Programa de Engenharia Civil (PEC)

Disciplina:CPC-777 Modelagem e simulação de reservatórios

Professor (es): Paulo Couto
Aluno (a): Vivian de Carvalho Rodrigues
DRE: 121010011

Relatório: Lista 2

Sumário

1. Introdução

Este relatório tem por objetivo apresentar a resolução dos problemas referentes a Lista 2 da disciplina Modelagem e simulação de reservatórios (CPC 777).

2. Problema 1

Provar a através de Séries de Taylor que as seguintes aproximações são verdadeiras [1]:

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f\left(x_{i+2}\right)+8f\left(x_{i+1}\right)-8f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_{i-2}\right)}{12\Delta x}+\varepsilon(\Delta x^4)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-f\left(x_{i+2}\right)+4f\left(x_{i+1}\right)-3f\left(x_{i}\right)}{2\Delta x}+\varepsilon(\Delta x^2)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{f\left(x_{i}\right)-2f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_{i-2}\right)}{\Delta x^2}+\varepsilon(\Delta x)$$

Figura 1 – Enunciado do problema 1 da lista 2 [1]

2.1 Resolução

[3] A série de Taylor é definida da seguinte forma, para um ponto x em torno de 'a' e 'x>a':

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) =$$

$$f(a) + (x-a)\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=a} + \frac{(x-a)^3}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right]_{x=a} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=a} \qquad \text{(Eq.1)[2]}$$

Para um ponto em torno de 'a' e 'x < a':

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) =$$

$$f(a) - (x-a)\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=a} - \frac{(x-a)^3}{3!}\left.\frac{d^3f}{dx^3}\right]_{x=a} + \cdots + \frac{(-1)^n(x-a)^n}{n!}\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=a} \qquad \text{(Eq.2)[2]}$$

Fazendo

$$f(x_{i+1}) = f(x+\Delta x)$$
$$f(x_{i-1}) = f(x-\Delta x)$$
$$f(x_{i+2}) = f(x+2\Delta x)$$
$$f(x_{i-2}) = f(x-2\Delta x)$$

Onde

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x$$
$$x_{i-1} - x_i = -\Delta x$$
$$\left.\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x_i} = f^n(x_i)$$

Então seguindo a expansão da ST no entorno de xi:

$$(i)\qquad f(x+\Delta x) = f(x_i) + \Delta x\, f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f''''^{(x_i)} + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!} f^{n(x_i)}$$

$$(ii)\qquad f(x-\Delta x) = f(x_i) - \Delta x\, f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{\Delta x^4}{4!} f''''^{(x_i)} + \cdots + (-1)^n \frac{\Delta x^n}{n!} f^{n(x_i)}$$

$$(iii)\qquad f(x+2\Delta x) = f(x_i) + 2\Delta x\, f'(x_i) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f''''^{(x_i)} + \cdots + \frac{(2\Delta x)^n}{n!} f^{n(x_i)}$$

$$(iv)\qquad f(x-2\Delta x) = f(x_i) - 2\Delta x\, f'(x_i) + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} f''(x_i) - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(2\Delta x)^4}{4!} f''''^{(x_i)} + \cdots + (-1)^n \frac{(2\Delta x)^n}{n!} f^{n(x_i)}$$

Subtraindo (ii) de (i)

$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = \qquad (I)$$
$$2\Delta x\, f'(x_i) + \frac{2\,\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{2\,\Delta x^5}{5!} f'''''(x_i) + \cdots + \frac{2\,\Delta x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{2n+1}(x_i)$$

Subtraindo (iv) de (iii)

$$f(x+2\Delta x) - f(x-2\Delta x) = \qquad (II)$$
$$4\Delta x\, f'(x_i) + \frac{2\,(2\Delta x)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{2\,(2\Delta x)^5}{5!} f'''''(x_i) + \cdots + \frac{2\,(2\Delta x)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{2n+1}(x_i)$$

Fazendo 8 (I) – II

$$8\, f(x+\Delta x) - 8f(x-\Delta x) - f(x+2\Delta x) + f(x-2\Delta x) = 12\,\Delta x\, f'(x_i) - \frac{48\,\Delta x^5}{5!} f'''''(x_i) + \cdots$$

Isolando f'(xi), obtém-se, portanto:

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{8\, f(x+\Delta x) - 8f(x-\Delta x) - f(x+2\Delta x) + f(x-2\Delta x)}{12\,\Delta x} + \left\{\frac{48\,\Delta x^4}{5!} f'''''(x_i) + \cdots\right\}}$$

Fazendo 4 (i) – (iii)

$$4\, f(x+\Delta x) - f(x+2\Delta x) = 3\, f(x_i) + 2\,\Delta x\, f'(x_i) - \frac{4\,\Delta x^3}{3!} f'''(x_i) - \frac{12\,\Delta x^4}{4!} f''''(x_i) - \cdots$$

Isolando f'(xi), obtém-se, portanto:

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{4\, f(x+\Delta x) - f(x+2\Delta x) - 3\, f(x_i)}{2\,\Delta x} + \left\{\frac{2\,\Delta x^2}{3!} f'''(x_i) - \frac{6\,\Delta x^3}{4!} f''''(x_i) - \cdots\right\}}$$

Fazendo (iv) – 2(ii)

$$f(x-2\Delta x)-\ 2f(x-\Delta x)=\ -f(x_i)+\Delta x^2\,f''(x_i)-\frac{6\,\Delta x^3}{3!}f'''(x_i)+\frac{14\,\Delta x^4}{4!}f''''(x_i)+\cdots$$

Isolando f''(xi), obtém-se, portanto:

$$\boxed{f''(x_i)=\frac{f(x-2\Delta x)-\ 2f(x-\Delta x)+\ f(x_i)}{\Delta x^2}+\left\{\frac{6\,\Delta x}{3!}f'''(x_i)-\frac{14\,\Delta x^2}{4!}f''''(x_i)+\cdots\right\}}$$

