

① PARCIAL I: SEÑALES Y SISTEMAS

Nombre: Valeria Corredor García

① $X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$d^2(X_1, X_2) = \bar{P}X_1 - X_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |X_1(t) - X_2(t)|^2 dt$$

$$\begin{aligned} X_1(t) &= A e^{jn\omega_0 t} \\ X_2(t) &= B e^{jm\omega_0 t} \end{aligned} \quad \text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}; T, A, B \in \mathbb{R}^+ \text{ y } n, m \in \mathbb{Z}$$

Determinar la distancia entre las dos señales

• Ahora:

$$d^2(X_1, X_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |A e^{-jn\omega_0 t} - B e^{jm\omega_0 t}|^2 dt$$

• Sabiendo que $|a|^2 = aa^*$ con $a \in \mathbb{C}$

$$d^2(X_1, X_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A e^{-jn\omega_0 t} - B e^{jm\omega_0 t})(A e^{-jn\omega_0 t} - B e^{jm\omega_0 t})^* dt$$

• Aplicando distributiva

$$d^2(X_1, X_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A e^{-jn\omega_0 t} - B e^{jm\omega_0 t})((A e^{-jn\omega_0 t})^* - (B e^{jm\omega_0 t})^*) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A e^{-jn\omega_0 t} - B e^{jm\omega_0 t})(A e^{jn\omega_0 t} - B e^{-jm\omega_0 t}) dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T ((A)^2 e^{-jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 t} - AB e^{-jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} - AB e^{jm\omega_0 t} e^{jn\omega_0 t} + (B)^2 e^{jm\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}) dt$$

• Aplicando que $aa^* = |a|^2$ y que $(A)^2 = A^2$ ya que $A \in \mathbb{R}^+$.

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A^2 |e^{jn\omega_0 t}|^2 - AB e^{-j\omega_0 t(n+m)} - AB e^{j\omega_0 t(n+m)} + B^2 |e^{jm\omega_0 t}|^2) dt$$

• Aplicando factor común $-AB$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A^2 |e^{jn\omega_0 t}|^2 - \underbrace{AB(e^{-j\omega_0 t(n+m)} + e^{j\omega_0 t(n+m)})}_{*} + B^2 |e^{jm\omega_0 t}|^2) dt$$

2)

- Exponiendo *

$$-AB(\cos(\omega_0 t(n+m)) - j \sin(\omega_0 t(n+m))) + \cos(\omega_0 t(n+m)) + j \sin(\omega_0 t(n+m)) \\ = -AB(2 \cos(\omega_0 t(n+m))) = -2AB \cos(\omega_0 t(n+m))$$

- Reemplazando la expresión anterior

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T (A^2 |e^{jn\omega_0 t}|^2 - 2AB \cos(\omega_0 t(n+m)) + B^2 |e^{im\omega_0 t}|^2) dt$$

- Sabiendo que la integral de una suma es la suma de las integrales

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[A^2 \int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt - 2AB \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt + B^2 \int_T |e^{im\omega_0 t}|^2 dt \right]$$

- Evaluando cada integral

- $A^2 \int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt \rightarrow$ volviendo a que $|q|^2 = q q^*$

$$A^2 \int_T e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt \rightarrow \text{aplicando } e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$$

$$A^2 \int_T (\cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)) (\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)) dt \rightarrow \text{aplicando distributiva}$$

$$A^2 \int_T \cos^2(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) - j^2 \sin^2(n\omega_0 t) dt$$

$$A^2 \int_T \cos^2(n\omega_0 t) + \sin^2(n\omega_0 t) dt$$

Por la identidad trigonométrica: $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

$$\therefore A^2 \int_T dt = A^2 T$$

③

$$\bullet B^2 \int_T 1 e^{j\omega_0 t} dt$$

Como es posible observar, la integral es muy similar a la de: $A^2 \int_T 1 e^{j\omega_0 t} dt = A^2 T$ la cual fue calculada anteriormente

$$\therefore B^2 \int_T 1 e^{j\omega_0 t} dt = B^2 T$$

- Retomando expresión completa

$$\begin{aligned} d^2(x_1, x_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[A^2 \int_T 1 e^{j\omega_0 t} dt - 2AB \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt + B^2 \int_T 1 e^{j\omega_0 t} dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[A^2 T - 2AB \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt + B^2 T \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[A^2 - \frac{2AB}{T} \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt + B^2 \right] \end{aligned}$$

