

Algebra matricial

Soluciones

Francesc Carmona

30 de septiembre de 2020

1. Matrices

1. Las siguientes cuestiones se refieren a propiedades elementales del álgebra matricial que debes conocer. Indicar si son CIERTAS o FALSAS las siguientes propiedades:

- a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$
- b) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$
- c) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$, donde ambas matrices son cuadradas.
- d) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}|$, donde ambas matrices son cuadradas.
- e) $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
- f) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, ilustrarlo con un ejemplo de dos matrices 2×2 .
- g) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es simétrica.
- h) $(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$
- i) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$, si \mathbf{A} tiene inversa.
- j) Para una matriz \mathbf{A} cuadrada, si existe un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

2. (*) Comprobar las siguientes propiedades:

- a) Cualquiera que sea el vector \mathbf{x} , resulta que $\mathbf{x}'\mathbf{x} \geq 0$.
- b) Con la propiedad anterior se puede probar que $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es siempre definida o semidefinida positiva. Poner algunos ejemplos.
- c) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ siempre es simétrica. Poner algunos ejemplos
- d) (**) Si $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ es semidefinida positiva y no definida positiva, entonces existe un $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Poner algún ejemplo.

3. Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$; $\mathbf{A} - \mathbf{B}$; \mathbf{AB} ; \mathbf{BA} ; \mathbf{A}' .

Hacerlo manualmente y con un programa como **R**.

4. Demostrar que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcular la matriz inversa de:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede utilizar la función `solve()` de **R**.

6. Resolver, en forma matricial, el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 5z = 12 \\ x + 4y + 25z = 36 \end{cases}$$

2. Diagonalización y valores singulares

1. (*) Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Probar que \mathbf{u} es un vector propio de \mathbf{A} . ¿Cual es su valor propio correspondiente?
- b) Comprobar que $\lambda \mathbf{u}$, con λ un escalar no nulo, también es vector propio de \mathbf{A} .
- c) Probar que \mathbf{v} es un vector propio de \mathbf{A} . ¿Cual es su valor propio correspondiente?
- d) ¿ $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector propio de \mathbf{A} ?

2. Para las siguientes matrices determinar:

- a) el polinomio característico,
- b) los valores propios,
- c) vectores propios para cada valor propio,
- d) (*) la multiplicidad de cada valor propio y el número de vectores propios independientes asociados a cada valor propio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se puede utilizar la función `eigen()` de **R**.

- 3. Si $S = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$ es el conjunto de vectores propios, para los valores propios $1, 1, -1$, hallar la matriz \mathbf{A} correspondiente.
- 4. (*) Estudiar si son ciertas las siguientes propiedades con algunos ejemplos (las demostraciones son difíciles) o si son falsas con un contraejemplo:
 - a) Si \mathbf{A} es simétrica semidefinida positiva, siempre hay una matriz \mathbf{B} tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}'$. (\mathbf{B} no es única).
 - b) Si \mathbf{A} es cuadrada, simétrica, con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, entonces $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i$ y $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^p \lambda_i$.
 - c) Los valores propios de una matriz simétrica son siempre reales y positivos.
 - d) Una matriz simétrica, semidefinida positiva e idempotente tiene valores propios 0 ó 1.
- 5. Mediante la diagonalización de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular \mathbf{A}^7 .

6. Dada la matriz de covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1/3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz $\Sigma^{-1/2}$ tal que $\Sigma^{-1/2}\Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1}$.

7. Hallar la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R-intro: 5.7.4 Singular value decomposition and determinants in R

The function `svd(M)` takes an arbitrary matrix argument, M , and calculates the singular value decomposition of M . This consists of a matrix of orthonormal columns U with the same column space as M , a second matrix of orthonormal columns V whose column space is the row space of M and a diagonal matrix of positive entries D such that $M = U \%*\% D \%*\% t(V)$. D is actually returned as a vector of the diagonal elements. The result of `svd(M)` is actually a list of three components named `d`, `u` and `v`, with evident meanings.

If M is in fact square, then, it is not hard to see that

```
> absdetM <- prod(svd(M)$d)
```

calculates the absolute value of the determinant of M . If this calculation were needed often with a variety of matrices it could be defined as an **R** function

```
> absdet <- function(M) prod(svd(M)$d)
```

after which we could use `absdet()` as just another **R** function. As a further trivial but potentially useful example, you might like to consider writing a function, say `tr()`, to calculate the trace of a square matrix. [Hint: You will not need to use an explicit loop. Look again at the `diag()` function.]

R has a builtin function `det` to calculate a determinant, including the sign, and another, `determinant`, to give the sign and modulus (optionally on log scale).

8. Calcular el rango de la matriz¹

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -7 \\ 3 & -2 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Utilizar la siguiente función de **R**:

```
matrix.rank <- function(A, eps=sqrt(.Machine$double.eps)){
  sv. <- abs(svd(A)$d)
  sum((sv./max(sv.))>eps)
}
```

Explicar lo que hace esta función.

Una versión más sofisticada:

¹Los métodos computacionales aproximan el concepto de rango y están sujetos a error.

```
rankMat <- function(A, tol = NULL, singValA = svd(A, 0,0)$d)
{
  ## Purpose: rank of a matrix 'as Matlab'
  ## -----
  ## Arguments: A: a numerical matrix, maybe non-square
  ##             tol: numerical tolerance (compared to singular values)
  ##             singValA: vector of non-increasing singular values of A
  ##                     (pass as argument if already known)
  ## -----
  ## Author: Martin Maechler, Date: 7 Apr 2007, 16:16
  d <- dim(A)
  stopifnot(length(d) == 2, length(singValA) == min(d),
            diff(singValA) < 0)      # must be sorted decreasingly
  if(is.null(tol))
    tol <- max(d) * .Machine$double.eps * abs(singValA[1])
  else stopifnot(is.numeric(tol), tol >= 0)
  sum(singValA >= tol)
}
```

Otras opciones en **R** son:

```
qr(A)$rank
```

o incluso

```
qr(A, LAPACK=TRUE)$rank
```

o mejor

```
qr(A, tol = .Machine$double.eps, LAPACK = TRUE)$rank
```

9. (*) Probar que para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

dos inversas generalizadas son:

$$\mathbf{A}_1^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2^- = \begin{pmatrix} -42 & -1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10. (*) Hallar una inversa generalizada de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

mediante la inversa del menor de rango máximo.

11. (*) Determinar la inversa de Moore-Penrose de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizar la función `ginv()` del paquete **MASS** de **R**.

12. (**) Sea \mathbf{B} una matriz simétrica y definida positiva y \mathbf{A} una matriz simétrica y semidefinida positiva. La obtención de los valores propios de \mathbf{A} relativos a \mathbf{B} , es decir $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$, recibe el nombre de diagonalización simétrica generalizada.

- a) Probar que se reduce a la diagonalización ordinaria de la matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. El número de valores propios no nulos es igual al rango de \mathbf{A} .
- b) Probar que la diagonalización de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ se resuelve por diagonalización ordinaria de dos matrices simétricas: \mathbf{B} y $\mathbf{B}^{-1/2}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1/2}$.
- c) En un problema con varias poblaciones, se considera la matriz \mathbf{A} que mide la covariabilidad *entre* poblaciones y la matriz \mathbf{B} de covarianzas estimada *dentro* de cada población y teóricamente común en todas las poblaciones. Hallar la diagonalización simétrica generalizada para las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 12 \\ -4 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & 25 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & -2 \\ 17 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$