Matemática para Computación

Stirling Numbers

Victor Chirinos

Sea $f(n,k)$ el número de formas en que se puede particionar el conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ en k subconjuntos no vacíos, donde no importa el orden de los subconjuntos ni el orden dentro de cada subconjunto.
Por ejemplo, $f(3,2) = 3$ porque podemos particionar el conjunto $\{1,2,3\}$ en 2 subconjuntos de 3 maneras distintas:

- $\{1\}\{2,3\}$
- $\{2\}\{1,3\}$
- $\{3\}\{1,2\}$

Otro ejemplo, $f(4,2) = 7$ porque podemos particionar el conjunto $\{1,2,3,4\}$ en 2 subconjuntos de 7 maneras distintas:

- $\{1\}\{2,3,4\}$
- $\{2\}\{1,3,4\}$
- $\{3\}\{1,2,4\}$
- $\{4\}\{1,2,3\}$
- $\{1,2\}\{3,4\}$
- $\{1,3\}\{2,4\}$
- $\{1,4\}\{2,3\}$

Primera parte de la tarea.
Entregar una demostración escrita de la siguiente identidad:

$$f(n,k) = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$$

Números de Stirling de segunda especie: S(n, k)

[particiones distintas del conjunto {1,...,n} en k bloques no vacíos]

A. Preliminares sobre los S(n, k)

Empezamos determinando los rangos para los parámetros n y K. Una restricción que indicaremos será que N debe ser mayor o igual a 1, pues si N fuera 0, nos referiríamos a un conjunto vacío (El problema de partir en bloques no vacíos carece de sentido). Asimismo, en caso K > n, no podríamos construir partición alguna pues faltarían símbolos para llenar los bloques así que:

$$S(n, k) = 0 \quad \text{si } k > n.$$

De esta manera, el rango que fijamos para (n,k) es $n \geq 1 \text{ y } 1 \leq k \leq n.$. Esto insta a representar estos números como un triangulo como el de los coeficientes binomicos.

Empezamos analizando los “valores frontera” de los números de Stirling de segunda especie: S(n,n) y S(n,1).

Si tenemos N símbolos y pretendemos formar n bloques no vacíos con ellos, solo queda la posibilidad de situar un símbolo por bloque. Es decir, S(n, n) = 1 para cada n ≥ 1. Si de nuevo partimos de n símbolos, pero ahora solo tenemos un bloque, la ´única manera de hacer la partición es colocar todos los símbolos en ese bloque. Esto es, S(n, 1) = 1 para cada n ≥ 1. Esta partición es la de “todos juntos”.

Ejemplo *El valor de* $S(n, n-1)$, *para* $n \geq 2$.

Por definición, S(n, n−1) cuenta el número de particiones de {1,...,n} en n−1 bloques no vacíos. Tan ajustado está el número de elementos al de bloques, que solo hay una configuración posible: la que corresponde a tener un bloque con dos símbolos, y el resto de los símbolos, cada uno en un bloque distinto. Decidir qué configuración de estas tenemos exige ´únicamente elegir los dos símbolos van juntos; el resto de los símbolos van cada uno por su cuenta, formando bloques propios. Así que la respuesta final es:

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}.$$

Ejemplo 2 *El valor de* $S(n, 2)$, *para* $n \geq 2$.

Ahora tenemos dos bloques, y bastara decidir qué elementos van en uno de los bloques (los del otro quedan fijados. Digamos que los bloques son bloque 1 y bloque 2.

En el primero, en principio, podemos situar cualquier subconjunto de {1,...,n}; y hay 2n de ellos. Pero no podemos utilizar ni el Ø (porque el bloque 1 sería vacío) ni todo {1,...,n} (porque el bloque 2 quedaría vacío). Así que la respuesta sería 2n − 2.