3. Problema 2

2. O fluxo radial unidimensional em regime transiente é dado por:

$$\frac{\partial P_D}{\partial t_D}=\frac{1}{r_D}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)$$

$$P_D(r_D,t_D=0)=0$$

$$\left(r_D\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1}=-1$$

$$\left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=r_{eD}=r_e/r_w}=0$$

onde P_D, r_D e t_D são as variáveis adimensionais

$$P_D=\frac{2\pi kh}{q_{o,std}B_o\mu_o}(P_i-P)\qquad t_D=\frac{kt}{\phi\mu_o c_t r_w^2}\quad r_D=\frac{r}{r_w}$$

Utilizando os dados da Tabela 1, resolva o problema dado pelas Eqs. (1.4) e (1.5) por diferenças finitas utilizando:

a) Formulação explícita;

b) Formulação totalmente implícita; e

obtenha e plote os perfis radiais de pressão (dimensional) no meio poroso entre r_w e r_e para t = 1 minuto, t = 1 hora, t = 1 dia, t = 30 dias, t = 1 ano e t = 10 anos. Compare seus resultados com aqueles obtidos na lista 1. Como você interpreta seus resultados?

Tabela 1. Dados para o problema 2.

Parâmetro	***Sistema de unidades***	
	API	***SI***
ϕ	20 %	20%
c_t	1,5 × 10^{-5} psi^{-1}	2,18 × 10^{-9} Pa^{-1}
k	150 mD	148 × 10^{-15} m^2
h	10 ft	3,048 m
$q_{o,std}$	3000 STB/dia	518 × 10^{-5} m^3/seg.
B_o	1,5 bbl/STB	1,5 m^3/ m^{3}std
μ_o	0,33 cp	3,3 × 10^{-4} Pa.s
P_i	2.200 psi	15,17 × 10^6 Pa
r_w	3,5 pol.	0,0889 m
r_e	2.000 ft	609,6 m

Figura 2 - Enunciado do problema 2 da lista 2 [1]

3.1 Resolução

Seguindo os passos de resolução descrito em [2], a aproximação *forward* da derivada primeira de f (x_i) é

$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - \xi\,(\Delta x)$$

ou

$$f'(x_i) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Equação 1 - Aproximação *foward* da derivada primeira [2]

A aproximação centrada da derivada primeira é dada por:

$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\,\Delta x} - \xi\,(\Delta x^2)$$

ou

$$f'(x_i) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\,\Delta x}$$

Equação 2 - Aproximação *central* da derivada primeira [2]

Ainda, para a aproximação centrada a derivada de segunda ordem fica da seguinte maneira:

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{\Delta x^2} - \xi\,(\Delta x^2)$$

ou

$$f''(x_i) = \frac{f(x + \Delta x) + 2f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Equação 3 - Aproximação *central* da derivada segunda [2]

De acordo com [2], a equação do problema de fluxo unidimensional em regime transiente a ser resolvido:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\phi \mu c_t}{k}\,\frac{\partial P}{\partial t}$$

Equação 4 – Equação da difusividade para fluxo radial em regime transiente - analítico [2]

Onde $\eta = {}^{k}/_{\phi \mu c_t}$

Desenvolvendo a equação acima pela regra da cadeia e, substituindo as derivadas pelas aproximações da Série de Taylor *forward*, para a derivada temporal, e centrada para as derivadas espaciais:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial r} + r\,\frac{d^2P}{dr^2}\right)$$

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_i - P_i^0}{\Delta t}\right) = \frac{1}{r_i}\left[\frac{P_{i+1}^{\theta} - P_i^{\theta}}{2\,\Delta r}\right] + \frac{P_{i+1}^{\theta} - 2P_i^{\theta} + P_{i-1}^{\theta}}{\Delta r^2}$$

Equação 5 – Equação da difusividade para fluxo radial em regime transiente – discreto

O termo θ identifica o tempo t_0 e t no qual o termo difusivo é calculado[4].

$$\boxed{P_{i,j}^{\theta} = \theta P_{i,j} + (1-\theta)P_{i,j}^{0}}$$

- Se $\theta = 0$ esquema de discretização totalmente explícita;
- Se $\theta = 1$ esquema de discretização totalmente implícita;
- Se $0 < \theta < 1$ esquema de discretização parcialmente implícita.

Figura 3 – Opções de esquema de discretização [4]

3.2 Esquema explícito

As informações para o cálculo da variável dependente (pressão) no nó i são provenientes do tempo anterior (θ = 0, condição inicial):

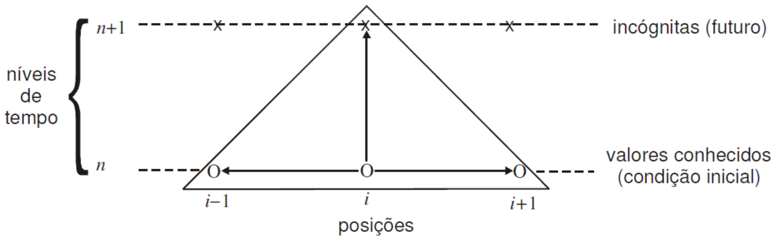


Figura 4 – Discretização usando o método explícito[2]

Então:

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_i - P_i^0}{\Delta t}\right) = \frac{1}{r_i}\left[\frac{P_{i+1}^{0} - P_i^{0}}{2\,\Delta r}\right] + \frac{P_{i+1}^{0} - 2P_i^{0} + P_{i-1}^{0}}{\Delta r^2}$$

Equação 6 – Equação da difusividade para fluxo radial em regime transiente – esquema explícito

Resolvendo a equação para única incógnita P_i

$$P_i = \left(\frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r} + \frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_{i+1}^0 + \left(\frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2} - \frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r}\right)P_{i-1}^0 + \left(1 - \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_i^0$$

