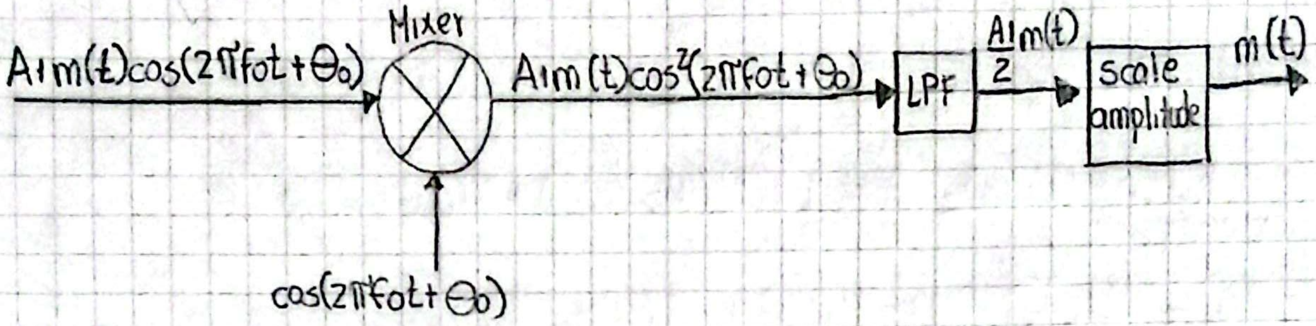
PARCIAL 2: SEÑALES Y SISTEMAS

Nombre: Valeria Corredor García

① Demodulador en amplitud



Con $\theta_0 = 0$

• Determine el espectro de Fourier en cada una de las etapas del sistema

• Señal de entrada: $s(t) = A_1 m(t)\cos(2\pi f_0 t)$

Sea $M(\omega)$ la transformada de $m(t) \to M(\omega) = F\{m(t)\}$

• Aplicando transformada: $S(\omega) = A_1 F\{m(t)\cos(\omega_0 t)\}$

• Escribir el coseno en exponenciales: $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$

• multiplicando por $m(t)$: $m(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}m(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}m(t)e^{-j\omega_0 t}$

• Usando propiedad: $F\{X(t)e^{\mp j\omega_0 t}\} = X(\omega \pm \omega_0)$

Queda: $S(\omega) = \frac{A_1}{2}\left[M(\omega-\omega_0) + M(\omega+\omega_0)\right]$

• Etapa del mezclador: multiplica $s(t)$ por $\cos(\omega_0 t)$

$U(t) = s(t)\cos(\omega_0 t) = A_1 m(t)\cos^2(\omega_0 t)$

• Usando identidad trigonométrica: $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Queda:

$$U(t) = A_1 m(t)\left(\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}\right) = \underbrace{\frac{A_1}{2}m(t)}_{U_1(t)} + \underbrace{\frac{A_1}{2}m(t)\cos(2\omega_0 t)}_{U_2(t)}$$

• Aplicando transformada de Fourier:

$U(\omega) = U_1(\omega) + U_2(\omega) = F\{U(t)\} = F\{U_1(t) + U_2(t)\}$

- Transformado de $U_1(t)$:

$$U_1(\omega) = F\{U_1(t)\} = \frac{A1}{2} F\{m(t)\} = \frac{A1}{2} M(\omega)$$

- Transformada de $U_2(t)$:

$$U_2(\omega) = F\{U_2(t)\} = \frac{A1}{2} F\{m(t)\cos(2\omega_0 t)\}$$

De lo calculado anteriormente: $U_2(\omega) = \frac{A1}{2} \cdot \frac{1}{2}[M(\omega - 2\omega_0) + M(\omega + 2\omega_0)]$

$$\therefore U_2(\omega) = \frac{A1}{4}[M(\omega - 2\omega_0) + M(\omega + 2\omega_0)]$$

- $U(\omega) = U_1(\omega) + U_2(\omega)$

$$U(\omega) = \frac{A1}{2} M(\omega) + \frac{A1}{4}[M(\omega - 2\omega_0) + M(\omega + 2\omega_0)]$$

