. Для этого необходимо найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{q^{k}}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\| \le \varepsilon$ относительно переменной k. Апостериорной же оценкой удобно пользоваться непосредственно в процессе вычислений и останавливать вычислительный процесс, как только выполниться неравенство $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| \le \frac{1-q}{q}\cdot\varepsilon$. Отметим, что из выполнения неравенства $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| \le \varepsilon$ будет гарантированно следовать выполнение неравенства $\left\|x^{(k)}-x^{*}\right\| \le \varepsilon$ только в том случае, когда $\|H\| \le q \le 0{,}5$. На практике вычисления по формуле (2) прекращают, когда $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| < \varepsilon$ (для $\|H\| \le 0{,}5$), или когда $\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \frac{1-\|H\|}{\|H\|}\cdot\varepsilon$, (для $\|H\| \approx 1$).

Запишем алгоритм явного метода простой итерации решения системы ЛАУ $x = Hx + \varphi$ в виде, удобном для компьютерной реализации:

1. $q := \|H\|$

2. $xs := \varphi$

3. $xn := H \cdot xs + \varphi$

4. пока $\frac{q}{1-q}\cdot\|xn - xs\| \ge \varepsilon$

  5. $xs := xn$

  6. $xn := H \cdot xs + \varphi$

7. Вернуть xn

Достоинства явного метода простой итерации: самоисправляемость; простота реализации на компьютере; возможность применения для систем ЛАУ больших размерностей с разреженными матрицами.

Пример 1. *Найти все значениях* α, β, *при которых сходится метод простой итерации* $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, *где* $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

<u>*Решение*</u>. ♦ Согласно теореме 1, для сходимости метода простой итерации необходимо и достаточно, что бы $|\lambda(B)| < 1$. Составим характеристический многочлен матрицы B:

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta & \beta \\ \beta & \alpha-\lambda & 0 \\ \beta & 0 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)^3 - 2\beta^2(\alpha-\lambda) =$$

$$= (\alpha-\lambda)\Big((\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2\Big) = (\alpha-\lambda)(\alpha-\lambda-\sqrt{2}\beta)(\alpha-\lambda+\sqrt{2}\beta) = 0.$$

Значит для сходимости метода простой итерации необходимо и достаточно, что бы $|\alpha| < 1$, $\left|\alpha \pm \sqrt{2}\beta\right| < 1$. ■

Метод Якоби для матрицы с диагональным преобладанием

Определение 1. *Матрица* A *называется матрицей с диагональным преобладанием по строкам, если выполняется* $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $i = \overline{1,n}$. *Матрица* A *называется матрицей с диагональным преобладанием по столбцам, если выполняется* $|a_{jj}| > \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$, $j = \overline{1,n}$.

Пусть матрица A является матрицей с диагональным преобладанием. Представим матрицу A в виде $A = D + A - D$, где $D = \mathrm{diag}\left[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right]$. Тогда систему $Ax = f$ можно представить в эквивалентном виде $Dx = (D - A)x + f$, и можно предложить следующий итерационный процесс:

$$Dx^{(k+1)} = (D - A)x^{(k)} + f. \qquad (3)$$

Итерационный процесс (3) называют методом Якоби. Метод Якоби можно получить из общего вида двухслойных итерационных схем $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} = -(Ax^{(k)} - f)$ при $B = D$ и $\tau = 1$. Метод Якоби можно записать также в явном виде: $x^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)x^{(k)} + D^{-1}f$. Введя новые обозначения $H = D^{-1}(D-A)$, $\varphi = D^{-1}f$, получим явную форму метода Якоби

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + \varphi. \tag{4}$$

Теоретические задачи

1. Исследовать сходимость метода $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ простой итерации, где $B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & \dots & 1/2^n & 1/2^{n+1} \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/8 & \dots & 1/2^{n-1} & 1/2^n \\ 1/8 & 1/4 & 0 & 1/4 & \dots & 1/2^{n-2} & 1/2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1/2^{n+1} & 1/2^n & 1/2^{n-1} & \dots & \dots & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Пусть матрица B в методе $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$ имеет вид $B = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $0 < \alpha, \beta < 1$. Показать, что величина ошибки $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ в кубической норме начинает монотонно убывать лишь с некоторого номера итерации N. Оценить N при $\alpha = \beta \approx 1$.

3. Показать, что для системы ЛАУ $Ax = f$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 4{,}8 \end{bmatrix}$, метод $x^{(k+1)} = \left(E - \tau A\right)x^{(k)} + \tau f$ сходится для любого начального приближения при $0 < \tau < 0{,}4$.

4. Найти все значения α и β, при которых сходится метод простой итерации $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, где $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

5. Найти все значения α и β, при которых сходится метод простой итерации $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, где $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5}/2 \\ \sqrt{5}/2 & 1 \end{pmatrix}$. Написать сходящийся метод простой итерации. Найти оптимальный шаг τ.

7. Пусть элементы матрицы B имеют вид $b_{kj} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-|k-j|}$. Доказать, что система $x = Bx + g$ имеет единственное решение, и метод простой итерации сходится при любом начальном приближении.

8. Найти область сходимости метода простой итерации $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, где $B = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$.

9. Найти область сходимости метода простой итерации $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, где $B = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$.

10. Пусть 1, 4, ..., 100^2 – собственные числа матрицы A. И пусть числа в ЭВМ представимы до 10^{18}. Показать, что процесс $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\left(Ax^{(k)} - b\right)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ в общем случае не может быть реализован на ЭВМ.

11. Пусть $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ -1/12 & 1 \end{bmatrix}$, а B_1 и B_2 – соответствующие этим матрицам операторы перехода в итерационном методе Якоби. Показать, что для спектральных радиусов верно неравенство $\rho(B_1) > \rho(B_2)$, и тем самым опровергнуть мнение о том, что усиление диагонального преобладания влечёт за собой более быструю сходимость метода Якоби.

12. Докажите теорему Гершгорина: Все собственные значения матрицы A принадлежат объединению кругов комплексной плоскости $|z - a_{ii}| \le \sum\limits_{j \ne i} |a_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$.

13. Доказать, что у матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 5 \end{pmatrix}$ все собственные значения вещественны. Найти интервалы, которым принадлежат собственные числа.

14. Найти область сходимости метода Якоби для систем $Ax = f$ с матрицами вида а) $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, в) $A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

15. Докажите утверждение: Если матрица A является матрицей с диагональным преобладанием по строкам, то метод Якоби (4) сходится, и кубическая норма $\| H \|_{\mathrm{I}} < 1$.

16. Докажите утверждение: Если матрица A является матрицей с диагональным преобладанием по столбцам, то метод Якоби (4) сходится.

17. Пусть собственные значения матрицы A таковы, что $\lambda_1 \approx -1$, $\lambda_k \in [1,\ 5]$ для всех $k > 1$. Написать сходящийся итерационный процесс для системы $Ax = f$.

18. Предположим, что некоторая $n \times n$-система вида $x = Hx + \varphi$ с $\| H \| \approx 0{,}5$ решается методом простых итераций с уровнем абсолютных погрешностей арифметических операций порядка 10^{-6}. Допустим, что при этом $\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\| \approx 1$. Каким числом следует ограничить количество итераций, чтобы вычислительная погрешность не стала существенно превышать погрешность метода?

Расчётное задание

Рассмотрим систему ЛАУ $Ax = f$, где матрица A имеет вид $a_{ij} = \dfrac{1}{i + j + v}$, $i, j = \overline{1, n}$, где v – номер варианта, $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$, а правая часть f определяется таким образом, чтобы вектор $x = a + (b - a)Random$ являлся точным решением системы $Ax = f$ (значения чисел a и b определяются преподавателем, при проверке работы программы, значения вектора x сохранить для вычисления погрешности решения).

1. Проверьте, что для симметричной положительно определенной матрицы A метод простой итерации $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau \cdot (Ax^{(k)} - f)$ сходится при $0 < \tau < 2/\|A\|$.

2. Написать программу, решения системы ЛАУ $Ax = f$ методом простой итерации вида $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau \cdot (Ax^{(k)} - f)$.

3. Составить табл. 9 зависимости числа итераций от размерности матрицы $n \in \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$, параметра $\tau \in \left\{ \frac{1}{4\|A\|}, \frac{1}{2\|A\|}, \frac{1}{\|A\|}, \frac{2}{\|A\|} \right\}$, требуемой точности $\varepsilon \in \{10^{-2},\ 10^{-4},\ 10^{-6}\}$:

Таблица 9

τ	ε \ n	4	6	8	10	12
$\frac{1}{4\|A\|}$	10^{-2}					
	10^{-4}					
	10^{-6}					
$\frac{1}{2\|A\|}$	10^{-2}					
	10^{-4}					
	10^{-6}					
$\frac{1}{\|A\|}$	10^{-2}					
	10^{-4}					
	10^{-6}					
$\frac{2}{\|A\|}$	10^{-2}					
	10^{-4}					
	10^{-6}					

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность итерационных методов решения систем ЛАУ?

2. Какие итерационные методы называются явными, неявными, линейными, стационарными?

3. Каковы условия окончания процесса итерации?

4. Дайте определение сходимости итерационного процесса.
5. Каковы условия сходимости методов простой итерации и Якоби?
6. Как оценивается скорость сходимости итерационных методов?

Литература к лабораторной работе №7: [1, с. 265–271], [2, с. 67–76], [3, с. 91–101], [4, с. 105–108], [5, с. 24–36], [6, с. 121–132], [7, с. 318–323], [8, с. 82–84, 88], [9, с. 43–60], [10, с. 204–230].

Лабораторная работа № 8.
Неявный метод простой итерации

Рассмотрим систему ЛАУ

$$Ax = f,\ \det(A) \neq 0. \quad (1)$$

Преобразуем исходное уравнение (1), для этого домножим обе части (1) на невырожденную матрицу $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}$: $\tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$. К левой части добавим и вычтем x: $x - x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}Ax = \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f \quad \Rightarrow$ $x = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)x + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$.

Исходя из последнего равенства, получим явный нестационарный метод простой итерации: $x^{(k+1)} = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)x^{(k)} + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$. Домножим равенство $x^{(k+1)} = (E - \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}A)x^{(k)} + \tau_{k+1}B_{k+1}^{-1}f$ слева на $\dfrac{B_{k+1}}{\tau_{k+1}}$ и получим $\dfrac{B_{k+1}x^{(k+1)}}{\tau_{k+1}} = \dfrac{B_{k+1}x^{(k)}}{\tau_{k+1}} - Ax^{(k)} + f \ \Rightarrow$

$$B_{k+1}\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} = -(Ax^{(k)} - f). \quad (2)$$

Поскольку, зная значение $x^{(k)}$ на k-м шаге, нельзя найти значение приближения на $k+1$-м шаге явно, метод вида (2) называют неявным методом простой итерации.

Для проведения вычислений по формуле (2) необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Вычислить вектор невязки $r_k = Ax^{(k)} - f$.

2. Решая систему $B_{k+1}w^{(k)} = r^{(k)}$, вычислить вектор поправки $w^{(k)}$.

3. Вычислить очередное приближение $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1}w^{(k)}$.

Матрица B_{k+1} выбирается такой, чтобы легко решалась система $Bw^{(k)} = r^{(k)}$. Например $B_{k+1} = E$. С другой стороны, от матицы B_{k+1} требуется, чтобы последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ сходилась к решению x^* как можно быстрее. В этом смысле оптимальна матрица $B_{k+1} = A$. Необходимо найти компромисс между E и A. Матрицу E легко обращать, но метод сходится медленно, матрицу A тяжело обращать, но метод сходится за одну итерацию. Увеличить скорость сходимости можно и за счёт выбора параметра τ_{k+1}. Если выбирать $\tau_{k+1} = \tau$, и $B_{k+1} = B$, то получим стационарный неявный двухслойный метод:

$$B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} = -(Ax^{(k)} - f). \qquad (3)$$

Обычно матрица B, где $\det B \neq 0$, выбирается таким образом, чтобы матрицу B было обращать легче, чем матрицу A. Скорость сходимости метода можно регулировать как за счёт выбора матрицы B, так и за счёт выбора числового параметра τ.

Условия, при которых итерационная последовательность $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, построенная по неявному методу простой итерации (3), сходится к точному решению исходной задачи (1) $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty} \to x^* = A^{-1}f$ изложены в следующей теореме.

Теорема 1. *(Самарского А.А. о сходимости неявного метода простой итерации). Пусть выполняются два условия: 1) $A = A^T > 0$, 2) $B > 0$. Тогда для сходимости неявного метода простой итерации достаточно, чтобы выполнялись условия: α) $2B - \tau A > 0$, β) $\tau A > 0$. Если дополнительно потребовать выполнения условий 3) $B = B^T$ и 4) $AB = BA$, то условия α) и β) будут являться и необходимыми условиями для сходимости неявного метода простой итерации при любом начальным приближением.*

Оценка погрешности в неявном методе простой итерации дана в следующей теореме.