- Sabiendo que el límite de una resta es la resta de los límites

$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} A^2 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} B^2 \\ &= A^2 - \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \int_T \cos(\omega_0 t(n+m)) dt}_{*} + B^2 \end{aligned}$$

- Para evaluar * hay 2 posibles casos:

- Cuando $m = -n \rightarrow m+n = 0$

$$-\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \int_T \cos(0) dt = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \int_T dt$$

$$-\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \cdot T = -\lim_{T \rightarrow \infty} 2AB = -2AB$$

- Cuando $m \neq -n \rightarrow m+n \neq 0$

$$-\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \int_T \cos\left(\frac{2\pi}{T} t(n+m)\right) dt = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2AB}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{T} T(n+m)\right)}{\frac{2\pi}{T}} \right]$$

(4)

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \sqrt{r^2\pi^2} \sin(r^2\pi) = 0$

$$= -\lim_{T \rightarrow \infty} AB \frac{\sin(2\pi(n+m))}{\pi(n+m)} = -\lim_{T \rightarrow \infty} AB \cdot 0 = 0$$

- La respuesta final sería:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{para } m \neq -n$$

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{A^2 - 2AB + B^2} \quad \text{para } m = -n$$

② $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Sabiendo que $\omega_0 = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi}$

- Hallar frecuencia para cada término

$$f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500 \text{ Hz}$$

$$\therefore f_{\max} = 5500 \text{ Hz}$$

- Esta señal es periódica si y solo si las frecuencias son commensurables, es decir, existe un $F_0 > 0$ tal que todas las f_k son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (F_0)

∴ es necesario hallar el máximo común divisor entre las frecuencias f_1, f_2 y f_3 , el cual sería $500 \text{ Hz} = F_0$

de tal manera que el periodo fundamental es: $T_0 = \frac{1}{F_0} = 2 \text{ ms}$

- Teniendo en cuenta que se pide una frecuencia de muestreo (f_s) de 5 kHz, verificar si cumple con el teorema de Nyquist que establece que:

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

$$5000 \text{ Hz} \geq 11000 \text{ Hz} \rightarrow \text{Falso} \therefore \text{se generan}$$

lo cual es posible demostrar si al calcular Ω , no está en el rango de $[-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi]$ para cada componente de la señal.

Sabiendo que $\Omega = 2\pi \frac{f}{f_s}$

5

- para 500Hz: $\Omega_1 = 2\pi \cdot \frac{500}{5000} = \frac{2\pi}{5}$
- para 1500Hz: $\Omega_2 = 2\pi \cdot \frac{1500}{5000} = \frac{3\pi}{5}$
- para 5500Hz: $\Omega_3 = 2\pi \cdot \frac{5500}{5000} = \frac{11\pi}{5} \rightarrow$ no se encuentra dentro del rango

∴ como uno de los términos no cumple con el rango, la señal completa ya no cumple Nyquist

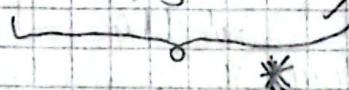
- muestreo con $t=nT_s$

$$X[n] = 3\cos(1000\pi n T_s) + 5\sin(3000\pi n T_s) + 10\cos(11000\pi n T_s)$$

- Reemplazando $T_s = \frac{1}{F_S} = \frac{1}{5000\text{Hz}}$

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi}{5}n\right)$$

$$3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n + 2\pi n\right)$$



- Evaluando *

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5}n + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)\cos(2\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)\sin(2\pi n)$$