Equação 7 –Pressão no nó i- regime transiente – esquema explícito

Onde os termos entre parênteses são chamados de “transmissibilidade do nó” (τ), assim:

$$P_i = \tau_{i+1}\,P_{i+1}^0 + \tau_{i-1}\,P_{i-1}^0 + \tau_i\,P_i^0$$

Onde

- $\tau_{i+1} = \left(\frac{\eta \Delta t}{2\, r_i\, \Delta r} + \frac{\eta \Delta t}{\Delta r^2}\right)$
- $\tau_{i-1} = \left(\frac{\eta \Delta t}{\Delta r^2} - \frac{\eta \Delta t}{2\, r_i\, \Delta r}\right)$
- $\tau_i = \left(1 - \frac{2\, \eta \Delta t}{\Delta r^2}\right)$

[2] Na fronteira r = r_w (r → 0 ou i =0), a condição de contorno é:

$$\lim_{r \to 0}\left(r\, \frac{\partial P}{\partial r}\right) = -\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$$

Substituindo na equação original do problema

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial r} + r\, \frac{d^2 P}{d r^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{d^2 P}{d r^2}$$

Equação 8 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional para r~0

Então

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_i - P_i^0}{\Delta t}\right) = -\frac{1}{r_i^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{P_{i+1}^0 - 2P_i^0 + P_{i-1}^0}{\Delta r^2}$$

ou

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_0 - P_0^0}{\Delta t}\right) = -\frac{1}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{P_1^0 - 2P_0^0 + P_{-1}^0}{\Delta r^2}$$

Equação 9 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional – explícito para r~0

De acordo com e [4], para resolver P_{-1} fictício, utiliza-se a condição de simetria no nó i = 0

$$\left.\frac{dP}{dr}\right]_{r=0} = \frac{{P_1}^0 - {P_{-1}}^0}{2\, \Delta r} = 0$$

então

$${P_1}^0 = {P_{-1}}^0$$

Portanto, substituindo a igualdade acima na equação 9

$$P_0 = \left(\frac{2\, \eta \Delta t}{\Delta r^2}\right) P_1^0 + \left(1 - \frac{2\, \eta \Delta t}{\Delta r^2}\right) P_0^0 - \frac{\eta \Delta t}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$$

Equação 10 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional – explícito para r~0

ou

$$P_0 = \tau_1\, P_1^0 + \tau_0\, P_0^0 + B_0$$

- $\tau_1 = \frac{2\eta\Delta t}{\Delta r^2}$
- $\tau_0 = \left(1 - \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)$
- $B_0 = -\frac{\eta\Delta t}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$

[2] Na fronteira r = r_e ($r \to \infty$), a condição de contorno é a própria pressão inicial (condição inicial de pressão em t =0).

3.3 Esquema implícito

[4]As informações de cálculo da variável dependente (pressão) no nó i são provenientes inteiramente do tempo atual (θ = 0, as equações resultantes que compõem o sistema linear serão todas acopladas):

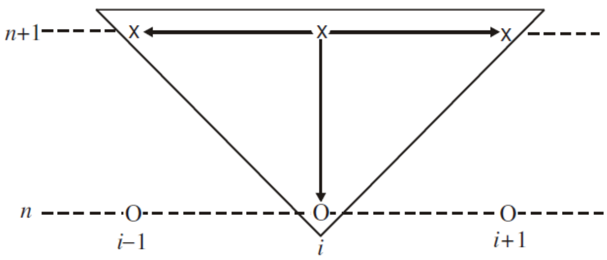


Figura 5 - Discretização usando o método implícito [2]

Então:

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_i - P_i^0}{\Delta t}\right) = \frac{1}{r_i}\left[\frac{P_{i+1} - P_i}{2\,\Delta r}\right] + \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta r^2}$$

Equação 11 – Equação da difusividade para fluxo radial em regime transiente – esquema implícito

Resolvendo a equação para a incógnita P_i

$$\left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_i = \left(\frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r} + \frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_{i+1} + \left(\frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2} - \frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r}\right)P_{i-1} + P_i^0$$

Equação 12 –Equação acoplada da pressão no nó i - regime transiente – esquema implícito

Ou

$$\tau_i\ P_i = \tau_{i+1}\ P_{i+1} + \tau_{i-1}\,P_{i-1} + P_i^0$$

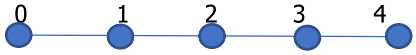
- $\tau_{i+1} = \left(\frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r} + \frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)$
- $\tau_{i-1} = \left(\frac{\eta\Delta t}{\Delta r^2} - \frac{\eta\Delta t}{2\,r_i\,\Delta r}\right)$
- $\tau_i = \left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)$

Portanto é possível organizar a equação 12 da seguinte forma (em termos das transmissibilidades):

$$-\tau_{i-1}\,P_{i-1} + \tau_i\,P_i - \tau_{i+1}\,P_{i+1} = P_i^0$$

Equação 13 –Equação acoplada da pressão no nó i - regime transiente – esquema implícito

Considerando, por exemplo uma malha com 5 pontos:



$$0\;+\;\;\tau_0\,P_0\;-\;\;\tau_1\,P_1 = P_0^0$$

$$-\,\tau_0\,P_0\;\;+\tau_1\,P_1\;-\;\;\tau_2\,P_2 = P_1^0$$

$$-\,\tau_1\,P_1\;\;+\tau_2\,P_2\;-\;\;\tau_3\,P_3 = P_2^0$$

$$-\,\tau_2\,P_2\;\;+\tau_3\,P_3\;-\;\;\tau_4\,P_4 = P_3^0$$

$$-\,\tau_3\,P_3\;\;+\tau_4\,P_4\;-\;\;0\;\;= P_4^0$$

Em outras palavras:

$$\begin{bmatrix} \tau_0 & -\tau_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau_0 & \tau_1 & -\tau_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_1 & \tau_2 & -\tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_2 & \tau_3 & -\tau_4 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_3 & \tau_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0^0 \\ P_1^0 \\ P_2^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \end{bmatrix}$$