Теорема 2. *(об оценке погрешности неявного метода простой итерации). Пусть матрицы A и B симметричные, положительно определенные матрицы и выполняются условия (α) и (β) теоремы Самарского А.А. о сходимости неявного метода простой итерации. Матрицы*

A, B и числа τ и ρ, $(0<\rho<1)$ согласованы в том смысле, что выполняется двойное неравенство

$$\frac{1-\rho}{\tau}B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau}B, \tag{4}$$

тогда для погрешности $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^{*}$ верна следующая оценка $\left\|\varepsilon^{(k)}\right\|_B \le \rho^k \left\|\varepsilon^{(0)}\right\|_B$.

О выборе оптимального параметра τ в методе простой итерации

Из теоремы 2 об оценке погрешности в неявном методе простой итерации следует, что $\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \xrightarrow[\kappa\to\infty]{} 0$ тем быстрее, чем меньше ρ. Представляет интерес для заданной матрицы A определить свойства матрицы B и выбрать τ так, чтобы значение ρ было как можно меньше.

Пусть матрицы A и B, удовлетворяют всем условиям теоремы Самарского А.А. о сходимости неявного метода простой итерации и связаны неравенством

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \tag{5}$$

где $\gamma_2 \ge \gamma_1 > 0$ и предполагается, что γ_1, γ_2 – оптимальны, т. е. если $\gamma_1 = \gamma_1 + \varepsilon$ и $\gamma_2 = \gamma_2 - \varepsilon$, то неравенство (5) не выполняется.

Будем полагать γ_1, γ_2 известными. Их можно найти из условия $\gamma_1 = \min\lambda(B^{-1}A)$, $\gamma_2 = \max\lambda(B^{-1}A)$ или $\gamma_1 = \min\limits_{x\ne 0}\dfrac{(Ax,x)}{(Bx,x)}$, $\gamma_2 = \max\limits_{x\ne 0}\dfrac{(Ax,x)}{(Bx,x)}$.

Если рассматривается явный метод, т. е. $B=E$, то $\gamma_1 = \min\lambda(A)$, $\gamma_2 = \max\lambda(A)$. Сопоставляя неравенство (5) с неравенством согласования из теоремы Самарского А.А. об оценке погрешности в неявном методе простой итерации (4), получим:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1-\rho}{\tau}, \\ \gamma_2 = \dfrac{1+\rho}{\tau}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau\gamma_1 = 1-\rho, \\ \tau\gamma_2 = 1+\rho, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = \dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \\ \rho = \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}. \end{cases}$$

Значения $\tau_0 = \dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, $\rho_0 = \dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$ называют оптимальными.

Таким образом, можно сказать, что итерационный процесс общего неявного метода простой итерации имеет наибольшую скорость сходимости при $\tau_{\text{опт}} = \dfrac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, и этот процесс можно записать в виде:

$$Bx^{(k+1)} = (B - \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} A)x^{(k)} + \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} f. \tag{6}$$

Последовательность $\left\{ x^{(k)} \right\}_{\kappa=0}^{\infty}$, построенная по (6), стремится к решению $x^* = A^{-1} f$ исходной системы $Ax = f$ со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $\rho_{\text{опт}} = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Теоретические задачи

1. Пусть $A = A^T > 0$ и матрица A представлена в виде $A = L + D + M$, где $D = \text{diag}\left[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} \right]$, L – нижний треугольник матрицы A без диагонали, M – верхний треугольник матрицы A без диагонали, тогда итерационный процесс $(L + D)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - f)$ сходится.

2. Пусть $A = A^T > 0$ и матрица A представлена в виде $A = L + D + M$, где $D = \text{diag}\left[a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} \right]$, L – нижний треугольник матрицы A без диагонали, M – верхний треугольник матрицы A без диагонали, тогда итерационный процесс $(D + \omega L)\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} = -(Ax^{(k)} - f)$ сходится при $\forall \omega \in (0, 2)$.

3. Пусть $B = L + U$, где L – нижняя треугольная матрица с нулями на диагонали, U – верхняя треугольная матрица. Пусть $\| B \|_{\infty} < 1$, тогда итерационный процесс $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$ сходится. Доказать что метод $x^{(k+1)} = Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} + f$ также сходится.

4. Пусть A – матрица простой структуры, т. е. подобна диагональной ($A = Q^{-1} DQ$, где столбцы q_i матрицы Q есть собственные векторы матрицы A, а элементы диагональной матрицы D есть соответствующие собственные значения, т. е. $d_{ii} = \lambda_i$), и все $\lambda(A) \in \left[m,\ M \right]$, $m > 0$. Доказать, что метод $\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} = -\left(Ax^{(k)} - f \right)$ сходится при $0 < \tau < \dfrac{2}{M}$.

5. Пусть A – матрица простой структуры и все $\lambda(A)\in[m,\ M]$, $m>0$. Доказать, что при любом положительном значении параметра τ сходится метод следующего вида: $\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}=-\left(A\dfrac{x^{(k+1)}+x^{(k)}}{2}-f\right)$.

6. Пусть A – матрица простой структуры и все $\lambda(A)\in[m,\ M]$, $m>0$. При каких значениях $\alpha\in[0,1]$ итерационный процесс $\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}=-A(\alpha x^{(k+1)}+(1-\alpha)x^{(k)}\ )+f$ сходится при любом $\tau>0$?

7. Пусть все собственные значения матрицы A вещественны и положительны. Доказать сходимость метода $\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}+Ax^{(k)}=f$ при $\tau=\|A\|^{-1}$ с любой матричной нормой.

8. Написать сходящийся метод простой итерации для решения системы ЛАУ $Ax=f$, где а) $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&3&1\\2&1&3\end{bmatrix}$, б) $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\3&1&3\\2&3&1\end{bmatrix}$, в) $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&1\\4&\sqrt{3}\end{bmatrix}$. Найти оптимальное значение пареметра τ.

9. Доказать, что при $A=A^T>0$ и $\tau>0$ итерационный процесс $x^{(k+1)}=x^{(k)}-\tau\left(Ax^{(k+1)}-b\right)$ сходится.

10. Пусть матрицы A_i, $i=1,2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i)\in[m,M]$, $m>0$ и $A_1A_2=A_2A_1$, $A=A_1+A_2$. Доказать, что при любом положительном значении параметра τ сходится итерационный метод следующего вида для решения системы ЛАУ $Ax=f$:
$\dfrac{x^{(k+1/2)}-x^{(k)}}{\tau}+A_1x^{(k+1/2)}+A_2x^{(k)}=f$,
$\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k+1/2)}}{\tau}+A_1x^{(k+1/2)}+A_2x^{(k+1)}=f$. Определить оптимальное значение $\tau_{\text{опт}}$.

11. Доказать, что при любом $\tau>0$ сходится итерационный метод следующего вида для решения системы ЛАУ $Ax=f$:

$$\frac{x^{(k+1/2)} - x^{(k)}}{\tau} + A_1 x^{(k+1/2)} + A_2 x^{(k)} = f,$$

$\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k+1/2)}}{\tau} + A_1 x^{(k+1/2)} + A_2 x^{(k+1)} = f,$ где матрицы A_i, $i = 1, 2$, простой структуры имеют собственные значения $\lambda(A_i) \in [m, M]$, $m > 0$ и $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$, $(A_i x, x) > 0$ для $i = 1, 2$, $A = A_1 + A_2$.

12. Доказать сходимость итерационного процесса из предыдущей задачи, если матрицы A_1, A_2 удовлетворяют следующим условиям: $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$, $(A_i x, x) > 0$ для $i = 1, 2$.

13. Пусть A – симметричная, положительно определённая матрица и выполнено неравенство $B - \dfrac{\tau}{2} A \geq \dfrac{1-\rho^2}{2\tau} B^T A^{-1} B$ с постоянной $\rho \in (0, 1)$, тогда итерационный процесс $B \dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} = -(Ax^{(k)} - f)$ сходится и для погрешности справедлива оценка $\left\| \varepsilon^{(k)} \right\|_A \leq \rho^k \left\| \varepsilon^{(0)} \right\|_A$.

14. Доказать, что если итерации $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ всегда сходятся, то $\rho(M^{-1}N) < 1$.

15. Пусть $A = A^T > 0$. Написать наилучший по скорости сходимости итерационный процесс вида $x^{(k+1)} = x^{(k)} - P_1(A)(Ax^{(k)} - b)$, $P_1(t) = \alpha t + \beta$.

16. Пусть $A = A^T > 0$, $B = B^T > 0$ и $C = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$. Доказать, что неравенства $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$, $\gamma_1 E \leq C \leq \gamma_2 E$ эквивалентны.

Контрольные вопросы

1. Напишите общий вид неявного метода простой итерации.

2. Сформулируйте условия сходимости неявного метода простой итерации.

3. Приведите оценку погрешности в неявном методе простой итерации.

4. С какой целью в итерационные методы вводят числовые параметры и как выбирают их значения?

5. Как осуществляется выбор оптимального значения параметра τ в неявном методе простой итерации.

6. Определите число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε в неявном методе простой итерации при $\tau = \tau_{\text{опт}}$.

Литература к лабораторной работе №8: [2, с. 67–76], [3, с. 117–118], [5, с. 50–58], [8, с. 84–103], [9, с. 43–60].

Лабораторная работа № 9.
Метод Зейделя

Решаем систему $Ax = f$, где $\det(A) \neq 0$. Приведём эту систему к эквивалентному виду $x = Hx + \varphi$. Метод Зейделя в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = h_{11}x_1^{(k)} + h_{12}x_2^{(k)} + \cdots + h_{1n-1}x_{n-1}^{(k)} + h_{1n}x_n^{(k)} + \varphi_1, \\ x_2^{(k+1)} = h_{21}x_1^{(k+1)} + h_{22}x_2^{(k)} + \cdots + h_{2n-1}x_{n-1}^{(k)} + h_{2n}x_n^{(k)} + \varphi_2, \\ \cdots \\ x_n^{(k+1)} = h_{n1}x_1^{(k+1)} + h_{n2}x_2^{(k+1)} + \cdots + h_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + h_{nn}x_n^{(k)} + \varphi_n. \end{cases} \tag{1}$$

Введём матрицы $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ 0 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда формулу (1) можно переписать в виде

$$x^{(k+1)} = Fx^{(k+1)} + Sx^{(k)} + \varphi. \tag{2}$$

Из (2) следует $(E - F)x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + \varphi$. Так как матрица $E - F$ является нижней треугольной с единичной диагональю, то существует $(E - F)^{-1}$, и можно записать метод простой итерации

$$x^{(k+1)} = (E - F)^{-1}Sx^{(k)} + (E - F)^{-1}\varphi, \tag{3}$$

равносильный методу Зейделя. Форма записи (3) введена только для исследования сходимости метода Зейделя.

Для того чтобы метод Зейделя сходился необходимо и достаточно, чтобы $\left|\lambda\left(\left(E - F\right)^{-1} S\right)\right| < 1$. Найдем собственные значения матрицы $G = (E - F)^{-1}S$. Для этого нужно найти решения уравнения

$$\det\left((E-F)^{-1}S-\lambda E\right)=0 \Leftrightarrow \det\left((E-F)^{-1}(S-\lambda E+\lambda F)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det(E-F)^{-1}\det(S-\lambda E+\lambda F)=0 \Leftrightarrow \det(S-\lambda E+\lambda F)=0.$$

Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для сходимости метода Зейделя (2) при любом начальном приближении необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы G, определяемые как корни уравнения $\det(S-\lambda E+\lambda F)=0$, были по модулю меньше единицы.*

Удобнее пользоваться достаточными условиями.

Теорема 2. *Для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы кубическая норма матрицы H была меньше единицы: $\|H\|_{\mathrm{I}}<1$.*

Теорема 3. *Для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы октаэдрическая норма матрицы H была меньше единицы: $\|H\|_{\mathrm{II}}<1$.*

Пример 1. *Метод простой итерации или метод Зейделя лучше применить для решения системы ЛАУ $x=Bx+g$ с матрицей B? Ответ обосновать. а) $B=\begin{bmatrix}2,5 & -3\\ 2 & -2,5\end{bmatrix}$, б) $B=\begin{bmatrix}4,2 & -2\\ 2 & -0,1\end{bmatrix}$.*

<u>Решение</u>. ♦ Необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации при любом начальном приближении $x^{(0)}$ является требование, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы: $|\lambda(B)|<1$. Необходимым и достаточным условием сходимости метода Зейделя при любом начальном приближении является требование, чтобы все собственные значения матрицы G, определяемые как корни уравнения $\det(S-\lambda E+\lambda F)=0$, были по модулю меньше единицы. а) Вычислим собственные значения матрицы B: $\det\begin{bmatrix}2,5-\lambda & -3\\ 2 & -2,5-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-2,5^2+6=\lambda^2-0,25$. Значит $\lambda_{1,2}=\pm 0,5$ и метод простой итерации сходится. Исследуем сходимость метода Зейделя:

$$\det(S-\lambda E+\lambda F)=\det\begin{bmatrix}2,5-\lambda & -3\\ 2\lambda & -2,5-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-2,5^2+6\lambda=\lambda^2+6\lambda-6,25$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{61}}{2}$. Так как $\left|\dfrac{-6-\sqrt{61}}{2}\right|>1$, то метод Зейделя расходится.

