

Sistem Pemilihan Perumahan dengan Metode Kombinasi *Fuzzy C-Means Clustering* dan *Simple Additive Weighting*

Tri Sandhika Jaya^a, Kusworo Adi^b, Beta Noranita^b

^{a*}Manajemen Informatika, Politeknik Negeri Lampung,
Bandar Lampung, Lampung

^bMagister Sistem Informasi, Program Pascasarjana,
Universitas Diponegoro, Semarang

Abstract

Housing is one of human secondary needs. In selecting the most appropriate housing, there are lots of aspects to be considered to satisfy the costumers want. In order to get optimal result, a system is needed to help the costumers to decide which housing fit them most. System that will be built in this thesis is a system that supports costumers' satisfaction in housing selection. There are 2 main stages in the system, namely data grouping and ranking. Data grouping method used is Fuzzy C-Means Clustering (FCM). Simple Additive Weighting (SAW) is used for ranking purpose. Testing is carried out by comparing interview result with system counting result. The testing result produces 9 cases that derive similar recommendation.

Keywords : Housing selection; FCM; SAW; Recommendation; Grouping

1. Pendahuluan

Perumahan merupakan salah satu kebutuhan sekunder, sehingga dalam pemilihan perumahan yang tepat agar sesuai dengan keinginan konsumen. Dalam pemilihan perumahan ada beberapa kriteria yang digunakan (Amborowati, 2008) seperti harga, lokasi, fasilitas umum, perijinan, desain rumah, dan kredibilitas pengembang. Untuk mendapatkan hasil optimal dibutuhkan suatu sistem yang dapat membantu dalam penentuan perumahan agar konsumen merasa puas.

Metode *Fuzzy C-Means* (FCM) adalah suatu teknik pengelompokan data dimana keberadaan tiap titik data dalam suatu *cluster* ditentukan oleh derajat keanggotaan. *Fuzzy C-Means* adalah algoritma pengelompokan yang terawasi, karena pada algoritma *Fuzzy C-Means* jumlah *cluster* yang akan dibentuk perlu diketahui terlebih dahulu. Teknik ini pertama kali diperkenalkan oleh J. C. Bezdek pada tahun 1981 (Sediyono *et al.*, 2006). Output dari FCM menghasilkan informasi yang dapat digunakan dalam membangun suatu *fuzzy inference system*.

Metode *Simple Additive Weighting* (SAW) merupakan salah satu metode untuk penyelesaian masalah *multi-attribute decision making* (Kusumadewi *et al.*, 2006). Metode SAW sering juga dikenal dengan istilah metode penjumlahan terbobot. Konsep dasar metode SAW adalah mencari penjumlahan terbobot dengan rating kinerja pada setiap alternatif pada semua atribut (Wibowo *et al.*, 2008). Pada penelitian ini akan dikembangkan metode kombinasi FCM dan SAW dalam penyelesaian masalah pemilihan perumahan.

Penelitian ini bertujuan untuk merancang sebuah sistem pendukung keputusan dengan menggunakan metode kombinasi *Fuzzy C-Means* (FCM) dan *Simple Additive Weighting* (SAW) untuk pemilihan perumahan.

Dalam penelitian ini dilakukan pembatasan bahwa daerah yang akan diteliti adalah perumahan yang ada di Kota Semarang, kriteria yang digunakan untuk pemilihan perumahan adalah harga, desain rumah, luas tanah, luas bangunan, fasilitas pendukung, lokasi, dan waktu tempuh ke pusat kota.

2. Kerangka Teori

Sistem Pendukung Keputusan merupakan Sistem berbasis komputer yang interaktif, yang membantu pengambil keputusan dengan memanfaatkan data dan model untuk menyelesaikan masalah-masalah yang tak terstruktur (Surbakti, 2002). Ada yang mendefinisikan bahwa sistem pendukung keputusan merupakan suatu pendekatan untuk mendukung pengambilan keputusan. Sistem pendukung keputusan menggunakan data, memberikan antarmuka pengguna yang mudah, dan dapat menggabungkan pemikiran pengambil keputusan (Turban, 2005).