Portanto, para uma malha de n pontos:

$$[\tau]_{n\,x\,n}\;\;[P\,]_{n\,x\,1}\;\;=\;[P^0]_{n\,x1}$$

O campo de pressões a ser calculado será:

$$[P\,]_{n\,x\,1}\;\;=\;[\tau]_{n\,x\,n}{}^{-1}\,[P^0]_{n\,x1}$$

[2] Na fronteira r = r_w (r → 0 ou i =0), a condição de contorno é:

$$\lim_{r\to 0}\left(r\,\frac{\partial P}{\partial r}\right) = -\,\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$$

Substituindo na equação original do problema

$$\frac{1}{\eta}\,\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial r} + r\,\frac{d^2 P}{dr^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\,\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{d^2 P}{dr^2}$$

Equação 14 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional para r~0

Então

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_i - P_i^0}{\Delta t}\right) = -\frac{1}{r_i^2}\,\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{\Delta r^2}$$

ou

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{P_0 - P_0^0}{\Delta t}\right) = -\frac{1}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h} + \frac{P_1 - 2P_0 + P_{-1}}{\Delta r^2}$$

Equação 15 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional – numérico para r~0

De acordo com e [4], para resolver P_{-1} fictício, utiliza-se a condição de simetria no nó i = 0

$$\left.\frac{dP}{dr}\right]_{r=0} = \frac{{P_1}^0 - {P_{-1}}^0}{2\,\Delta r} = 0$$

então

$${P_1}^0 = {P_{-1}}^0$$

Portanto, substituindo a igualdade acima na equação 15

$$\left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_0 = \left(\frac{2\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_1 + P_0^0 - \frac{\eta\Delta t}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$$

Equação 16 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional – implícito para r~0

ou

$$\tau_0\ P_0 - \tau_1\ P_1 = B_0$$

- $\tau_1 = \frac{2\eta\Delta t}{\Delta r^2}$
- $\tau_0 = \left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)$
- $B_0 = P_0^0 - \frac{\eta\Delta t}{r_0^2}\frac{q_0 B_0 \mu}{2\pi k h}$

De forma análoga na fronteira r = r_e (r → ∞), fazendo ($P_{n+1} = P_{n-1}$) na equação 12

$$\left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_n = \left(\frac{2\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)P_{n-1} + P_n^0$$

Equação 17 – Equação do problema de fluxo radial unidimensional – implícito para r~r_e

$$\tau_n\ P_n - \tau_{n-1}\ P_{n-1} = P_n^0$$

- $\tau_{n-1} = \frac{2\eta\Delta t}{\Delta r^2}$
- $\tau_n = \left(1 + \frac{2\,\eta\Delta t}{\Delta r^2}\right)$

4. Resultados

Para a implementação numérica, foi utilizada a linguagem de programação em Python. O problema analítico foi implementado junto ao código para comparação dos resultados.

Os códigos estão nos anexos.

4.1 Analítico

O resultado do problema analítico (Exercício 1 - Lista 1) está reproduzido na imagem abaixo.

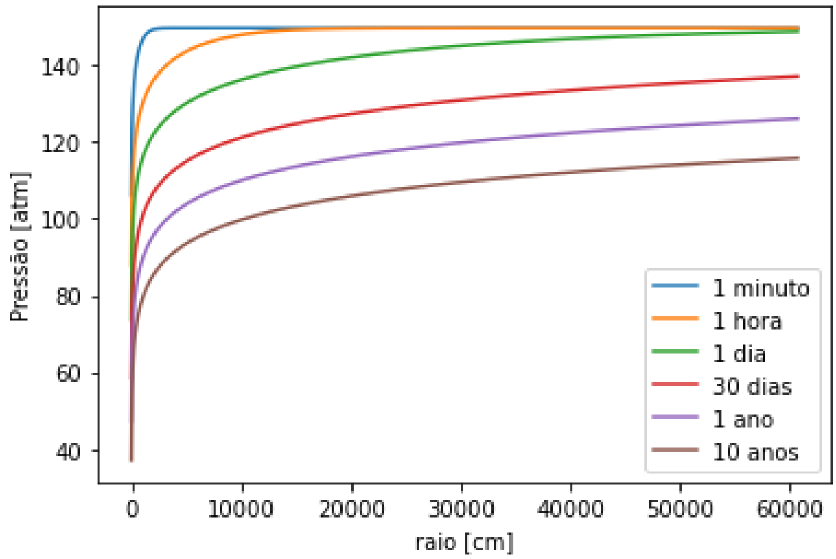


Figura 6 – Caso analítico (re = 609.6m)

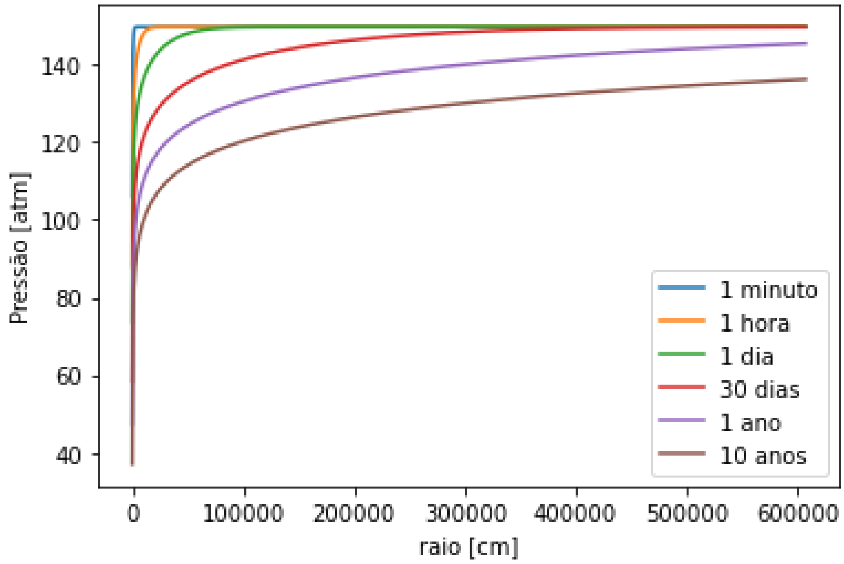


Figura 7 - Caso analítico (re = 6 km)

