複雑系科学演習：補助資料

1　ロジスティック写像の差分方程式

ロジスティックモデルとは、ある生物の親の個体数と子の個体数の関係を表したものをいう。その関係を表す式を**ロジスティック方程式**という。この講義では、昆虫などの世代の重ならない生物の個体数の増減を表した差分方程式を取り上げる。その差分方程式は以下で表される。

↓最大増加率 (r)

$$x_{n+1} = \underbrace{r(1 - x_n)}_{\text{増加率}} x_n \qquad (0 \leq x_n \leq 1,\ 1 \leq r \leq 4)$$

このモデルがどんなものであるかを具体的に考えてみると、次のようなイメージを持つことができる。

> ある決まった広さの部屋で生き物が増減することをイメージする。その部屋の中にいる個体数が少なくて空間にゆとりがあると個体はどんどん増える。一方で、個体数が多くて部屋の中がギュウギュウだと増えたくても増えられない。こんなふうに、空間内にいる個体数に応じて個体数の増加率がかわる。

こんなイメージをもって先ほどの式を眺めてみると、式の意味がわかるだろう。さらに、差分法定期のイメージを具体的にしていくために、$r = 2$ として、増加率を計算して増加率を求めてみよう。

$\underline{x_n = 0.1}$のとき
　増加率 $= r(1 - x_n) = 2 \times (1 - 0.1) = 1.8$　　個体数が少ない $\rightarrow$ 増加率 :**大**
$\underline{x_n = 0.9}$のとき
　増加率 $= r(1 - x_n) = 2 \times (1 - 0.9) = 0.2$　　個体数が多い　$\rightarrow$ 増加率 :**小**

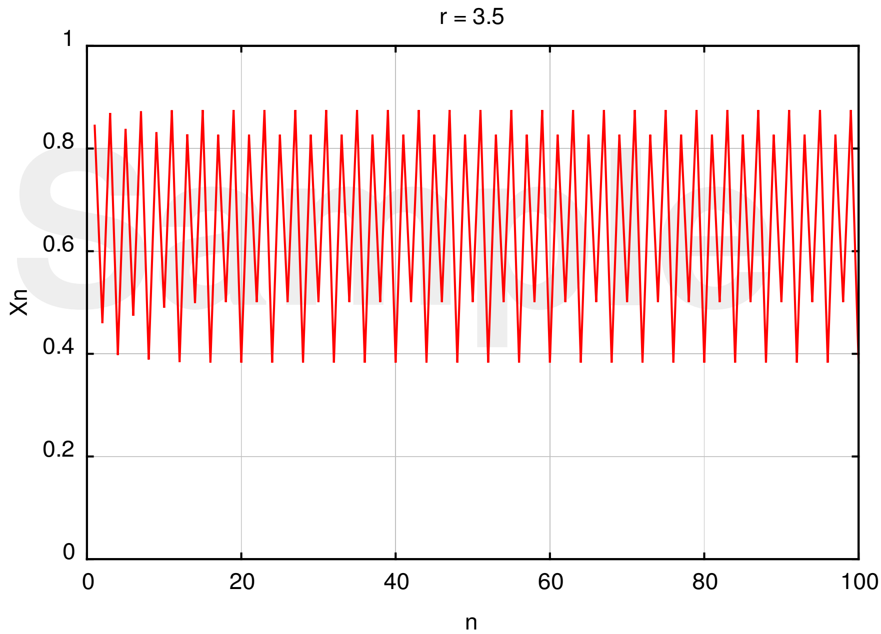
ここまでの内容で、ロジスティック写像の基本的な特徴が「空間内に存在する個体数に応じて増加率が変化する」というものであることがわかっただろう。しかし、その個体数の変動をいろいろと調べてみると最大増加率 r によって大きく異なることがわかっていく。そこで、この講義では最大増加率 r に着目して個体数変動の特徴を調べていく。

2　個体数変動をみる：時系列変化

実はまだ差分方程式についてよくわかっていない人もいるだろう。そこで、個体数変動を調べるためにも、$r = 3.2$, $x_0 = 0.6$ として $n = 1$ から $n = 5$ まで手計算で個体数を求めてみよう。

n	x_n	x_{n+1}
0	0.600	$x_1 = 3.2 \times (1 - 0.600) \times 0.600 = 0.768$
1	0.768	$x_2 = 3.2 \times (1 - 0.768) \times 0.768 = 0.570$
2	0.570	$x_3 = 3.2 \times (1 - 0.570) \times 0.570 = 0.784$
3	0.784	$x_4 = 3.2 \times (1 - 0.784) \times 0.784 = 0.541$
4	0.541	$x_5 = 3.2 \times (1 - 0.541) \times 0.541 = 0.795$
5	0.795	$x_6 = 3.2 \times (1 - 0.795) \times 0.795 = 0.522$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

$x_{n+1} = x_1$ を求めるときには $x_n = x_0$ を使って計算する。次に $x_{n+1} = x_2$ を求めるときには $x_n = x_1$ を使って計算する。このように、x_{n+1} を求めるために今求めた x_n を使って計算することで、差分方程式は解かれていきます。このように時間的な変化 (ここでは n) に着目した変動のことを**時系列変化**といいいます。この時系列変化は数字の羅列を見ても特徴をつかみにくいので、横軸に時間 n、縦軸に個体数 x_n としてグラフ化してみることにします。たとえば、$r = 3.5$ の場合で個体数変動をグラフ化してみると以下のようになります。グラフを見て特徴がよくわかるように、同じような変動が繰り返されています。