- Etapa del filtro pasa bajas (LPF): Elimina las copias en $\pm 2\omega_0$

$$l(t) = \frac{A1}{2} m(t) \rightarrow F\{l(t)\} = L(\omega) = \frac{A1}{2} F\{m(t)\}$$

$$L(\omega) = \frac{A1}{2} M(\omega)$$

- Etapa de escalado final: multiplica la señal por una constante

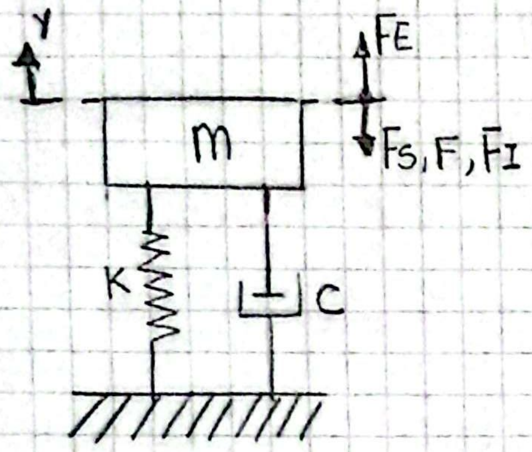
$$Y(t) = \frac{2}{A1} \cdot l(t) = \frac{2}{A1} \cdot \frac{A1}{2} m(t)$$

$$\therefore Y(t) = m(t)$$

$$F\{Y(t)\} = F\{m(t)\}$$

$$Y(\omega) = M(\omega)$$

(2) Encuentre la función de transferencia que caracteriza al sistema masa, resorte, amortiguador; asumiendo condiciones iniciales cero



Entrada: Fuerza externa (F_E) aplicada al bloque

Salida: desplazamiento ($Y(t)$) de la masa

Elementos: masa (m)
Rigidez del resorte (K)
Coeficiente de amortiguamiento (C)

- Fuerza del resorte: $F_S = KY(t)$
- Fuerza del amortiguador: $F = Cy'(t)$ → proporcional a la velocidad
- Fuerza Inercial: $F_I = my''(t)$ → proporcional a la aceleración
- Ecuación de equilibrio: $\sum F = 0$

$$F_E(t) = F_I(t) + F(t) + F_S(t)$$

$$F_E(t) = my''(t) + Cy'(t) + KY(t)$$ → EDO con coeficientes constantes

- Aplicar transformada de Laplace con condiciones iniciales cero

Usando la propiedad: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} X(t)\right\} = S^n X(s) + CI$

- $\mathcal{L}\left\{m\frac{d^2}{dt^2}Y(t)\right\} = m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}Y(t)\right\} = mS^2Y(s)$
- $\mathcal{L}\left\{C\frac{d}{dt}Y(t)\right\} = C\,\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}Y(t)\right\} = CSY(s)$
- $\mathcal{L}\{KY(t)\} = K\,\mathcal{L}\{Y(t)\} = KY(s)$
- $\mathcal{L}\{F_E(t)\} = F_E(s)$
- Entonces

$$\mathcal{L}\{F_E(t)\} = \mathcal{L}\{my''(t) + Cy'(t) + KY(t)\}$$

- Sabiendo que la transformada de laplace y la derivada son lineales

$$\mathcal{L}\{FE(t)\} = \mathcal{L}\left\{m\frac{d^2}{dt^2}Y(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{C\frac{d}{dt}Y(t)\right\} + \mathcal{L}\{KY(t)\}$$

$$FE(s) = ms^2Y(s) + CsY(s) + KY(s)$$

$$FE(s) = (ms^2 + Cs + K)Y(s)$$

- Se define la función de transferencia como:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{FE(s)} = \frac{1}{ms^2 + Cs + K}$$

- Forma normalizada: $G(s) = \dfrac{1/m}{s^2 + \frac{C}{m}s + \frac{K}{m}}$

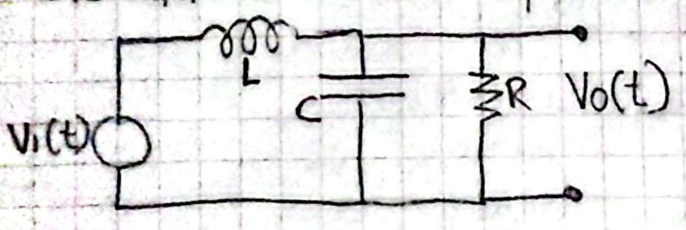
- Forma estándar de 2do orden:

ω_n: Frecuencia natural no amortiguada
ζ: Factor de amortiguamiento

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \zeta = \frac{C}{2\sqrt{Km}}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{K}$$