б) Вычислим собственные значения матрицы B: $\det\begin{bmatrix} 4,2-\lambda & -2 \\ 2 & -0,1-\lambda \end{bmatrix} = (4,2-\lambda)(-0,1-\lambda)+4 = \lambda^2 - 4,1\lambda + 3,58 = 0.$ Значит $\lambda_{1,2} = \dfrac{41 \pm \sqrt{249}}{20}$ и метод простой итерации расходится.

Исследуем сходимость метода Зейделя: $\det(S - \lambda E + \lambda F) =$ $= \det\begin{bmatrix} 4,2-\lambda & -2 \\ 2\lambda & -0,1-\lambda \end{bmatrix} = (4,2-\lambda)(-0,1-\lambda) + 4\lambda = \lambda^2 - 0,1\lambda - 0,42 = 0 \Rightarrow$ $\lambda_1 = -0,6,\ \lambda_2 = 0,7$. Значит, метод Зейделя сходится. ■

Запишем алгоритм метода Зейделя решения системы ЛАУ (2) с матрицей H, $\|H\| < 1$ в виде, удобном для компьютерной реализации:

1. $q := \dfrac{\|S\|}{1 - \|H\|}$

2. $xs := \varphi$

3. $xn := \varphi$

4. для $i = 1, 2, \ldots, n$

  5. $xn_i := \sum\limits_{j:=1}^{n} h_{ij} \cdot xn_j + \varphi_i$

6. пока $q \cdot \|xn - xs\| \geq \varepsilon$

  7. $xs := xn$

  8. для $i = 1, 2, \ldots, n$

    9. $xn_i := \sum\limits_{j:=1}^{n} h_{ij} \cdot xn_j + \varphi_i$

10. Вернуть xn

Второй способ изложения метода Зейделя.

Представим матрицу A в виде $A = L + D + M$, где $D = \mathrm{diag}\left[a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right]$, L – нижний треугольник матрицы A без диагонали, M – верхний треугольник матрицы A без диагонали.

Перепишем уравнение (1) в виде:
$(L+D)x = -Mx + f \Leftrightarrow (L+D)x = -Mx + f + Lx + Dx - Lx - Dx.$ Отсюда $(L+D)x = (L+D)x - \left(M + L + D\right)x + f \Leftrightarrow (L+D)x = (L+D)x - Ax + f.$

Значит, можно построить итерационный процесс

$$(L + D)x^{(k+1)} = (L + D)x^{(k)} - Ax^{(k)} + f \Leftrightarrow$$

$$(L + D)(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -(Ax^{(k)} - f). \qquad (4)$$

Формула (4) представляет собой второй вариант изложения метода Зейделя. В этом виде метод Зейделя можно рассматривать как частный случай общего неявного метода простой итерации $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} = -\left(Ax^{(k)} - f\right)$, при $B = L + D$, $\tau = 1$. В этом случае имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Если матрица* $A = A^T > 0$, *то метод Зейделя сходится.*

Теоретические задачи

1. Докажите, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы кубическая норма матрицы H была меньше единицы: $\|H\|_{\mathrm{I}} < 1$.

2. Докажите, что для сходимости метода Зейделя достаточно, чтобы октаэдрическая норма матрицы H была меньше единицы: $\|H\|_{\mathrm{II}} < 1$.

3. Докажите, что при выполнении условия $\|H\| < 1$, для определяемой методом Зейделя (4) последовательности приближений $\left\{x^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ справедлива апостериорная оценка погрешности $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \dfrac{\|S\|}{1 - \|H\|}\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|$ для $\forall\, k \in N$.

4. Найти все значения α, β, при которых метод Зейделя будет сходящимся для систем $x = Bx + g$ с матрицами:

а) $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, б) $B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, в) $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$,

г) $B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$, где α, β – числа.

5. Найти все матрицы, для которых методы простой итерации и Зейделя для системы $x = Bx + g$ будут сходящимися. а) $B = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}$, б) $B = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}$, где p, q – числа.

6. Исследовать сходимость метода Зейделя для системы $x = Bx + g$, где элементы матрицы B имеют вид: $b_{kj} = \begin{cases} 2, k = j, \\ -1, |k-j| = 1, \\ 0, |k-j| > 1. \end{cases}$

7. Показать, что существует система уравнений третьего порядка, для которой метод Якоби сходится, а метод Зейделя расходится.

8. Показать, что существует система уравнений третьего порядка, для которой метод Зейделя сходится, а метод Якоби расходится.

9. Система $Ax = f$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ решается методом Зейделя. Доказать, что: если $|a| > 1$, то для некоторого начального приближения итерационный процесс расходится; если $|a| < 1$, то итерации сходятся при любом начальном приближении.

10. Пусть $q|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ где $0 < q < 1$. Доказать, что метод Зейделя сходится и для погрешности $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ справедлива оценка $\left\| \varepsilon^{(k)} \right\|_\infty \le q^k \left\| \varepsilon^{(0)} \right\|_\infty$.

11. Пусть $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Доказать, что метод Зейделя сходится.

12. Доказать, что для систем линейных уравнений второго порядка ($n = 2$) методы Якоби и Зейделя сходятся и расходятся одновременно.

13. Пусть элементы матрицы B имеют вид $b_{kj} = \frac{1}{2} \cdot 3^{-|k-j|}$. Исследовать сходимость метода Зейделя для системы $x = Bx + g$.

Контрольные вопросы

1. В чём состоит отличие метода Зейделя решения системы $x = Bx + g$ от метода простой итерации?

2. Какие условия являются необходимыми и достаточными для сходимости метода Зейделя?

3. Сформулируйте достаточные условия метода Зейделя.

4. Запишите две формы записи метода Зейделя.

Литература к лабораторной работе №9: [1, с. 285–290], [2, с. 73–76], [3, с. 102–111], [4, с. 113–119], [5, с. 40–50], [6, с. 136–150], [7, с. 323–326], [8, с. 82–84, 89], [9, с. 43–60].

Лабораторная работа № 10. Некоторые модификации итерационных методов

Рассмотрим систему $Ax = f$, где $\det(A) \neq 0$. Приведём эту систему к эквивалентному виду $x = Hx + \varphi$.

Рассмотрим случай, когда спектр матрицы H выходит за границы единичного круга на комплексной плоскости собственных чисел. В этом случае метод простой итерации будет расходиться

$$x^{(k+1)} = Hx^{(k+1)} + \varphi. \tag{1}$$

Определим выпуклую оболочку спектра матрицы H как выпуклую замкнутую кривую наименьшей меры, полностью охватывающую спектр матрицы H на комплексной плоскости. Если точка комплексной плоскости 1 находится вне выпуклой оболочки спектра, то можно построить сходящийся метод простой итерации с новой матрицей $\tilde{H} = \dfrac{H + kE}{1+k}$, где k – комплексный параметр.

Дадим конструктивный способ построения такого сходящегося метода. Обе части равенства $x = Hx + \varphi$ разделим на $1+k$: $\dfrac{x}{1+k} = \dfrac{H}{1+k}x + \dfrac{\varphi}{1+k}$. В левой части последнего равенства добавим и вычтем вектор x: $x - x + \dfrac{x}{1+k} = \dfrac{H}{1+k}x + \dfrac{\varphi}{1+k}$. Из последнего равенства получим $x=\dfrac{H+kE}{1+k}x+\dfrac{\varphi}{1+k}$. За счёт выбора параметра k попробуем добиться сходимости метода

$$x^{(k+1)}=\frac{H+kE}{1+k}x^{(k+1)}+\frac{\varphi}{1+k}. \tag{2}$$

Пусть Ω_H – один из множества кругов радиуса r, полностью охватывающих спектр матрицы H, так что точка $1\notin\Omega_H$. Очевидно, что Ω_H включает в себя выпуклую оболочку спектра. Вектор из начала координат в центр этого круга обозначим $-\vec{k}_0$. При дробно-линейном преобразовании $\tilde{H}=\dfrac{H+kE}{1+k}$ с $k=k_0$ круг Ω_H переходит в круг $\Omega_{\tilde{H}}$ с центром в точке нуль на комплексной плоскости и радиусом $\tilde{r}=\left|\dfrac{r}{1+k_0}\right|$. Если $0<\tilde{r}<1$, то метод простой итерации (2) сходится. Найдем минимум значения $\tilde{r}$. Пусть круг Ω_H «виден» из точки 1 под углом 2α. Легко доказать, что $\sin(\alpha)=\tilde{r}$, а значит $0<\tilde{r}<1$.

Таким образом, если Ω_H такой круг, что точка $1\notin\Omega_H$, и данный круг «видим» из точки 1 под наименьшим углом 2α, то комплексное расстояние до центра этого круга со знаком минус есть оптимальный параметр для сходимости метода простой итерации (2), а скорость сходимости (2) не хуже, чем у геометрической прогрессии со знаменателем $\sin(\alpha)$.

Пример 1. *Систему $Ax=f$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $f=\begin{pmatrix}5\\ 5\end{pmatrix}$ привести к равносильному виду $x=Hx+\varphi$, для которого сходился бы метод простой итерации и (или) метод Зейделя.*

<u>*Решение.*</u> ♦ Приведём систему $Ax=f$ к эквивалентному виду $x=D^{-1}(D-A)x+D^{-1}f$, где $D=\operatorname{diag}\left[a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}\right]$. Обозначим $H=D^{-1}(D-A)=\begin{pmatrix}0 & -3/2\\ 7/2 & 0\end{pmatrix}$, $\varphi=D^{-1}f=\begin{pmatrix}5/2\\ -5/2\end{pmatrix}$. Проверим, что для матрицы H метод простой итерации и метод Зейделя являются расходящимися. Найдём собственные значения матрицы H: $\det(H-\lambda E)=$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -3/2 \\ 7/2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{21}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}i.$$ Так как $|\lambda_{1,2}| > 1,$ то метод простой итерации для матрицы H расходится. Проверим сходимость метода Зейделя: $\det(S - \lambda E + \lambda F) = \begin{vmatrix} \lambda & -3/2 \\ \frac{7}{2}\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{21}{4}\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -\frac{21}{4},$ $\lambda_2 = 0.$ Так как $|\lambda_1| > 1,$ то метод Зейделя для матрицы H расходится.

Так как собственные значения матрицы H симметричны относительно действительной оси, то существует бесконечное множество кругов с центром на действительной оси ($x < 0$), которые содержат оба собственных значения этой матрицы $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{21}/2\; i$ и не содержат точку 1 (см. рис. 1).

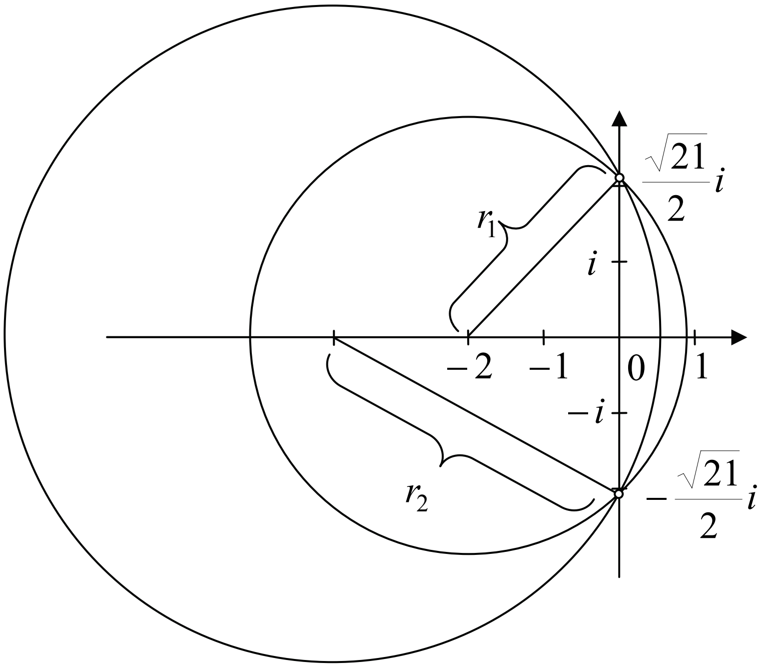

Рис. 1

Центры этих кругов $x \in R$ должны удовлетворять условию: максимум расстояний от точки x до корней должно быть меньше расстояния от точки x до 1. Т. е. $\sqrt{(x-0)^2 + (0 - \sqrt{21}/2)^2} < \sqrt{(1-x)^2} \;\Leftrightarrow$ $x^2 + 21/4 < 1 - 2x + x^2 \;\Leftrightarrow\; x < -17/8.$ Значит, при любом $x < -17/8$ можно положить $k = -x$ и получить сходящийся метод простой итерации вида (2).

Найдём оптимальное значение k минимизируя значение $\tilde{r} = \left| \frac{r}{1+k_0} \right| = \frac{\sqrt{x^2 + 21/4}}{1-x}$, $x < -17/8$. Найдём $\tilde{r}'_x$:

$$\tilde{r}'_x = \frac{x}{(1-x)\sqrt{x^2+21/4}} + \frac{\sqrt{x^2+21/4}}{(1-x)^2}.\quad \tilde{r}'_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{21}{4}.$$ Значит, в качестве оптимального значения k следует взять $k = \frac{21}{4}$. При таком выборе k собственные значения матрицы $\tilde{H} = \frac{H + kE}{1+k}$ равны $\lambda_{1,2} = \frac{21 \pm 2\sqrt{21}}{25}$, $\left| \lambda_{1,2} \right| = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0{,}916515$ и значит метод простой итерации для задачи вида (2) сходится.