Fuzzy C-means Clustering (FCM) adalah suatu teknik pengelompokan data yang mana keberadaan tiap-tiap titik data dalam suatu *cluster* ditentukan oleh derajat keanggotaan. FCM menggunakan model pengelompokan *fuzzy* dengan indeks kekaburan menggunakan *Euclidean Distance* sehingga data dapat menjadi anggota dari semua kelas atau *cluster* yang terbentuk dengan derajat keanggotaan yang berbeda antara 0 hingga 1.

Konsep dasar FCM, pertama kali adalah menentukan pusat *cluster*, yang akan menandai lokasi rata-rata untuk tiap *cluster*. Pada kondisi awal, pusat *cluster* masih belum akurat. Tiap-tiap titik data memiliki derajat keanggotaan untuk tiap *cluster* yang terbentuk. Dengan cara memperbaiki pusat *cluster* dan derajat keanggotaan tiap-tiap titik data secara berulang, maka akan dapat dilihat

• Alamat e-mail : sandi@polinela.ac.id

bahwa pusat *cluster* akan bergeser menuju lokasi yang tepat. Perulangan ini didasarkan pada minimasi fungsi objektif yang menggambarkan jarak dari titik data yang diberikan ke pusat *cluster* yang terbobot oleh derajat keanggotaan titik data tersebut (Kusumadewi *et al.*, 2007). Algoritma FCM adalah sebagai berikut (Kusumadewi *et al.*, 2010):

1. Masukkan data yang akan *dicluster* ke dalam sebuah matriks X, dimana matriks berukuran $m \times n$, dengan m adalah jumlah data yang akan *dicluster* dan n adalah atribut setiap data. Contoh X_{ij} = data ke- i ($i=1,2,\dots,m$), atribut ke- j ($j=1,2,\dots,n$).
2. Tentukan
 - a. Jumlah cluster = c ;
 - b. Pangkat/pembobot = w ;
 - c. Maksimum iterasi = MaksIter;
 - d. Error yang diharapkan = ξ ;
 - e. Fungsi Objektif awal = $P_0 = 0$;
 - f. Iterasi awal = $t = 1$;
3. Bangkitkan bilangan acak μ_{ik} (dengan $i=1,2,\dots,m$ dan $k=1,2,\dots,c$) sebagai elemen matriks partisi awal U, dengan X_i adalah data ke- i

$$U = \begin{bmatrix} \mu_{11}(X_1) & \mu_{21}(X_1) & \dots & \mu_{c1}(X_1) \\ \mu_{12}(X_2) & \mu_{22}(X_2) & \dots & \mu_{c2}(X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{1i}(X_i) & \mu_{2i}(X_i) & \dots & \mu_{ci}(X_i) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dengan jumlah setiap kolom dalam satu baris adalah 1 (satu).

$$\sum_{i=1}^c \mu_{ci} = 1 \quad (2)$$

4. Hitung pusat *cluster* ke- k : V_{kj} , dengan $k=1,2,\dots,c$ dan $j=1,2,\dots,n$

$$V_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^m (\mu_{ik})^w * X_{ij}}{\sum_{i=1}^m (\mu_{ik})^w} \quad (3)$$

5. Hitung fungsi objektif pada iterasi ke- t , P_t :

$$P_t = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^c \left(\left(\sum_{j=1}^n (X_{ij} - V_{kj})^2 \right) (\mu_{ik})^w \right) \quad (4)$$

6. Hitung perubahan derajat keanggotaan setiap data pada setiap *cluster* (memperbaiki matriks partisi U) dengan :

$$\mu_{ik} = \frac{\left[\sum_{j=1}^n (X_{ij} - V_{kj})^2 \right]^{\frac{-1}{w-1}}}{\sum_{k=1}^c \left[\sum_{j=1}^n (X_{ij} - V_{kj})^2 \right]^{\frac{-1}{w-1}}} \quad (5)$$

dengan : $i = 1,2,\dots,n$ dan $k = 1,2,\dots,c$.