- Sistema eléctrico equivalente RLC



Entrada: $V_i(t)$
Salida: $V_o(t)$

- Definiendo: Inductor: Voltaje $= V_L(t)$; corriente $= i_L(t)$
  Condensador: Voltaje $= V_C(t)$; corriente $= i_C(t)$
  Resistor: voltaje $= V_R(t)$; corriente $= i_R(t)$

- Relaciones constitutivas

$$V_L(t) = L\frac{d\,i_L(t)}{dt} \qquad i_R(t) = \frac{V_o(t)}{R} \qquad i_C = C\frac{dV_o(t)}{dt}$$

- Aplicando ley de nodos: $i_L = i_R + i_C$

$$i_L(t) = \frac{V_o(t)}{R} + C\frac{dV_o(t)}{dt}$$

- derivando expresión anterior respecto al tiempo

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + C\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} \qquad (1)$$

- Aplicando ley de mallas en la malla de entrada

$$V_i(t) = V_L(t) + V_o(t)$$

$$V_i(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + V_o(t) \qquad (2)$$

- Sustituyendo (1) en (2)

$$V_i(t) = L\left(\frac{1}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + C\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}\right) + V_o(t)$$

$$V_i(t) = LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t)$$

- Aplicando Transformada de laplace con $CI=0$

Usando la propiedad: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = s^nX(s) + CI$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{V_i(t)\} = \mathcal{L}\left\{LC\frac{d^2V_o(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dV_o(t)}{dt} + V_o(t)\right\}$$

$$V_i(s) = LCs^2V_o(s) + \frac{L}{R}sV_o(s) + V_o(s)$$

$$V_i(s) = V_o(s)\left(LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1\right)$$

- Función de transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

- Equivalencia sistema masa-resorte amortiguador y sistema eléctrico RLC

$$G(s) = \frac{1/K}{\left(\frac{m}{K}\right)s^2 + \left(\frac{c}{K}\right)s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Entonces:

$$LC = \frac{m}{K} \quad ; \quad \frac{L}{R} = \frac{c}{K}$$

Para facilitar cálculos $L = 1\,[H]$

$$\therefore C = \frac{m}{K}\,[F] \qquad R = \frac{K}{c}\,[\Omega]$$

- Elegir m, K, c y R, L, C para 3 regímenes de amortiguamiento

Fijando $m = 1\,Kg$ $K = 25\,N/m$

$$\therefore W_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{25} = 5\,rad/s$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \frac{c}{10}$$

- Subamortiguado: $0 < \zeta < 1$

Tomando $\zeta = 0.2$

$$0.2 = \frac{c}{10} \rightarrow c = 2\,\frac{N \cdot s}{m}$$ con s=segundos

- Críticamente amortiguado:

Tomando $\zeta = 1$

$$1 = \frac{c}{10} \rightarrow c = 10\,\frac{N \cdot s}{m}$$

- Sobreamortiguado: $\zeta > 1$

Tomando $\zeta = 2$

$$2 = \frac{c}{10} \rightarrow c = 20\,\frac{N \cdot s}{m}$$

- Parámetros eléctricos equivalentes

$L = 1H \qquad C = \frac{m}{K} = \frac{1}{25} = 0{,}04F$

- Subamortiguado: $c=2$

$R = \frac{25}{2} = 12{,}5\Omega$

- Críticamente amortiguado: $c=10$

$R = \frac{25}{10} = 2{,}5\ \Omega$

- Sobreamortiguado: $c=20$

$R = \frac{25}{20} = 1{,}25\Omega$

- Parámetros dinámicos con lazo abierto: describe como responde la planta al estímulo y los parámetros se determinan a partir de la función de transferencia

$G_{ab}(s) = \frac{Y(s)}{FE(s)} = \frac{1}{ms^2+cs+K}$ con $m=1Kg$ y $K=25N/m$

• Frecuencia natural no amortiguada: Determina la rapidéz mecánica intrínseca: masa muy grande → más lento; resorte muy rígido → más rápido

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Subamortiguado: $\omega_n = \sqrt{25} = 5 \, rad/s$
- críticamente amortiguado: $\omega_n = \sqrt{25} = 5 \, rad/s$
- Sobreamortiguado: $\omega_n = \sqrt{25} = 5 \, rad/s$

• Factor de amortiguamiento: compara el amortiguamiento real c con el amortiguamiento crítico, clasifica el tipo de respuesta de la planta (dice si la respuesta oscila y cuánto)

$0 < \zeta < 1$: subamortiguada, oscila
$\zeta = 1$: críticamente amortiguada
$\zeta > 1$: sobreamortiguada, monótona y lenta