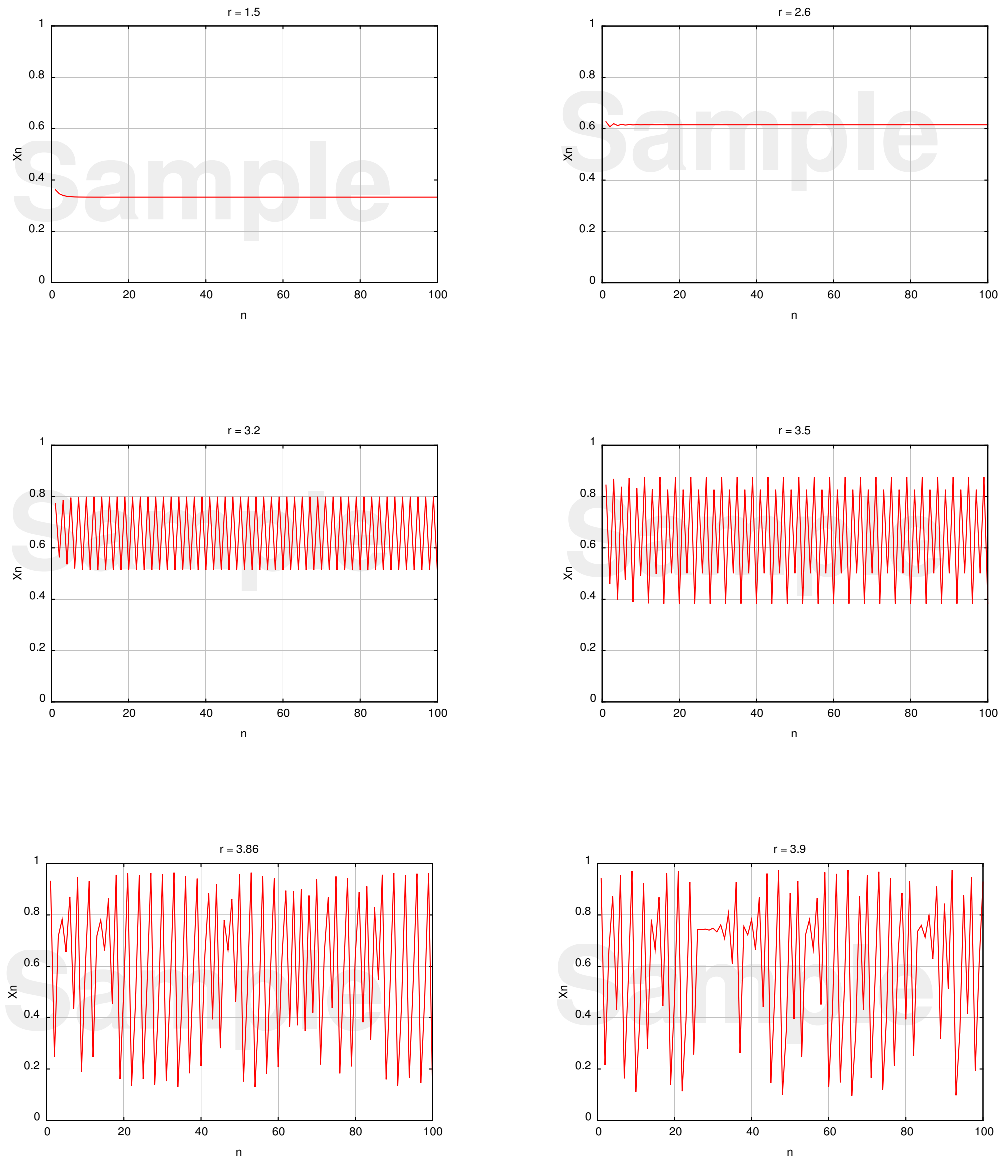


図 1: ロジスティック写像における個体数 x_n の時系列変化

3　個体数変動をみる：リターンマップ

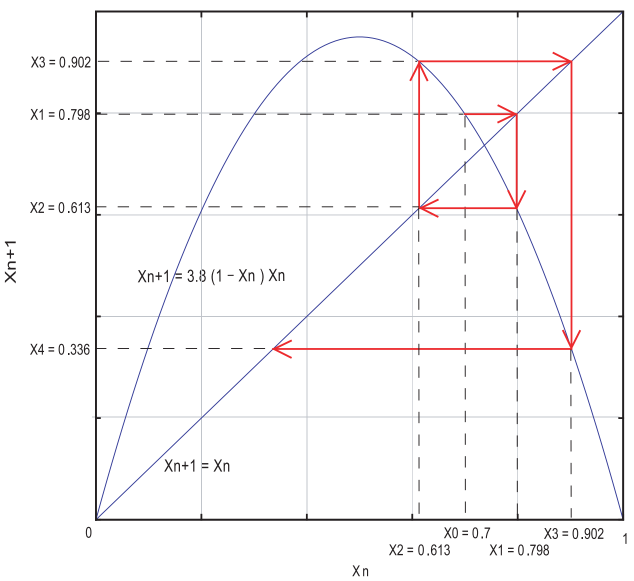
ロジスティック写像では、現在の時刻 $n+1$ の個体数は 1 つ前の時刻 n の個体数によって決まっていた。そこで、横軸を x_n、縦軸を x_{n+1} としてグラフ (**リターンマップ**) を描いてみよう。ここでは、$r = 3.8, x_0 = 0.7$ のとき $n = 0$ から $n = 3$ までのリターンマップを描いてみる。

まずは計算…

n	x_n	x_{n+1}
0	0.700	$x_1 = 3.8 \times (1 - 0.700) \times 0.700 = 0.798$
1	0.798	$x_2 = 3.8 \times (1 - 0.798) \times 0.798 = 0.613$
2	0.613	$x_3 = 3.8 \times (1 - 0.613) \times 0.613 = 0.902$
3	0.902	$x_4 = 3.8 \times (1 - 0.902) \times 0.902 = 0.336$

先ほどと同じように、ロジスティック写像で値が決まっていく仕組みをよく考えてみる。まず、x_1 の値は x_0 で決まる。このときの x_{n+1} は x_1 で x_n は x_0 である。次に、x_2 の値は x_1 で決まる。このときの x_{n+1} は x_2 で x_n は x_1 である。つまり、求められた x_{n+1} は次の時刻では x_n となっている。したがって、リターンマップを描くとき、求められた x_{n+1} を $x_{n+1} = x_n$ で写像すればよい。

実際に描いていく。まず、x_1 は $x_1 = 3.8 \times (1 - x_0) \times x_0$ から 0.798 と決まる。この点は、$x_{n+1} = r(1-x_n)x_n$ 上にある。次に、x_2 は $x_2 = 3.8 \times (1-x_1) \times x_1$ から 0.613 と決まる。この点は、x_1 を $x_{n+1} = x_n$ に水平方向に射影して、そこから鉛直方向に $x_{n+1} = 3.8 \times (1-x_n) \times x_n$ に射影した点である。これを繰り返し続けていくと、上のようなリターンマップが描ける。