Ahora debemos compensar el orden que hemos introducido. Digamos que A es un subconjunto de {1,...,n}, una de las 2n − 2 elecciones posibles que citábamos antes. En el proceso que hemos hecho estamos distinguiendo entre

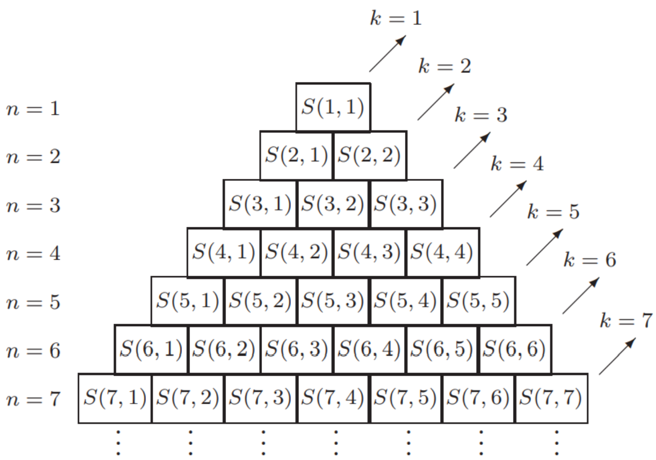
$$\lfloor A \rfloor \ \lfloor \{1, \dots, n\} \setminus A \rfloor \qquad \text{y} \qquad \lfloor \{1, \dots, n\} \setminus A \rfloor \ \lfloor A \rfloor$$

Estas dos configuraciones, vistas como particiones en bloques (esto es, sin orden entre los bloques) son en realidad la misma. Así que la respuesta correcta es

$$S(n,2) = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1\,.$$

es más sencillo argumentar cuando podemos referirnos a un bloque en concreto. Arriba impusimos un orden ficticio entre bloques, que luego supimos compensar, y que nos permitió hablar de bloque 1 y bloque 2. Un análisis alternativo, que usaremos a menudo, consiste en argumentar sobre el bloque que contiene a un elemento particular, por ejemplo, el elemento n. Ni el primero ni el segundo, ni. . . simplemente “el bloque que contiene a n”. Pero ahora, con un bloque “distinguido”, solo tenemos que decidir, por ejemplo, que elementos acompañan a n en “su” bloque. La respuesta es directa: hay 2n−1 − 1 posibilidades, todos los posibles subconjuntos (¡con n − 1 símbolos!, que n ya está colocado), excepto el formado por los símbolos {1,...,n − 1}, que dejaría el otro bloque vacío.

B. Regla de recurrencia para los S(n, k)



Representamos los valores S(n, k) en un triángulo, como en el caso de los coeficientes binomicos. Las coordenadas de cada casilla son (piso) n y (diagonal) k, que ahora recorren unos rangos ligeramente distintos al caso de los coeficientes binomicos. Si conociéramos todos los valores de S(n, k) para un cierto piso n, el número de Bell B(n) correspondiente se obtendría, simplemente, sumándolos. Conocemos ya los valores frontera del triángulo: S(n, n) = S(n, 1) = 1 para todo n.

Inspirados por los coeficientes binomicos, querríamos expresar S(n, k) en términos de números de Stirling de primer índice n − 1. Esto exigiría relacionar particiones de conjuntos con n símbolos con particiones de conjuntos n − 1 símbolos. Para ello, analizaremos que puede ocurrir con un bloque especial, por ejemplo, el que contiene al elemento n. Caben dos posibilidades excluyentes:

Caso 1. El bloque que contiene a n no contiene ningún otro elemento. Una partición de ´estas tendrá el siguiente aspecto:

$$\underbrace{\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \cdots \quad \sqcup}_{k-1\ \text{bloques}} \quad \boxed{n}$$

como n va en un bloque (y “por su cuenta”), solo queda construir una partición del conjunto {1,...,n − 1} en k − 1 bloques no vacíos, para que en total tengamos k bloques. Más formalmente, hay una biyeccion entre el conjunto de las particiones de {1,...,n} en k bloques en las que n va solo en un bloque y el conjunto de las particiones de {1,...,n − 1} en k−1 bloques no vacíos. El diccionario, la biyeccion, es simplemente “quitar el bloque {n}” o “añadir el bloque {n}”. De manera que hay S(n − 1, k − 1) particiones de este primer tipo.