Отметим, что для данного значения k решениями уравнения $\det(S - \lambda E + \lambda F) = 0$ будут числа $\lambda_{1,2} = \frac{21(23 \pm 4i\sqrt{21})}{625}$, $\left| \lambda_{1,2} \right| = \frac{21}{25} = 0{,}84$ и метод Зейделя также будет сходиться.

Для метода Зейделя оптимальный параметр k равен единице. При $k = 1$ собственные значения равны $\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm i\sqrt{231}}{32}$, $\left| \lambda_{1,2} \right| = \frac{1}{2}$, что приводит к быстросходящемуся итерационному процессу. ■

Расчётное задание

1. Найти решение системы ЛАУ $Ax = f$ (см. табл. 10) итерационными методами Якоби и Зейделя. Решение получить с заданной точностью $\varepsilon \in \{10^{-4},\ 10^{-6},\ 10^{-8}, 10^{-10}\}$. Указать количество итераций $n(\varepsilon)$ необходимых каждому методу для достижения заданной точности. Отметить случаи явной расходимости метода. Определить значение оптимального параметра k для сходимости методов Якоби и Зейделя. Для этого потребуется найти собственные числа матрицы Якоби H и на этой основе сделать вывод о значении k для метода простой итерации (2) с матрицей $\tilde{H} = \frac{H + kE}{1+k}$. Этот же оптимальный параметр можно использовать для построения сходящегося метода Зейделя. Однако, в последнем случае оптимальный параметр, как правило, может быть значительно улучшен.

Таблица 10

№	A	f
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & -13 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 4 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 17 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

№	A	f
5.	$\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 19 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 18 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

№	A	f
9.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -0.7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -3.3 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 \\ 9 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$

№	A	f
13.	$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 10 & 1 & -10 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 5 & -10 & 10 \\ 10 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$

№	A	f
16.	$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 25 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -10 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

2. Выполнить лабораторную работу с помощью любого математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.), видоизменяя указанные в вариантах матрицы до больших трехдиагональных матриц порядка $n \in \{100,\ 200,\ 400\}$. Для этого главная диагональ и две (три в задании №13, 16) побочные диагонали периодически продолжаются на большую матрицу. Остальные коэффициенты матрицы нулевые. Так, например, матрица варианта №2 выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -13 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -13 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -13 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Оптимальный параметр k остаётся при этом неизменным (несмотря на трансформацию спектра матрицы, увеличение радиуса круга Ω_H при неизменном положении его центра) и определяется так, как указано выше для малых матриц. В качестве вектора правой части взять вектор с $b_i = 1$, для всех $i = \overline{1,\ n}$. В результате работы представить для каждого метода: вектор решения; число итераций; невязку решения, спектр оператора (с помощью стандартных функций математического пакета); сравнить значение оптимального параметра, полученного исходя из знания спектра оператора, и использованного Вами в решении; сравнить решение системы ЛАУ, полученное стандартным методом математического пакета и Вашим итерационным методом. Сделать вывод о причинах хорошей (плохой) сходимости итерационного метода. Найти число обусловленности исходной матрицы (с помощью стандартных функций математического пакета). Сравнить при $n = 1000$ время решения системы ЛАУ стандартным методом математического пакета и Вашим итерационным методом.

Контрольные вопросы

1. При каких ограничениях на спектр матрицы H можно построить сходящуюся модификацию метода простой итерации?

2. Какова скорость сходимости такой модификации?

3. В чём состоит суть такой модификации?

4. В каком случае никакие модификации метода Якоби и Зейделя не приведут к сходящемуся итерационному процессу?

Литература к лабораторной работе №10: [1, с. 275–285, 300–304].

Лабораторная работа № 11.
Вариационные методы. Метод скорейшего спуска

В предыдущих лабораторных работах рассматривались такие итерационные методы решения системы

$$Ax = f, \tag{1}$$

в которых для задания итерационного параметра τ требовалось знать границы спектра матрицы $B^{-1}A$. В этой лабораторной работе рассмотрим итерационные методы вида

$$B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} = -(Ax^{(k)} - f), \tag{2}$$

в которых параметр τ_{k+1} выбирается исходя из условия минимизации погрешности $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D = \left(D\varepsilon^{(k+1)}, \varepsilon^{(k+1)}\right)$ при заданной погрешности $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$. Здесь D – заданная симметричная, положительно определённая матрица. В зависимости от выбора матриц B и D можно получать различные итерационные методы. Преимуществом таких методов является то, что они не требуют знания границ спектра матрицы $B^{-1}A$.

Вычисления по формуле (2) выполняются в следующей последовательности:

1. Вычисляем вектор невязки $r^{(k)} = Ax^{(k)} - f$.
2. Решая систему ЛАУ $Bw^{(k)} = r^{(k)}$, вычисляем вектор поправки $w^{(k)}$.
3. Вычисляем параметр τ_{k+1}, исходя из условия минимизации энергетической нормы погрешности $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D = \left(D\varepsilon^{(k+1)}, \varepsilon^{(k+1)}\right)$.
4. Вычисляем очередное приближение $x^{(k+1)}$ по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1}w^{(k+1)}$.

Для погрешности имеет место уравнение: $B\dfrac{\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}}{\tau_{k+1}} = -A\varepsilon^{(k)}$.

Будем выбирать τ_{k+1}, исходя из условия минимизации $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D = \left(D\varepsilon^{(k+1)}, \varepsilon^{(k+1)}\right)$. Возьмем $\|x\|_D = (Dx, x)^{1/2} = (D^{1/2}x, D^{1/2}x)^{1/2} =$

$=\left\|D^{1/2}x\right\|_{\text{III}}^{1/2}$ и будем минимизировать вместо выражения $\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\|_D=\left(D\varepsilon^{(k+1)},\varepsilon^{(k+1)}\right)$. выражение $\left\|D^{1/2}\varepsilon^{(k+1)}\right\|_{\text{III}}^{1/2}=\left\|\delta^{(k+1)}\right\|_{\text{III}}^{1/2}$, где $\delta^{(k+1)}=D^{1/2}\varepsilon^{(k+1)}$.

Запишем уравнение погрешности: $B\dfrac{\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}}{\tau_{k+1}}=-A\varepsilon^{(k)}\Rightarrow$

$\varepsilon^{(k+1)}=\left(E-\tau_{k+1}B^{-1}A\right)\varepsilon^{(k)}\Rightarrow D^{-1/2}\delta^{(k+1)}=\left(E-\tau_{k+1}B^{-1}A\right)D^{-1/2}\delta^{(k)}$.

Домножим обе части равенства слева на $D^{1/2}$:

$$\delta^{(k+1)}=D^{1/2}\left(E-\tau_{k+1}B^{-1}A\right)D^{-1/2}\delta^{(k)}=\left(E-D^{1/2}\tau_{k+1}B^{-1}AD^{-1/2}\right)\delta^{(k)}=$$

$$=(E-\tau_{k+1}C)\delta^{(k)},\ \text{где}\ C=D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}.$$

Нам нужно минимизировать $\left\|\delta^{(k+1)}\right\|_{\text{III}}$.

$$\left\|\delta^{(k+1)}\right\|_{\text{III}}^2=\left(\delta^{(k+1)},\delta^{(k+1)}\right)=\left(\left(E-\tau_{k+1}C\right)\delta^{(k)},\left(E-\tau_{k+1}C\right)\delta^{(k)}\right)=$$

$$=\left(\delta^{(k)},\delta^{(k)}\right)-2\tau_{k+1}\left(C\delta^{(k)},\delta^{(k)}\right)+\tau_{k+1}^2\left(C\delta^{(k)},C\delta^{(k)}\right).$$

Обозначим $\varphi(\tau_{k+1})=\left(\delta^{(k)},\delta^{(k)}\right)-2\tau_{k+1}\left(C\delta^{(k)},\delta^{(k)}\right)+\tau_{k+1}^2\left(C\delta^{(k)},C\delta^{(k)}\right)$.
И определим значение параметра τ_{k+1}, при котором функция $\varphi(\tau_{k+1})$ будет принимать минимальное значение.

$$\tau_{k+1}=\frac{\left(C\delta^{(k)},\delta^{(k)}\right)}{\left(C\delta^{(k)},C\delta^{(k)}\right)}=\frac{\left(D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}\delta^{(k)},D^{1/2}D^{-1/2}\delta^{(k)}\right)}{\left(D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}\delta^{(k)},D^{1/2}B^{-1}AD^{-1/2}\delta^{(k)}\right)}\overset{\varepsilon^{(k)}=D^{-1/2}\delta^{(k)}}{=}$$

$$\overset{\varepsilon^{(k)}=D^{-1/2}\delta^{(k)}}{=}\frac{\left(D^{1/2}B^{-1}A\varepsilon^{(k)},D^{1/2}\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(D^{1/2}B^{-1}A\varepsilon^{(k)},D^{1/2}B^{-1}A\varepsilon^{(k)}\right)}\overset{r^{(k)}=A\varepsilon^{(k)}}{=}$$

$$\overset{r^{(k)}=A\varepsilon^{(k)}}{=} \frac{\left(D^{1/2}B^{-1}r^{(k)},\, D^{1/2}\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(D^{1/2}B^{-1}r^{(k)},\, D^{1/2}B^{-1}r^{(k)}\right)} \overset{w^{(k)}=B^{-1}r^{(k)}}{=}$$

$$\overset{w^{(k)}=B^{-1}r^{(k)}}{=} \frac{\left(D^{1/2}w^{(k)},\, D^{1/2}\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(D^{1/2}w^{(k)},\, D^{1/2}w^{(k)}\right)} = \frac{\left(Dw^{(k)},\, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Dw^{(k)},\, w^{(k)}\right)}.$$

Получили

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(Dw^{(k)},\, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Dw^{(k)},\, w^{(k)}\right)}. \tag{3}$$

Дальнейшее упрощение формулы (3) возможно за счёт выбора матрицы D. Рассмотрим мотивы выбора матрицы D:

1. Пусть $A = A^T > 0$. Можно взять $D = A$, тогда (3) примет вид:

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(Aw^{(k)}, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)}, w^{(k)}\right)} = \frac{\left(w^{(k)}, A^T\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)}, w^{(k)}\right)} = \frac{\left(w^{(k)}, A\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)}, w^{(k)}\right)} = \frac{\left(w^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)}, w^{(k)}\right)}. \tag{4}$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (4), называют методом скорейшего спуска.

2. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда можно взять $D = A^T A$ и уравнение (3) примет вид:

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(A^T Aw^{(k)},\, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A^T Aw^{(k)},\, w^{(k)}\right)} = \frac{\left(Aw^{(k)},\, (A^T)^T\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)},\, (A^T)^T w^{(k)}\right)} = \frac{\left(Aw^{(k)},\, r^{(k)}\right)}{\left(Aw^{(k)},\, Aw^{(k)}\right)}. \tag{5}$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (5), называют методом минимальных невязок.

3. Пусть $A > 0$, $B = B^T > 0$. Тогда в качестве D можно выбрать $D = A^T B^{-1} A$. Очевидно, что $D = D^T > 0$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\tau_{k+1} = \frac{\left(A^T B^{-1} Aw^{(k)},\, \varepsilon^{(k)}\right)}{\left(A^T B^{-1} Aw^{(k)},\, w^{(k)}\right)} = \frac{\left(Aw^{(k)},\, B^{-1}A\varepsilon^{(k)}\right)}{\left(B^{-1}Aw^{(k)},\, Aw^{(k)}\right)} = \frac{\left(Aw^{(k)},\, w^{(k)}\right)}{\left(B^{-1}Aw^{(k)},\, Aw^{(k)}\right)}. \tag{6}$$

Алгоритм, в котором параметр τ_{k+1} выбирают по формуле (6), называют методом минимальных поправок.

Расчётное задание

Решить систему ЛАУ из лабораторной работы №10 $Ax = f$ каким-либо итерационным методом вариационного типа. Размерность матрицы A взять равной 2 (3 для вариантов 13-18) и $n \in \{100,\ 1000\}$.

В результате работы представить вектор решения; число итераций; график изменения итерационного параметра τ_k; сравнить точность решения и время, затраченное на решение системы ЛАУ стандартным методом математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.) и выбранного Вами итерационным методом вариационного типа.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит суть итерационных методов вариационного типа?
2. Особенности метода скорейшего спуска.
3. Особенности метода минимальных невязок.
4. Особенности метода минимальных поправок.

Литература к лабораторной работе №11: [1, с. 290–300], [3, с. 118–123], [4, с. 119–123], [5, с. 96–11], [6, с. 199–213], [7, с. 327–334], [8, с. 115–126], [9, с. 43–60].

