Álgebra matricial
Soluciones

Francesc Carmona

30 de septiembre de 2020

1. Matrices

Ejercicio 1

Las siguientes cuestiones se refieren a propiedades elementales del álgebra matricial que debes conocer. Indicar si son CIERTAS o FALSAS las siguientes propiedades:

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$

Cierto.

b) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$

Falso en general. Cierto si las matrices conmutan.

c) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$, *donde ambas matrices son cuadradas.*

Cierto.

d) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$, *donde ambas matrices son cuadradas.*

Cierto.

e) $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$

Cierto.

f) $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$, *ilustrarlo con un ejemplo de dos matrices* 2×2.

Cierto.

g) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ *es simétrica.*

Cierto.

h) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$

Falso. $(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$

i) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, *si* $\mathbf{A}$ *tiene inversa.*

Cierto.

j) *Para una matriz* $\mathbf{A}$ *cuadrada, si existe un* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, *entonces* $|\mathbf{A}| = 0$.

Cierto. Si la matriz $\mathbf{A}$ es cuadrada y el sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene una solución no nula, entonces es indeterminado. El rango no será máximo y el determinante será $|\mathbf{A}| = 0$.

Ejercicio 2 $(*)$

Comprobar las siguientes propiedades:

a) *Cualquiera que sea el vector* $\mathbf{x}$, *resulta que* $\mathbf{x}'\mathbf{x} \geq 0$.

El producto $\mathbf{x}'\mathbf{x}$ es $\sum x_i^2$ y toda suma de cuadrados es no negativa.

b) *Con la propiedad anterior se puede probar que* $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ *es siempre definida o semidefinida positiva. Poner algunos ejemplos.*

Una matriz cuadrada $\mathbf{B}$ es semidefinida (definida) positiva si para cualquier $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, se verifica $\mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{y} \geq 0$ (> 0).

En el caso de la matriz $\mathbf{A}'\mathbf{A}$, tenemos que

$$\mathbf{y}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{y})'(\mathbf{A}\mathbf{y}) \geq 0$$

por la propiedad del apartado anterior.

```
>  A <- matrix(c(1,1,
+                1,2,
+                1,4), byrow=T, ncol=2)
>  AtA <- t(A) %*% A
>  y1 <- c(0,1); y2 <- c(2,-1); y3 <- c(-1,0)
>  c(t(y1) %*% AtA %*% y1 >= 0, t(y2) %*% AtA %*% y2 >= 0, t(y3) %*% AtA %*% y3 >= 0)

[1] TRUE TRUE TRUE
```

c) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ *siempre es simétrica. Poner algunos ejemplos.*

La matriz traspuesta de $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es $(\mathbf{A}'\mathbf{A})' = \mathbf{A}'(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}'\mathbf{A}$, luego es simétrica.

```
>  t(t(A) %*% A) ==  t(A) %*% A

     [,1] [,2]
[1,] TRUE TRUE
[2,] TRUE TRUE
```

d) $(**)$ *Si* $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ *es semidefinida positiva y no definida positiva, entonces existe un* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *tal que* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. *Poner algún ejemplo.*

Si $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es semidefinida positiva y no definida, quiere decir que existe un $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Sea $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces $\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{x}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, luego $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ya que el único vector de longitud 0 es el vector $\mathbf{0}$.

Ejercicio 3

Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; $\mathbf{AB}$; $\mathbf{BA}$; $\mathbf{A}'$.
Hacerlo manualmente y con un programa como **R**.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 1+0\times 1+1\times 1 & 2\times 0+0\times 2+1\times 1 & 2\times 1+0\times 1+1\times 0 \\ 3\times 1+0\times 1+0\times 1 & 3\times 0+0\times 2+0\times 1 & 3\times 1+0\times 1+0\times 0 \\ 5\times 1+1\times 1+1\times 1 & 5\times 0+1\times 2+1\times 1 & 5\times 1+1\times 1+1\times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}\times\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
> A <- matrix(c(2,0,1,
+               3,0,0,
+               5,1,1), byrow=T, ncol=3)
> B <- matrix(c(1,0,1,
+               1,2,1,
+               1,1,0), byrow=T, ncol=3)
> A + B

