①

PARCIAL 1: SEÑALES Y SISTEMAS

Nombre: Valeria Corredor García

① $X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$d^2(X_1,X_2) = \bar{P}_{x1-x2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |X_1(t)-X_2(t)|^2\, dt$$

$X_1(t) = Ae^{jnw_0t}$ con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$

$X_2(t) = Be^{jmw_0t}$

Determinar la distancia entre las dos señales

- Ahora:

$$d^2(X_1,X_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t}|^2 dt$$

- Sabiendo que $|a|^2 = aa^*$ con $a \in \mathbb{C}$

$$d^2(X_1,X_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t})(Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t})^*\, dt$$

- Aplicando distributiva

$$d^2(X_1,X_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t})((Ae^{-jnw_0t})^* - (Be^{jmw_0t})^*)dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t})(Ae^{jnw_0t} - Be^{-jmw_0t})dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T ((A)^2 e^{-jnw_0t}e^{jnw_0t} - ABe^{-jnw_0t}e^{-jmw_0t} - ABe^{jmw_0t}e^{jnw_0t} + (B)^2 e^{jmw_0t}e^{-jmw_0t})dt$$

- Aplicando que $aa^* = |a|^2$ y que $(A)^2 = A^2$ ya que $A \in \mathbb{R}^+$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (A^2|e^{jnw_0t}|^2 - ABe^{-jw_0t(n+m)} - ABe^{jw_0t(n+m)} + B^2|e^{jmw_0t}|^2)dt$$

- Aplicando Factor común $-AB$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (A^2|e^{jnw_0t}|^2 - \underbrace{AB(e^{-jw_0t(n+m)} + e^{jw_0t(n+m)})}_{*} + B^2|e^{jmw_0t}|^2)dt$$

2

- Expandiendo *

$-AB(\cos(w_0t(n+m))-j\operatorname{sen}(w_0t(n+m))+\cos(w_0t(n+m))+j\operatorname{sen}(w_0t(n+m))$

$=-AB(2\cos(w_0t(n+m)))=-2AB\cos(w_0t(n+m))$

- Reemplazando la expresión anterior

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T(A^2|e^{jnw_0t}|^2-2AB\cos(w_0t(n+m))+B^2|e^{jmw_0t}|^2)dt$$

- Sabiendo que la integral de una suma es la suma de las integrales

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[A^2\int_T|e^{jnw_0t}|^2dt-2AB\int_T\cos(w_0t(n+m))dt+B^2\int_T|e^{jmw_0t}|^2dt\right.$$

- Evaluando cada integral

- $A^2\int_T|e^{jnw_0t}|^2dt \rightarrow$ volviendo a que $|a|^2=aa^*$

$A^2\int_T e^{jnw_0t}e^{-jnw_0t}dt \rightarrow$ aplicando $e^{jnw_0t}=\cos(nw_0t)+j\operatorname{sen}(nw_0t)$

$A^2\int_T(\cos(nw_0t)+j\operatorname{sen}(nw_0t))(\cos(nw_0t)-j\operatorname{sen}(nw_0t))dt \rightarrow$ aplicando distubutiva

$A^2\int_T\cos^2(nw_0t)-j\operatorname{sen}(nw_0t)\cos(nw_0t)+j\operatorname{sen}(nw_0t)\cos(nw_0t)-j^2\operatorname{sen}^2(nw_0t)dt$

$A^2\int_T\cos^2(nw_0t)+\operatorname{sen}^2(nw_0t)dt$

Por la identidad trigonometrica: $\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)=1$

$\therefore A^2\int_T dt = A^2T$

(3)

- $B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt$

Como es posible observar, la integral es muy similar a la de: $A^2\int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt = A^2T$ la cual fue calculada anteriormente

$\therefore B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt = B^2T$

- Retomando expresión completa

$$d^2(X_1,X_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2\int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt - 2AB\int_T \cos(\omega_0 t(n+m))dt + B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2T - 2AB\int_T \cos(\omega_0 t(n+m))dt + B^2T\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[A^2 - \frac{2AB}{T}\int_T \cos(\omega_0 t(n+m))dt + B^2\right]$$

- Sabiendo que el límite de una resta es la resta de los límites

$$= \lim_{T\to\infty} A^2 - \lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\int_T \cos(\omega_0 t(n+m))dt + \lim_{T\to\infty} B^2$$

$$= A^2 - \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\int_T \cos(\omega_0 t(n+m))dt}_{*} + B^2$$