Литература к теме "Численные методы решения систем ЛАУ"

Основная

1. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков*. – М.: Физматлит, Лаборатория Базовых Знаний, 2001.– 632 с.
2. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях / *Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков.* – М: Высшая школа, 2000. – 190 с.
3. *Вержбицкий, В.М.* Основы численных методов / *В.М. Вержбицкий.* – М.: Высшая школа, 2002.– 847 с.
4. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – М.: Наука, 1976. – 303 с.
5. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный* – Мн.: Наука и техника, 1985.– 279 с.

6. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы высшей математики / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – Минск: Выш. ш., 1972. – 584 с.
7. *Мысовских, И.П.* Лекции по методам вычислений / *И.П. Мысовских* – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998.– 472 с.
8. *Самарский, А. А.* Численные методы / *А. А. Самарский, А. В. Гулин*. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
9. Сборник задач по методам вычислений под ред. *П. И. Монастырного*.– М.: Наука, 1994. – 320 с.
10. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева* – 3-е изд., стер.– СПб.: Лань, 2002.– 733 с.

Дополнительная

11. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов.*– 2-е изд.– М.: Наука, 1975. – 632 с.
12. *Березин, И. С.* Методы вычислений / *И. С. Березин, Н. П. Жидков*. В 2 т. – Т. 2 – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
13. *Волков, Е. А.* Численные методы / *Е. А. Волков*. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
14. *Дробышевич, В. И.* Задачи по вычислительной математике / *В. И. Дробышевич, В. П. Дымкиков, Г. С. Ривич.* – М.: Наука, 1980. – 144 с.
15. *Самарский, А. А.* Задачи и упражнения по численным методам / *А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. С. Самарская*. – М.:Эдиториал УРСС, 2000.– 207 с.
16. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / *Л. И. Турчак.* – М.: Наука, 1987. – 320 с.
17. http://www.srcc.msu.su/num_anal – тематический сервер по численному анализу.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Лабораторная работа № 12. Вычисление собственных значений и собственных векторов по определению

Определение 1. *Собственным значением матрицы A называется число λ, являющееся решением уравнения*

$$Ax = \lambda x, \tag{1}$$

где x – ненулевой вектор.

Определение 2. *Собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ называется ненулевой вектор $x \neq 0$, который является решением уравнения (1).*

Определение 3. *Собственной парой $\{\lambda, x\}$ матрицы A называется собственное значение λ матрицы A и соответствующий этому собственному значению собственный вектор x.*

Определение 4. *Спектром матрицы называется совокупность всех собственных значений этой матрицы.*

Определение 5. *Спектральным радиусом матрицы называют число, равное максимальному по модулю собственному значению матрицы. Спектральный радиус обозначается $\rho(A)$.*

Отметим, что $Ax = \lambda x$ тогда и только тогда, когда

$$(A - \lambda E)x = 0. \tag{2}$$

Система (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Определение 6. *Определитель $\det(A - \lambda E)$ является многочленом степени n относительно λ и называется характеристическим многочленом матрицы A:*

$$\det\left(A - \lambda E\right) = (-1)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} - \ldots - p_n\right)$$

Приведём простейшие свойства собственных пар.

Свойство 1. *Если $\{\lambda, x\}$ – собственная пара матрицы A, и $\alpha\,(\alpha \neq 0)$ – некоторое число, то $\{\lambda, \alpha x\}$ также является собственной парой матрицы A.*

Свойство 2. *Пусть* $\{\mu, x\}$ *– собственная пара матрицы* $A - pE$ *при некотором* $p \in R$. *Тогда* $\{\mu + p, \alpha x\}$ *является собственной парой матрицы* A.

Свойство 3. *Если* $\{\lambda, x\}$ *– собственная пара матрицы* A, *то* $\{1/\lambda, x\}$ *является собственной парой матрицы* A^{-1}.

Свойство 4. *Собственными числами диагональных и треугольных матриц являются их диагональные элементы.*

Определение 7. *Отношением Рэлея для квадратной матрицы* A *порядка* n *называется функционал* $\rho(x) = \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}$, *определённый на множестве ненулевых* n*-мерных векторов* x.

Свойство 5. *Пусть* x^* *– собственный вектор матрицы* A, *тогда* $\rho\left(x^*\right)$ *– её собственное значение, соответствующее вектору* x^*.

Свойство 6. *Минимум евклидовой нормы вектора* $\xi(\lambda) = Ax - \lambda x$ *для любого ненулевого вектора* x *достигается при* $\lambda = \rho(x)$.

Смысл свойства 6 в следующем: если некоторый вектор x считать приближением к собственному вектору матрицы A (а значит, $\xi(\lambda)$ – его невязкой), то отношение Рэлея $\rho(x)$ будет наилучшим приближением к соответствующему этому вектору собственному числу в смысле евклидовой метрики.

Теоретические задачи

1. Докажите свойства 1-6 собственных пар, сформулированные в данной лабораторной работе.

2. Показать, что для максимального и минимального собственных чисел симметричной матрицы A справедливы оценки: $\lambda_{\min}(A) \le \min\limits_{1 \le i \le n} a_{ii}$; $\lambda_{\max}(A) \ge \min\limits_{1 \le i \le n} a_{ii}$.

3. Доказать положительную определенность матрицы
$$A=\begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2,5 & 3 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4,5 & 5 & \ldots & 5 & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 1/2(4n-7) & 2n-3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \ldots & 2n-3 & 1/2(4n-3) \end{pmatrix}.$$

4. Пусть $A=A^T>0.$ Доказать, что $\lambda_{\max}(A)=\max\rho(x),$ $\lambda_{\min}(A)=\min\rho(x),$ где $\rho(x)=\dfrac{(Ax,x)}{(x,x)}$ – отношение Рэлея.

5. Пусть $P_n(\lambda)$ – характеристический полином матрицы A порядка n. Докажите, что в любом круге на комплексной плоскости с центром в точке λ_c и радиуса $\sqrt[n]{|P_n(\lambda_c)|}$ лежит хотя бы один корень полинома $P_n(\lambda)$. *Указание*: разложите $P_n(\lambda)$ в ряд Тейлора в окрестности точке λ_c.

6. Доказать, что для квадратных матриц A и B одинакового размера спектры матриц AB и BA совпадают.

7. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны $AB=BA$, то существует собственное число $\lambda(AB)$, равное произведению собственных чисел $\lambda(A)\lambda(B)$.

8. Доказать, что если A – симметричная и положительно определённая матрица, а B – симметричная матрица, то все собственные значения $\lambda(AB)$ матрицы AB вещественные.

9. Доказать, что если A, B – симметричные и положительно определённые матрицы, то все собственные значения $\lambda(AB)$ матрицы AB положительные.

10. Доказать, что если A – симметричная и положительно определённая матрица, а B – симметричная матрица, то система собственных векторов матрицы AB полна.

11. Пусть A – симметризуемая матрица, т. е. существует такая невырожденная матрица T такая, что TAT^{-1} – симметричная матрица. Доказать, что система собственных векторов матрицы A полна.

12. Построить пример симметричной положительно определённой 3×3 матрицы, трёхдиагональная часть которой не является положительно определённой.

13. Доказать положительную определённость матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}12 & -6 & 3 & -2\\ -6 & 18 & -6 & 6\\ 3 & -6 & 24 & 15\\ -2 & 6 & 15 & 20\end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1/2 & -1/3\\ -1 & 3 & -1 & -1/2\\ 1/2 & -1 & 4 & 2\\ -1/3 & -1/2 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

Расчётное задание

В соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, вычислить все собственные значения и соответствующие им собственные вектора матрицы из табл. 11 методом непосредственного вычисления определителя. Найденные значения сравнить с результатами, полученными с помощью математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.).

Таблица 11

1.	$\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\ -1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix}5 & 2 & 5\\ -2 & -1 & -8\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 5 & -2\end{pmatrix}$	5.	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & 4 & -6\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$	9.	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -3\end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix}5 & 2 & 5\\ -2 & -1 & -8\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix}2 & 5 & -6\\ 4 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ -3 & 1 & 1\\ -4 & 3 & -4\end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 4 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix}6 & -3 & 5\\ 1 & 3 & 5\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 7 & 2 & 4\\ 5 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определения следующих понятий: собственное значение матрицы, собственный вектор, собственная пара, спектр матрицы, спектральный радиус матрицы, характеристический многочленом матрицы, отношение Рэлея.

2. Сформулируйте свойства собственных пар.

Литература к лабораторной работе №12: [1, с. 315], [2, с. 76–81], [3, с. 135–140], [4, с. 127–130], [5, с. 117–122], [6, с. 219–232], [8, с. 61–63, 73–74].

Лабораторная работа № 13. Метод А.М. Данилевского

Метод А.М. Данилевского относится к *прямым методам решения полной проблемы собственных значений* и основан на приведении исходной матрицы A с помощью некоторого преобразования подобия $S^{-1}AS$ к матрице специального вида, характеристический многочлен которой записывается непосредственно по ее виду. Метод основан на том факте, что преобразование подобия не меняет характеристического многочлена матрицы. В методе Данилевского с помощью преобразования подобия матрица A приводится к канонической форме Фробениуса вида

$$\Phi = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

характеристический многочлен, которой легко выписывается по коэффициентам первой строки и имеет вид:

$$\left|\Phi\text{-}\lambda \mathrm{E}\right| = \left(-1\right)^n \left(\lambda^n - p_1\lambda^{n-1} - ... - p_n\right) = \left(-1\right)^n P_n\left(\lambda\right).$$

Таким образом, решая уравнение $P_n\left(\lambda\right) = 0,$ можно определить все собственные значения матрицы Фробениуса Ф, совпадающие с собственными значениями подобной ей матрицы A, связанной с матрицей Ф преобразованием подобия $\Phi = S^{-1}AS.$ Матрица S при этом используется для нахождения собственных векторов матрицы A. Таким образом, основная задача – построение нужной матрицы S. По Данилевскому матрица S строится последовательно с помощью $(n-1)$ – го преобразования подобия, приводящих строки матрицы A, начиная с последней, к виду Фробениуса.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$. Предположим $a_{nn-1} \neq 0$. Разделим $(n-1)-$ столбец матрицы A на a_{nn-1}. Вычтем этот столбец из всех остальных, предварительно умножив на a_{nj}, $j = \overline{1, n-2}$, $j = n$. Непосредственным вычислением несложно проверить, что описанные действия равносильны умножению матрицы A на матрицу M_{n-1} справа:

$$M_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn-1}} & ... & \frac{1}{a_{nn-1}} & -\frac{a_{nn}}{a_{nn-1}} \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Но данное преобразование не является преобразованием подобия. Поэтому умножим слева AM_{n-1} на матрицу M_{n-1}^{-1} (матрица существует, т. к. $a_{nn-1} \neq 0$), где матрица M_{n-1}^{-1} имеет вид

$$M_{n-1}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Преобразование $M_{n-1}^{-1} A M_{n-1}$ не изменяет последней строки матрицы AM_{n-1}. Т. е. после первого шага метода Данилевского получим матрицу $A^{(1)} = M_{n-1}^{-1} A M_{n-1}$ вида

$$A^{(1)}=\left\{a_{ij}^{(1)}\right\}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11}^{(1)} & \dots & \dots & a_{n-1n}^{(1)} \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

последняя строка, которой имеет вид строки Фробениуса.

Второй шаг метода Данилевского аналогичен первому и состоит в приведении второй снизу строки к виду Фробениуса, сохраняя при этом нижнюю строку неизменной. Предположим, что $a_{n-1n-2}^{(1)}\neq 0$. Разделим на него столбец с номером $(n-2)$ и вычтем его из оставшихся столбцов, умножая на $a_{n-1j}^{(1)}$, $j=\overline{1,n-3}$, $j=\overline{n-1,n}$. Описанное преобразование равносильно тому, что $A^{(1)}$ умножается справа на M_{n-2}:

$$M_{n-2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_{n-11}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-12}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & \dots & \dfrac{1}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1n-1}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} & -\dfrac{a_{n-1n}^{(1)}}{a_{n-1n-2}^{(1)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Полученную матрицу умножим на матрицу M_{n-2}^{-1}, получим:

$$A^{(2)}=M_{n-2}^{-1}A^{(1)}M_{n-2}=M_{n-2}^{-1}M_{n-1}^{-1}AM_{n-1}M_{n-2}. \qquad (5)$$

Таким образом, полагая последовательно элементы $a_{n-2n-3}^{(1)}\neq 0,\dots,a_{21}^{(n-2)}\neq 0$ получим на $(n-1)-$ом шаге метода Данилевского матрицу:

$$A^{(n-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Матрица $A^{(n-1)} = M_1^{-1} M_2^{-1} \ldots M_{n-1}^{-1} A M_{n-1} \ldots M_2 M_1 = \Phi = S^{-1} A S$ является искомой матрицей Фробениуса, полученной с помощью преобразования подобия с матрицей $S = M_{n-1} M_{n-2} \ldots M_2 M_1$. Решив уравнение $\mathrm{P_n}(\lambda) = 0$, найдем весь спектр матрицы A.