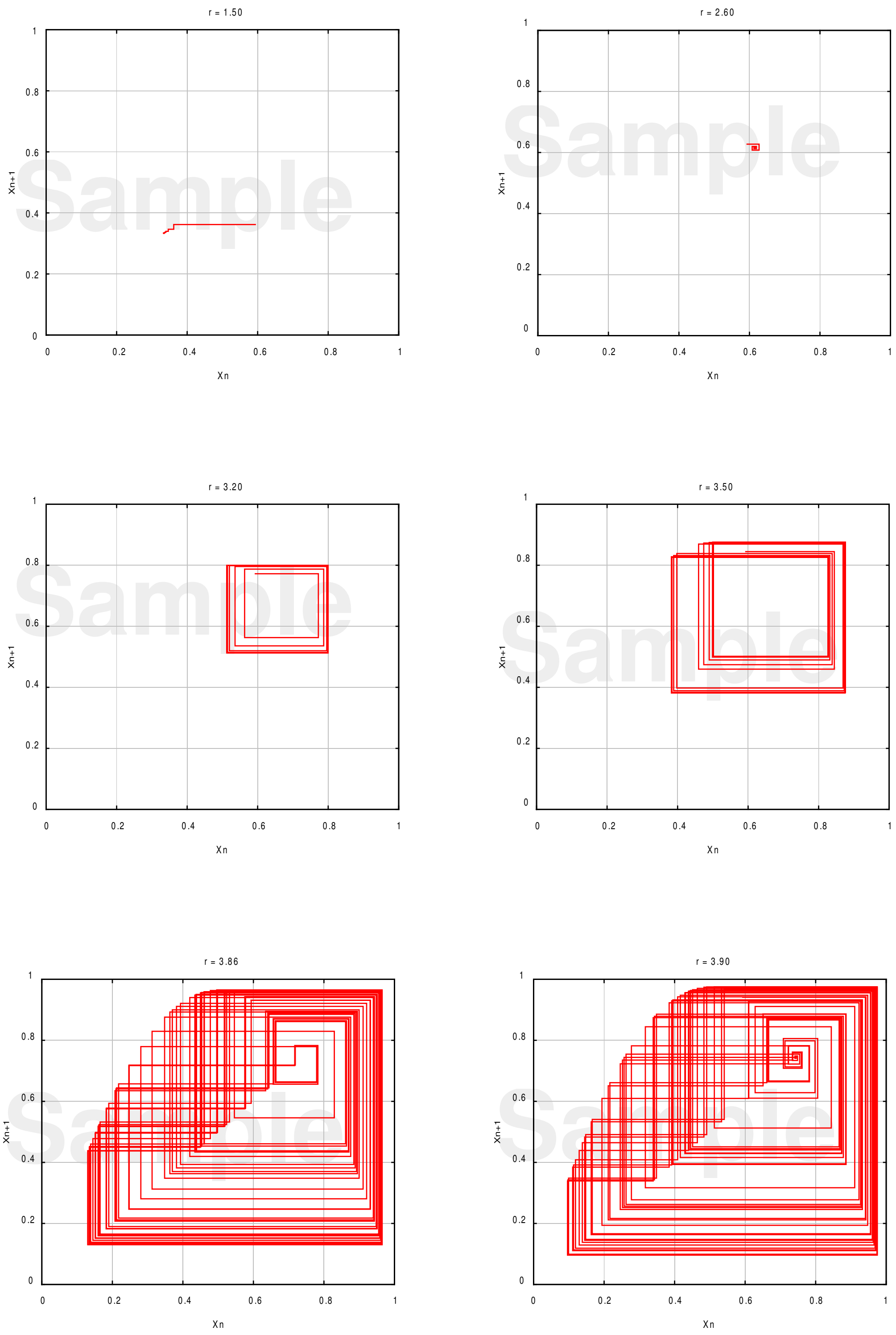
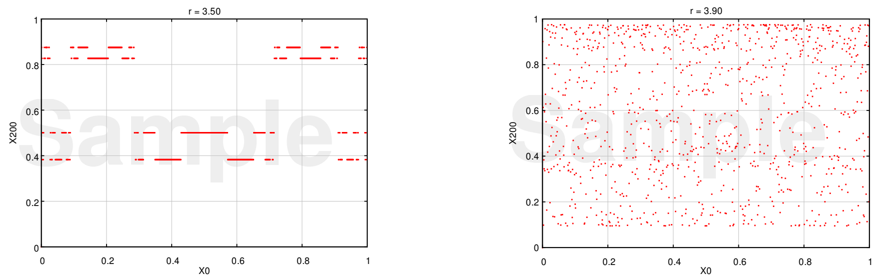


図 2: ロジスティック写像における個体数のリターンマップ

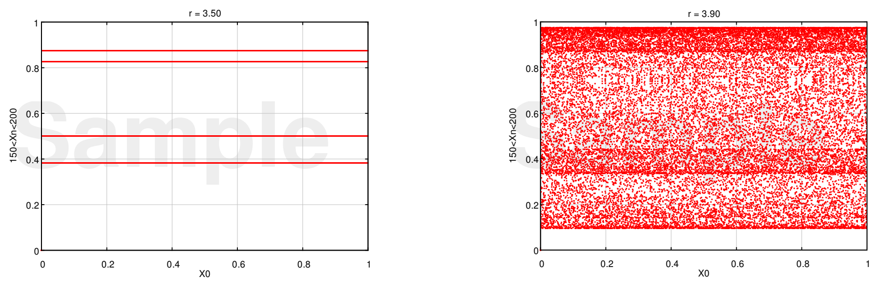
4　初期値鋭敏性

これまでは、初期値を固定して個体数変動を調べてきた。今回は初期値によって個体数変動に違いが生じるかどうかを調べてみる。

r を固定して、初期値 x_0 を 0 から 1 まで 0.001 きざみで変化させたときの、x_{200} の値がどうなっているかグラフ化してみよう。たとえば、$r = 3.5$ と $r = 3.9$ のときには以下のようなグラフになる。



グラフからわかるように、$r = 3.5$ のときには初期値によって x_{200} の値は 4 つの異なる値のどれかをとっているようにみえる。一方で、$r = 3.9$ のときには x_{200} の値はばらばらの値をとっている。それをさらに明確にみるために、x_{200} だけでなく x_n が $150 < n < 200$ のときのグラフをみてみよう。



このように、複数の値を出力してみると、$r = 3.5$ のときには、x_n は十分に時間が経過すると 4 つの値しかとらなくなる。一方で、$r = 3.9$ のときに x_n のとる値に規則性は見出せない。このように、初期値の微小な違いが時系列変化に大きな影響を与える特徴を**初期値鋭敏性**という。