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \forall r 2\pi \cos(r 2\pi) = 1 \text{ y } \sin(r 2\pi) = 0$

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5}n + 2\pi n\right) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

- la expresión completa queda:

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

- Factor común

$$X[n] = (3+10)\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

$$X[n] = 13\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{5}n\right) \rightarrow \text{ya contiene el alias}$$

⑥

- Para conseguir el aliasing en la señal usar el criterio de Nyquist
 $F_s \geq 2 \cdot 5500 \text{ Hz}$ $\therefore F_s = 11000 \text{ Hz}$ como mínimo

③ Sea $X''(t)$ la segunda derivada de $X(t)$ con $t \in [t_i, t_f]$

Demuestre que $C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} X''(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$ con $n \in \mathbb{Z}$

- Partiendo de que: $X(t) = \sum_n C_n e^{j n \omega_0 t}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T X(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$$

- $X''(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_n C_n e^{j n \omega_0 t} \right] = \sum_n \left[\frac{d^2}{dt^2} C_n e^{j n \omega_0 t} \right]$

- Evaluar $X'(t) = \frac{d}{dt} :$

$$X'(t) = \sum_n C_n \frac{d}{dt} e^{j n \omega_0 t} = \sum_n C_n (j n \omega_0) e^{j n \omega_0 t}$$

- Evaluar $X''(t) = \frac{d^2}{dt^2} :$

$$X''(t) = \sum_n C_n (j n \omega_0) \frac{d}{dt} e^{j n \omega_0 t} = \sum_n C_n (j n \omega_0)^2 e^{j n \omega_0 t}$$

$$= \sum_n C_n j^2 n^2 \omega_0^2 e^{j n \omega_0 t} = \sum_n (-C_n n^2 \omega_0^2) e^{j n \omega_0 t}$$

- Realizando sustitución $\tilde{C}_n = -C_n n^2 \omega_0^2$

$$\sum_n \tilde{C}_n e^{j n \omega_0 t} \rightarrow \text{otra serie de Fourier}$$

- $\tilde{C}_n = \frac{1}{T} \int_T X''(t) e^{-j n \omega_0 t} dt$

(7)

- Reemplazando \tilde{C}_n

$$-C_n n^2 \omega_0^2 = \frac{1}{T} \int_T X''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{-T n^2 \omega_0^2} \int_T X''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Sabiendo que $T = (t_F - t_i) \rightarrow -T = (t_i - t_F)$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_F) n^2 \omega_0^2} \int_T X''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- Hallar a_n y b_n a partir de $X''(t)$

Escribir la serie trigonométrica de Fourier de $X(t)$:

$$X(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

- Derivar dos veces término a término

- $\frac{d}{dt} \cos(n\omega_0 t) = -n\omega_0 \sin(n\omega_0 t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(n\omega_0 t) = -(n\omega_0)^2 \cos(n\omega_0 t)$$

- $\frac{d}{dt} \sin(n\omega_0 t) = n\omega_0 \cos(n\omega_0 t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} \sin(n\omega_0 t) = -(n\omega_0)^2 \sin(n\omega_0 t)$$

- $X''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \cos(n\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \sin(n\omega_0 t)]$

No aparece a_0 porque su derivada es cero

- Por ortogonalidad de senos y cosenos con las siguientes identidades

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

(3)

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

- Demostrar caso por caso con $A=n\omega_0 t$ y $B=k\omega_0 t$

- $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos((n-k)\omega_0 t) + \cos((n+k)\omega_0 t)] dt$

- Para $n \neq k$ la integral en un periodo completo es 0

- Para $n=k$ da $T/2$

- $\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos((n-k)\omega_0 t) - \cos((n+k)\omega_0 t)] dt$

- Para $n \neq k$ la integral en un periodo completo es 0

- Para $n=k$ da $T/2$

- $\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} [\sin((n+k)\omega_0 t) + \sin((n-k)\omega_0 t)] dt$