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    0    2
[2,]    4    2    1
[3,]    6    2    1

> A - B

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    2   -2   -1
[3,]    4    0    1

> A %*% B

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3    1    2
[2,]    3    0    3
[3,]    7    3    6

> B %*% A

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    7    1    2
[2,]   13    1    2
[3,]    5    0    1
```

```
> t(A)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2    3    5
[2,]    0    0    1
[3,]    1    0    1
```

Ejercicio 4

Demostrar que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, *siendo:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> A <- matrix(c(0,1,1,
+               1,0,1,
+               1,1,0), byrow=T, ncol=3)
> I <- diag(rep(1,3))
> A %*% A - A -2*I
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    0
[2,]    0    0    0
[3,]    0    0    0
```

Ejercicio 5

Calcular la matriz inversa de:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede utilizar la función `solve()` *de* **R**.

```
> A <- matrix(c(1,-1,0,
+               0,1,0,
+               2,0,1), byrow=T, ncol=3)
> solve(A)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    1    0
[2,]    0    1    0
[3,]   -2   -2    1
> solve(A) %*% A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    0    0
[2,]    0    1    0
[3,]    0    0    1
```

Ejercicio 6

Resolver, en forma matricial, el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 5z = 12 \\ x + 4y + 25z = 36 \end{cases}$$

```
> A <- matrix(c(1,1,1,
+               1,2,5,
+               1,4,25), byrow=T, ncol=3)
> b <- c(6,12,36)
> solve(A) %*% b     # solve(A) es la matriz inversa de A

     [,1]
[1,]    3
[2,]    2
[3,]    1

> solve(A,b)

[1] 3 2 1
```

2. Diagonalización y valores singulares

Ejercicio 1 (∗)

Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) *Probar que* $\mathbf{u}$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$. *¿Cual es su valor propio correspondiente?*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El valor propio es 5.

b) *Comprobar que* $\lambda\mathbf{u}$, *con* λ *un escalar no nulo, también es vector propio de* $\mathbf{A}$.

Si $\lambda = 2$, entonces $2\mathbf{u}$ es vector propio con valor propio 5.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) *Probar que* $\mathbf{v}$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$. *¿Cual es su valor propio correspondiente?*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El valor propio de $\mathbf{v}$ es 0.

d) *¿*$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ *es un vector propio de* $\mathbf{A}$*?*

En general, para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de $\mathbf{A}$, tenemos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_{\mathbf{u}}\mathbf{u} + \lambda_{\mathbf{v}}\mathbf{v} \neq (\lambda_{\mathbf{u}} + \lambda_{\mathbf{v}})(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

La igualdad se cumplirá cuando ambos valores propios sean idénticos, cosa que no ocurre en este caso.

Ejercicio 2

Para las siguientes matrices determinar:

a) *el polinomio característico,*

b) *los valores propios,*

c) *vectores propios para cada valor propio,*

d) (∗) *la multiplicidad de cada valor propio y el número de vectores propios independientes asociados a cada valor propio.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se puede utilizar la función `eigen()` *de* **R**.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)+0+0-1\cdot(1-\lambda)\cdot 1-0-0 = \lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda) = (\lambda^2-1)(1-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 1, -1$, el primero con multiplicidad 2.

```
> A <- matrix(c(0,0,1,
+               0,1,0,
+               1,0,0), byrow=T, ncol=3)
> diaA <- eigen(A)
> diaA$values

[1]  1  1 -1

> diaA$vectors

     [,1]       [,2]       [,3]
[1,]    0 -0.7071068  0.7071068
[2,]   -1  0.0000000  0.0000000
[3,]    0 -0.7071068 -0.7071068
```