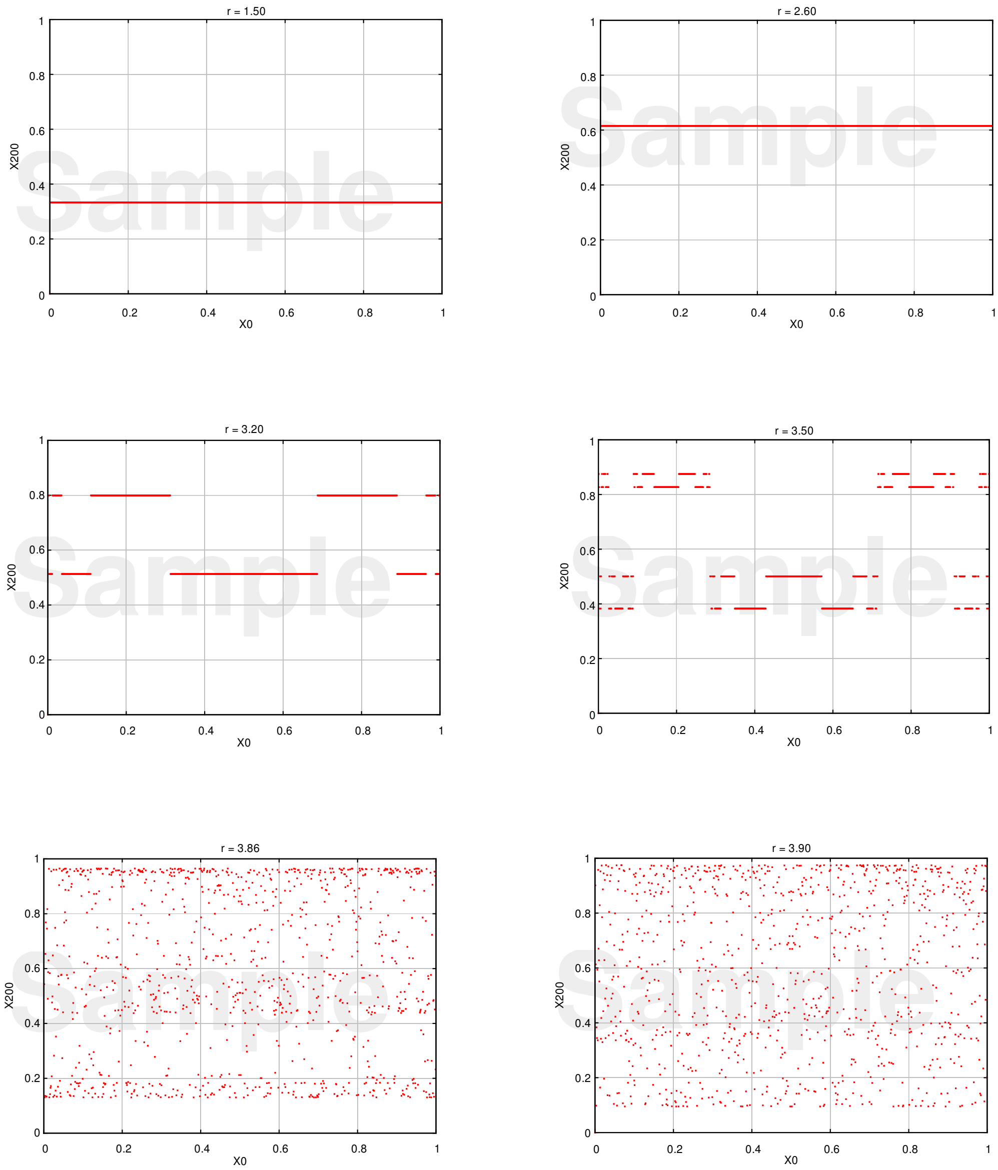


図 3: 初期値鋭敏性：x_{200} のときの値

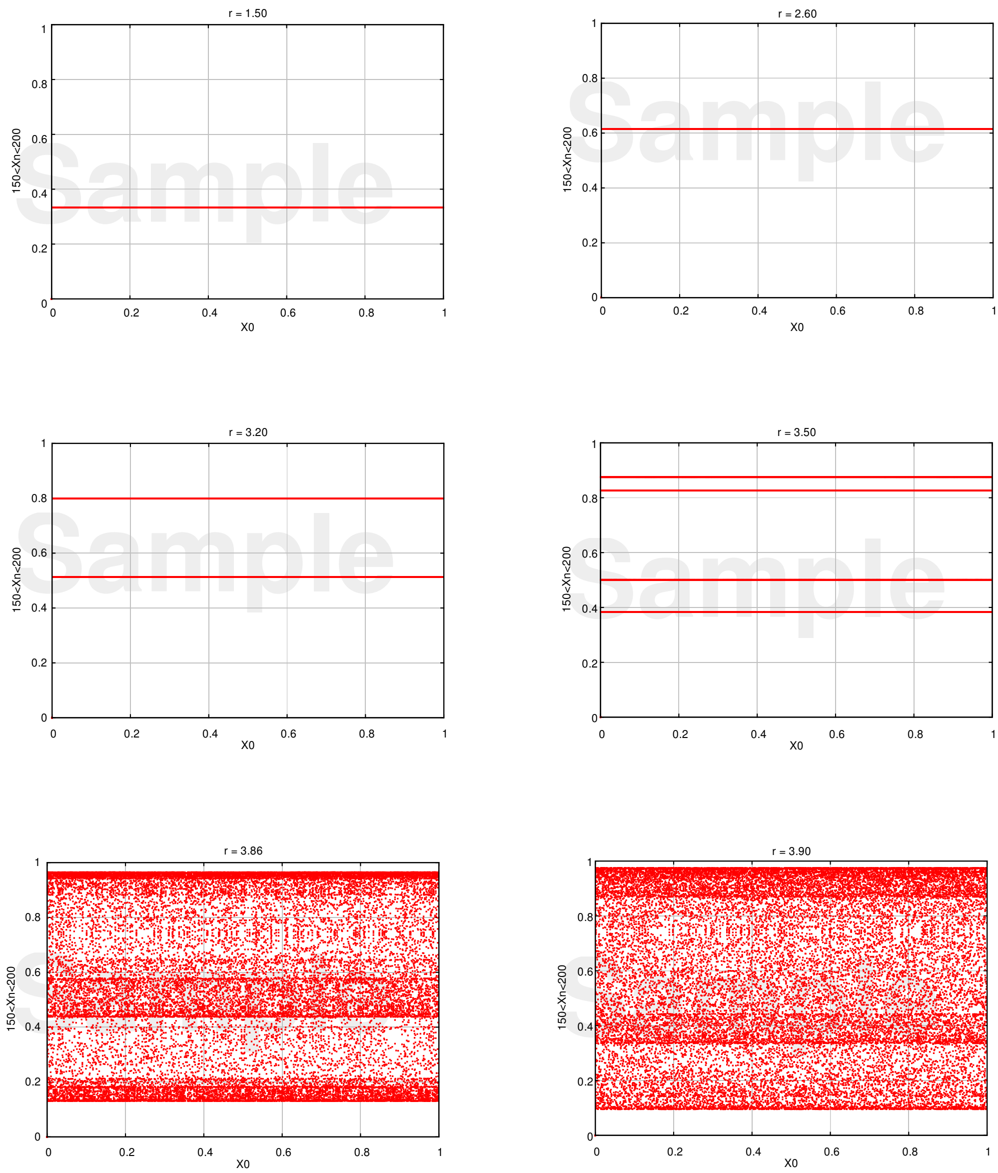
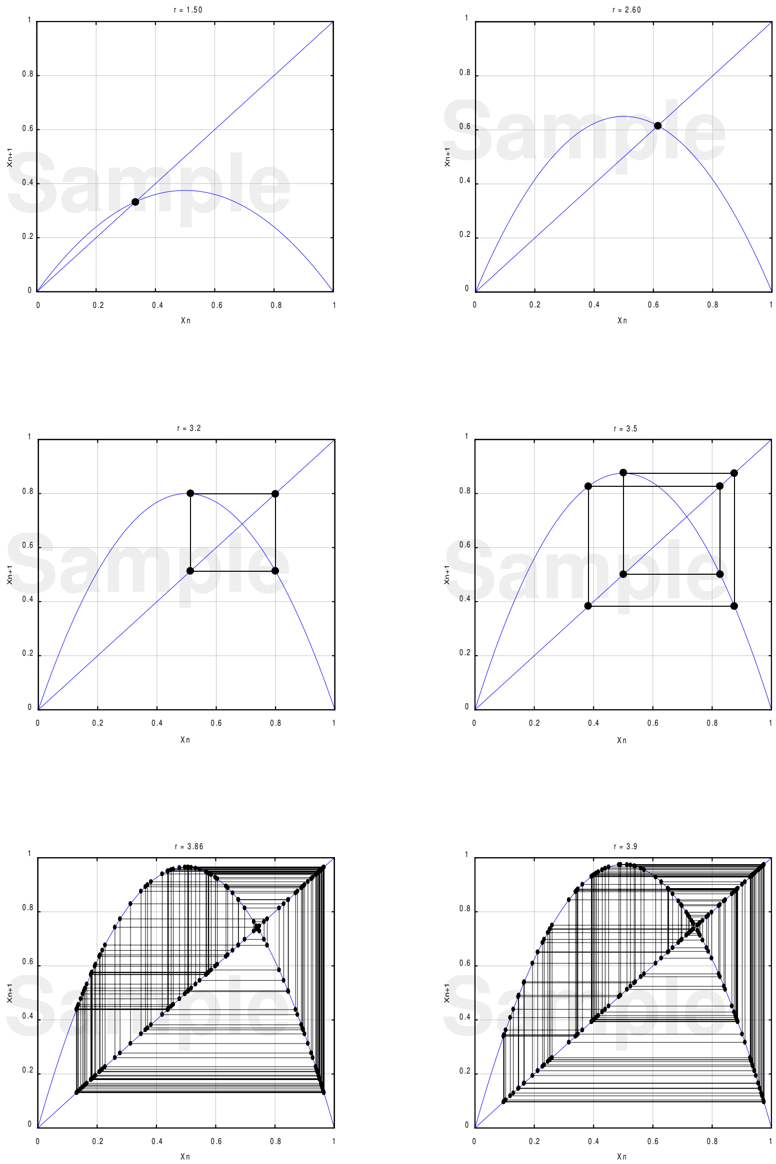