- Para evaluar $*$ hay 2 posibles casos:
  - Cuando $m=-n \rightarrow m+n=0$

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\int_T \cos(0)\,dt = -\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\int_T dt$$

$$= -\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\cdot T = -\lim_{T\to\infty} 2AB = -2AB$$

  - Cuando $m\neq -n \rightarrow m+n\neq 0$

$$-\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\int_T \cos\left(\frac{2\pi}{T}t(n+m)\right)dt = -\lim_{T\to\infty}\frac{2AB}{T}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}T(n+m)\right)}{\frac{2\pi}{T}(n+m)}\right]$$

④

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \forall r2\pi \quad sen(r2\pi) = 0$

$$= -\lim_{T\to\infty} \frac{AB\,sen(2\pi(n+m))}{\pi(n+m)} = -\lim_{T\to\infty} \frac{AB \cdot 0}{\pi(n+m)} = 0$$

- La respuesta final sería:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{para } m \neq -n$$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 - 2AB + B^2} \quad \text{para } m = -n$$

② $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5sen(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Sabiendo que $\omega_0 = 2\pi F \rightarrow F = \frac{\omega_0}{2\pi}$

- Hallar frecuencia para cada término

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\,Hz \\ F_2 &= \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500\,Hz \\ F_3 &= \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz \end{aligned}\right\} F_{max} = 5500\,Hz$$

- Esta señal es periodica si y solo si las frecuencias son conmensurables, es decir, existe un $F_0 > 0$ tal que todas las F_K son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (F_0)

$\therefore$ es necesario hallar el máximo común divisor entre las frecuencias F_1, F_2 y F_3, el cual sería $500\,Hz = F_0$

de tal manera que el periodo fundamental es: $T_0 = \frac{1}{F_0} = 2ms$

- Teniendo en cuenta que se pide una frecuencia de muestreo (F_s) de $5KHz$, verificar si cumple con el teorema de Nyquist que establece que:

$$F_s \geq 2F_{max}$$

$$5000\,Hz \geq 11000\,Hz \rightarrow \text{Falso}$$ $\therefore$ se generan copias (aliasing) en la señal

lo cual es posible demostrar si al calcular Ω, no está en el rango de $[-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi]$ para cada componente de la señal.

Sabiendo que $\Omega = 2\pi \frac{F}{F_s}$

⑤

- para 500 Hz: $\Omega_1 = 2\pi \cdot \frac{500}{5000} = \frac{2\pi}{5}$

- para 1500 Hz: $\Omega_2 = 2\pi \cdot \frac{1500}{5000} = \frac{3\pi}{5}$

- para 5500 Hz: $\Omega_3 = 2\pi \cdot \frac{5500}{5000} = \frac{11}{5}\pi \rightarrow$ no se encuentra dentro del rango

$\therefore$ como uno de los términos no cumple con el rango, la señal completa ya no cumple Nyquist

- muestreo con $t = nTs$

$$X[n] = 3\cos(1000\pi nTs) + 5\text{sen}(3000\pi nTs) + 10\cos(11000\pi nTs)$$

- Reemplazando $Ts = \frac{1}{FS} = \frac{1}{5000\,Hz}$

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi}{5}n\right)$$

$$3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + \underbrace{10\cos\left(\frac{\pi}{5}n + 2\pi n\right)}_{*}$$

- Evaluando $*$

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)\cos(2\pi n) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}n\right)\text{sen}(2\pi n)$$

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \forall r2\pi \quad \cos(r2\pi) = 1$ y $\text{sen}(r2\pi) = 0$

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

- la expresión completa queda:

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$$

- Factor común

$$X[n] = (3+10)\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

$$X[n] = 13\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \rightarrow \text{ya contiene el alias}$$

⑥

- Para corregir el aliasing en la señal usar el criterio de Nyquist

$F_s \geq 2 \cdot 5500\ Hz$ $\therefore F_s = 11000\ Hz$ como mínimo

③ Sea $x''(t)$ la segunda derivada de $x(t)$ con $t \in [t_i, t_F]$

Demuestre que $C_n = \frac{1}{(t_i - t_F) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_F} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ con $n \in \mathbb{Z}$

