Aluno: Vítor Gabriel Reis Caitité

Valor Esperado de uma Variável Aleatória

Valor Esperado de uma V.A. discreta:

Seja X uma v.a. discreta com possíveis valores $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$. Seja $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Então o valor esperado da variável X é:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, p(x_i) \quad \text{se a serie convergir.}$$

Valor Esperado de uma V.A. Contínua

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x)$. O valor esperado de X é dado por:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx$$

Propriedades da Esperança:

- O valor esperado de uma constante é a propria constante: $E(c) = c$
- $E(cX) = c\,E(X)$

  constante v.a.
- $E(X \pm c) = E(X) \pm c$
- $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$, sendo X e Y duas V.A.
- $E(XY) = E(X)\,E(Y)$, sendo X e Y duas V.A. independentes.

Esperança da função de uma V.A.

Toda função de uma v.a. X também é uma v.a. Logo podemos falar na esperança de X^2, $2X+1$, etc.

Exemplos:

→ X discreta $\Rightarrow E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \, p(x_i)$; → X contínua $\Rightarrow E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) \, dx$

Exemplos

v.a. discreta

Função de probabilidade:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, p(x_i) = \left(0 \times \frac{1}{4}\right) + \left(1 \times \frac{1}{2}\right) + \left(2 \times \frac{1}{4}\right) = 1$$

v.a contínua

Considerando uma v.a, com fdp $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Tem-se:

$$E(x) = \int_0^1 x(2x) \, dx = \int_0^1 2x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Variância de uma Variável Aleatória

A variância fornece uma medida de dispersão dos valores em relação ao valor esperado.

Definição:
Seja X uma v.a. (discreta ou contínua) com esperança dada por $E(X)$. A variância de X é dada por:

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Notação: $Var(X) = \sigma_x^2$

Propriedades
- A variância é sempre positiva, $Var(X) \geqslant 0$.
- Variância de constante é 0. $Var(c) = 0$
- $Var(c \pm X) = Var(X)$
- $Var(cX) = c^2 \, Var(X)$
- Sendo X e Y duas v.a. independentes: $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

Exemplos:

v.a. discreta

X é uma v.a. discreta com função de prob. dada por:

x_i	0	1	2
$p(x_i)$	1/4	1/2	1/4

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p(x_i) = 1$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p(x_i) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 3/2 \rightarrow \text{Assim } Var(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

v.a. contínua:

X é uma v.a. contínua com função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(X) = \int_0^1 x(2x)\,dx = 2/3$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2(2x)\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Variância da população e Variância da amostra

A variância (σ^2) da população y_i onde $i = 1, 2, \ldots, N$ é dada por: $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2$, onde μ é a média da população. E a variância da amostra é dada por:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$ onde $\bar{x}$ é a média da amostra.