図 4: 初期値鋭敏性：$x_{175} < x_n < x_{200}$ のときの値

5　不動点とその安定性

時系列変化や初期値鋭敏性を調べてわかったように、r の値によって個体数変動にいくつかのパターンがある。たとえば、時間発展とともに個体数が変動しなくなるものや変動し続けるものなどがある。初期値鋭敏性を調べたときのように、初期変動の影響がなくなってからの時刻に着目して解のパターンについて調べていく。まず、ある程度の時間が経過して初期変動の影響がなくなってからのリターンマップを描いてみる。



リターンマップで解が1個のみで、時間が経過しても変動しないものを**不動点**という。つまり、不動店とは写像されても値が変動しない点のことである。この不動点にとどまっていられるかどうかは、**不動点の安定性**に依存する。ここでは、不動点とその安定性について調べていく。

不動点は写像されても変わらない点であるので、$x_n = q$ を写像しても $x_{n+1} = r(1-x_n)x_n = q$ となる。よって、不動店を求めるには、$x_{n+1} = x_n$ をとけばいい。今、不動点を q とすると、

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n \\
q &= r(1-q)q \\
q &= rq - rq^2 \\
rq^2 - (r-1)q &= 0 \\
q(q - \frac{r-1}{r}) &= 0 \\
q &= 0, \frac{r-1}{r}
\end{aligned}$$

となる。$\frac{r-1}{r}$ はグラフで見てわかるように $x_{n+1} = r(1-x_n)x_n$ と x_n の交点にあたる。

不動点が安定であるというのは、時間が経過しても個体数が不動点から動かないことを意味する。一方で、不動点が不安定であるというのは、個体数が一旦不動点にきても時間経過とともに不動点から離れることを意味する。このような不動点の安定性について調べるためには、不動点を少しだけずらしたときにそのずれがどうなるかを調べればよい。もし、ずれが時間経過とともに小さくなるならば、一旦不動点に落ちた値は多少ずれても不動点から離れることはないので安定である。一方で、ずれが時間経過とともに大きくなるならば、一旦不動点に落ちた値は多少のずれで不動点から離れてしまうので不安定である。

不動点の安定性について考えていくときに、ちょっとわかりやすいようにロジスティック写像の差分方程式を以下のように書く。

$$x_{n+1}(x_n) = r(1-x_n)x_n$$

そして、不動点を q とおく。

$$q = \frac{r-1}{r}$$

この不動点 q を $q+\alpha$ にずらしたときに、x_{n+1} で α のずれがどれくらい変化するか調べて、その α を限りなく0に近づけていけばいい。ということで、式を展開してみる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to 0} \frac{x_{n+1}(q+\alpha) - x_{n+1}(q)}{\alpha} &= \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(q+\alpha)(1-(q+\alpha)) - rq(1-q)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{rq(1-(q+\alpha)) + r\alpha(1-q-\alpha) - rq(1-q)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{rq(1-q-\alpha) + r\alpha(1-q-\alpha) - rq(1-q)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{rq(1-q) - rq\alpha + r\alpha - rq\alpha - r\alpha^2 - rq(1-q)}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{-2rq\alpha + r\alpha - r\alpha^2}{\alpha} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} (-2rq + r - r\alpha) \\
&= r - 2rq
\end{aligned}
$$

さらに、不動点 q に $\frac{r-1}{r}$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
r - 2rq &= r - 2r \times \frac{r-1}{r} \\
&= r - 2(r-1) \\
&= r - 2r + 2 \\
&= 2 - r
\end{aligned}
$$

やってみてわかるように、これは x_{n+1} の式を x_n で微分しているのと同じである。したがって、故意に与えたずれ α は時間発展にともなって $(2-r)$ 倍ずつ変化していくことになる。ずれがどんどん大きくなっていくか小さくなっていくかは $(2-r)$ の値に依存する。

たとえば…

$2 - r = 1.0 \Rightarrow \alpha$ はいつまでも α のまま。
$2 - r = 0.1 \Rightarrow \alpha$ は 1 回写像されるたびに 0.1 倍されて小さくなっていく。
つまり、$q + \alpha$ は q に向かうので **安定**。
$2 - r = 2.0 \Rightarrow \alpha$ は 1 回写像されるたびに 2.0 倍されて大きくなっていく。
つまり、$q + \alpha$ は q から離れるので **不安定**。

まとめるとこんな感じになる。

$|2 - r| < 1$ ：安定
$|2 - r| > 1$ ：不安定

さらに、一般的に書くとこうなる。

$$\begin{aligned} |f'(q)| &< 1 \quad &\text{：安定} \\ |f'(q)| &> 1 \quad &\text{：不安定} \end{aligned}$$

ロジスティック写像の場合で、$1 \leq r \leq 4$ だったとこと思い出すと、

$$\begin{aligned} 1 < r < 3 &\text{：安定} \\ 3 < r < 4 &\text{：不安定} \end{aligned}$$

ということになる。

6　周期解とその安定性

ここまでで、不動点が安定な領域が $1 < r < 3$ で、不安定な領域が $3 < r < 4$ であることがわかった。しかし、不安定な領域だからといって $3 < r < 4$ の全ての領域でめちゃくちゃな個体数変動が生じているというわけではない。リターンマップでは、2 つの値を交互に変動しているものや 4 つの値を順に変動しているものなどがみられる。このようないくつかの値を順に変動するような解のパターンを**周期解**という。一般に、n 個の値を順に変動する周期解を **n 周期解**という。たとえば、2 つの値を交互に変動する周期解を **2 周期解**、4 つの値を順に変動する周期解を **4 周期解**という具合である。

周期解にも不動点と同じように安定な周期解と不安定な周期解がある。安定な n 周期解というのは、n 個の値を順に変動しているときに周期解から少し値がずれても元の周期に戻る周期解のことをいう。一方で、不安定な周期化というのは、周期解から少しでも値がずれてしまうと元の周期解から外れてしまう周期解のことをいう。