7. Cek kondisi berhenti :

Jika : $(|P_t - P_{t-1}| < \xi)$ atau $(t > \text{MaksIter})$ maka berhenti ;

Jika tidak : $t = t+1$, ulangi langkah 4

Metode SAW sering juga dikenal istilah metode penjumlahan terbobot. Konsep dasar metode SAW adalah mencari penjumlahan terbobot dari rating kinerja pada setiap alternatif pada semua atribut. Langkah-langkah metode dalam metode SAW adalah (Wibowo dkk, 2008) :

1. Membuat matriks keputusan Z berukuran $m \times n$, dimana m = alternatif yang akan dipilih dan n = kriteria .
2. Memberikan nilai x setiap alternatif (baris) pada setiap kriteria (kolom) yang sudah ditentukan, dimana, $i=1,2,\dots,m$ dan $j=1,2,\dots,n$ pada matriks keputusan Z

$$Z = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} \end{bmatrix} \quad (6)$$

3. Memberikan nilai bobot preferensi (W) oleh pengambil keputusan untuk masing-masing kriteria yang sudah ditentukan

$$W = [W_1 \quad W_2 \quad W_3 \quad \dots \quad W_j] \quad (7)$$

4. Melakukan normalisasi matriks keputusan Z dengan cara menghitung nilai rating kinerja ternormalisasi (r_{ij}) dari alternatif A_i pada atribut C_j .

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{x_{ij}}{\text{MAX}_i} & \text{Jika } j \text{ adalah atribut keuntungan} \\ \frac{\text{MIN}_i x_{ij}}{x_{ij}} & \text{Jika } j \text{ adalah atribut biaya} \end{cases} \quad (8)$$

Dengan ketentuan :

- a. Dikatakan atribut (8) tungan apabila atribut banyak memberil tungan bagi pengambil keputusan, sedangkan atribut biaya merupakan atribut yang banyak memberikan pengeluaran jika nilainya semakin besar bagi pengambil keputusan.
 - b. Apabila berupa (9) keuntungan maka nilai (x_{ij}) dari setiap kolom atribut dibagi dengan nilai ($\text{MAX } x_{ij}$) dari tiap kolom, sedangkan untuk atribut biaya, nilai ($\text{MIN } x_{ij}$) dari tiap kolom atribut dibagi dengan nilai (x_{ij}) setiap kolom.
5. Hasil dari nilai rating kinerja ternormalisasi (r_{ij}) membentuk matriks ternormalisasi (N)

$$N = \begin{bmatrix} r_{11} & (10) & \dots & r_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ij} \end{bmatrix} \quad (9)$$

6. Melakukan proses perankingan dengan cara mengalikan matriks ternormalisasi (N) dengan nilai bobot preferensi (W).
7. Menentukan nilai preferensi untuk setiap alternatif (V_i) dengan cara menjumlahkan hasil kali antara matriks ternormalisasi (N) dengan nilai bobot preferensi (W).

$$V_i = \sum_{j=1}^n w_j r_{ij} \quad (10)$$

Nilai V_i yang lebih besar mengindikasikan bahwa alternatif A_i merupakan alternatif terbaik.

Indeks XB ditemukan oleh Xie dan Beni yang pertama kali dikemukakan pada tahun 1991. Ukuran kevalidan *cluster* merupakan proses evaluasi hasil *clustering* untuk menentukan *cluster* mana yang terbaik. Ada dua kriteria dalam mengukur kevalidan suatu *cluster*, yaitu (Xie dan Beni, 1991):

1. *Compactness*, yaitu ukuran kedekatan antaranggota pada tiap *cluster*.
2. *Separation*, yaitu ukuran keterpisahan antar*cluster* satu dengan *cluster* yang lainnya.