Caso 2. El bloque que contiene a n tiene, además, otros elementos. Con la aconsejable prudencia, analizamos primero si la receta del caso anterior sigue siendo de aplicación con un ejemplo sencillo: sea X = {1, 2, 3, 4} y k = 2. Nos interesan las particiones en las que el bloque con el 4 contiene, además, otros elementos. Dos de ellas serían

$$\{1,2\} \cup \{3,4\} \quad \text{y} \quad \{3\} \cup \{1,2,4\}\,.$$

Ahora no podemos hablar de “quitar el bloque {4}”, pero aun podríamos intentar una regla del tipo “quitar el elemento 4”. Pero no, no funciona, porque, por ejemplo,

$$\left.\begin{array}{lcl} \{1,2\} \cup \{3,4\} & \longrightarrow & \{1,2\} \cup \{3\} \\ \{3\} \cup \{1,2,4\} & \longrightarrow & \{1,2\} \cup \{3\} \end{array}\right]$$

(Dan lugar a la misma partición)

Pensemos en el proceso al revés, “añadir 4”. Dada la partición con dos bloques {1, 2}U{3}, podemos situar el 4 en cualquiera de ellos

$$\{1,2\} \cup \{3\} \qquad \longrightarrow \qquad \{1,2,4\} \cup \{3\} \quad \text{y} \quad \{1,2\} \cup \{3,4\}$$

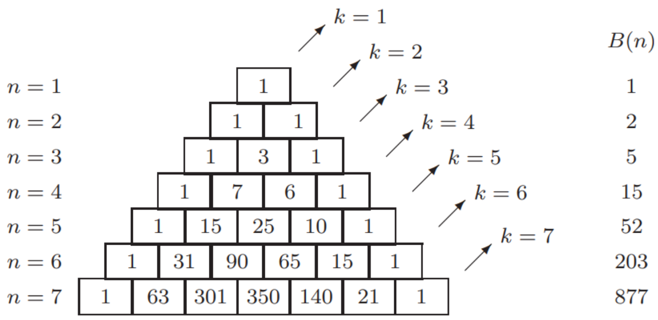
para dar lugar a una partición de {1, 2, 3, 4} en dos bloques, con el 4 “acompañado”. Argumentamos en general: tenemos las S(n−1, k) particiones del conjunto {1,...,n−1} en k bloques. Para cada una de ellas, añadimos el elemento n en alguno de los bloques. Tendremos k posibilidades para colocarlo:

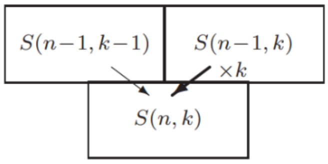
$$\underbrace{\{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\}}_{k\ \text{bloques}} \quad \longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \{\ldots,n\}\{\cdots\}\cdots\{\cdots\} \\ \{\cdots\}\{\ldots,n\}\cdots\{\cdots\} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \{\cdots\}\{\cdots\}\cdots\{\ldots,n\} \end{array}\right.$$

al recorrer todas las particiones de {1,...,n − 1} en k bloques vamos generando todas las particiones de {1,...,n} en k bloques en las que n esta acompañado, sin repetir ninguna. Como por cada partición del primer tipo obtenemos k del segundo, concluimos que hay k S(n − 1, k) particiones en este caso 2. Ya tenemos la regla de recursión que buscábamos:

$$\boxed{S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k)}$$

que, junto a los valores frontera, codifica toda la información sobre los números S(n, k). Podremos así construir el análogo al triángulo de Pascal, en el que podemos leer, además, sumando por filas, los valores de los números de Bell B(n):





La regla de recursión se interpreta gráficamente como aparece arriba, S(n−1, k−1) S(n−1, k) donde la flecha de la izquierda, más oscura, nos indica que hay que multiplicar (por k) antes de sumar.

1) Prueba:

Los N-1 elementos previos están divididos en K particiones, por lo tanto, el número de veces que se puede particionar es $f(n-1,k)$

Se cuenta el N elemento en uno de las K particiones previas. Por lo tanto, el numero de total de particiones es $k \cdot f(n-1,k)$

El N-1 elementos anterior también puede ser dividido en K-1 Particiones. Es así, que el número de veces que se puede particionar es $f(n-1,k-1)$ veces.

Se cuenta este N elemento en una nueva partición, por lo tanto, el número total de particiones es $f(n-1,k-1)$.

Finalmente, el numero de particiones es la suma de $k \cdot f(n-1,k)$ y $f(n-1,k-1)$.

Demostrando de esa manera:

$$f(n,k) = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$$