Aluno: Vítor Gabriel Reis Caitité

Lista de Exercícios 1

1) $Y_i \sim$ Poisson (μ).

função de probabilidade:

$$f(y) = \frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}$$

Obter estimador de verossimilhança

A função de verossimilhança para amostra Y_i é dada por:

$$L(\mu; y_1, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu^{y_i}e^{-\mu}}{y_i!}\right) = \frac{e^{-\mu \cdot n}\mu^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

Aplicando-se logaritmo natural:

$$\ln L(\mu; y_i) = \ln\left(\frac{e^{-\mu n}\mu^{\Sigma y_i}}{\prod y_i!}\right) = \ln(e^{-\mu n}) + \ln(\mu^{\Sigma y_i}) - \ln\left(\prod y_i!\right)$$

$$= -n\mu + \sum_{i=1}^{n} y_i \ln(\mu) - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i!\right)$$

Ponto onde a derivada em relação a μ seja 0:

$$\frac{\partial \ln(L(\mu, y_i))}{\partial \mu} = -n + \frac{1}{\hat{\mu}}\sum_{i=1}^{n} y_i - 0 = 0$$

Assim: $\frac{1}{\hat{\mu}}\sum_{i=1}^{n} y_i = n \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$, logo: $\hat{\mu} = \bar{Y}$

2) $Y_i \sim$ Bernoulli (p).

Obter o estimador de maxima verossimilhança

função de probabilidade dessa distribuição:

$$f(y, p) = p^{y}(1-p)^{1-y}$$

Função de verossimilhança

$$L(p; y_i, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n}\left(p^{y_i}(1-p)^{1-y_i}\right) = p^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

Aplicando ln:

$$\ln(L(p, y_i)) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(p) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)\ln(1-p)$$

Ponto onde a derivada com relação a p seja 0:

$$\frac{\partial \ln(L(p, y_i))}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) + \left(n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0$$

Assim: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\hat{p}} = \dfrac{n - \sum_{i=1}^{n} y_i}{1-\hat{p}} \rightarrow \dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} y_i} - 1$

$$\rightarrow \sum y_i - \cancel{\hat{p}\sum y_i} = n\hat{p} - \cancel{\hat{p}\sum y_i}$$

Logo: $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \rightarrow \hat{p} = \bar{Y}$

3) Modelo Linear: $Y_i / X_i = \beta_1 X_i + \epsilon_i$, onde $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Obter estimador de Mínimos Quadrados:

Função de perda → Soma dos Quadrados dos Resíduos ou Erros

$$SQE(\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)^2$$

Queremos encontrar o valor de β_1 que minimiza essa função.

$$\frac{\partial SQE(\beta_1)}{\partial \beta_1} = 2\left[\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)\right](-X_i)$$

Igualando a derivada a zero:

$$-2\sum_{i=1}^{n} X_i [Y_i - \beta_1 X_i] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i - \beta_1 X_i^2) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_1 X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum X_i^2}$$

4) Encontrar $Var[\hat{\beta}_1]$:

Do exercício anterior, tem-se $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

Substituindo a equação de Y_i no estimador:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\beta_1 X_i + \epsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Expandindo:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_1 x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Logo:

$$\hat{\beta}_1 = \underbrace{\beta_1}_{\text{costante}} + \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{\text{apenas este termo afeta a variância}}$$

$$Var[\hat{\beta}_1] = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

Sabe-se que $Var(\epsilon_i) = \sigma^2$

Assim:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot Var(\epsilon_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Logo:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2 \cancel{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$