Rumus kevalidan suatu *cluster* atau indeks Xie-Beni (XB) yaitu (Hashimoto dkk, 2009):

$$XB = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^n \mu_{ik}^w * \|V_i - X_j\|^2}{n * \min_{i,j} \|V_i - V_j\|^2} \quad (11)$$

Untuk penyelesaian masalah dilakukan dengan cara mengombinasi 2 metode yaitu *Fuzzy C-Means Clustering* dan *Simple Additive Weighting*. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Masukkan data yang akan di*cluster* ke dalam sebuah matriks X, dimana matriks berukuran $m \times n$, dengan m adalah jumlah data yang akan di*cluster* dan n adalah atribut setiap data. Contoh X_{ij} = data ke- i ($i=1,2,\dots,m$), atribut ke- j ($j=1,2,\dots,n$).
2. Tentukan
 - a. Jumlah cluster = c ;
 - b. Pangkat/pembobot = w ;
 - c. Maksimum iterasi = MaksIter ;
 - d. Error yang diharapkan = ξ ;
 - e. Fungsi Objektif awal = $P_0 = 0$;
 - f. Iterasi awal = $t = 1$;
3. Bangkitkan bilangan acak μ_{ik} (dengan $i=1,2,\dots,m$ dan $k=1,2,\dots,c$) sebagai elemen matriks partisi awal U, dengan X_i adalah data ke- i pada persamaan 1 dengan syarat bahwa jumlah nilai derajat keanggotaan (μ) pada persamaan 2.
4. Hitung pusat *cluster* ke- k : V_{kj} , dengan $k=1,2,\dots,c$ dan $j=1,2,\dots,n$ pada persamaan 3.
5. Hitung fungsi objektif pada iterasi ke- t pada persamaan 4.
6. Hitung perubahan derajat keanggotaan setiap data pada setiap *cluster* (memperbaiki matriks partisi U) pada persamaan 5.

7. Cek kondisi berhenti:
8. Jika: ($|P_t - P_{t-1}| < \xi$) atau ($t > \text{MaksIter}$) maka berhenti;
9. Jika tidak: $t = t+1$, ulangi langkah 4
10. Menghitung indeks XB (Xie-Beni) dengan persamaan 11.
11. Cari nilai indeks XB terkecil dari *cluster* yang ada, nilai terkecil menunjukkan bahwa *cluster* tersebut adalah *cluster* terbaik.
12. Data yang termasuk dalam *cluster* terbaik akan digunakan dalam proses perhitungan dengan metode SAW.
13. Membuat matriks keputusan Z berukuran $m \times n$, dimana m = data anggota dari *cluster* terbaik dan n = kriteria.
14. Memberikan nilai x setiap alternatif (baris) pada setiap kriteria (kolom) yang sudah ditentukan, dimana, $i=1,2,\dots,m$ dan $j=1,2,\dots,n$ pada matriks keputusan Z pada persamaan 6
15. Memberikan nilai bobot preferensi (W) oleh pengambil keputusan untuk masing-masing kriteria pada persamaan 7.
16. Melakukan normalisasi matriks keputusan Z dengan cara menghitung nilai rating kinerja ternormalisasi (r_{ij}) dari alternatif A_i pada atribut C_j pada persamaan 8.
17. Hasil dari nilai rating kinerja ternormalisasi (r_{ij}) membentuk matriks ternormalisasi (N) pada persamaan 9.
18. Melakukan proses perankingan dengan cara mengalikan matriks ternormalisasi (N) dengan nilai bobot preferensi (W).
19. Menentukan nilai preferensi untuk setiap alternatif (V_i) dengan cara menjumlahkan hasil kali antara matriks ternormalisasi (N) dengan nilai bobot preferensi (W) pada persamaan 10.
20. Nilai V_i yang paling besar mengindikasikan bahwa alternatif A_i merupakan alternatif terbaik

3. Metodologi

3.1. Identifikasi Masalah

Masalah –masalah yang dihadapi dalam pemilihan perumahan yaitu:

1. Kesulitan memilih dengan banyak pilihan.
2. Memilih berdasarkan “perasaan” saja.
3. Kriteria yang berbeda-beda antar pembeli.