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

- subamortiguado: $c=2 \rightarrow \zeta = \frac{2}{10} = 0,2$
- críticamente amortiguado: $c=10 \rightarrow \zeta = 1$
- sobreamortiguado: $c=20 \rightarrow \zeta = \frac{20}{10} = 2$

- Frecuencia natural amortiguada: Frecuencia de las oscilaciones reales de la planta cuando hay amortiguamiento pero sigue habiendo oscilación

$$\omega d = \omega n \sqrt{1-\zeta^2}$$

- subamortiguado: $\omega d = 5\sqrt{1-(0,2)^2} \approx 4,89 \, rad/s$
- críticamente amortiguado: $\omega d = 5\sqrt{1-1} = 0$ (no oscilatorio)
- sobreamortiguado: $\omega d = 5\sqrt{1-(2)^2} \rightarrow$ polos reales negativos, no hay oscilaciones

- Tiempo pico: Solo tiene sentido cuando hay oscilaciones ($0<\zeta<1$) ya que describe cuanto tarda en llegar a su primer sobrepaso ante un escalón como entrada (respuesta al escalón unitario y cuando ocurre el primer máximo)

$$t_p = \frac{\pi}{\omega d}$$

- Subamortiguado: $t_p = \frac{\pi}{4,89} = 0,64s$

- Críticamente amortiguado
- Sobreamortiguado

$\}$ no aplica porque no hay sobrepaso (sin oscilatorio)

- Tiempo de levantamiento: tiempo para ir de 0 al 100% del valor final ante un escalón, es decir cuán rápido la planta llega por primera vez cerca de la nueva posición de equilibrio al darle un escalón de fuerza

Para $0<\zeta<1$: $t_r \approx \frac{\pi - \phi}{\omega d}$ donde $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$

- Subamortiguado: $t_r \approx 0.36s$
- Críticamente amortiguado
- Sobreamortiguado

$\}$ respuesta al escalón

- Tiempo de establecimiento: tiempo a partir del cual la respuesta se queda dentro de una banda alrededor del valor final

Para $0<\zeta\leq 1$: $t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$

- Subamortiguado: $t_s \approx 4s$
- Críticamente amortiguado: $t_s \approx \frac{4}{5} \approx 0{,}8s$
- Sobreamortiguado: Calculando polos

$$G(s) = \frac{1}{s^2+20s+25}$$

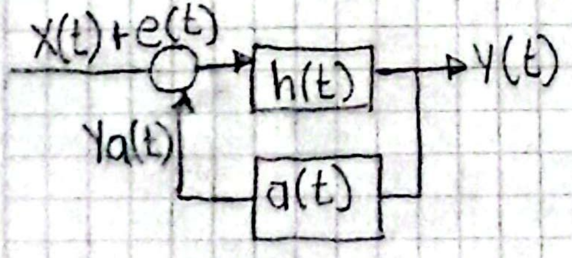
Evaluar: $s^2+20s+25=0$

$$s_{12} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2-4\cdot 1\cdot 25}}{2} = -10 \pm 5\sqrt{3} \rightarrow s_1 = -18{,}66 \quad s_2 = -1{,}34$$

Identificar polo dominante: más cerca al eje imaginario
$s_d = -1{,}34$

$$t_s = \frac{4}{|s_d|} \approx 3s$$

- Función de transferencia con lazo cerrado

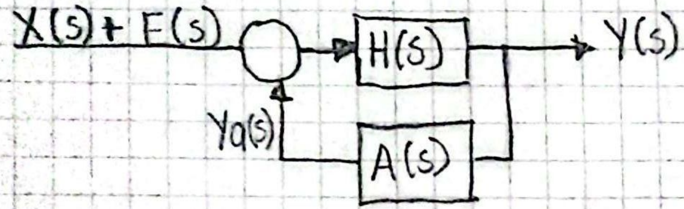


- $X(t)$: referencia
- $e(t)$: error
- $Y(t)$: salida del sistema
- $Ya(t)$: salida de la rama de realimentación
- $h(t)$: respuesta al impulso
- $a(t)$: respuesta impulso bloque de realimentacion

Se establece que:
$$y(t) = h(t) * e(t)$$
$$Ya(t) = a(t) * y(t)$$
$$e(t) = x(t) - Ya(t)$$
$$e(t) = x(t) - a(t) * y(t)$$

$$\therefore y(t) = h(t) * e(t) = h(t) * [x(t) - a(t) * y(t)]$$
↳ típica "auto-convolución" de lazo cerrado