周期解の安定性について調べるために、まずは 2 周期解を例にして考えてみよう。不動点は x_{n+1} と x_n で値が変動しない点を求めていた。これは、1 つ前の時刻との関係性をみていることになる。2 周期解は 2 個の値をいったりきたりしているので、1 つ前の時刻だけでなく 2 つ前の時刻までの関係性を調べる必要がある。たとえば、2 つの値 q_1, q_2 を行ったりきたりしているとき、x_{n+1} と x_n には下の関係がある。

$$x_{n+1}(q_1) = r(1 - x_n(q_1))x_n(q_1) = q_2$$
$$x_{n+1}(q_2) = r(1 - x_n(q_2))x_n(q_2) = q_1$$

つまり、2 周期解の特徴を知るためには、x_{n+2} と x_n の関係を考えれいけばいい。

$$\begin{aligned}
x_{n+2} &= r(1 - x_{n+1})x_{n+1} \\
&= rx_{n+1} - rx_{n+1}^2 \\
&= r \times r(1 - x_n)x_n - r \times (r(1 - x_n)x_n)^2 \\
&= r^2(1 - x_n)x_n - r^3x_n^2(1 - x_n)^2 \\
&= r^2x_n - r^2x_n^2 - r^3x_n^2(1 - 2x_n + x_n^2) \\
&= r^2x_n - r^2x_n^2 - r^3x_n^2 + 2r^3x_n^3 - r^3x_n^4 \\
&= -r^3x_n^4 + 2r^3x_n^3 - r^2(r + 1)x_n^2 + r^2x_n
\end{aligned}$$

さっきの 2 つの値 q_1, q_2 が行ったりきたりしていることを x_{n+2} と x_n の関係で考えてみると、

$$x_{n+2}(q) = -r^3x_n^4(q) + 2r^3x_n^3(q) - r^2(r+1)x_n^2(q) + r^2x_n(q) = q$$

となる。つまり、ある点 q を 2 回写像すると元に戻ってくる。その点 q を求めるために、めんどくさいけれどこれを解いてみる。

$$\begin{aligned}
-r^3q^4 + 2r^3q^3 - r^2(r+1)q^2 + r^2q &= q \\
-r^3q^4 + 2r^3q^3 - r^2(r+1)q^2 + (r^2-1)q &= 0 \\
q^4 - 2q^3 + \frac{r+1}{r}q^2 - \frac{r^2-1}{r^3}q &= 0 \\
q(q^3 - 2q^2 + \frac{r+1}{r}q - \frac{r^2-1}{r^3}) &= 0 \\
q(q - \frac{r-1}{r})(q^2 - \frac{r+1}{r}q + \frac{r+1}{r^2}) &= 0
\end{aligned}$$

最後の括弧の中を解くと、

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\frac{r+1}{r} \pm \sqrt{\frac{(r+1)^2}{r^2} - 4\frac{r+1}{r^2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{r+1}{r} \pm \sqrt{\frac{(r-3)(r+1)}{r^2}}}{2} \\
&= \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$-r^3q^4 + 2r^3q^3 - r^2(r+1)q^2 + r^2q = q$$

の解は、

$$q = 0,\ \frac{r-1}{r},\ \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

となる。

この 4 つの点が安定か不安定化かどうかで、個体数変動が点 q に引き付けれたままかどうかが決まる。安定性の議論は不動点で示したのと同じように微分を考えればよい。ここでは以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
|x'_n+2(q)| &< 1 \quad \text{：安定} \\
|x'_n+2(q)| &> 1 \quad \text{：不安定}
\end{aligned}
$$

まず、x'_n+2 を求める。

$$
\begin{aligned}
x_{n+2} &= -r^3x_n^4+2r^3x_n^3-r^2(r+1)x_n^2+r^2x_n \\
x'_{n+2} &= -4r^3x_n^3+6r^3x_n^2-2r^2(r+1)x_n+r^2
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
q_1=0,\ q_2=\frac{r-1}{r},\ q_{3,4}=\frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}
$$

とおいて、それぞれの安定性についてを順に調べていこう。

$q=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
x'_{n+2}(0) &= -4r^3\times 0+6r^3\times 0-2r^2(r+1)\times 0+r^2 \\
x'_{n+2}(0) &= r^2
\end{aligned}
$$

$1<r<4$ なので、$r^2>1$ となる。したがって、$q=0$ は不安定な解である。

$q=\frac{r-1}{r}$ のとき

$$
\begin{aligned}
x'_{n+2}(\frac{r-1}{r}) &= -4r^3\times\frac{(r-1)^3}{r^3}+6r^3\times\frac{(r-1)^2}{r^2}-2r^2(r+1)\times\frac{r-1}{r}+r^2 \\
&= -4(r-1)^3+6r(r-1)^2-2r(r+1)(r-1)+r^2 \\
&= -4(r^3-3r^2+3r-1)+6r(r^2-2r+1)-2r(r^2-1)+r^2 \\
&= -4r^3+12r^2-12r+4+6r^3-12r^2+6r-2r^3+2r+r^2 \\
&= r^2-4r+4 \\
&= (r-2)^2
\end{aligned}
$$

$|x'_{n+2}| < 1$ ならば安定で、今は $(r-2)^2 > 0$ なので、

$$\begin{aligned}
(r-2)^2 &< 1 \\
r^2 - 4r + 4 - 1 &< 0 \\
r^2 - 4r + 3 &< 0 \\
(r-1)(r-3) &< 0
\end{aligned}$$

となる。これは不動点 $\frac{r-1}{r}$ と同じで、

$1 < r < 3$：安定
$3 < r < 4$：不安定

である。

$q = \frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$ のとき

まずは計算しやすいように式変形する。

$$\begin{aligned}
x'_{n+2} &= -4r^3x_n^3 + 6r^3x_n^2 - 2r^2(r+1)x_n + r^2 \\
&= -4r^3(x_n^3 - \frac{3}{2}x_n^2 + \frac{r+1}{2r}x_n - \frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(x_n^2 - \frac{3}{2}x_n + \frac{r+1}{2r}) - \frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(x_n(x_n - \frac{3}{2}) + \frac{r+1}{2r}) - \frac{1}{4r})
\end{aligned}$$

ここに順番に q を代入していって、最後まで計算してみよう。

$$
\begin{aligned}
x'_{n+2}(q) &= -4r^3(x_n(x_n(\frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}-\frac{3}{2})+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(x_n(\frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}-3r}{2r})+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(x_n(\frac{-2r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r})+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}\times\frac{-2r+1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{-2r^2-r(1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)})+(1\pm\sqrt{(r-3)(r+1)})^2}{4r^2}+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{-2r^2-r\mp\sqrt{(r-3)(r+1)}+1\pm2\sqrt{(r-3)(r+1)}+r^2-2r-3}{4r^2}+\frac{r+1}{2r})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{-r^2-3r-2\mp(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)}}{4r^2}+\frac{2r^2+2r}{4r^2})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{r^2-r-2\mp(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)}}{4r^2})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(x_n(\frac{(r-2)(r+1)\mp(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)}}{4r^2})-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(\frac{(r+1)\pm\sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}\times\frac{(r-2)(r+1)\mp(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)}}{4r^2}-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(\frac{1}{8r^3}((r-2)(r+1)^2\mp(r+1)(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)} \\
&\qquad \pm(r+1)(r-2)\sqrt{(r-3)(r+1)}-(r-2)(r-3)(r+1))-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(\frac{(r-2)(r+1)^2-(r-2)(r-3)(r+1)}{8r^3}-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(\frac{(r-2)(r+1)(r+1-r+3)}{8r^3}-\frac{1}{4r}) \\
&= -4r^3(\frac{2(r-2)(r+1)}{4r^3}-\frac{r^2}{4r^3}) \\
&= -4r^3\times\frac{2r^2-2r-4-r^2}{4r^3} \\
&= -4r^3\times\frac{r^2-2r-4}{4r^3} \\
&= -(r^2-2r-4)
\end{aligned}
$$