Los dos primeros vectores columna son los vectores propios independientes asociados al valor propio 1. El tercer vector columna es el vector propio asociado al valor propio -1.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)+0+0-0-0-0 = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 1, 2, 3$, todos con multiplicidad 1.

```
> A <- matrix(c(1,1,0,
+               0,2,0,
+               0,0,3), byrow=T, ncol=3)
> diaA <- eigen(A)
> diaA$values

[1] 3 2 1

> diaA$vectors
```

```
     [,1]      [,2] [,3]
[1,]    0 0.7071068    1
[2,]    0 0.7071068    0
[3,]    1 0.0000000    0
```

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)+0+0-1\cdot(2-\lambda)\cdot 4-0-0 = (\lambda^2-4)(2-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 2, -2$, el primero con multiplicidad 2.

```
> A <- matrix(c(0,0,1,
+               0,2,0,
+               4,0,0), byrow=T, ncol=3)
> diaA <- eigen(A)
> diaA$values
```

```
[1]  2  2 -2
```

```
> diaA$vectors
```

```
          [,1] [,2]       [,3]
[1,] 0.4472136    0 -0.4472136
[2,] 0.0000000    1  0.0000000
[3,] 0.8944272    0  0.8944272
```

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda)+0+0-0-0-2\cdot 2\cdot(3-\lambda) = (\lambda^2-4)(3-\lambda)$$

Los valores propios son $\lambda = 2, -2, 3$, todos con multiplicidad 1.

```
> A <- matrix(c(0,2,0,
+               2,0,0,
+               0,0,3), byrow=T, ncol=3)
> diaA <- eigen(A)
> diaA$values
```

```
[1]  3  2 -2
```

```
> diaA$vectors
```

```
     [,1]      [,2]       [,3]
[1,]    0 0.7071068  0.7071068
[2,]    0 0.7071068 -0.7071068
[3,]    1 0.0000000  0.0000000
```

Ejercicio 3

Si $S = \{(0,1,0),(1,0,1),(-1,0,1)\}$ *es el conjunto de vectores propios, para los valores propios* $1,1,-1$*, hallar la matriz* **A** *correspondiente.*

```
> V <- matrix(c(0,1,-1,
+               1,0,0,
+               0,1,1), byrow=T, ncol=3)
> D <- diag(c(1,1,-1))
> A <- V %*% D %*% solve(V)
> eigen(A)
```

```
eigen() decomposition
$values
[1]  1  1 -1

$vectors
     [,1]       [,2]       [,3]
[1,]    0 -0.7071068  0.7071068
[2,]   -1  0.0000000  0.0000000
[3,]    0 -0.7071068 -0.7071068
```

Observemos que los vectores propios S son proporcionales a los que da **R**.

Ejercicio 4 $(*)$

Estudiar si son ciertas las siguientes propiedades con algunos ejemplos (las demostraciones son difíciles) o si son falsas con un contraejemplo:

a) *Si* $\mathbf{A}$ *es simétrica semidefinida positiva, siempre hay una matriz* $\mathbf{B}$ *tal que* $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$. *(*$\mathbf{B}$ *no es única).*

Si $\mathbf{A}$ es simétrica, es diagonalizable ortogonalmente, de forma que podrá expresarse como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}'$$

si además es semidefinida positiva los valores en la diagonal de $\mathbf{D}$ serán no negativos, de forma que $\mathbf{D}$ podrá descomponerse en el producto $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}$, donde en la diagonal de $\mathbf{D}^{1/2}$ ponemos la raíz cuadrada de los valores propios de $\mathbf{D}$. De manera que finalmente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{V}' = \mathbf{V}\mathbf{D}^{1/2}(\mathbf{V}\mathbf{D}^{1/2})' = \mathbf{B}\mathbf{B}'$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{1/2}$.

b) *Si* $\mathbf{A}$ *es cuadrada, simétrica, con valores propios* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, *entonces* $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$ *y* $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Si $\mathbf{A}$ es simétrica será diagonalizable y la matriz diagonal con los valores propios podrá expresarse como $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}$, siendo $\mathbf{V}$ la matriz que contiene los vectores propios en sus columnas, de forma que:

$$|\mathbf{\Lambda}| = |\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}| = |\mathbf{V}^{-1}||\mathbf{A}||\mathbf{V}| = |\mathbf{A}|$$

y como $|\mathbf{\Lambda}| = \prod \lambda_i$ tenemos que el determinante de $\mathbf{A}$ es igual al producto de sus valores propios.