4.2 Numérico – esquema explícito

Os resultados numéricos no esquema explícito no regime transiente estão apresentados nas figuras abaixo:

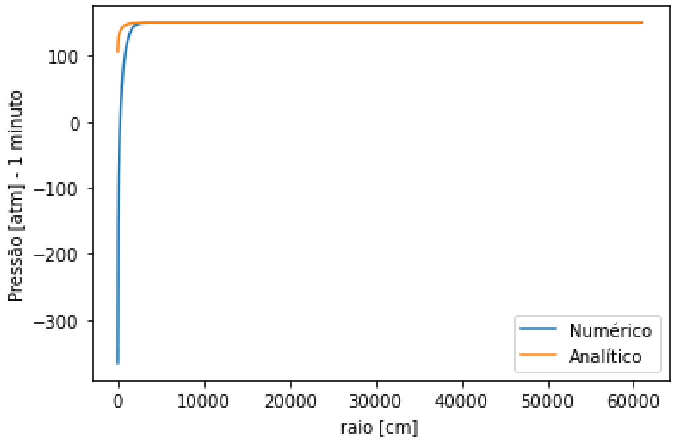


Figura 8 -Numérico - explícito – 1 minuto (re = 609.6m)

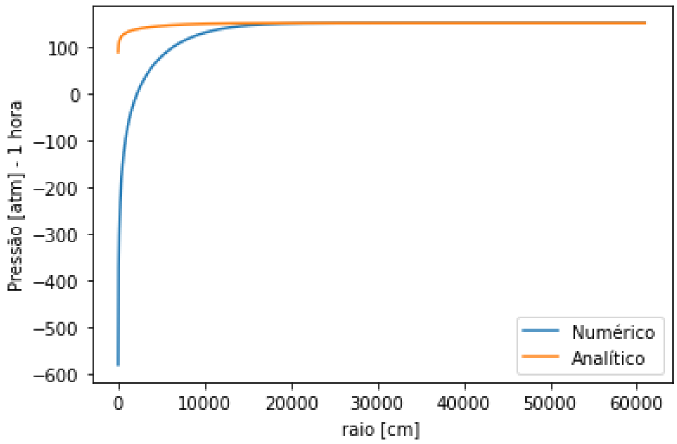


Figura 9 - Numérico - explícito – 1 hora (re = 609.6m)

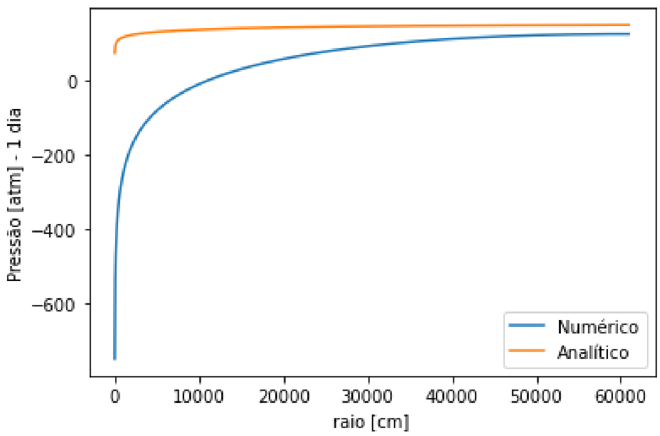


Figura 10 - Numérico - explícito – 1 dia (re = 609.6m)

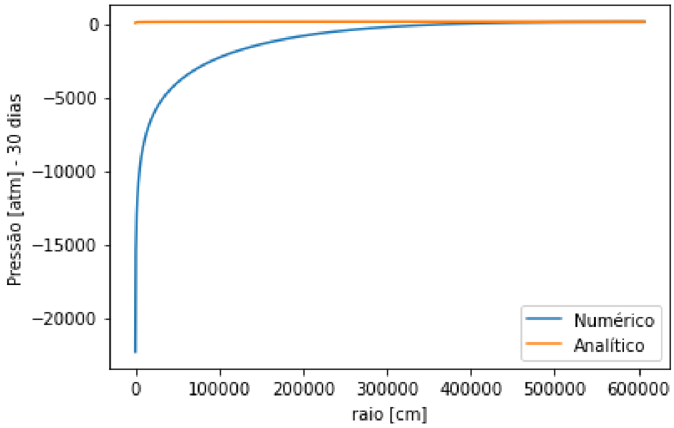


Figura 11 - Numérico - explícito – 30 dias (re = 6 km)

O programa possui limitações de tempo de rodada para análises maiores que 30 dias (4 horas de simulação). Por isso, não foram apresentados os resultados numéricos para 1 ano e 10 anos.