$|x'_{n+2}| < 1$ ならば安定なので、$|-(r^2-2r-4)| < 1$ を求めればよい。

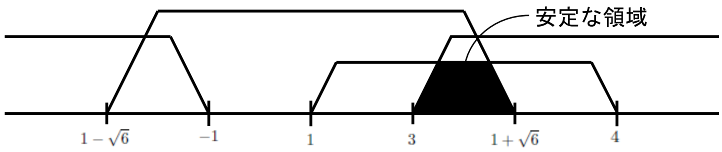
$-(r^2-2r-4) > 0$ のとき

$$\begin{aligned} -(r^2-2r-4) &< 1 \\ r^2-2r-4 &> -1 \\ r^2-2r-3 &> 0 \\ (r+1)(r-3) &> 0 \end{aligned}$$

$-(r^2-2r-4) < 0$ のとき

$$\begin{aligned} r^2-2r-4 &< 1 \\ r^2-2r-5 &< 0 \\ (r+1+\sqrt{6})(r+1-\sqrt{6}) &< 0 \end{aligned}$$

よって、$r < -1$ かつ $r > 3$ かつ $1-\sqrt{6} < r < 1+\sqrt{6}$ を満たし、さらに $1 < r < 4$ に r があるときに q は安定である。上の図からわかるように、最終的に安定な r の範囲は、



$$3 < 1+\sqrt{6}$$

である。r がこの範囲にあるときに個体数は

$$\begin{aligned} x_{n+1}(q_1) = r(1-x_n(q_1))x_n(q_1) = q_2 \\ x_{n+1}(q_2) = r(1-x_n(q_2))x_n(q_2) = q_1 \end{aligned}$$

という変動を繰り返す。今は 2 周期解についての安定性を調べたが、x_{n+3} と x_n の関係性を調べれば 3 周期解、x_{n+4} と x_n の関係性を調べれば 4 周期解…という具合に周期解を次々に求めていくことができる。

ここで考えてきたことをグラフでみてみるとこんな感じになる。2 周期解は、$x_{n+1} = x_n$ と x_{n+2} の交点であることがわかる。また、下のグラフから 4 周期解は、$x_{n+1} = x_n$ と x_{n+4} の交点であることがわかる。したがって p 周期解は、$x_{n+1} = x_n$ と x_{n+p} の交点と考えればよい。

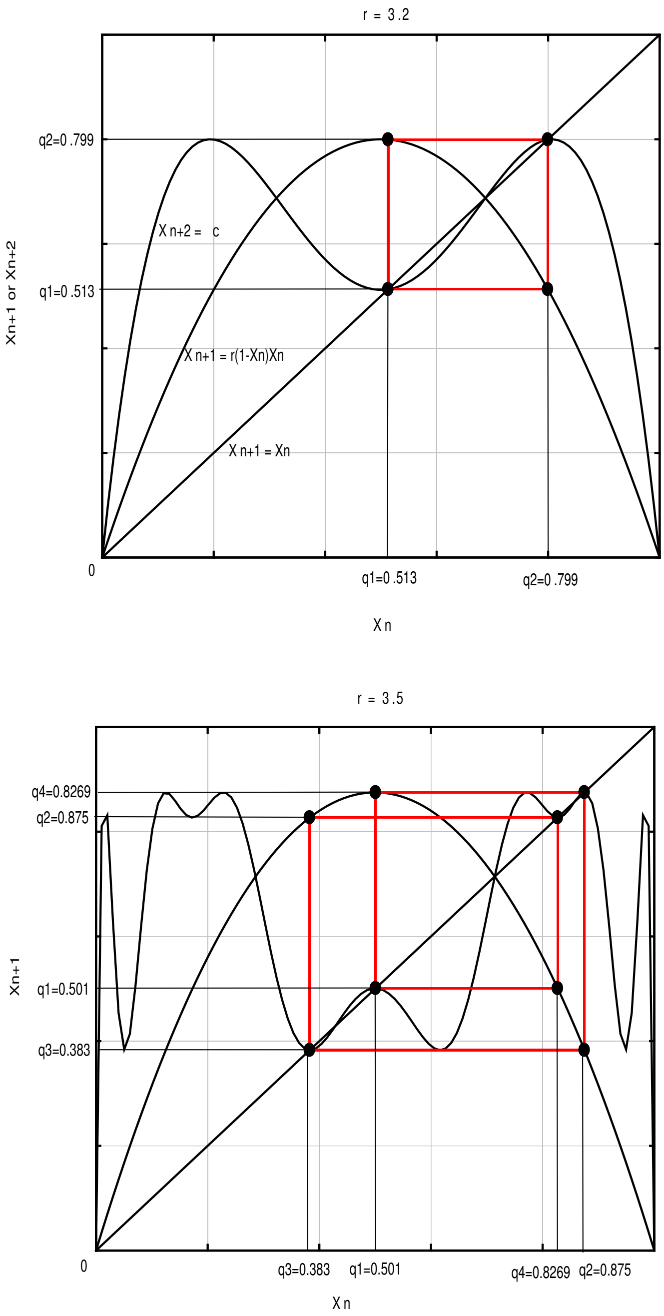
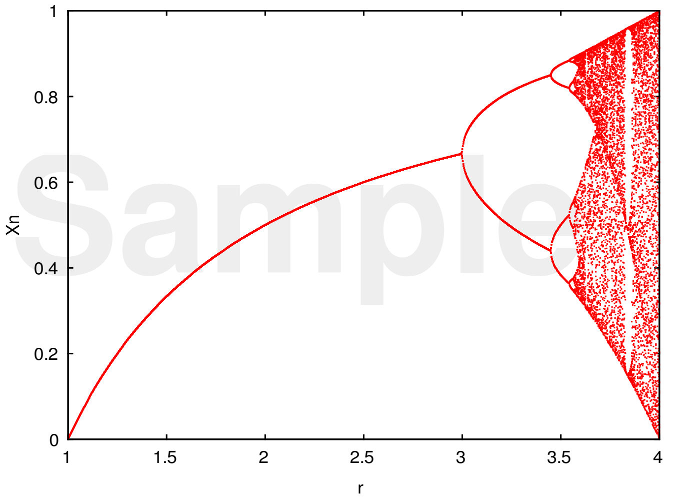