En todos los casos da 0 por tener un periodo completo de una función impar

- Hallar a_n multiplicando por $\cos(k\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt + (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega_0 t) \cos(k\omega_0 t) dt]$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \cos(k\omega_0 t) dt = -\frac{1}{2} (k\omega_0)^2 dK \rightarrow \text{para } n=k$$

$$a_k = a_n = -\frac{2}{T(n\omega_0)^2} \int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \cos(n\omega_0 t) dt \rightarrow n \geq 1$$

- Hallar b_n multiplicando por $\sin(k\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \sin(k\omega_0 t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt - (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega_0 t) \sin(k\omega_0 t) dt]$$

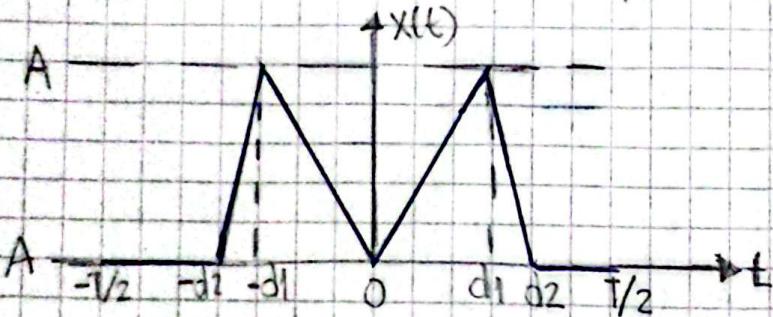
$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \sin(k\omega_0 t) dt = -\frac{1}{2} (k\omega_0)^2 b_n \rightarrow \text{para } n=k$$

(9)

$$b_n = \frac{2}{T(n\omega_0)^2} \int_{t_0}^{t_0+T} x''(t) \sin(n\omega_0 t) dt \rightarrow n \geq 1$$

- (4) Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y error relativo

$n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ a partir de $x''(t)$



- definición de la señal

$$0 \quad -T/2 \leq t < -d_2$$

$$x(t) = \begin{cases} m_1 t + b_1 & -d_2 \leq t < -d_1 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m_2 t + b_2 - d_1 \leq t < 0 \\ \end{cases}$$

$$m_2 t + b_2 \quad 0 \leq t < d_1$$

$$\begin{cases} -m_1 t + b_1 & d_1 \leq t < d_2 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & d_2 \leq t < T/2 \end{cases}$$

