複雑系科学演習　第２回　レポート

複雑系知能学科　複雑系コース　３年　Ｉクラス番号 1019086　岩上慎之介

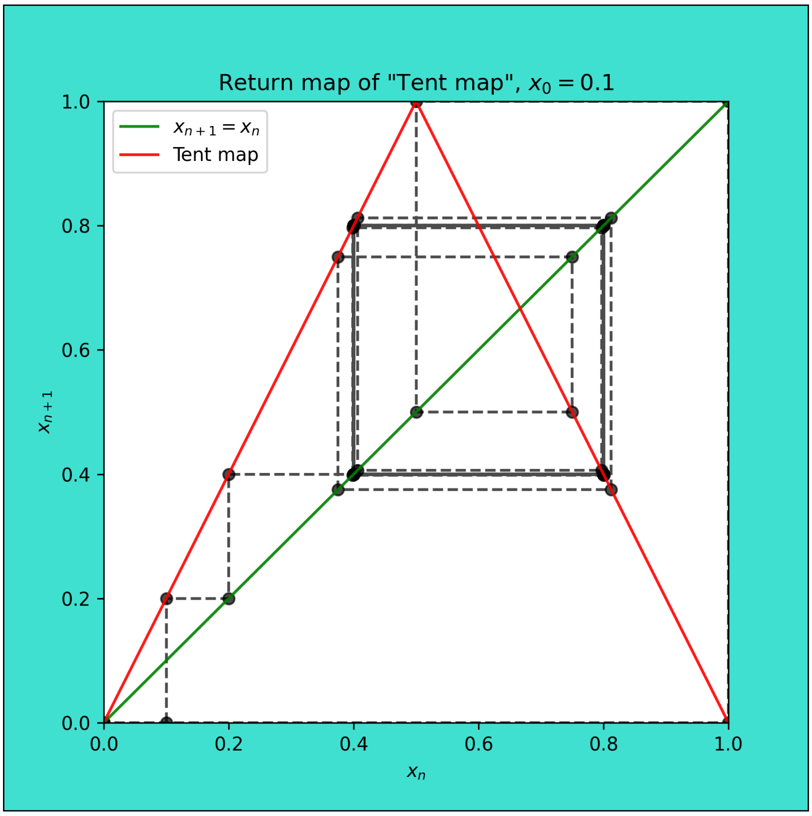
2021 年 11 月 15 日

1　レポート課題 1st

1.1　課題１

前頁の関数 next をテント写像に書き換え，リターンマップを描け

1.1.1　画像



1.1.2　ソースコード

Listing 1　task6

```
from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np


class Task6():
    def __init__(self) -> None:
        self.x = 0.1                         # 初期値 x0 = 0.1
        self.xn = np.linspace(0, 1, 1000)   # 横軸の範囲と刻み幅
        self.tent_y = []                    # テント写像のグラフを描くための配列
```

```
        for i in self.xn:
            if 0 <= i <= 0.5:
                self.tent_y.append(2 * i)
            else:
                self.tent_y.append(2 * (1 - i))
        self.filepath = 複雑系科学演習'/Week6/images/task6'

    def tent(self) -> list:
        リターンマップでのテント写像の座標を持つ配列を返す""
        calc_x = self.x
        x_array = [calc_x]
        for _ in range(100):
            if 0 <= calc_x <= 0.5:
                calc_x = 2 * calc_x
            else:
                calc_x = 2 * (1 - calc_x)
            x_array.append(calc_x)
        return x_array

    def plot_return_map(self) -> None:
        リターンマップの描画（テント写像）""
        plt.figure(figsize=(6, 6), facecolor='turquoise',
                   linewidth=1, edgecolor='black')
        n = self.tent()
        spiper_plot_x = [self.x]          # クモの巣図用の配列 (x)
        spiper_plot_y = [0]                # クモの巣図用の配列 (y)
        for i in range(1, len(n)):
            spiper_plot_x.append(n[i - 1])
            spiper_plot_x.append(n[i])
            spiper_plot_y.append(n[i])
            spiper_plot_y.append(n[i])

        plt.plot(spiper_plot_x, spiper_plot_y, marker='o',
                linestyle='dashed', color='black', alpha=0.7)
        plt.plot(self.xn, self.xn, color='green',
                alpha=0.9, label="$x_{n+1} = x_n$")
        plt.plot(self.xn, self.tent_y, color='red',
                alpha=0.9, label="Tent map")
        plt.title("Return map of \"Tent map\", $x_0 = $" + str(self.x))
        plt.xlim(0, 1)
        plt.ylim(0, 1)
        plt.xlabel("$x_n$")
        plt.ylabel("$x_{n+1}$")
        plt.legend(loc='best')
        plt.savefig(self.filepath, dpi=300)