図 5: ロジスティック写像の周期解

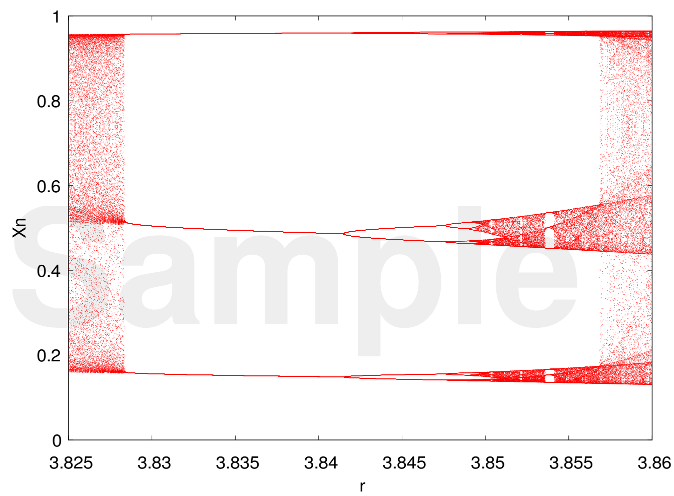
7　周期倍分岐と 3 周期の窓

ロジスティック写像は r の値に依存して不動点や周期解をもつことがわかった。これまではいくつかの r についてそれを確認してきたが、解のパターンをひとつのグラフでまとめてみようと思う。r を横軸のパラメータにとって、それぞれの r で初期変動を取り除いた個体数変動を縦軸にプロットしていく。実際に、そのようなグラフを書くと以下のようなグラフが得られる。このような解の特性を示すグラフを**分岐図**という。この分岐図を見てみると、



ロジスティック写像の解の個数に関しての特徴がよくわかる。$1 \leq r \leq 3$ のとき解は 1 個、$3 \leq r \leq 3.449$ のとき解は 2 個という具合に解の個数が 1 個 $\rightarrow$ 2 個 $\rightarrow$ 4 個 $\rightarrow$ 8 個 $\rightarrow \cdots$ と倍増していく。このような解の個数が倍々になって増えていく分岐のことを**周期倍分岐**という。

解の個数が倍数ずつ増えていくので、分岐図は r の増大に伴って複雑になっていく。それにもかかわらず、$r = 3.84$ 前後で周期性が現れている。これを **3 周期の窓**という。その部分のグラフを見てみよう。



8 リアプノフ指数

ロジスティック写像では、周期倍化分岐でわかるように解の個数が倍増していく。そのように解の個数が倍増していったときにそれが周期解であるかどうかを判定することは難しい。そこで、不動点や周期解と非周期解を定量評価する必要がある。その評価方法の考え方のヒントは安定性の考え方の中にある。不動点や周期解の安定性は、その点を少しだけずれしたときにそのずれの大きさがどうなっていくかを調べた。今回は、そのずれがどれくらいの速さで大きさが変わっていくのかを調べる。

今、x_n と $x_n + \alpha$ の差を dx_n、$x_{n+1}(x_n)$ と $x_{n+1}(x_n + \alpha)$ の差を dx_{n+1} とする。このとき、この差の比をとってでる傾きが時間とともにどれくらいの速さで変化しているかの指標になる。今、その関係に以下の式が成り立つとする。

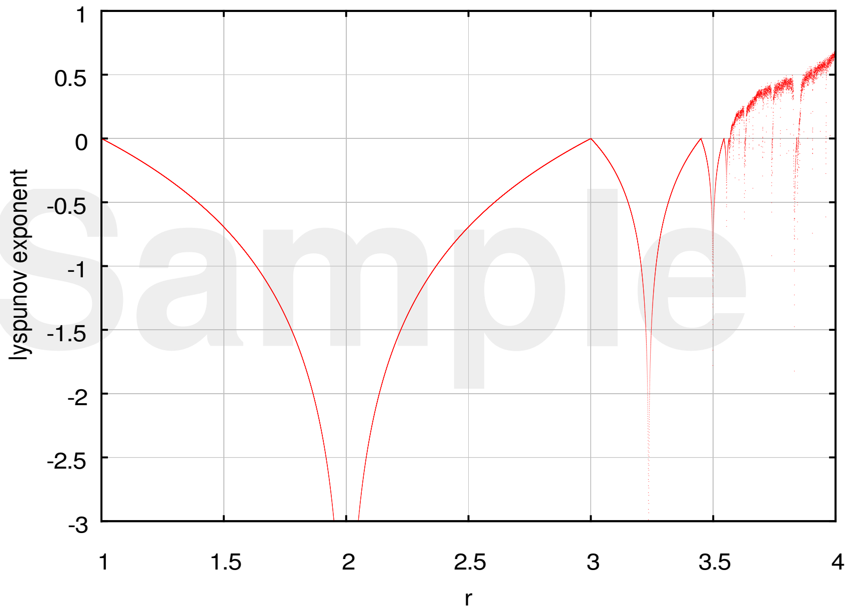
$$|dx_{n+1}| = e^{\lambda t}|dx_n|$$

これはどういう式かというと、dx_{n+1} が時間経過とともに指数関数的に減少または増大するというものです。その増減の速度が λ で決まってるわけです。λ が負ならば dx_{n+1} は時間とともに指数関数的に減少していき、その速度は λ が小さければ小さいほど速い。一方で、λ が正ならば dx_{n+1} は時間とともに指数関数的に増大していき、その速度は λ が大きければ大きいほど速い。これは結局、最初にあったずれがどれくらいの速度で離れていくかもしくは近づいていくかを現していて、その指標となる値が λ で**リアプノフ指数**と呼ばれる。そして、**カオスはリアプノフ指数が正のときに生じる**。これは、別の見方をすると初期値鋭敏性を評価していることにもなる。このリアプノフ指数を求めるのはこんな感じでやっていく。

$$\begin{aligned}
|dx_{n+1}| &= e^{\lambda t}|dx_n| \\
\frac{|dx_{n+1}|}{|dx_n|} &= e^{\lambda t} \\
\ln\frac{|dx_{n+1}|}{|dx_n|} &= \ln e^{\lambda t} \\
\ln\frac{|dx_{n+1}|}{|dx_n|} &= \lambda t \\
\lambda &= \frac{1}{t}\ln\frac{|dx_{n+1}|}{|dx_n|} \\
\lambda &= \frac{1}{t}\ln|x'_{n+1}| \\
\lambda &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\ln|x'_{n+1}|
\end{aligned}$$

なぜ極限がでてくるのか不審に思うかもしれないが、よく考えてみれば自然な流れである。時間経過とともにどうなっているかを調べるので、十分な時間が経過した時にどうなっ

ているかまでを調べる必要がある。ただし、どこまでの時間経過までを調べたかによって値が変わってしまうと困るので、時間平均を取る。実際にリアプノフ指数を求めるとこのようなグラフが得られる。分岐図でみた 3 周期の窓の領域のリアプノフ指数を見てみると、以下



のようなグラフが得られる。このグラフからわかるように、**不動点** → **周期解** → **カオス** →**3 周期解** → **カオス**という順で解のパターンが変化していることがわかる。