3.2. Spesifikasi Kebutuhan Perangkat Lunak

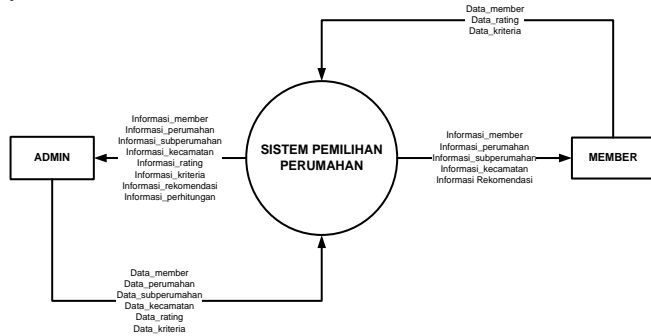
Sistem yang akan dikembangkan, harus mempunyai fungsi- fungsi sebagai berikut:

1. Sistem dapat mengolah data perumahan.
2. Sistem dapat mengolah data user.
3. Sistem dapat mengolah data rating dan kriteria perhitungan.
4. Sistem dapat melakukan registrasi user baru.
5. Sistem dapat membagi sistem berdasarkan level user.
6. Sistem dapat memberikan rekomendasi hasil.
7. Sistem dapat membuat laporan

3.3 Perancangan Sistem

3.3.1 Diagram Konteks

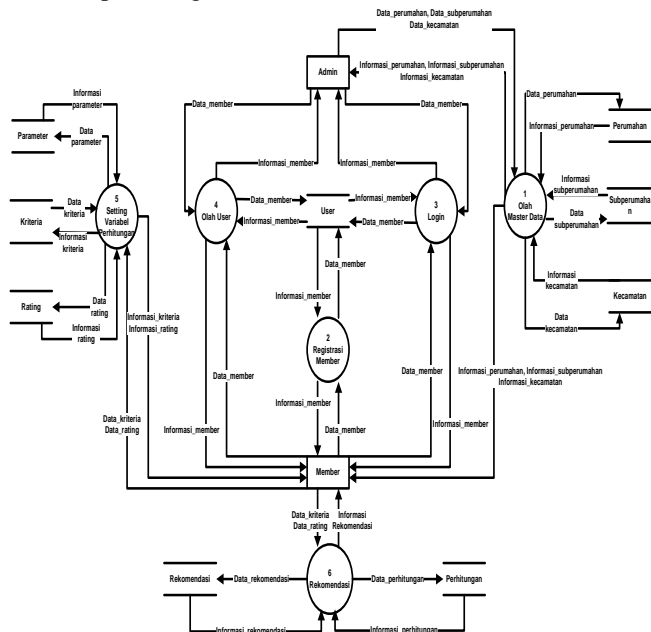
Gambar 1 merupakan diagram konteks dari sistem yang dibangun, dalam sistem ini terdapat 2 entitas eksternal yaitu admin dan member.



Gambar 1. Diagram Konteks

3.3.2. DFD Level 1

Dalam tahap ini terdapat 6 proses utama yaitu olah data master, registrasi member, login, olah user, setting variabel perhitungan, dan rekomendasi.



Gambar 2. DFD Level 1

3.3.3. Desain Antarmuka

Pada Gambar 3 merupakan halaman utama dari sistem yang dibangun.



