Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана» (национальный исследовательский университет)

Кафедра «Прикладная математика»

Курсовая работа

по дисциплине «Численные методы решения задач математической физики»

Изгиб стержня

Выполнил студент группы ФН2-71Б *Голубенко К. М.*

Научный руководитель к.ф-м.н. доцент кафедры ФН-2 *Родин А.С.*

Москва — 2021

Оглавление

1. Введение

На неподвижном основании горизонтально установлен упругий стержень. Один конец стержня защемлен, другой свободен. К свободному концу центрально приложена сжимающая сила P. Известны длина стержня l, модуль Юнга E. Силой тяжести в данной работе принебрегаем.

2. Статический случай

Рассмотрим стержень в простейшем одномерном случае.

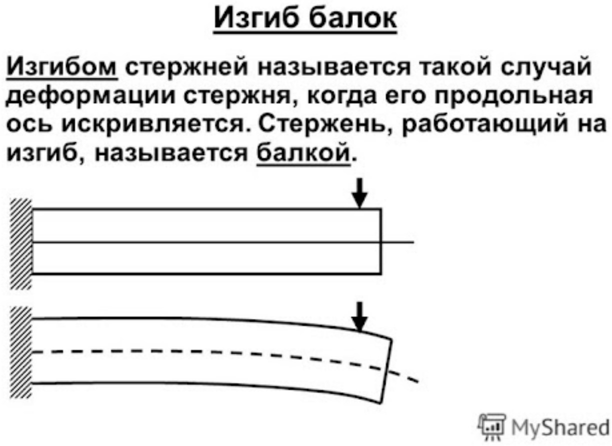

Рис. 2.1. Одномерный случай

Пусть $u(x)$ - отклонение стержня от оси Ox. Тогда уравнение равновесия будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, u(0) = 0, u(l) = u_l. \tag{1}$$

где σ — внутреннее напряжение. Воспользуемся законом Гука: $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и получим систему:

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0, \\ u(0) = 0, \qquad u(l) = u_l. \end{cases} \tag{2}$$

Воспользуемся методом дискретизации Галеркина. Получим:

$$E\int\limits_0^l \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} N_i dx = 0, \tag{3}$$

где N_i - базисные функции вида:

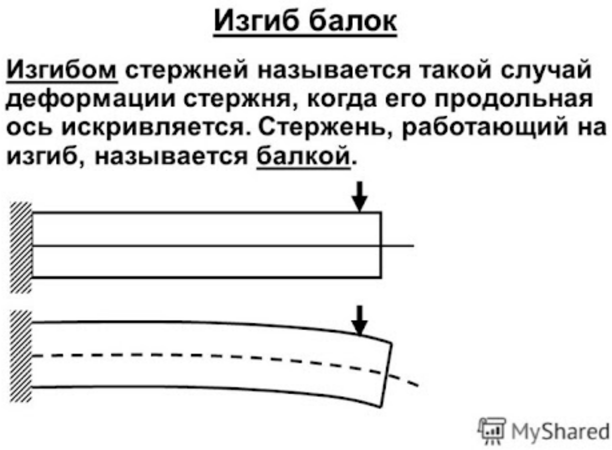

Рис. 2.2. Одномерный случай

Преобразуем:

$$E\int\limits_0^l \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}N_i dx = E\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial u}{\partial x}N_i\big) - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx = E\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial u}{\partial x}N_i\big)\Big)dx - \\ -E\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx = 0, \quad (4)$$

где $E\int\limits_0^l \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial u}{\partial x}N_i\big)\Big)dx = 0$.

Заменим точное решение $u(x)$ на приближенное $\hat{u}$:

$$u \approx \hat{u} = \sum_{j=0}^{n} u_j N_j. \quad (5)$$

Подставим полученное выражение в 4:

$$-Eu_{i-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\frac{\partial N_{i-1}}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx - Eu_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\Big(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx - Eu_{i+1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\Big(\frac{\partial N_{i+1}}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx = 0, \quad (6)$$

где $i = \overline{1, n-2}$.

Найдем значения коэффициентов уравнений:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\frac{\partial N_{i-1}}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\Big(\frac{1}{x_{i-1}-x_i}\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\Big)dx = -\frac{1}{h} = a_i,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\Big(\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)^2 dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(\frac{1}{x_i-x_{i-1}}\Big)^2 dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\Big(\frac{1}{x_i-x_{i+1}}\Big)^2 dx = \frac{2}{h} = b_i, \quad (7)$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\Big(\frac{\partial N_{i+1}}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x}\Big)dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\Big(\frac{1}{x_{i+1}-x_i}\frac{1}{x_i-x_{i+1}}\Big)dx = -\frac{1}{h} = c_i.$$

Получим систему уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} u_{i-1}a_i - u_ib_i + u_{i+1}c_i = 0, \quad i = \overline{1, n-2} \\ u(0) = 0, \quad u(l) = u_l. \end{cases} \tag{8}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & -b_{n-1} & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -b_{n-2} & c_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -u_lc_{n-1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Решим полученную систему методом прогонkdu.f

3. Заключение

Список литературы

1. бебебе с бабаба