- Partiendo de que: $x(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- $x''(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \right] = \sum_n \left[\frac{d^2}{dt^2} C_n e^{jn\omega_0 t} \right]$

- Evaluar $x'(t) = \frac{d}{dt}$:

$$x'(t) = \sum_n C_n \frac{d}{dt} e^{jn\omega_0 t} = \sum_n C_n (jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

- Evaluar $x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}$:

$$x''(t) = \sum_n C_n (jn\omega_0) \frac{d}{dt} e^{jn\omega_0 t} = \sum_n C_n (jn\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \sum_n C_n j^2 n^2 \omega_0^2 e^{jn\omega_0 t} = \sum_n (-C_n n^2 \omega_0^2) e^{jn\omega_0 t}$$

- Realizando sustitución $\tilde{C_n} = -C_n n^2 \omega_0^2$

$\sum_n \tilde{C_n} e^{jn\omega_0 t} \rightarrow$ otra serie de Fourier

- $\tilde{C_n} = \frac{1}{T} \int_T x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

7

- Reemplazando $\hat{C}_n$

$$-C_n n^2 W_0^2 = \frac{1}{T}\int_T X''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2 w_0^2}\int_T X''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

- Sabiendo que $T = (t_F - t_i) \rightarrow -T = (t_i - t_F)$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_F)\, n^2 W_0^2}\int_T X''(t)\, e^{-jnw_0t}$$

- Hallar a_n y b_n a partir de $X''(t)$

Escribir la serie trigonométrica de Fourier de $X(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_0t) + b_n\,\text{sen}(nw_0t)]$$

- Derivar dos veces término a término
  - $\frac{d}{dt}\cos(nw_0t) = -nw_0\,\text{sen}(nw_0t)$

    $\frac{d^2}{dt^2}\cos(nw_0t) = -(nw_0)^2\cos(nw_0t)$
  - $\frac{d}{dt}\text{sen}(nw_0t) = nw_0\cos(nw_0t)$

    $\frac{d^2}{dt^2}\text{sen}(nw_0t) = -(nw_0)^2\,\text{sen}(nw_0t)$

$$\therefore X''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-(nw_0)^2 a_n\cos(nw_0t) - (nw_0)^2 b_n\,\text{sen}(nw_0t)\right]$$

No aparece a_0 porque su derivada es cero

- Por ortogonalidad de senos y cosenos con las siguientes identidades

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2}$$

$$\text{sen}(A)\,\text{sen}(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

8

$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}{2}$

- Demostrar caso por caso con $A = n\omega_0 t$ y $B = Kn\omega_0 t$
  - $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n-K)\omega_0 t) + \cos((n+K)\omega_0 t)\,dt$

    - Para $n \neq K$ la integral en un periodo completo es 0
    - Para $n = K$ da $T/2$
  - $\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n-K)\omega_0 t) - \cos((n+K)\omega_0 t)\,dt$

    - Para $n \neq K$ la integral en un periodo completo es 0
    - Para $n = K$ da $T/2$
  - $\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}((n+K)\omega_0 t) + \operatorname{sen}((n-K)\omega_0 t)\,dt$

En todos los casos da 0 por tener un periodo completo de una función impar

- Hallar a_n multiplicando por $\cos(K\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{-T}{2}(K\omega_0 t)^2 a_K \rightarrow \text{para } n = K$$

$$a_K = a_n = -\frac{2}{T(n\omega_0 t)^2}\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \rightarrow n \geq 1$$

- Hallar b_n multiplicando por $\operatorname{sen}(K\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

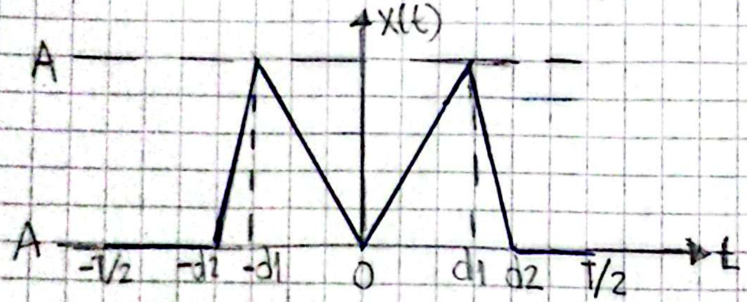
$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = -\frac{T}{2}(K\omega_0 t)^2 b_n \rightarrow \text{para } n = K$$