Igualmente, por las propiedades de la traza, tenemos:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \mathrm{tr}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{I}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})$$

De forma que la traza de una matriz simétrica es igual a la suma de sus valores propios.

c) *Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales y positivos.*

Si $\mathbf{A}$ es real y simétrica será hermítica de forma que $\mathbf{A}$ será igual a su conjugada traspuesta $\mathbf{A}^*$. Sea $\mathbf{x}$ un vector propio cualquiera de $\mathbf{A}$, con valor propio λ que podría ser complejo, de forma que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Multiplicando por la izquierda por $\mathbf{x}^*$ (conjugado traspuesto)

$$\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

Trasponiendo y conjugando la expresión anterior tenemos

$$(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x})^* = (\lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x})^* \Rightarrow \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \bar{\lambda}\mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

donde $\bar{\lambda}$ es el conjugado de λ.

Si comparamos las dos expresiones halladas tenemos

$$\lambda \mathbf{x}^* \mathbf{x} = \bar{\lambda} \mathbf{x}^* \mathbf{x}$$

y como $\mathbf{x}$ es un vector propio no nulo, resulta que $\mathbf{x}^*\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \neq 0$. Así podemos dividir la ecuación anterior por $\mathbf{x}^*\mathbf{x}$ y resulta $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir $\lambda \in \mathbb{R}$.

Así pues, los valores propios de una matriz simétrica son siempre números reales, para que sean todos positivos será necesario además que la matriz sea definida positiva.

d) *Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios 0 ó 1.*

Sea $\mathbf{v}$ un vector propio normalizado ($\mathbf{v}'\mathbf{v} = 1$) cualquiera de una matriz $\mathbf{A}$ simétrica ($\mathbf{A}' = \mathbf{A}$), semidefinida positiva e idempotente ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$):

$$\lambda = \mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}'\lambda\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}'\mathbf{v} = \lambda^2$$

Los únicos escalares que cumplen la relación $\lambda = \lambda^2$ son 0 y 1, lo que demuestra la proposición del enunciado.

Ejercicio 5

Mediante la diagonalización de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $\mathbf{A}^7$.

Observemos que si $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$, entonces $\mathbf{A}^2 = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{D}^2\mathbf{V}^{-1}$, de modo que

```
> A <- matrix(c(1,2,
+               3,2), byrow=T, ncol=2)
> diaA <- eigen(A)
> diaA$vectors %*% diag(diaA$values^7) %*% solve(diaA$vectors)
```

```
     [,1] [,2]
[1,] 6553 6554
[2,] 9831 9830
```

```
> A3 <- A %*% A %*% A      # A^3
> A3 %*% A3 %*% A          # A^7
```

```
     [,1] [,2]
[1,] 6553 6554
[2,] 9831 9830
```

Ejercicio 6

Dada la matriz de covarianzas

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ *tal que* $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$.

Con las ideas del ejercicio anterior:

```
> Sigma <- matrix(c(2,1,1/3,
+                   1,1,-1,
+                   1/3,-1,4), byrow=T, ncol=3)
> diaSigma <- eigen(Sigma)
> diaSigma_12 <-
+            diaSigma$vectors %*% diag(1/sqrt(diaSigma$values)) %*% t(diaSigma$vectors)
> #
> # Prueba:
> #
> diaSigma_12 %*% diaSigma_12
```

```
          [,1]      [,2]       [,3]
[1,]  2.454545 -3.545455 -1.0909091
[2,] -3.545455  6.454545  1.9090909
[3,] -1.090909  1.909091  0.8181818
```

```
> solve(Sigma)
```

```
          [,1]      [,2]       [,3]
[1,]  2.454545 -3.545455 -1.0909091
[2,] -3.545455  6.454545  1.9090909
[3,] -1.090909  1.909091  0.8181818
```