- donde $\bullet m_1 = A - 0$

$$\frac{-d_1 - (-d_2)}{A} = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

Corte en Y: $X(-d_2) = 0$

$$X(t) = m_1 t + b_1$$

$$0 = m_1(-d_2) + b_1$$

$$b_1 = m_1 d_2$$

$$\bullet m_2 = \frac{A - 0}{d_1 - 0} = \frac{A}{d_1}$$

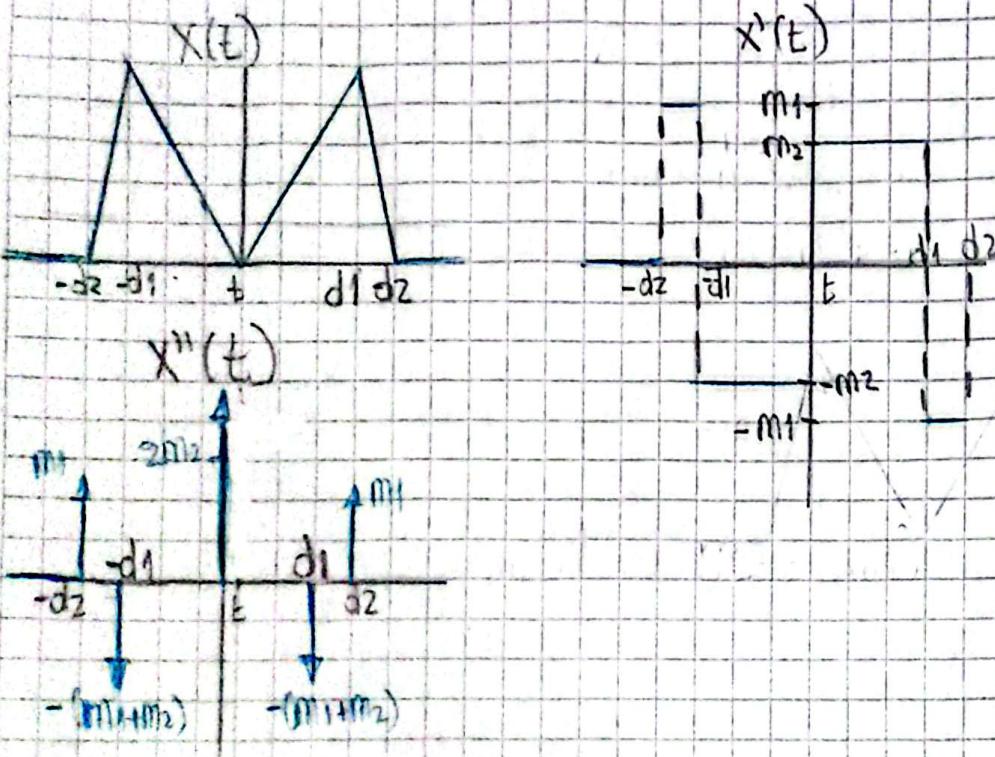
Corte en Y: $b_2 = 0$

- Coeficientes de Fourier desde $x''(t)$

$$C_n = \frac{1}{Tn\omega_0^2} \int_T x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

10

• Análisis de las derivadas de $X^n(t)$



• Siendo entonces:

$$X''(t) = m_1 f(t+d_2) - (m_1+m_2) f(t+d_1) + 2m_2 f(t) - (m_1+m_2) f(t-d_1) + m_1 f(t-d_2)$$

$$X''(t) = m_1 [f(t+d_2) + f(t-d_2)] - (m_1+m_2) [f(t+d_1) + f(t-d_1)] + 2m_2 f(t)$$

• Evaluando en C_n

$$\begin{aligned} C_n = & \frac{1}{T\pi^2\omega_0^2} \left[\int_T \left[m_1 [f(t+d_2) + f(t-d_2)] e^{-j\omega_0 t} dt \right. \right. \\ & - \int_T (m_1+m_2) [f(t+d_1) + f(t-d_1)] e^{j\omega_0 t} dt \\ & \left. \left. + \int_T 2m_2 f(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right] \right] \end{aligned}$$

• Aplicando propiedad de selectividad: $\int X(t) f(t \pm L) dt = X(\mp L)$

$$\begin{aligned} C_n = & \frac{1}{T\pi^2\omega_0^2} \left[m_1 \left[\int_T f(t+d_2) e^{-j\omega_0 t} dt + \int_T f(t-d_2) e^{j\omega_0 t} dt \right] \right. \\ & - (m_1+m_2) \left[\int_T f(t+d_1) e^{-j\omega_0 t} dt + \int_T f(t-d_1) e^{j\omega_0 t} dt \right] \\ & \left. + 2m_2 \int_T f(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right] \end{aligned}$$

(11)

$$C_n = \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \left[m_1 (e^{jn\omega_0 t_2} + e^{-jn\omega_0 t_2}) - (m_1 + m_2) (e^{jn\omega_0 t_1} + e^{-jn\omega_0 t_1}) \right. \\ \left. + 2m_2 e^{-jn\omega_0 t_0} \right]$$

- expandir $e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$

$$C_n = \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \left[m_1 (\cos(n\omega_0 t_2) + j \sin(n\omega_0 t_2) + \cos(n\omega_0 t_2) - j \sin(n\omega_0 t_2)) \right. \\ \left. - (m_1 + m_2) (\cos(n\omega_0 t_1) + j \sin(n\omega_0 t_1) + \cos(n\omega_0 t_1) - j \sin(n\omega_0 t_1)) \right. \\ \left. + 2m_2 (\cos(0) - j \sin(0)) \right]$$

$$C_n = \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \left[2m_1 \cos(n\omega_0 t_2) - 2(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t_1) + 2m_2 \right]$$