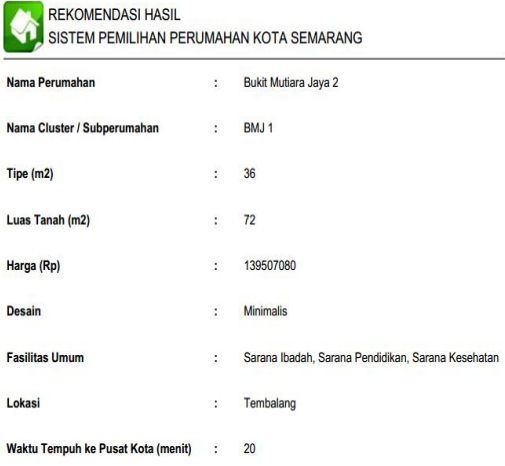
Gambar 3. Halaman Utama

4. Hasil dan Pembahasan

4.1 Implementasi Perangkat Lunak

Gambar 4 menunjukkan halaman rekomendasi yang digunakan member untuk melakukan proses rekomendasi, sedangkan gambar 5 menunjukkan hasil dari proses rekomendasi. Hasil Rekomendasi merupakan alternatif terbaik hasil perhitungan sistem. Informasi yang ditampilkan adalah detail dari perumahan hasil rekomendasi.

Gambar 4. Halaman Rekomendasi



REKOMENDASI HASIL
SISTEM PEMILIHAN PERUMAHAN KOTA SEMARANG

Nama Perumahan : Bukit Mutiara Jaya 2

Nama Cluster / Subperumahan : BMJ 1

Tipe (m2) : 36

Luas Tanah (m2) : 72

Harga (Rp) : 139507080

Desain : Minimalis

Fasilitas Umum : Sarana Ibadah, Sarana Pendidikan, Sarana Kesehatan

Lokasi : Tembalang

Waktu Tempuh ke Pusat Kota (menit) : 20

Semarang, 21-05-2012

Administrator

Gambar 5 Hasil Rekomendasi

4.2 Pengujian

Metode pengujian untuk sistem yang dibangun adalah dengan metode uji kasus. Untuk menguji sistem pemilihan perumahan digunakan data hasil wawancara yang bersumber dari penghuni perumahan. Data wawancara tersebut akan dimasukkan ke dalam sistem untuk dilihat hasil rekomendasinya, lalu akan dibandingkan dengan data hasil wawancara. Tabel 1 merupakan data kriteria awal pemilihan yaitu harga, tipe bangunan, dan luas tanah. Tabel 2 merupakan data tingkat kepentingan dari tiap-tiap kriteria dalam setiap kasus uji. Tabel 3 merupakan data atribut dari tiap-tiap kriteria dalam tiap kasus uji.

Tabel 1. Kriteria Awal Pemilihan

Kasus	Kriteria Awal	Batasan	
		Bawah	Atas
1	Semua	0	0
2	Tipe	30	50
3	Harga	0	200000000
4	Harga	200000000	400000000
5	Tanah	72	150
6	Tipe	100	150
7	Semua	0	0
8	Tanah	150	200
9	Harga	500000000	1500000000
10	Semua	0	0

Tabel 2. Tingkat Kepentingan Kriteria

Kasus	Tingkat Kepentingan Kriteria						
	Harga	Desain	Tipe	Tanah	Lokasi	Fasum	Waktu
1	Sangat Penting	Sangat Penting	Cukup	Cukup	Tidak Penting	Tidak Penting	Kurang Penting
2	Sangat Penting	Tidak Penting	Sangat Penting	Sangat Penting	Cukup	Kurang Penting	Sangat Penting
3	Penting	Cukup	Sangat Penting	Sangat Penting	Kurang Penting	Tidak Penting	Tidak Penting
4	Sangat Penting	Tidak Penting	Penting	Cukup	Tidak Penting	Penting	Penting
5	Penting	Cukup	Sangat Penting	Sangat Penting	Sangat Penting	Kurang Penting	Cukup
6	Kurang Penting	Penting	Penting	Penting	Penting	Kurang Penting	Kurang Penting
7	Sangat Penting	Sangat Penting	Tidak Penting	Tidak Penting	Sangat Penting	Kurang Penting	Penting
8	Sangat Penting	Kurang Penting	Sangat Penting	Sangat Penting	Kurang Penting	Kurang Penting	Kurang Penting
9	Penting	Sangat Penting	Sangat Penting	Sangat Penting	Cukup	Cukup	Cukup
10	Tidak Penting	Penting	Cukup	Cukup	Penting	Sangat Penting	Sangat Penting