9

$$b_n = \frac{-2}{T(n\omega_0 t)^2} \int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt \rightarrow n \geq 1$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y error relativo $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$ a partir de $x''(t)$



- definición de la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < -d_2 \\ m_1 t + b_1 & -d_2 \leq t < -d_1 \\ -m_2 t + b_2 & -d_1 \leq t < 0 \\ m_2 t + b_2 & 0 \leq t < d_1 \\ -m_1 t + b_1 & d_1 \leq t < d_2 \\ 0 & d_2 \leq t < T/2 \end{cases}$$

- donde: • $m_1 = \frac{A-0}{-d_1-(-d_2)} = \frac{A}{d_2-d_1}$ Corte en Y: $x(-d_2)=0$

$x(t) = m_1 t + b_1$

$0 = m_1(-d_2) + b_1$

$b_1 = m_1 d_2$

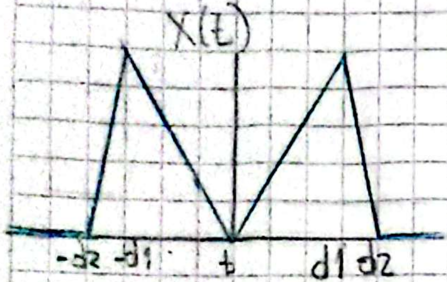
• $m_2 = \frac{A-0}{d_1-0} = \frac{A}{d_1}$ Corte en Y: $b_2 = 0$

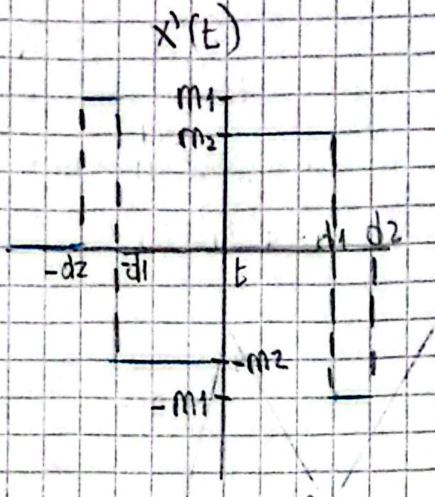
- Coeficientes de Fourier desde $x''(t)$

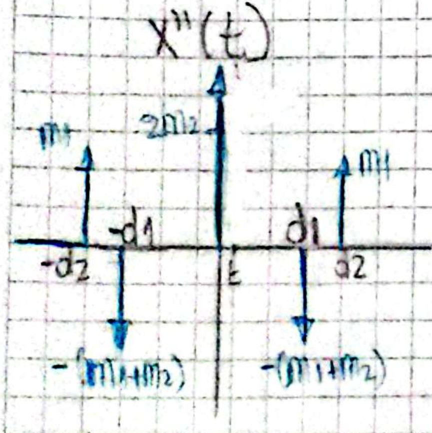
$$C_n = \frac{-1}{T n^2 \omega_0^2} \int_T x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Powered by CamScanner

- Analisis de las derivadas de $x''(t)$







- Siendo entonces:

$$x''(t) = m_1\delta(t+d_2) - (m_1+m_2)\delta(t+d_1) + 2m_2\delta(t) - (m_1+m_2)\delta(t-d_1) + m_1\delta(t-d_2)$$

$$x''(t) = m_1[\delta(t+d_2) + \delta(t-d_2)] - (m_1+m_2)[\delta(t+d_1) + \delta(t-d_1)] + 2m\delta(t)$$

- Evaluando en C_n

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\Big[\int_T m_1[\delta(t+d_2)+\delta(t-d_2)]e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$-\int_T (m_1+m_2)[\delta(t+d_1)+\delta(t-d_1)]e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$+\int_T 2m_2\,\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

- Aplicando propiedad de selectividad: $\int x(t)\,\delta(t\pm t_0)\,dt = x(\mp t_0)$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\Big[m_1\Big[\int_T \delta(t+d_2)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_T \delta(t-d_2)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

$$-(m_1+m_2)\Big[\int_T \delta(t+d_1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_T \delta(t-d_1)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

$$+2m_2\int_T \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

11

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2 W_0^2}\left[m_1\left(e^{jnw_0 d_2} + e^{-jnw_0 d_2}\right) - (m_1+m_2)\left(e^{jnw_0 d_1} + e^{-jnw_0 d_1}\right) + 2m_2 e^{-jnw_0(0)} \right]$$