4.3 Numérico – esquema implícito

Os resultados numéricos no esquema implícito no regime transiente estão apresentados nas figuras abaixo:

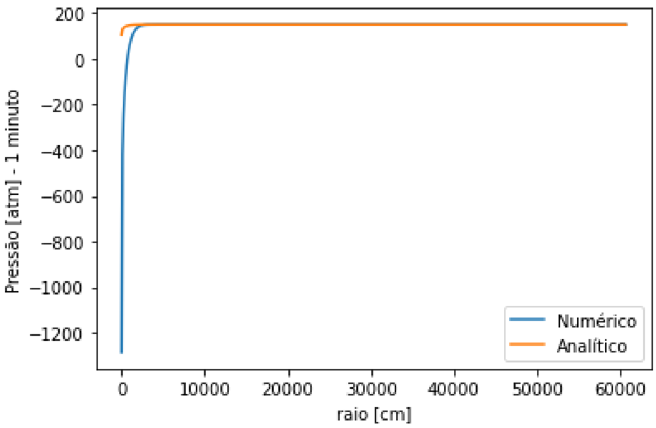


Figura 12 - Numérico - implícito – 1 minuto (re = 609.6m)

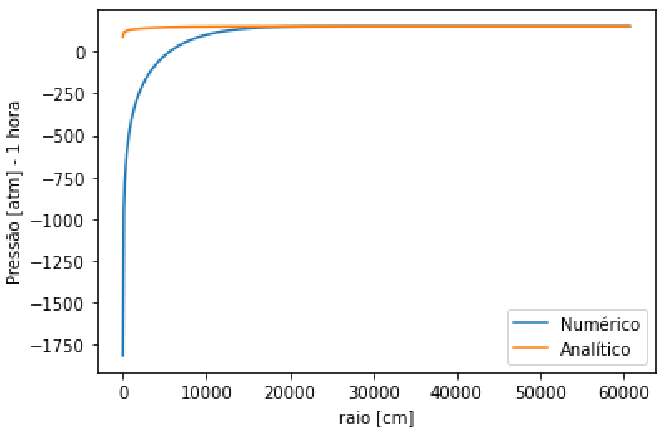


Figura 13 - Numérico - implícito – 1 hora (re = 609.6m)

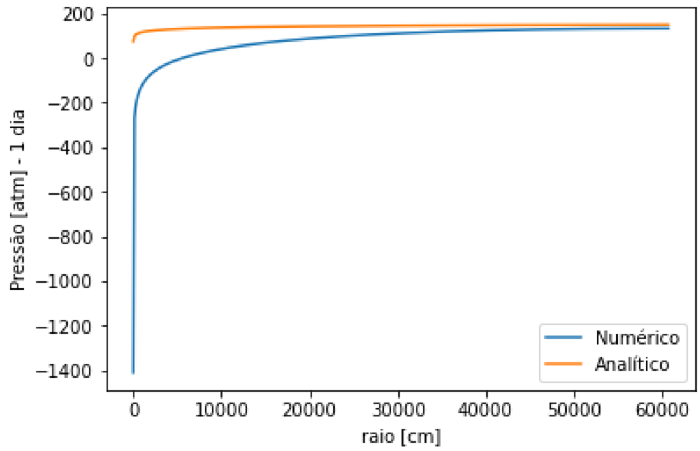


Figura 14 - Numérico - implícito – 1 dia (re = 609.6m)

O programa possui limitações de tempo de rodada para análises maiores que 1 dia (40 minutos de simulação). Por isso, não foram apresentados os resultados numéricos para 30 dias, 1 ano e 10 anos.

5. Conclusão

Os resultados mostram que, para o esquema explícito os resultados tendem a divergir com o tempo. Já no esquema implícito, apesar que os valores serem bastantes diferentes do analítico, a tendencia é de estabilização e, é possível observar que o valor da pressão no poço para t = 1 dia aumentou (menos negativo) com relação ao resultado de t = 1 hora.

Conclui-se que o esquema implícito é mais estável que o esquema explícito pelo fato de os coeficientes das variáveis dependentes serem positivos.

O programa Python é um bom compilador (ou interpretador) para uma primeira implementação de cálculo numérico, no entanto, aparenta ter limitações de tempo de simulação para análises mais robustas. Não houve ocorrência de problemas na implementação do código e os programas estão rodando sem apresentar nenhum erro de sintaxe.

6. Referências bibliográficas

[1] Lista 2
[2] Adalberto J. Rosa, Renato de S.Carvalho e José A. Daniel Xavier, Engenharia de Reservatórios de Petróleo
[3] Aula 5 - Séries de Taylor
[4] Aula 6 – Método das diferenças finitas
[5] Osik M,Necati. Heat Conduction