- Como es posible observar, C_n no tiene componentes imaginarias

$$\therefore C_n = \operatorname{Re}\{C_n\} + 0$$

- Para hallar la fase:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}\{C_n\}}{\operatorname{Re}\{C_n\}} \right) = 0$$

- Hallar la magnitud

$$|C_n| = \left| \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \right| |2m_1 \cos(n\omega_0 t_2) - 2(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t_1) + 2m_2|$$

$$|C_p| = \frac{1}{Tn^2\omega_0} |2m_1 \cos(n\omega_0 t_2) - 2(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t_1) + 2m_2|$$

- $C_p = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \rightarrow$ aprovechando la simetría se puede calcular como $\frac{1}{2} \operatorname{Area}_{\text{triangulo}}$

$$= \frac{1}{T} \left(2 \cdot \frac{d_z \cdot A}{2} \right) = \frac{A \cdot d_z}{T}$$

- Calcular error relativo

$$\text{Error relativo} = \left(1 + \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 \frac{P_n}{P_k} \right) 100 \rightarrow \text{con } P_n = 1$$

(12)

- Para ello es necesario calcular \bar{P}_X

$$\bar{P}_X = \frac{1}{T} \int_T |X(t)|^2 dt$$

- Como no se tiene parte imaginaria

$$\bar{P}_X = \frac{1}{T} \int_T (X(t))^2 dt$$

- Como $X(t)$ es par

$$\begin{aligned}\bar{P}_X &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (X(t))^2 dt = \frac{2}{T} \left[\int_{d_1}^{d_1} (m_2 t)^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (-m_1 t + b_1)^2 dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[m_2^2 \int_{d_1}^{d_1} t^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (m_1^2 t^2 - 2m_1 t b_1 + b_1^2) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[m_2^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{d_1}^{d_1} + m_1^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_{d_1}^{d_2} - 2m_1 b_1 \left[\frac{t^2}{2} \right]_{d_1}^{d_2} + b_1^2 \left[t \right]_{d_1}^{d_2} \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{m_2^2 d_1^3}{3} + m_1^2 \left(\frac{d_2^3 - d_1^3}{3} \right) - 2m_1 b_1 \left(\frac{d_2^2 - d_1^2}{2} \right) + b_1^2 (d_2 - d_1) \right]\end{aligned}$$

Reemplazando los valores de pendientes y cortes con el eje y

$$\bar{P}_X = \frac{2}{T} \left[\frac{A^2 d_1^2}{3} + \frac{A^2}{(d_2 - d_1)^2} \left(\frac{d_1^3 - d_1^3}{3} \right) - \frac{A^2 d_2 (d_2^2 - d_1^2)}{(d_2 - d_1)^2} + \frac{A^2 d_2^2 (d_2 - d_1)}{d_2 - d_1} \right]$$

$$\bar{P}_X = \frac{2}{T} \left[\frac{A^2 d_1}{3} + A^2 \frac{(d_2 - d_1)}{3} \right] = \frac{2}{T} \left[\frac{A^2 d_2}{3} \right]$$

$$\bar{P}_X = \frac{2 A^2 d_2}{3 T}$$

$$\therefore E_{relativo} = \left(1 - \frac{\sum_{n=-N}^N |C_n|^2}{\frac{2 A^2 d_2}{3 T}} \right) 100$$

Para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$:

$$E_{relativo} = \left(1 - 3T \sum_{n=-5}^5 |C_n|^2 \right) 100$$

(13)

• A partir de $X(t)$

$$\text{Sabiendo que } C_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Como $x(t)$ es par y netamente real:

$$C_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

Al evaluar $X(t)$:

$$C_n = \frac{2}{T} \left[\underbrace{\int_0^{d_1} m_2 t \cos(n\omega_0 t) dt}_{*} + \int_{d_1}^{d_2} (-m_1 t + b_1) \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{d_2}^{T/2} 0 \cdot \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