Ejercicio 7

Hallar la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> A <- matrix(c(2,4,
+               1,3,
+               0,0,
+               0,0), byrow=T, ncol=2)
> svdA <- svd(A)
> svdA$d
```

```
[1] 5.4649857 0.3659662
```

```
> svdA$u
```

```
           [,1]       [,2]
[1,] -0.8174156 -0.5760484
[2,] -0.5760484  0.8174156
[3,]  0.0000000  0.0000000
[4,]  0.0000000  0.0000000
```

```
> svdA$v
```

```
           [,1]       [,2]
[1,] -0.4045536 -0.9145143
[2,] -0.9145143  0.4045536
```

```
> svdA$u %*% diag(svdA$d) %*% svdA$v
```

```
     [,1] [,2]
[1,]    2    4
[2,]    1    3
[3,]    0    0
[4,]    0    0
```

Ejercicio 8

Calcular el rango de la matriz[1]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Utilizar la siguiente función de **R***:*

```
> matrix.rank <- function(A, eps=sqrt(.Machine$double.eps)){
+                       sv. <- abs(svd(A)$d)
+                       sum((sv./max(sv.))>eps)
+                       }
```

Explicar lo que hace esta función.
El rango de esta matriz es 2 ya que solo hay dos columnas linealmente independientes. La tercera es la suma de las dos primeras y la cuarta es 3 veces la primera menos 4 veces la segunda.

```
> A <- matrix(c(2,1,3,2,
+              3,2,5,1,
+              -1,1,0,-7,
+              3,-2,1,17,
+              0,1,1,-4), byrow=T, ncol=4)
> matrix.rank(A)
```

```
[1] 2
```

Esta función realiza la descomposición en valores singulares de la matriz **A** y determina cuantos valores singulares pueden considerarse distintos de cero. Para ello utiliza un umbral de cero que se pasa como argumento a la función o, por defecto, la precisión de la máquina contenida en `.Machine$double.eps` como el límite superior al error relativo de redondeo en aritmética de punto flotante para un *double* expresado en 64 bits. Antes de compararlos con el umbral de cero establecido, los valores singulares se normalizan a valores entre 0 y 1 dividiendo los valores absolutos por el máximo valor singular en valor absoluto.

Ejercicio 9 ($*$)

Probar que para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

dos inversas generalizadas son:

$$\mathbf{A}_1^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_2^- = \begin{pmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

[1] Los métodos computacionales aproximan el concepto de rango y están sujetos a error.

```
> A <- matrix(c(1,3,2,
+               2,6,4), byrow = T, ncol=3)
> A1 <- matrix(c(1,0,
+                0,0,
+                0,0), byrow = T, ncol=2)
> A2 <- matrix(c(-42,-1,
+                5,3,
+                2,2), byrow = T, ncol=2)
> A %*% A1 %*% A  # = A

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    2
[2,]    2    6    4

> A %*% A2 %*% A  # = A

     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    2
[2,]    2    6    4
```

Ejercicio 10 ($*$)

Hallar una inversa generalizada de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

mediante la inversa del menor de rango máximo.

```
> A <- matrix(c(-6,2,-2,-3,
+               3,-1,5,2,
+               -3,1,3,-1), byrow = T, ncol=4)
> matrix.rank(A)

[1] 2

> matrix.rank(A[c(1,2),c(1,3)]) # menor de rango máximo

[1] 2

> A1 <- matrix(rep(0,4*3), ncol=3)
> A1[c(1,3),c(1,2)] <- solve(A[c(1,2),c(1,3)])
> A %*% A1 %*% A

     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   -6    2   -2   -3
[2,]    3   -1    5    2
[3,]   -3    1    3   -1
```

Observemos que la g-inversa tiene dimensiones traspuestas a la matriz original y, por ello, hay que rellenarla en las posiciones traspuestas.

Ejercicio 11 ($*$)

Determinar la inversa de Moore-Penrose de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizar la función `ginv()` *del paquete MASS de* **R**.