Предположим теперь, что процесс приведения матрицы A к виду Фробениуса доведен до строки номера k (выполнено $(n-k)-$ шагов) и оказалось, что $a_{kk-1}^{(n-k)} = 0$ (нерегулярный случай). В этом случае следует определить, существует ли в строке с номером k слева от места $(k, k-1)$ отличный от нуля элемент.

I. Пусть имеется такой элемент $a_{ki}^{(n-k)} \neq 0$ $(i < k-1)$, тогда достаточно в матрице $A^{(n-k)}$ поменять местами столбцы с номерами i и $k-1$ и строки с теми же номерами. Проверкой несложно проверить, что данное изменение матрицы является преобразованием подобия с матрицей T:

$$T = \begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & \vdots & 1 & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & & 0 & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(n-k)} = T A^{(n-k)} T, \ T^2 = E, \ T^{-1} = T.$$

Собственные векторы матриц A и Φ, соответствующие одним и тем же собственным значениям, будут различны, но между ними существует связь. Для нахождения собственного вектора необходимо использовать матрицу S.

Пусть $\lambda -$ собственное значение матрицы Фробениуса, а, следовательно, и матрицы A; $y -$собственный вектор матрицы Φ, соответствующий собственному значению λ и выполняется $\Phi y = \lambda y$. С учетом $\Phi = S^{-1}AS$, получим:

$$S^{-1}ASy = \lambda y,\ \ A\underbrace{Sy}_{x} = \lambda \underbrace{Sy}_{x},\ \ Ax = \lambda x. \tag{7}$$

Следовательно, собственный вектор x, соответствующий собственному значению λ для матрицы A, можно вычислить по формуле:

$$x = Sy. \tag{8}$$

Итак, собственные векторы матрицы A легко определяются по собственным векторам матрицы Ф. Имеем $\Phi y = \lambda y$, или

$$\begin{aligned} &p_1 y_1 + p_2 y_2 + ... + p_n y_n = \lambda y_1,\\ &y_1 = \lambda y_2,\\ &y_2 = \lambda y_3,\\ &...\\ &y_{n-1} = \lambda y_n. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как собственный вектор матрицы определяется с точностью до постоянного множителя, положим $y_n = 1$, тогда искомый вектор

$$y = \left[\lambda^{n-1},...,\lambda^2,\lambda,1\right]^T. \tag{10}$$

Тогда

$$x = Sy = M_{n-1}...M_2 M_1 y. \tag{11}$$

Для контроля вычислений в методе можно использовать равенство $p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = \mathrm{sp}A = \mathrm{sp}\Phi$.

II. Пусть не существует элемента $a_{ki}^{(n-k)} \neq 0$ $(i < k-1)$, т.е все элементы матрицы $A^{(n-k)}$ в k-ой строке от 1 до k – нулевые. Матрица $A^{(n-k)}$ в этом случае имеет вид

$$A^{(n-k)} = \begin{bmatrix} B^{(n-k)} & C^{(n-k)} \\ 0 & \Phi^{(n-k)} \end{bmatrix},$$

где

$$B^{(n-k)}=\begin{bmatrix} a_{1\,1}^{(n-k)} & a_{1\,2}^{(n-k)} & \cdots & a_{1\,n}^{(n-k)} \\ a_{2\,1}^{(n-k)} & a_{2\,2}^{(n-k)} & \cdots & a_{2\,n}^{(n-k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1\,1}^{(n-k)} & a_{k-1\,2}^{(n-k)} & \cdots & a_{k-1\,n}^{(n-k)} \end{bmatrix},\quad \Phi^{(n-k)}=\begin{bmatrix} a_{k\,k}^{(n-k)} & \cdots & a_{k\,n-1}^{(n-k)} & a_{k\,n}^{(n-k)} \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\det(A^{(n-k)}-\lambda E)=\det(B^{(n-k)}-\lambda E_{k-1})\cdot\det(\Phi^{(n-k)}-\lambda E_{n-k+1})$, где индексами снизу в правой части обозначены порядки единичных матриц.

Так как матрица $\Phi^{(n-k)}$ есть матрица Фробениуса, то её характеристический многочлен выписывается непосредственно по виду первой строки. Значит, для нахождения многочлена $\det(A^{(n-k)}-\lambda E)$ достаточно привести к канонической форме Фробениуса лишь квадратичную матрицу $B^{(n-k)}$ порядка $k-1<n$.

Расчётное задание

В соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, используя метод Данилевского, найти все собственные значения и соответствующие им собственные вектора матрицы. Найденные значения сравнить с результатами, полученными с помощью математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.).

1. $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},\quad n=10(1)20,\ \text{где}\ a_i=2+\frac{10}{1+i},$$

$i=\overline{1,n};\ b_i=1+\dfrac{i}{1+i},\ i=\overline{1,n-1}.$

2. $$A=D+kC,\ D=\begin{bmatrix} 1{,}5 & 1{,}6 & 1{,}7 & 1{,}8 \\ 1{,}6 & 2{,}5 & 1{,}2 & 1{,}3 \\ 1{,}7 & 1{,}2 & 3{,}5 & 1{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 1{,}4 & 4{,}5 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1 \end{bmatrix},\ k=0(1)5.$$

3. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & c_{n-4} & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$, $n = 10(1)20$, где $a_i = a + \dfrac{k}{10+i}$,

$i = \overline{1,n}$, $a = 5(5)40$, $k = 10(1)20$; $b_i = b + \dfrac{10}{i}$, $i = \overline{1,n-1}$, $b = 0(1)10$;

$c_i = c + \dfrac{1+i}{10}$, $i = \overline{1,n-2}$, $c = 2(1)10$.

4. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$, $n = 10(1)50$, где $a_i = 4 - \dfrac{i}{1+i}$,

$i = \overline{1,n}$; $b_i = 2 + \dfrac{i+1}{10i}$, $i = \overline{1,n-1}$.

5. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & c_{n-4} & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$, $n = 10(1)30$, где $a_i = a + \dfrac{ki}{10}$,

$i = \overline{1,n}$, $a = 0(1)10$, $k = 2(1)20$; $b_i = b - \dfrac{i^2}{k}$, $i = \overline{1,n-1}$, $b = 5(5)45$;

$c_i = c + \dfrac{1}{10+i}$, $i = \overline{1,n-2}$, $c = 1(1)15$.

6. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$, $n = 10(1)20$, где $a_i = 4 + \dfrac{20}{1+i}$,

$i = \overline{1,n}$; $b_i = 1 + \dfrac{i}{1+i}$, $i = \overline{1,n-1}$.

7. $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_{n-4} & c_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_{n-2} & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$, $n = 10(1)20$, где

$a_i = a + 0{,}1 \cdot k \cdot i$, $i = \overline{1,n}$, $a = 5(0{,}5)10$, $k = 2(2)20$; $b_i = b - \dfrac{0{,}1 \cdot i}{m}$,

$i = \overline{1,n-1}$, $b = 0(0{,}1)2$, $m = 1(1)10$; $c_i = c + \dfrac{1}{10+i}$, $i = \overline{1,n-2}$, $c = 1(0{,}1)2$.

8. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 5 & 0 & -2 & & & & \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 3 & & & \\ & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & & \\ & & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 & \\ & & & 1 & 0 & 8 & 0 & -2 \\ & & & & 7 & 0 & 11 & 0 \\ & & & & & -2 & 0 & 13 \end{bmatrix}$.

9. $A = D + kC$, $D = \begin{bmatrix} 11{,}1 & 44{,}4 & 55{,}5 \\ 44{,}4 & 22{,}2 & 44{,}4 \\ 55{,}5 & 44{,}4 & 33{,}3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k = 0(1)13$.

10. $A = D + kC$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k = 1(1)10$.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & & & & \\ 2 & 5 & 6 & & & \\ & 6 & 7 & 8 & & \\ & & 8 & 3 & 0 & \\ & & & 0 & 5 & 2 \\ & & & & 2 & 12 \end{bmatrix}$. **12.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 & & & & \\ 4 & 7 & 8 & & & \\ & 8 & 3 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ & & & 3 & 5 & 4 \\ & & & & 4 & 7 \end{bmatrix}$.

13. Напишите программу в пакете Mathematica для нахождения всех собственных значений и векторов матрицы методом Данилевского в нерегулярном случае. Рассмотреть следующие матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 12 & 6 \\ -6 & -8 & -12 & -6 \\ 3 & 6 & 8 & 3 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 & -2 \\ -14 & -6 & -8 & -10 \\ -4 & -2 & 6 & -2 \\ 26 & 22 & 20 & 26 \end{pmatrix}$, г) $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы

1. Математическое обоснование метода Данилевского.

2. Как вычисляются собственные значения и собственные вектора в регулярном случае метода Данилевского.

3. Как вычисляются собственные значения и собственные вектора в нерегулярном случае метода Данилевского.

4. Подсчитайте число арифметических операций, затрачиваемых для приведения матрицы к матрице Фробениуса.

Литература к лабораторной работе №13: [4, с. 130–137], [5, с. 130–139], [6, с. 233–241], [8, с. 63–74] [9, с. 285–295].

Лабораторная работа № 14. Степенной метод

Степенной метод решает частичную проблему собственных значений и собственных векторов, в предположении, что матрица A является матрицей простой структуры, т. е. имеет ровно n линейно независимых векторов (базис) $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$. Пусть нумерация этих векторов произведена в соответствии с убыванием по модулю соответствующим им собственных чисел: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Вычисление максимального по модулю собственного значения λ_1 и соответствующего ему собственного вектора x_1

Рассмотрим три случая:

1) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, т. е. существует одно максимальное по модулю собственное значение.

2) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \geq |\lambda_{t+2}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\lambda_t$, т. е. существует t максимальных по модулю собственных значений равных знаков.

3) $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, $\lambda_1 = -\lambda_2$, т. е. существует два максимальных по модулю собственных значения, и они противоположны по знаку.

1) Пусть у матрицы A существует одно максимальное по модулю собственное значение: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Выберем произвольный вектор $y^{(0)}$, и запишем его разложение по базису $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$:

$$y^{(0)} = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)} + \alpha_3 x^{(3)} + \ldots + \alpha_n x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(i)}. \tag{1}$$

Затем построим следующую последовательность векторов:

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i x^{(i)},$$

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \alpha_i x^{(i)},$$

$$\ldots$$

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \alpha_i x^{(i)}. \tag{2}$$

Введя новое обозначение $\beta^{(i)} = \alpha_i x^{(i)}$, преобразуем (2) к виду

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \beta^{(i)}.$$

Тогда s-ая координата вектора $y^{(k)}$ имеет вид $(y^{(k)})_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \beta_s^{(i)}$, где $\beta_s^{(i)} = (\alpha_i x^{(i)})_s$.

Обозначим $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} = \mu_i$ и рассмотрим отношение $\dfrac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s}$:

$$\frac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} = \frac{\lambda_1^{k+1}\beta_s^{(1)} + \lambda_2^{k+1}\beta_s^{(2)} + \ldots + \lambda_n^{k+1}\beta_s^{(n)}}{\lambda_1^{k}\beta_s^{(1)} + \lambda_2^{k}\beta_s^{(2)} + \ldots + \lambda_n^{k}\beta_s^{(n)}} =$$

$= \lambda_1 \dfrac{\beta_s^{(1)} + \mu_2^{k+1}\beta_s^{(2)} + \ldots + \mu_n^{k+1}\beta_s^{(n)}}{\beta_s^{(1)} + \mu_2^{k}\beta_s^{(2)} + \ldots + \mu_n^{k}\beta_s^{(n)}}$. Так как $|\mu_i| < 1$, $i = \overline{2, n}$, то верно соотношение $\dfrac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} = \lambda_1\left(1 + O\left(\mu_2^{k+1}\right)\right) = \lambda_1 + O\left(\mu_2^k\right)$.

Значит $\dfrac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} \to \lambda_1$, при $k \to \infty$ для каждого $i = \overline{2, n}$, при котором $\left(x^{(1)}\right)_i \neq 0$.

Значит, в качестве максимального по модулю собственного значения можно взять

$$\lambda_1 \approx \frac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s}. \tag{3}$$

При достаточно больших k в представлении (2) вектора $y^{(k)}$ все слагаемые справа, начиная со второго, будут иметь значения меньше принятой погрешности вычислений, и сохранится лишь первое слагаемое. Отсюда получается правило для приближенного нахождения собственного вектора $x^{(1)}$, соответствующего максимальному по модулю собственному значению λ_1:

$$x^{(1)} \approx y^{(k)}. \tag{4}$$

Рассмотренный алгоритм вычисления λ_1 может приводить к переполнению разрядной сетки компьютера или машинному нулю.

Этот недостаток можно исправить путем нормирования вектора $y^{(k)}$ после каждого шага.