* Evaluar por medio de integración por partes

$$U = t \quad V = \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}$$

$$dU = dt \quad dV = \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$\begin{aligned} m_2 \int_0^{d_1} t \cos(n\omega_0 t) dt &= \left[t \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} - \int_0^{d_1} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} dt \right] m_2 \\ &= \left[\frac{t \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \Big|_0^{d_1} + \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{(n\omega_0)^2} \right]_0^{d_1} \right] m_2 \\ &= \left[\frac{d_1 \sin(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{\cos(n\omega_0 d_1) - 1}{n^2 \omega_0^2} \right] m_2 \end{aligned}$$

• Retomando expresión completa:

$$C_n = \frac{2}{T} \left[\frac{m_2 d_1 \sin(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{m_2 (\cos(n\omega_0 d_1) - 1)}{n^2 \omega_0^2} + m_1 \int_{d_1}^{d_2} t \cos(n\omega_0 t) dt + b_1 \int_{d_1}^{d_2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

Al evaluar * es posible observar que es la misma integral que se resolvió anteriormente por partes, por lo tanto:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{T} \left[\frac{m_2 d_1 \sin(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0} + \frac{m_2 (\cos(n\omega_0 d_1) - 1)}{n^2 \omega_0^2} - m_1 \left[\frac{t \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{d_1}^{d_2} - m_1 \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2 \omega_0^2} \right]_{d_1}^{d_2} \right. \\ &\quad \left. + b_1 \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{d_1}^{d_2} \right] \end{aligned}$$

(14)

$$C_n = \frac{2}{T} \left[\frac{m_2 d \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} + \frac{M_1 (\cos(n\omega_0 t) - 1)}{n^2 \omega_0^2} - \frac{m_1 (d_2 \sin(n\omega_0 t) - d \sin(n\omega_0 t))}{n\omega_0} \right] - \frac{m_1 (\cos(n\omega_0 t) - \cos(n\omega_0 t))}{n^2 \omega_0^2} + \frac{b_1 (\sin(n\omega_0 t) - \sin(n\omega_0 t))}{n\omega_0}$$

Agrupando los términos en seno:

$$\frac{1}{n\omega_0} [m_2 d \sin(n\omega_0 t) - m_1 (d_2 \sin(n\omega_0 t) - d \sin(n\omega_0 t)) + b_1 (\sin(n\omega_0 t) - \sin(n\omega_0 t))]$$

$$= \frac{1}{n\omega_0} [m_2 d \sin(n\omega_0 t) - m_1 d_2 \sin(n\omega_0 t) + m_1 d \sin(n\omega_0 t) + b_1 \sin(n\omega_0 t) - b_1 \sin(n\omega_0 t)]$$

Agrupando los términos con coseno:

$$\frac{1}{n^2 \omega_0^2} [m_2 (\cos(n\omega_0 t) - 1) - m_1 (\cos(n\omega_0 t) - \cos(n\omega_0 t))]$$

$$= \frac{1}{n^2 \omega_0^2} [m_2 \cos(n\omega_0 t) - m_2 - m_1 \cos(n\omega_0 t) + m_1 \cos(n\omega_0 t)]$$

$$= \frac{1}{n^2 \omega_0^2} [(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t) - m_1 \cos(n\omega_0 t) - m_2]$$

Dado que la señal es par, la contribución imaginaria desaparece, dejando solo la parte de cosenos.

$$\therefore C_n = \frac{2}{T n^2 \omega_0^2} [(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t) - m_1 \cos(n\omega_0 t) - m_2]$$

$$C_n = \frac{-1}{T n^2 \omega_0^2} [2m_1 \cos(n\omega_0 t) + 2(m_1 + m_2) \cos(n\omega_0 t) + 2m_2]$$

Confirmando de tal manera que la expresión de C_n , hallada desde $X''(t)$ es igual a la de $X(t)$