```
> library(MASS)
> A <- matrix(c(1,0,-1,1,
+               0,2,2,2,
+               -1,4,5,3), byrow = T, ncol=4)
> A1 <- ginv(A)
> A %*% A1 %*% A
```

```
     [,1]         [,2] [,3] [,4]
[1,]    1 2.220446e-16   -1    1
[2,]    0 2.000000e+00    2    2
[3,]   -1 4.000000e+00    5    3
```

Ejercicio 12 ($**$)

Sea $\mathbf{B}$ *una matriz simétrica y definida positiva y* $\mathbf{A}$ *una matriz simétrica y semidefinida positiva. La obtención de los valores propios de* $\mathbf{A}$ *relativos a* $\mathbf{B}$*, es decir* $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Bv}$*, recibe el nombre de diagonalización simétrica generalizada.*

a) *Probar que se reduce a la diagonalización ordinaria de la matriz* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$*. El número de valores propios no nulos es igual al rango de* $\mathbf{A}$*.*

   Si la matriz $\mathbf{B}$ es simétrica y definida positiva, entonces tiene inversa de forma que

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{Bv} \Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$$

b) *Probar que la diagonalización de* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ *se resuelve por diagonalización ordinaria de dos matrices simétricas:* $\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{AB}^{-1/2}$.

   Si diagonalizamos $\mathbf{B}$ tenemos

$$\mathbf{B} = \mathbf{V\Lambda V}' \Rightarrow \mathbf{B}^{-1/2} = \mathbf{V\Lambda}^{-1/2}\mathbf{V}'$$

   ya que todos los valores propios son positivos no nulos.
   Ahora podemos calcular la matriz simétrica $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{AB}^{-1/2}$ y diagonalizarla

$$\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{AB}^{-1/2} = \mathbf{TDT}'$$

   Si ahora multiplicamos por $\mathbf{B}^{-1/2}$ por la izquierda y por $\mathbf{B}^{1/2}$ por la derecha

$$\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{AB}^{-1/2}\mathbf{B}^{1/2} = \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{TDT}'\mathbf{B}^{1/2} = \mathbf{WDW}^{-1}$$

   de manera que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{WDW}^{-1}$, donde $\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{T}$.

c) *En un problema con varias poblaciones, se considera la matriz* $\mathbf{A}$ *que mide la covariabilidad* entre *poblaciones y la matriz* $\mathbf{B}$ *de covarianzas estimada* dentro *de cada población y teóricamente común en todas las poblaciones. Hallar la diagonalización simétrica generalizada para las matrices*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 12 \\ -4 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & 25 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & -2 \\ 17 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$

```
> A <- matrix(c(10,-4,12,
+               -4,3,-1,
+               12,-1,25), byrow = T, ncol=3)
> B <- matrix(c(14,0,17,
+               0,3,-2,
+               17,-2,26), byrow = T, ncol=3)
> diaB <- eigen(B)
> B.m12 <- diaB$vectors %*% diag(1/sqrt(diaB$values)) %*% t(diaB$vectors)
> B.12 <- diaB$vectors %*% diag(sqrt(diaB$values)) %*% t(diaB$vectors)
> B.m12.A.B.m12 <- B.m12 %*% A %*% B.m12
> diaBAB <- eigen(B.m12.A.B.m12)
> W <- B.m12 %*% diaBAB$vectors
> dia.Binv.A <- list(vectors=W, values=diaBAB$values)
> #
> # Prueba
> #
> dia.Binv.A$vectors %*% diag(dia.Binv.A$values) %*% solve(dia.Binv.A$vectors)

           [,1]      [,2]      [,3]
[1,]  1.5621302 -2.053254 -2.088757
[2,] -1.7988166  1.970414  1.284024
[3,] -0.6982249  1.455621  2.426036

> solve(B) %*% A

           [,1]      [,2]      [,3]
[1,]  1.5621302 -2.053254 -2.088757
[2,] -1.7988166  1.970414  1.284024
[3,] -0.6982249  1.455621  2.426036
```