Введем $z^{(k)} = \dfrac{y^{(k)}}{\left\| y^{(k)} \right\|}$, $y^{(k+1)} = Az^{(k)}$ и будем рассматривать соотношения $\dfrac{\left(y^{(k+1)}\right)_s}{\left(z^{(k)}\right)_s}$, $s = \overline{1,n}$. Если значения близки, то максимальное по модулю собственное значение вычислено, если нет, то продолжаем вычисления. Таким образом

$$\lambda_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(y^{(k+1)}\right)_s}{\left(z^{(k)}\right)_s}, \quad x^{(1)} \approx z^{(k)}. \tag{5}$$

Можно утверждать, что сходимость итерационного процесса (2), (3) является линейной, т.е итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой в основном определяется величиной отношения $|\mu_2| = \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$. Значит, сходимость будет тем лучше, чем сильнее доминирует в спектре матрицы A собственное значение λ_1. Подмеченный факт вместе со свойством 4 собственных пар позволяет существенно ускорить нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы A путём удачного смещения её спектра, чему могут способствовать какие-либо априорные сведения об исходной задаче.

Например, пусть матрица A шестого порядка имеет собственные числа $\lambda_i \in \{100, 99, 98, 97, 96, 95\}$. Непосредственное применение степенного метода к вычислению λ_1 порождает итерационный процесс, сходящийся со скоростью порядка $\left(\dfrac{99}{100}\right)^k$. Если же степенной метод применить к матрице $B = A - 97E$, то для нахождения максимального по модулю собственного значения μ_1 матрицы B можно построить итерационный процесс со скоростью $\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$, и затем определить $\lambda_1 = 97 + \mu_1$.

Запишем алгоритм степенного метода с пошаговой нормировкой векторов:

Шаг 1. Ввести квадратную матрицу A порядка n, задать n-мерный нормированный вектор z.

Шаг 2. Вычислить вектор $y = Az$.

Шаг 3. Вычислить отношения $\lambda_i = \dfrac{y_i}{z_i}$ координат векторов y и x, таких, что $|z_i| > \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое число (допуск).

Шаг 4. Если $\left|\max\limits_i \lambda_i - \min\limits_i \lambda_i\right| < \varepsilon$, где ε – требуемая точность, то работу алгоритма прекратить и в качестве максимального по модулю собственного значения выбрать усреднённое по i значение λ_i. В качестве соответствующего собственного вектора взять z, если $\left|\max\limits_i \lambda_i - \min\limits_i \lambda_i\right| \geq \varepsilon$, то положить $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ и перейти к шагу 2 алгоритма. (Правильнее было бы критерием остановки выбрать малость нормы двух приближений $\lambda^{(k+1)}$ и $\lambda^{(k)}$ на $k+1$-й и k-й итерациях: $\left\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right\| < \varepsilon.$)

Вычисление максимального по модулю собственного значения λ_1 и соответствующего ему собственного вектора x_1 для симметричной матрицы

Если матрица A симметричная, можно применить метод с более высокой скоростью сходимости к максимальному по модулю собственному значению λ_1. Симметричная матрица имеет полную систему собственных векторов $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, ..., $x^{(n)}$, и их всегда можно считать ортонормированными.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\left(y^{(k+1)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)}$:

$$\frac{\left(y^{(k+1)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)} \overset{y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \alpha_i x^{(i)}}{=} \frac{\lambda_1^{2k+1}\alpha_1^2 + \lambda_2^{2k+1}\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n^{2k+1}\alpha_n^2}{\lambda_1^{2k}\alpha_1^2 + \lambda_2^{2k}\alpha_2^2 + \ldots + \lambda_n^{2k}\alpha_n^2}.$$

Обозначим $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} = \mu_i$, тогда

$$\frac{\left(y^{(k+1)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)} = \frac{\alpha_1^2 + \mu_2^{2k+1}\alpha_2^2 + \ldots + \mu_n^{2k+1}\alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \mu_2^{2k}\alpha_2^2 + \ldots + \mu_n^{2k}\alpha_n^2} = \lambda_1(1 + O(\mu_2^{2k+1})) = \lambda_1 + O(\mu_2^{2k}),$$

и в качестве максимального по модулю собственного значения можно взять

$$\lambda_1 \approx \frac{\left(y^{(k+1)}, y^{(k)}\right)}{\left(y^{(k)}, y^{(k)}\right)}. \tag{6}$$

Базирующая на таком подходе модификация степенного метода, называется методом скалярных произведений или методом частных Рэлея. Отметим, что скорость сходимости предложенного алгоритма будет выше, чем у степенного метода $\left(O(\mu_2^{2k}) \text{ против } O(\mu_2^{k})\right)$. Поэтому точность приближенного равенства

$$x^{(1)} \approx y^{(k)} \tag{7}$$

для соответствующего собственного вектора может оказаться недостаточной.

Запишем алгоритм метода скалярных произведений с пошаговой нормировкой векторов:

Шаг 1. Ввести квадратную симметричную матрицу A порядка n, задать n-мерный нормированный вектор z, и начальное приближение λs для начального сравнения (например 0).

Шаг 2. Вычислить вектор $y = Az$.

Шаг 3. Вычислить отношение нового приближения к максимальному по модулю собственному вектору $\lambda n = \dfrac{(y, z)}{(z, z)}$.

Шаг 4. Если $|\lambda n - \lambda s| < \varepsilon$, где ε – требуемая точность, то работу алгоритма прекратить и в качестве максимального по модулю собственного значения выбрать λn, в качестве соответствующего собственного вектора взять z, если $|\lambda n - \lambda s| \geq \varepsilon$, то положить $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ и перейти к шагу 2 алгоритма.

2) Рассмотрим случай, когда существует кратное максимальное по модулю собственное значение:

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \ge |\lambda_{t+2}| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\lambda_t$.

Найдём отношение:

$$\frac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} = \frac{\lambda_1^{k+1}\beta_s^{(1)} + \ldots + \lambda_1^{k+1}\beta_s^{(t)} + \lambda_{t+1}^{k+1}\beta_s^{(t+1)} + \ldots + \lambda_n^{k+1}\beta_s^{(n)}}{\lambda_1^{k}\beta_s^{(1)} + \ldots + \lambda_1^{k}\beta_s^{(t)} + \lambda_{t+1}^{k}\beta_s^{(t+1)} + \ldots + \lambda_n^{k}\beta_s^{(n)}}.$$

Обозначим $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} = \mu_i$ и получим

$$\frac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} = \lambda_1 \frac{\beta_s^{(1)} + \ldots + \beta_s^{(t)} + \mu_{t+1}^{k+1}\beta_s^{(t+1)} + \ldots + \mu_n^{k+1}\beta_s^{(n)}}{\beta_s^{(1)} + \ldots + \beta_s^{(t)} + \mu_{t+1}^{k}\beta_s^{(t+1)} + \ldots + \mu_n^{k}\beta_s^{(n)}} =$$

$$= \lambda_1(1 + O(\mu_{t+1}^{k+1})) = \lambda_1 + O(\mu_{t+1}^{k}).$$

Значит

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_t = \lim_{k\to\infty} \frac{\left(y^{(k+1)}\right)_s}{\left(y^{(k)}\right)_s}, \ x^{(1)} \approx y^{(k)}. \tag{8}$$

Для нахождения остальных $t-1$ собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1, нужно изменить начальный вектор $y^{(0)}$ и вновь проделать все указанные выше вычисления.

3) Рассмотрим случай двух наибольших по модулю собственных значений, отличающихся знаком: $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$, $\lambda_1 = -\lambda_2$. Найдём отношение:

$$\frac{(y^{(k+1)})_s}{(y^{(k)})_s} = \frac{\lambda_1^{k+1}\beta_s^{(1)} + (-1)^{k+1}\lambda_1^{k+1}\beta_s^{(2)} + \lambda_3^{k+1}\beta_s^{(3)} + \ldots + \lambda_n^{k+1}\beta_s^{(n)}}{\lambda_1^{k}\beta_s^{(1)} + (-1)^{k}\lambda_1^{k}\beta_s^{(2)} + \lambda_3^{k}\beta_s^{(3)} + \ldots + \lambda_n^{k}\beta_s^{(n)}} \Rightarrow$$

не существует предела $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\left(y^{(k+1)}\right)_s}{\left(y^{(k)}\right)_s}$, поскольку из этой последовательности можно выделить две сходящиеся к разным пределам подпоследовательности.

Рассмотрим вместо предыдущего отношения новое отношение

$$\frac{(y^{(k+2)})_s}{(y^{(k)})_s} = \frac{\lambda_1^{k+2}\beta_s^{(1)} + (-1)^{k+2}\lambda_1^{k+2}\beta_s^{(2)} + \lambda_3^{k+2}\beta_s^{(3)} + \ldots + \lambda_n^{k+2}\beta_s^{(n)}}{\lambda_1^{k}\beta_s^{(1)} + (-1)^{k}\lambda_1^{k}\beta_s^{(2)} + \lambda_3^{k}\beta_s^{(3)} + \ldots + \lambda_n^{k}\beta_s^{(n)}} =$$

$$=\lambda_1^2(1+O(\mu_3^{k+2}))=\lambda_1^2+O(\mu_3^k),\ \text{где}\ \frac{\lambda_i}{\lambda_1}=\mu_i.$$

Т. е.

$$\lambda_1^2 \approx \frac{(y^{(k+2)})_s}{(y^{(k)})_s}. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_1 \approx \sqrt{\dfrac{(y^{(k+2)})_s}{(y^{(k)})_s}}$. Поскольку $\lambda_1=-\lambda_2$, получаем, что $y^{(k)} \approx \lambda_1^k\alpha_1 x^{(1)}+(-\lambda_1)^k\alpha_2 x^{(2)}$, $y^{(k+1)} \approx \lambda_1^{k+1}\alpha_1 x^{(1)}+(-\lambda_1)^{k+1}\alpha_2 x^{(2)}$. Тогда $y^{(k+1)}+\lambda_1 y^{(k)}=2\lambda_1^{k+1}\alpha_1 x^{(1)}$, $y^{(k+1)}-\lambda_1 y^{(k)}=2(-\lambda_1)^{k+1}\alpha_2 x^{(2)}$. Откуда

$$x^{(1)}=\frac{1}{2\lambda_1^{k+1}\alpha_1}\left(y^{(k+1)}+\lambda_1 y^{(k)}\right),\ x^{(2)}=\frac{1}{2(-\lambda_1)^{k+1}\alpha_2}\left(y^{(k+1)}-\lambda_1 y^{(k)}\right). \tag{10}$$

Значит в качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_1 можно взять вектор $x^{(1)}=y^{(k+1)}+\lambda_1 y^{(k)}$, а в качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2 можно взять вектор $x^{(2)}=y^{(k+1)}-\lambda_1 y^{(k)}$.

Вычисление λ_2, x_2 и λ_n, x_n степенным методом

Знание максимального по модулю собственного значения λ_1 матрицы A простой структуры, получаемого в степенном методе, в предположении, что $|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|\ge|\lambda_4|\ge\ldots\ge|\lambda_n|$, позволяет без дополнительных затрат найти приближённое значение второго по модулю собственного значения λ_2. Это можно сделать на основе свойства 2 собственных пар по формуле

$$\lambda_2 \approx \frac{\left(y^{(k+1)}\right)_s-\lambda_1\left(y^{(k)}\right)_s}{\left(y^{(k)}\right)_s-\lambda_1\left(y^{(k-1)}\right)_s}, \tag{11}$$

вычисляя фигурирующие в правой части отношения для достаточно больших k и для всех $s=\overline{1,n}$, при которых абсолютная величина знаменателя не меньше некоторого порогового значения, и затем усредняя результат.

В качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_2 можно взять вектор

$$x^{(2)} = y^{(k)} - \lambda_1 y^{(k-1)}. \tag{12}$$

Свойство 2 собственных пар позволяет применить степенной метод непосредственно для нахождения наименьшего по модулю собственного значения λ_n знакоопределённой матрицы A в случае, когда наибольшее по модулю собственное значение λ_1 уже найдено. При этом предполагается, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$. Для этого достаточно найти наибольшее по модулю собственное значение μ_1 матрицы $A - \lambda_1 E$. Соответствующий μ_1 собственный вектор матрицы $A - \lambda_1 E$ и число $\lambda_n = \mu_1 + \lambda_1$ будут образовывать искомую собственную пару.

Степенной метод вычисления минимального собственного значения эрмитовой положительно определённой матрицы

Задача вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \ge 0$ легко сводится к задаче вычисления максимального собственного значения матрицы $\beta \cdot E - A \ge 0$, где $\beta \ge \rho(A)$, так как $\rho(\beta \cdot E - A) = \beta - \lambda_{\min}(A)$.

Оценку для $\rho(A)$ легко найти: $\beta = \|A\|_\infty \ge \rho(A)$. Тогда итерационный процесс $x^{(0)} \ne 0$, $x^{(k+1)} = \left(\|A\|_\infty E - A\right)\dfrac{x^{(k)}}{\left\|x^{(k)}\right\|}$, $k = 0, 1, \ldots$, называется степенным методом вычисления минимального собственного значения матрицы $A = A^* \ge 0$.

$\left(\|A\|_\infty - \left\|x^{(k)}\right\|\right) \to \lambda_{\min}(A)$, если проекция начального вектора $x^{(0)}$ на линейную оболочку собственных векторов, соответствующих $\lambda_{\min}(A)$, не равна 0.

Справедливость этого утверждения является следствием сходимости степенного метода вычисления максимального собственного значения матрицы $B = \|A\|_\infty E - A$.