- En laplace:
  - $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$
  - $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$
  - $\mathcal{L}\{y_a(t)\} = Y_a(s)$
  - $\mathcal{L}\{e(t)\} = E(s)$
  - $\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s)$
  - $\mathcal{L}\{a(t)\} = A(s)$



Sabiendo la propiedad:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s)G(s)$$

Entonces: $Y(s) = H(s)E(s)$

$Y_a(s) = A(s)Y(s)$

$E(s) = X(s) - Y_a(s)$

$E(s) = X(s) - A(s)Y(s)$

$$\therefore Y(s) = H(s)[X(s) - A(s)Y(s)]$$

$$Y(s) = H(s)X(s) - H(s)A(s)Y(s)$$

$$Y(s) + H(s)A(s)Y(s) = H(s)X(s)$$

$$Y(s)[1 + H(s)A(s)] = H(s)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H_{LC}(s) = \frac{H(s)}{1 + A(s)H(s)}$$

- Tomando realimentación unitario $A(s) = 1$ (rama de realimentación solo copia la salida, no filtra nada)

$$G_{LC}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

- Aplicado al sistema masa-resorte-amortiguador:

$$G_{LC}(s) = \frac{\frac{1}{ms^2 + cs + k}}{1 + \frac{1}{ms^2 + cs + k}} = \frac{1}{ms^2 + cs + k + 1}$$

- Parámetros dinámicos con lazo cerrado: se crea sistema con realimentación para monitorear. Fijando $m = 1\,Kg$ $K = 25\,N/m$ $K_c = 25$
  - Frecuencia natural no amortiguada:

$$\omega_{n\,cl} = \sqrt{\frac{K + K_c}{m}}$$ Siendo K_c la ganancia del controlador

11

La misma para los tres tipos de amortiguamiento

$$W_{ncl} = \sqrt{\frac{25+25}{1}} = \sqrt{50} \approx 7{,}07 \text{ rad/s}$$

- Factor de amortiguamiento:

$$\zeta_{cl} = \frac{C}{2\sqrt{m(K+K_c)}}$$

  - Subamortiguado: $\zeta_{cl} = \frac{2}{2\sqrt{50}} \approx 0{,}141$
  - Criticamente amortiguado: $\zeta_{cl} = \frac{10}{2\sqrt{50}} \approx 0{,}707$
  - Sobreamortiguado: $\zeta_{cl} = \frac{20}{2\sqrt{50}} \approx 1{,}414$

- Frecuencia natural amortiguada:

$$W_{dcl} = W_{ncl}\sqrt{1-\zeta_{cl}^2}$$

  - Subamortiguado: $W_{dcl} = 7{,}07\sqrt{1-(0{,}141)^2} \approx 7 \text{ rad/s}$
  - Criticamente amortiguado: $W_{dcl} = 7{,}07\sqrt{1-(0{,}707)^2} \approx 5 \text{ rad/s}$
  - Sobreamortiguado: $W_{dcl} = 7{,}07\sqrt{1-(1{,}414)^2} \rightarrow \in \mathbb{C} \rightarrow$ indefinido

- Tiempo pico:

$$t_{pcl} = \frac{\pi}{W_{dcl}}$$

  - Subamortiguado: $t_{pcl} \approx 0{,}45s$
  - Criticamente amortiguado: $t_{pcl} \approx 0{,}63s$
  - Sobreamortiguado: $t_{pcl} \rightarrow$ indefinido

- Tiempo de levantamiento:

$$t_{rcl} \approx \frac{\pi - \phi_{cl}}{W_{dcl}} \quad \text{donde} \quad \phi_{cl} = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta_{cl}^2}}{\zeta_{cl}}\right)$$

  - Subamortiguado: $t_{rcl} \approx 0{,}24s$

- Críticamente amortiguado: $t_{rcl} \approx 0{,}47s$
- Sobreamortiguado: $t_{rcl} \rightarrow$ indefinido

- Tiempo de establecimiento:

$$t_{scl} \approx \frac{4}{\xi_{cl} \cdot \omega_{ncl}}$$

- subamortiguado: $t_{scl} \approx 4s$
- críticamente amortiguado: $t_{scl} \approx 0{,}8s$
- sobreamortiguado: $t_{scl} \approx 1{,}37s \rightarrow$ por polo dominante