```

```
task = Task6()
task.plot_return_map()
```

1.2　課題 2

$x_0 = \dfrac{1}{10}$ として、どのような周期解になるか厳密にて計算せよ。

手計算で x_i の値を計算すると、

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{10} \\
x_1 &= 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \\
x_2 &= 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \\
x_3 &= 2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\
x_4 &= 2 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} \\
x_5 &= 2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\
x_6 &= 2 \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となるため $\dfrac{2}{5}$ と $\dfrac{4}{5}$ の 2 つの周期解（2 周期解）を取り続けていく。

1.3　課題 3

$x_0 = \dfrac{1}{10}$ として、前のプログラムを実行せよ。ただし $N = 100$ とし x_{100} まで数値計算せよ。どのような結果となったか。理由も述べよ。

1.3.1　出力

Listing 2　out

```
0.700000 0.600000
0.600000 0.600000
0.600000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
```

```
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
```

```
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.800000
0.800000 0.800000
0.800000 0.400000
0.400000 0.400000
0.400000 0.799999
0.799999 0.799999
0.799999 0.400002
0.400002 0.400002
0.400002 0.800003
0.800003 0.800003
0.800003 0.399994
0.399994 0.399994
0.399994 0.799988
0.799988 0.799988
0.799988 0.400024
0.400024 0.400024
0.400024 0.800049
0.800049 0.800049
0.800049 0.399902
0.399902 0.399902
0.399902 0.799805
0.799805 0.799805
0.799805 0.400391
0.400391 0.400391
0.400391 0.800781
0.800781 0.800781
0.800781 0.398438
0.398438 0.398438
0.398438 0.796875
0.796875 0.796875
0.796875 0.406250
0.406250 0.406250
0.406250 0.812500
0.812500 0.812500
0.812500 0.375000
0.375000 0.375000
0.375000 0.750000
0.750000 0.750000
```

```
0.750000 0.500000
0.500000 0.500000
0.500000 1.000000
1.000000 1.000000
1.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
```

```
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
```

```
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
0.000000 0.000000
```

1.3.2 結果と考察

実行した結果、0.4 と 0.8 でずっとループすることはなく途中から値が変化した。最終的には、$(x_n, x_{n+1}) = (0, 0)$ を取り続けるようになった。これは、コンピュータの丸め誤差が影響し値が変化したと考えられる。

1.3.3 ソースコード

Listing 3　tent.c

```c
#include<stdio.h>
#define N 100
double next(double x, double r) {
    if (0 <= x && x <= 0.5) {
        return 2 * x;
    } else {
        return 2 * (1 - x);
    }
}
int main(void){
    int n;
    double r;
    double xn = 0.7;
    double xn1;
    scanf("%lf", &r);
    for(n = 0; n <= N; n++) {
        xn1 = next(xn, r);
        printf("%lf %lf\n", xn, xn1);
        printf("%lf %lf\n", xn1, xn1);
        xn = xn1;
    }
    return 0;
}
```

1.4　課題 4

テント写像のリアプノフ指数を計算せよ。プログラミングが必要なければ手計算でよい。
リアプノフ指数 λ は、

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)| \tag{2}$$

と表すことができる。
今回はテント写像のリアプノフ指数について調べていくので、関数 $f(x_i)$ は、

$$f(x_i) = \begin{cases} 2x_i & \left(0 \leq x_i \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2(1-x_i) & \left(\dfrac{1}{2} < x_i \leq 1\right) \end{cases} \tag{3}$$

となる。さらに (3) を用いて計算すると $f'(x_i)$ は、

$$f'(x_i) = \begin{cases} 2 & \left(0 \leq x_i \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ -2 & \left(\dfrac{1}{2} < x_i \leq 1\right) \end{cases} \tag{4}$$

となる。よって、$|f'(x_i)| = 2$ である。したがって、テント写像のリアプノフ指数 λ は、

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log 2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times n \log 2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \log 2 \\ &= \log 2 \end{aligned} \tag{5}$$

と計算することができ $\lambda = \log 2$ となる。

1.5　課題 5

テント写像は x_n から x_{n+1} を求める写像である。 $y_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_n\right)$ と定義して、 y_{n+1} を y_n の式として表わせ。