Tabel 3. Atribut Kriteria

Kasus	Atribut kriteria (benefit = ya / cost = tidak)						
	Harga	Desain	Tipe	Tanah	Lokasi	Fasum	Waktu
1	Tidak	Tidak	Ya	Ya	Ya	Ya	Ya
2	Tidak	Ya	Ya	Ya	Tidak	Ya	Tidak
3	Tidak	Ya	Ya	Ya	Ya	Ya	Ya
4	Tidak	Ya	Tidak	Tidak	Ya	Ya	Tidak
5	Ya	Tidak	Ya	Ya	Tidak	Tidak	Ya
6	Tidak	Ya	Ya	Ya	Ya	Tidak	Tidak
7	Ya	Ya	Tidak	Tidak	Ya	Tidak	Ya
8	Tidak	Ya	Tidak	Tidak	Ya	Ya	Ya
9	Tidak	Tidak	Tidak	Tidak	Ya	Ya	Ya
10	Tidak	Ya	Ya	Ya	Ya	Ya	Ya

Maka hasil pengujian dari 10 kasus tersebut dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Perbandingan Hasil Wawancara dengan Rekomendasi Sistem

Kasus	Perumahan	
	Hasil Wawancara	Rekomendasi Sistem
1	BMJ 1	BMJ 1
2	Mangifera	Mangifera
3	Evanthe	Mangifera
4	Tamansari 1	Tamansari 1
5	Kawis	Kawis
6	Calathea	Calathea
7	Jasmine 2	Jasmine 2
8	Quantum Star Plus 2	Quantum Star Plus 2
9	Pandanaran 2	Pandanaran 2
10	Calm	Calm

Dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa 9 kasus uji memiliki kecocokan dengan hasil rekomendasi sistem, dan 1 kasus yang tidak sesuai.

5. Kesimpulan

Berdasarkan uji coba dan pembahasan hasil pengujian terhadap sistem pemilihan perumahan dengan kombinasi metode *Fuzzy C-Means* dan *Simple Additive Weighting*, dapat diuraikan kesimpulan bahwa sistem pemilihan perumahan dapat membantu pengambil keputusan dalam masalah pemilihan perumahan secara mudah dan cepat. Dari 10 kasus uji yang dimasukkan dalam sistem menghasilkan 9 kasus uji yang sesuai dan 1 kasus yang tidak sesuai. Hasil rekomendasi yang dihasilkan sistem menjadi lebih objektif.

Daftar Pustaka

- Hashimoto, W., Nakamura, T., Miyamoto, S., 2009. Comparison and evaluation of different cluster validity measures including their kernelization. *Journal of Advance Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 13 (3).
- Kusumadewi, S., Hartati, S., Harjoko, A., Wardoyo, R., 2006. *Fuzzy Multi-Attribute Decision Making (Fuzzy MADM)*. Penerbit Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Kusumadewi, S. dan Purnomo, H., 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Penerbit Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Surbakti, I., 2002. *Sistem Pendukung Keputusan*. Diklat Tidak Terpublikasi. Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.
- Turban, E., Aronson, J., Ting-Peng, L., 2005. *Decision Support and Intellegent System*. Penerbit Pearson Higher Education, USA.
- Wibowo, S., Henry, Amalia, R., Fadlun M., Andi., Arivanty, K., 2008. *Sistem Pendukung Keputusan Untuk Menentukan Penerima Beasiswa Bank BRI Menggunakan FMADM (Studi Kasus: Mahasiswa Fakultas Teknologi Industri Universitas Islam Indonesia)*. Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Teknologi Informasi, Yogyakarta, 62–67.
- Xie, Xuanli L., Beni, G., 1991. A Validity Measure for Fuzzy Clustering. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intellegent* 13 (8).