Anexos

Analítico

```
#Resolução do Problema 1 - Lista 1:Fluxo radial unidimensional - analítico

import math as m
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.special as sc

#Dados de entrada
re = 60690                      #raio externo [cm]
rw = 8.9                        #raio do poço [cm]
h = 304.8                       #espessura do reservatório [cm]
pi = 149.7                      #pressão inicial [atm]
q0 = 5180                       #vazão [cm^3 std/ s]
k = 0.15                        #permeabilidade [Darcy]
phi= 0.2                        #porosidade [x100%]
ct = 0.0002204                  #compressibilidade total [1/atm]
mu = 0.33                       #viscosidade [cp]
Bo = 1.5                        # fato volume formação [m^3/m^3 std]
g = 1.78108                     #gamma para p em rw


C = Bo*q0*mu/(4*m.pi*k*h)       #parte constante da equação 3.225 de Rosa et al.

t1 = 60                          #[s] t = 1 min
t2 = 60*60                       #[s] t = 1 hora
t3 = 60*60*24                    #[s] t = 1 dia
t4 = 60*60*24*30                 #[s] t = 30 dias
t5 = 60*60*24*365                #[s] t = 1 ano
t6 = 60*60*24*365*10             #[s] t = 10 anos


#Definindo a lista de raios - r[0] = 0 metros. A correção será aplicada no cálculo da pressão.
r = []                                                      #lista a ser montada
n = 1000                                                    #quantidade de termos

for i in range(n+1):
    r = r + [i*(re-rw)/n]

print(r[-1])                                                #teste para saber o último valor: r[n+1]

#Perfil de pressão para t = 1min
p1 = []                                                     #lista a ser montada

for i in range(n+1):
    p1 = p1 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t1))]  #montagem da lista para p1@1min

p1[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t1))              #correção para r[0] = rw

print(p1[-1])                                               #teste para saber o último valor: p1[n+1]

#Perfil de pressão para t = 1hora
p2 = []

for i in range(n+1):
    p2 = p2 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t2))]

p2[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t2))

print(p2[-1])


#Prerfil de pressão para t = 1 dia
p3 = []

for i in range(n+1):
    p3 = p3 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t3))]

p3[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t3))

print(p3[-1])

#Perfil de pressão para t = 30 dias
p4 = []

for i in range(n+1):
    p4 = p4 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t4))]

p4[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t4))

print(p4[-1])

#Perfil de pressão para t = 1 ano
p5 = []

for i in range(n+1):
    p5 = p5 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t5))]

p5[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t5))

print(p5[-1])

#Perfil de pressão para t = 10 anos
p6 = []

for i in range(n+1):
    p6 = p6 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t6))]

p6[0]= pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*rw**2/(4*k*t6))

print(p6[-1])

#Gráficos
plt.plot(r,p1, label="1 minuto")
plt.plot(r,p2, label="1 hora")
plt.plot(r,p3, label="1 dia")
plt.plot(r,p4, label="30 dias")
plt.plot(r,p5, label="1 ano")
plt.plot(r,p6, label="10 anos")
plt.xlabel('raio [cm]')
plt.ylabel('Pressão [atm]')
plt.legend()
plt.show()
```

Numérico -Explícito

```python
#Resolução do Problema 2 - Lista 2:Fluxo radial unidimensional - numérico
#Método explícito

import math as m
import scipy.special as sc
import matplotlib.pyplot as plt


#1 - Dados de entrada
re = 60960                                                              #raio externo [cm]
rw = 8.9                                                                #raio do poço [cm]
h = 304.8                                                               #espessura do reservatório [cm]
pi = 149.7                                                              #pressão inicial [atm]
q0 = 5180                                                               #vazão [cm^3 std/ s]
k = 0.15                                                                #permeabilidade [Darcy]
phi= 0.2                                                                #porosidade [x100%]
ct = 0.0002204                                                          #compressibilidade total [1/atm]
mu = 0.33                                                               #viscosidade [cp]
Bo = 1.5                                                                # fato volume formação [m^3/m^3 std]
g = 1.78108                                                             #gamma para p em rw


#2 - Cálculo das constantes

dt = 0.05                                                                  #passo de tempo [s]
dr = 60.96                                                             #espassamento da malha [cm]

ni = k/(phi*mu*ct)                                                      #constante de difusividade hidráulica - eq.3.113 de Rosa et al.

#parcelas constantes da transmissibilidade do nó
tau_c1 = ni*dt/(dr**2)
tau_c2 = ni*dt/(2*dr)                                                   #parcela que multiplica 1/ri no cálculo da pressão

#parcelas constantes B - relativo às pressões no poço
cc = Bo*q0*mu/(2*m.pi*k*h)


#3 - Definição da lista de raios - pontos i - que serão calculados o campos de pressão

r = []
n = int (re/dr)
for i in range(n+1):
    r += [i*dr]
r[0] = rw                                                             #correção r1 = 0 para r1 = rw

print(r[-1])                                                          #teste para saber o último valor: r[n+1]

Nr = len(r)                                                           #numero de pontos no espaço


#4 - Condições iniciais

t1 = 60*60*24 #*30                                                     #[s] tempo total de análise
Nt = int(t1/dt)                                                          #número de passos no tempo

Pi = []                                                                #campo de pressões iniciais
for i in range(Nr):                                                    #Pi = [pi for i in range(Nr)]
    Pi += [pi]

#5 - Cálculo do campos de pressões no tempo (numérico)

P = []                                                             #pressões no tempo presente
P_aux = []                                                         #pressões no tempo futuro
for i in range (Nt):
    if i == 0:
        P = Pi.copy()
        print('it =', i,'// t[s] =', round(i*dt, 2), '// horas =', round(i*dt/3600, 2), ' // dias =', round(i*dt/3600/24, 2),
              '// mes = ', round(i*dt/3600/24/30.2, 1), '// ano =', round(i*dt/3600/24/365.5, 1), '// pw[atm] =',round(P[0], 2))
    else:
        P = P_aux.copy()
        P_aux = []
        print('it =', i,'// t[s] =', round(i*dt, 2), '// horas =', round(i*dt/3600, 2), ' // dias =', round(i*dt/3600/24, 2),
              '// mes = ', round(i*dt/3600/24/30.2, 1), '// ano =', round(i*dt/3600/24/365.5, 1), '// pw[atm] =',round(P[0], 2))
    for j in range (Nr):
        if j == 0:
            P_aux += [2*tau_c1*P[j+1]+(1-2*tau_c1)*P[j] - (ni*dt/(r[j]**2))*cc]
        elif j == Nr-1:
            P_aux += [P_aux[j-1]]
        else:
            P_aux += [((1/r[j])*tau_c2 +tau_c1)*P[j+1] + (tau_c1-(1/r[j])*tau_c2)*P[j-1] + (1 - 2*tau_c1)*P[j]]


print (P_aux[-1])



#6 - Perfil de pressão  (analítico)
C = Bo*q0*mu/(4*m.pi*k*h)                                            #parte constante da equação 3.225 de Rosa et al.

p1 = []                                                              #lista a ser montada

for i in range(Nr):
    p1 = p1 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*k*t1))]           #montagem da lista para p1@t1


print(p1[-1])                                                        #teste para saber o último valor: p1[n+1]


#7 - Gráficos
plt.plot(r, P_aux, label="Numérico")
plt.plot(r, p1, label="Analítico")
plt.xlabel('raio [cm]')
plt.ylabel('Pressão [atm] - 1 dia')
plt.legend()
plt.show()
```