- expandir $e^{jnw_0 t} = \cos(nw_0 t) + j\,\text{sen}(nw_0 t)$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2 W_0^2}\Big[m_1\left(\cos(nW_0 d_2) + j\,\text{sen}(nW_0 d_2) + \cos(nW_0 d_2) - j\,\text{sen}(nW_0 d_2)\right)$$
$$-(m_1+m_2)\left(\cos(nW_0 d_1) + j\,\text{sen}(nW_0 d_1) + \cos(nW_0 d_1) - j\,\text{sen}(nW_0 d_1)\right)$$
$$+2m_2\left(\cos(0) - j\,\text{sen}(0)\right)\Big]$$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2 W_0^2}\left[2m_1\cos(nW_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(nW_0 d_1) + 2m_2 \right]$$

- Como es posible observar, C_n no tiene componentes imaginarias

$\therefore\ C_n = \text{Re}\{C_n\} + 0$

- Para hallar la fase:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}}\right) = 0$$

- Hallar la magnitud

$$|C_n| = \left|\frac{-1}{Tn^2 W_0^2}\right| \left|2m_1\cos(nW_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(nW_0 d_1) + 2m_2\right|$$

$$|C_n| = \frac{1}{Tn^2 W_0}\left|2m_1\cos(nW_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(nW_0 d_1) + 2m_2\right|$$

- $C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt \rightarrow$ aprovechando la simetría se puede calcular como $2 \cdot$ Área triángulo

$$= \frac{1}{T}\left(2\ \frac{d_2 \cdot A}{2}\right) = \frac{A \cdot d_2}{T}$$

- Calcular error relativo

$$E_{relativo} = \left(1 - \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 \frac{P_n}{P_x}\right)100 \rightarrow \text{con } P_n = 1$$

(12)

- Para ello es necesario calcular $\overline{P_x}$

$$\overline{P_x} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt$$

- Como no se tiene parte imaginaria

$$\overline{P_x} = \frac{1}{T}\int_T (x(t))^2 dt$$

- Como $x(t)$ es par

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} (x(t))^2 dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{d_1} (m_2 t)^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (-m_1 t + b_1)^2 dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[m_2^2 \int_0^{d_1} t^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (m_1^2 t^2 - 2m_1 t b_1 + b_1^2) dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[m_2^2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{d_1} + m_1^2\left[\frac{t^3}{3}\right]_{d_1}^{d_2} - 2m_1 b_1\left[\frac{t^2}{2}\right]_{d_1}^{d_2} + b_1^2\left[t\right]_{d_1}^{d_2}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{m_2^2 d_1^3}{3} + m_1^2\left(\frac{d_2^3 - d_1^3}{3}\right) - 2m_1 b_1\left(\frac{d_2^2 - d_1^2}{2}\right) + b_1^2(d_2 - d_1)\right]$$

Reemplazando valores de pendientes y cortes con el eje y

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_1^2}{3} + \frac{A^2}{(d_2-d_1)^2}\left(\frac{d_2^3}{3} - \frac{d_1^3}{3}\right) - \frac{A^2 d_2}{(d_2-d_1)^2}(d_2^2 - d_1^2) + \frac{A^2 d_2^2}{d_2 - d_1}(d_2 - d_1)\right]$$

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_1}{3} + \frac{A^2 (d_2 - d_1)}{3}\right] = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_2}{3}\right]$$

$$\overline{P_x} = \frac{2A^2 d_2}{3T}$$

- ∴ $E_{relativo} = \left(1 - \frac{\sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2}{\frac{2A^2 d_2}{3T}}\right) 100$

Para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$:

$$E_{relativo} = \left(1 - \frac{3T \sum_{n=-5}^{5} |C_n|^2}{2A^2 d_2}\right) 100$$

• A partir de $X(t)$

Sabiendo que $C_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$

Como $x(t)$ es par y netamente real:

$$C_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\, dt$$

Al evaluar $X(t)$:

$$C_n = \frac{2}{T}\left[\underbrace{\int_0^{d_1} m_2 t\cos(n\omega_0 t)\, dt}_{*} + \int_{d_1}^{d_2}(-m_1 t + b_1)\cos(n\omega_0 t)\, dt + \cancel{\int_{d_2}^{T/2} 0 \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt}^{\,0}\right]$$