Расчётное задание

1. Обоснуйте формулы (11) и (1) данной лабораторной работы.

Используя варианты заданий из лабораторной работы № 13, в соответствии с вариантом задания, выданным преподавателем, выполнить:

2. Вычислить наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$), используя степенной итерационный метод.

3. Вычислить второе наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, используя степенной итерационный метод и результаты, полученные в п. 1.

4. Вычислить минимальное по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, используя степенной итерационный метод. Для обращения матрицы использовать метод Гаусса.

5. Все полученные значения сравнить с результатами, полученными с помощью метода Данилевского, а также с помощью математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.), сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Формулы для вычисления максимального по модулю собственного значения матрицы и соответствующего ему собственного вектора в случае распределения спектра:

а) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$.

б) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \ge |\lambda_{t+2}| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_t$.

в) $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$, $\lambda_1 = -\lambda_2$.

2. Формулы для вычисления максимального по модулю собственного значения симметричной матрицы и соответствующего ему собственного вектора в случае распределения спектра: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$. Преимущества таких формул.

3. Формулы для вычисления λ_2, x_2 и λ_n, x_n степенным методом.

4. Степенной метод вычисления минимального собственного значения эрмитовой положительно определённой матрицы.

Литература к лабораторной работе №14: [1, с. 315–320], [2, с. 76–81], [3, с. 141–153], [4, с. 149–157], [5, с. 161–172], [6, с. 268–289], [7, с. 340–353], [8, с. 74–80, 85–86], [9, с. 329–358].

Лабораторная работа № 15. Итерационный метод вращения для полной проблемы собственных значений (метод Якоби)

Метод Якоби относится к итерационным методам решения полной проблемы собственных значений. Он применяется к эрмитовым матрицам (в комплексном случае) и к симметричным (в действительном случае). Воспользуемся следующим результатом: любая симметрическая матрица может быть приведена преобразованием подобия с ортогональной матрицей к диагональному виду

$$V^{-1}AV = \Lambda, \tag{1}$$

где V – ортогональная матрица, $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$ – диагональная матрица, элементы которой являются собственными значениями матрицы A. Поскольку для ортогональной матрицы обратная совпадает с транспонированной ($V^{-1} = V^T$), то равенство (1) равносильно следующему:

$$V^T AV = \Lambda. \tag{2}$$

Это дает возможность построить множество алгоритмов приближенного вычисления матрицы Λ, отличающихся между собой способами построения матрицы V и основанных на следующем простом факте. Пусть каким-либо ортогональным преобразованием с матрицей $\tilde{V}$ матрица A приведена к матрице $\tilde{\Lambda}$ мало отличающейся от диагональной и справедливо равенство

$$V^T AV = \tilde{\Lambda}, \tag{3}$$

где

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix}.$$

Собственное значение матриц A и $\tilde{\Lambda}$ совпадают. При этом если все недиагональные элементы матрицы $\tilde{\Lambda}$, λ_{ij} $(i \neq j)$, равны нулю, то равенства (2) и (3) совпадают и собственные значения матрицы A равны диагональным элементам $\tilde{\lambda}_i$ матрицы $\tilde{\Lambda}$. Если же недиагональные элементы матрицы $\tilde{\Lambda}$, λ_{ij} $(i \neq j)$, не все равны нулю, но достаточно малы, то собственные значения матрицы A будут близки к диагональным элементам $\tilde{\lambda}_i$ матриц $\tilde{\Lambda}$ и они могут быть приняты за приближенные величины этих значений.

Для использования равенства (2) построим последовательность ортогональных преобразований, позволяющих неограниченно уменьшать модули недиагональных элементов матрицы A. Меру близости матрицы A к диагональному виду будем определять с помощью следующей величины:

$$t(A) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} a_{ij}^2. \tag{4}$$

По заданной матрице A построим бесконечную последовательность матриц $A^{(0)} = A$, $A^{(1)}$, ..., $A^{(m)}$, ..., такую что $A^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} \Lambda$, $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n]$. При этом, каждая последующая матрица $A^{(m)}$ получается из предыдущей $\mathrm{A}^{(m-1)}$ с помощью преобразования подобия со следующей ортогональной матрицей вращения:

$$T_{kl} = \begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ldots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& \cos\varphi &&&& -\sin\varphi &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&&&& \ldots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& \sin\varphi &&&& \cos\varphi &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ldots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix},$$

которая отличается от единичной только четырьмя элементами, расположенными на пересечении строк и столбцов с номерами k и l (без ограничения общности будем считать, что $k < l$).

Образуем матрицу $B = AT_{kl}$. Она отличается от матрицы A лишь столбцами с номерами k и l, при этом

$$b_{ik} = a_{ik}\cos\varphi + a_{il}\sin\varphi, \tag{5}$$

$$b_{il} = -a_{ik}\sin\varphi + a_{il}\cos\varphi, \tag{6}$$

$$b_{ij} = a_{ij},\ j \neq k,\ j \neq l,\ i = 1, 2, ..., n,$$

и

$$b_{ik}^2 + b_{il}^2 = a_{ik}^2 + a_{il}^2. \tag{7}$$

Далее образуем матрицу $C = T_{kl}^T B = T_{kl}^T \mathrm{A} T_{kl}$, отличающуюся от матрицы B только строками с номерами k и l (от A строками и столбцами с номерами k и l):

$$c_{ki} = b_{ki}\cos\varphi + b_{li}\sin\varphi, \tag{8}$$

$$c_{li} = -b_{ki}\sin\varphi + b_{li}\cos\varphi, \tag{9}$$

$$c_{ji} = b_{ji},\ j \neq k,\ j \neq l,\ i = 1, 2, ..., n,$$

и

$$c_{ki}^2 + c_{li}^2 = b_{ki}^2 + b_{li}^2. \tag{10}$$

Таким образом, при указанном преобразовании вращения недиагональные элементы a_{ik}, a_{il}, a_{li}, a_{ki} меняются так, что неизменными остаются $a_{ik}^2 + a_{il}^2$ и $a_{ki}^2 + a_{li}^2$. Элементы a_{kl} ($a_{kl} = a_{lk}$) также является недиагональными. Поэтому изменение величины $t(A)$ полностью определяется изменением a_{kl}^2. Для того, чтобы максимально уменьшить $t(A)$ за одно вращение (одно преобразование подобия), выберем угол поворота φ таким образом, чтобы a_{kl} обратился в ноль. Из формул (5) – (9) получим

$$c_{kl} = b_{kl}\cos\varphi + b_{ll}\sin\varphi = \left(-a_{kk}\sin\varphi + a_{kl}\cos\varphi\right)\cos\varphi + \left(-a_{kl}\sin\varphi + a_{ll}\cos\varphi\right)\sin\varphi =$$
$$= -a_{kk}\sin\varphi\cos\varphi + a_{kl}\cos^2\varphi - a_{kl}\sin^2\varphi + a_{ll}\cos\varphi\sin\varphi = \left(a_{ll} - a_{kk}\right)\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$+ a_{kl}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(a_{ll} - a_{kk}\right)\sin2\varphi + a_{kl}\cos2\varphi = 0.$$

Полагая $c_{kl} = 0$, получим

$$\frac{1}{2}\sin2\varphi\left(a_{kk} - a_{ll}\right) - a_{kl}\cos2\varphi = 0,$$

или

$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2a_{kl}}{a_{kk} - a_{ll}},$$

для $|\varphi| \le \pi/4$. Откуда имеем

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)},\ \sin\varphi = \mathrm{sign}\mu\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)},\ \mu = \frac{2a_{kl}}{a_{kk} - a_{ll}}.$$

Несложно убедиться , что при указанном вращении максимально уменьшается сумма квадратов недиагональных элементов матрицы A:

$$\sum_{i\ne j}^{n} c_{ij}^2 = \sum_{i\ne j}^{n} a_{ij}^2 - 2a_{kl}^2 + \frac{1}{2}\left[\left(a_{ll} - a_{kk}\right)\sin2\varphi + 2a_{kk}\cos2\varphi\right]^2 = \sum_{i\ne j}^{n} a_{ij}^2 - 2a_{kl}^2.$$

Таким образом, если a_{kl} −максимальный по модулю недиагональный элемент матрицы A, то преобразование подобия с матрицей T_{kl} максимально уменьшает величину $t\left(A\right)$.

Выбирая последовательность таких преобразований, аннулирующих недиагональные элементы, можно получить монотонную последовательность $t\left(A^{(0)}\right) > t\left(A^{(1)}\right) > \ldots > t\left(A^{(m)}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Значит, последовательность матриц $\left\{A^{(m)}\right\}_{m=0}^{\infty}$ сходится к диагональной матрице Λ, при этом, $a_{ii}^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$

На практике вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока при некотором m не выполнится условие $\left|t\left(A^{(m)}\right)\right| < \varepsilon$. Поскольку собственными векторами диагональной матрицы являются векторы e_i и $A^{(m)} \cong \Lambda$, то достаточно хорошим приближением к собственным вектора матрицы A будут служить столбцы матрицы $T = T_{k_0 l_0}^{(0)} T_{k_1 l_1}^{(1)} \ldots T_{k_m l_m}^{(m)}$.

Рассмотренный метод преобразований подобия с ортогональной матрицей требует выбора среди недиагональных элементов наибольшего по модулю. При этом скорость убывания $t\left(A\right)$ будет наибольшей, однако в этом случае потребуется $n\left(n-1\right)$ переборов всех недиагональных элементов, что существенно снижает эффективность алгоритма. Существуют более экономичные стратегии, основанные на аннулировании так называемого оптимального элемента. Например, можно взять наибольшую из сумм квадратов недиагональных элементов строк

$$\sigma_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2 , \; i = 1, 2, \; ..., n,$$

а в ней выбрать наибольший по модулю элемент. Его нахождение потребует всего $2n - 1$ переборов.

Расчётное задание

1. Используя метод вращений, найти все собственные значения и соответствующие им собственные вектора матрицы с точностью ($\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$) для матриц из лабораторной работы 13. Найденные значения сравнить с результатами, полученными помощью метода Данилевского, итерационного степенного метода и с помощью математического пакета (Mathematica, MathCad и т.д.).

Контрольные вопросы

1. Для каких матриц применим метод Якоби?
2. Математическое обоснование метода Якоби.

Литература к лабораторной работе №15: [3, с. 161–171], [4, с. 157–161], [5, с. 174–186], [6, с. 289–304], [7, с. 347–353], [8, с. 81–87].

Литература к теме "Спектральные задачи линейной алгебры"

Основная

1. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков.* – М.: Физматлит, Лаборатория Базовых Знаний, 2001.– 632 с.
2. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях / *Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков.* – М: Высшая школа, 2000. – 190 с.
3. *Вержбицкий, В.М.* Основы численных методов / *В.М. Вержбицкий.* – М.: Высшая школа, 2002.– 847 с.
4. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – М.: Наука, 1976. – 303 с.

5. *Крылов, В. И.* Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный* – Мн.: Наука и техника, 1985.– 279 с.
6. *Крылов, В. И.* Вычислительные методы высшей математики / *В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И Монастырный.* В 2 т. – Т. 1 – Минск: Выш. ш., 1972. – 584 с.
7. *Мысовских, И.П.* Лекции по методам вычислений / *И.П. Мысовских* – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1998.– 472 с.
8. Сборник задач по методам вычислений под ред. *П. И. Монастырного*.– М.: Наука, 1994. – 320 с.
9. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры / *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева* – 3-е изд., стер.– СПб.: Лань, 2002.– 733 с.

Дополнительная

10. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / *Н. С. Бахвалов.*– 2-е изд.– М.: Наука, 1975. – 632 с.
11. *Березин, И. С.* Методы вычислений / *И. С. Березин, Н. П. Жидков*. В 2 т. – Т. 2 – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
12. *Волков, Е. А.* Численные методы / *Е. А. Волков*. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
13. *Дробышевич, В. И.* Задачи по вычислительной математике / *В. И. Дробышевич, В. П. Дымкиков, Г. С. Ривич.* – М.: Наука, 1980. – 144 с.
14. *Самарский, А. А.* Задачи и упражнения по численным методам / *А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. С. Самарская*. – М.:Эдиториал УРСС, 2000.– 207 с.
15. *Турчак, Л. И.* Основы численных методов / *Л. И. Турчак.* – М.: Наука, 1987. – 320 с.
16. http://www.srcc.msu.su/num_anal – тематический сервер по численному анализу.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Кравчук Анжелика Ивановна
Кремень Елена Васильевна
Кремень Юрий Алексеевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

Задания и методические рекомендации
по вычислительному практикуму
для студентов специальностей
G31 03 01 «Математика»

Технический редактор *Г. М. Романчук*
Корректор *Л. Н. Масловская*

Ответственный за выпуск *Ю.А. Кремень*

Подписано в печать __.__.2006. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. ____. Уч.-изд.л. . Тираж 100 экз. Зак.

Белорусский государственный университет.
Лицензия ЛВ №315 от 14.07.98.
220050, Минск, пр. Ф. Скорины,4.

Отпечатано в издательском центре БГУ.
220030, Минск, ул. Красноармейская, 6.