Numérico – Implícito

```
#Resolução do Problema 2 - Lista 2:Fluxo radial unidimensional - numérico
#Método implícito

import math as m
import scipy.special as sc
import matplotlib.pyplot as plt

#1 - Dados de entrada
re = 60690                                                          #raio externo [cm]
rw = 8.9                                                            #raio do poço [cm]
h = 304.8                                                           #espessura do reservatório [cm]
pi = 149.7                                                          #pressão inicial [atm]
q0 = 5180                                                           #vazão [cm^3 std/ s]
kk = 0.15                                                           #permeabilidade [Darcy]
phi= 0.2                                                            #porosidade [x100%]
ct = 0.0002204                                                      #compressibilidade total [1/atm]
mu = 0.33                                                           #viscosidade [cp]
Bo = 1.5                                                            # fato volume formação [m^3/m^3 std]
g = 1.78108                                                         #gamma para p em rw


#2 - Cálculo das constantes

dt = 5                                                           #passo de tempo [s]
dr = 121.38                                                        #espassamento da malha [cm]

ni = kk/(phi*mu*ct)                                                #constante de difusividade hidráulica - eq.3.113 de Rosa et al.

#parcelas constantes da transmissibilidade do nó
tau_c1 = ni*dt/(dr**2)
tau_c2 = ni*dt/(2*dr)                                              #parcela que multiplica 1/ri no cálculo da pressão


# parcelas constantes relativo ao pw
cc = Bo*q0*mu/(2*m.pi*kk*h)

#3 - Definição da lista de raios - pontos i - que serão calculados o campos de pressão
#A quantidade de nós, Nr, irá definir o tamanho da matriz das transmissibiliades - Nr x Nr

r = []
n = int (re/dr)
for i in range(n+1):
    r += [i*dr]
r[0] = rw                                                         #correção r1 = 0 para r1 = rw

print(r[-1])                                                      #teste para saber o último valor: r[n+1]

Nr = len(r)                                                       #numero de pontos no espaço

#4 - Condições iniciais

t1 = 60*60*24                                                      #[s] tempo total de análise
Nt = int(t1/dt)                                                    #número de passos no tempo

Pi = []                                                           #campo de pressões iniciais
for i in range(Nr):                                               #Pi = [pi for i in range(Nr)]
    Pi += [pi]


#5 - Montagem da matriz de transmissibilidades

#matriz zerada
tr = []
for i in range (Nr):
    tr += [[]]
for i in range (Nr):
    tr[i] += [0 for j in range(Nr)]                               #matriz = [[0 for i in range(Nr)] for j in range (Nr)].Montage

#matriz tri - diagonal
for i in range (Nr):
    for j in range (Nr):
        if i==j:                                                   #parcela diagonal
            tr [i][j] = 1 + 2*tau_c1
        elif j-i == 1:                                             #diagonal superior
            if i == 0:
                tr [i][j] = -2*tau_c1
            else:
                tr [i][j] = -(tau_c2*(1/r[i]) + tau_c1)
        elif j-i == -1:                                            #diagonal inferior
            if i == (Nr-1):
                tr [i][j] = -2*tau_c1
            else:
                tr [i][j] = -(tau_c1 - tau_c2*(1/r[i]))



#6 - Inversão da matriz de transmissibiliade
#https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.inv.html?highlight=inv#numpy.linalg.inv


from numpy.linalg import inv
tr_inv = inv(tr)
```

```python

#7 - Cálculo do campos de pressões no tempo (numérico)

P = []                                                                          #pressões no tempo presente
P_aux = []                                                                      #pressões no tempo futuro

for k in range (Nt):
    if k == 0:
        P = Pi.copy()
        print('it =', k,'// t[s] =', round(k*dt, 2), '// horas =', round(k*dt/3600, 2), ' // dias =', round(k*dt/3600/24, 2),
              '// mes = ', round(k*dt/3600/24/30.2, 1), '// ano =', round(k*dt/3600/24/365.5, 1), '// pw[atm] =',round(P[0], 2))
    else:
        P = P_aux.copy()
        P_aux = []
        print('it =', k,'// t[s] =', round(k*dt, 2), '// horas =', round(k*dt/3600, 2), ' // dias =', round(k*dt/3600/24, 2),
              '// mes = ', round(k*dt/3600/24/30.2, 1), '// ano =', round(k*dt/3600/24/365.5, 1), '// pw[atm] =',round(P[0], 2))
    for i in range (Nr):
        P_aux += [0]
        if i == 0:
            for j in range (Nr):
                if j == 0:
                    P_aux [i] = P_aux[i] + tr_inv[i][j]*(P[j] - (ni*dt/(r[i]**2))*cc)
                else:
                    P_aux [i] = P_aux[i] + tr_inv[i][j]*P[j]
        else:
            for j in range (Nr):
                P_aux [i] = P_aux[i] + tr_inv[i][j]*P[j]

print (P_aux[-1])

#8 - Perfil de pressão (analítico)
C = Bo*q0*mu/(4*m.pi*kk*h)                                          #parte constante da equação 3.225 de Rosa et al.

p1 = []                                                             #lista a ser montada

for i in range(Nr):
    p1 = p1 + [pi+C*sc.expi(-phi*mu*ct*r[i]**2/(4*kk*t1))]          #montagem da lista para p1@t1


print(p1[-1])                                                       #teste para saber o último valor: p1[n+1]


#7 - Gráficos
plt.plot(r, P_aux, label="Numérico")
plt.plot(r, p1, label="Analítico")
plt.xlabel('raio [cm]')
plt.ylabel('Pressão [atm] - 1 dia')
plt.legend()
plt.show()

```