* Evaluar por medio de integración por partes

$U = t \qquad v = \frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}$

$dU = dt \qquad dv = \cos(n\omega_0 t)\, dt$

$$m_2\int_0^{d_1} t\cos(n\omega_0 t)\, dt = \left[t\,\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0} - \int_0^{d_1}\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\, dt\right] m_2$$

$$= \left[\left[\frac{t\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{d_1} + \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2}\right]_0^{d_1}\right] m_2$$

$$= \left[\frac{d_1\operatorname{sen}(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{\cos(n\omega_0 d_1) - 1}{n^2\omega_0^2}\right] m_2$$

• Retomando expresión completa:

$$C_n = \frac{2}{T}\left[\frac{m_2 d_1\operatorname{sen}(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{m_2(\cos(n\omega_0 d_1) - 1)}{n^2\omega_0^2} - \underbrace{m_1\int_{d_1}^{d_2} t\cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\star} + b_1\int_{d_1}^{d_2}\cos(n\omega_0 t)\, dt\right]$$

Al evaluar ☆ es posible observar que es la misma integral que se resolvió anteriormente por partes, por lo tanto:

$$C_n = \frac{2}{T}\left[\frac{m_2 d_1\operatorname{sen}(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{m_2(\cos(n\omega_0 d_1) - 1)}{n^2\omega_0^2} - m_1\left[\frac{t\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{d_1}^{d_2} - m_1\left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2}\right]_{d_1}^{d_2} + b_1\left[\frac{\operatorname{sen}(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{d_1}^{d_2}\right]$$

(14)

$$C_n=\frac{2}{T}\left[\frac{m_2 d_1 sen(n\omega_o d_1)}{n\omega_o}+\frac{m_2(\cos(n\omega_o d_1)-1)}{n^2\omega_o^2}-m_1\left(\frac{d_2 sen(n\omega_o d_2)}{n\omega_o}-\frac{d_1 sen(n\omega_o d_1)}{n\omega_o}\right)\right.$$
$$\left.-m_1\left(\frac{\cos(n\omega_o d_2)}{n^2\omega_o^2}-\frac{\cos(n\omega_o d_1)}{n^2\omega_o^2}\right)+b_1\left(\frac{sen(n\omega_o d_2)}{n\omega_o}-\frac{sen(n\omega_o d_1)}{n\omega_o}\right)\right]$$

Agrupando los terminos con seno:

$$\frac{1}{n\omega_o}\left[m_2 d_1 sen(n\omega_o d_1)-m_1(d_2 sen(n\omega_o d_2)-d_1 sen(n\omega_o d_1))+b_1(sen(n\omega_o d_2)-sen(n\omega_o d_1))\right]$$

$$=\frac{1}{n\omega_o}\left[m_2 d_1 sen(n\omega_o d_1)-m_1 d_2 sen(n\omega_o d_2)+m_1 d_1 sen(n\omega_o d_1)+b_1 sen(n\omega_o d_2)-b_1 sen(n\omega_o d_1)\right]$$

Agrupando los términos con coseno:

$$\frac{1}{n^2\omega_o^2}\left[m_2(\cos(n\omega_o d_1)-1)-m_1(\cos(n\omega_o d_2)-\cos(n\omega_o d_1))\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\omega_o^2}\left[m_2\cos(n\omega_o d_1)-m_2-m_1\cos(n\omega_o d_2)+m_1\cos(n\omega_o d_1)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2\omega_o^2}\left[(m_1+m_2)\cos(n\omega_o d_1)-m_1\cos(n\omega_o d_2)-m_2\right]$$

Dado que la señal es par, la contribucion imaginaria desaparece, dejando solo la parte de cosenos

$$\therefore C_n=\frac{2}{Tn^2\omega_o^2}\left[(m_1+m_2)\cos(n\omega_o d_1)-m_1\cos(n\omega_o d_2)-m_2\right]$$

$$C_n=\frac{-1}{Tn^2\omega_o^2}\left[2m_1\cos(n\omega_o d_2)-2(m_1+m_2)\cos(n\omega_o d_1)+2m_2\right]$$

Confirmando de tal manera que la expresión de Cn hallada desde $X''(t)$ es igual a la de $X(t)$