①

PARCIAL 1: SEÑALES Y SISTEMAS

Nombre: Valeria Corredor García

① $x_1(t),\ x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$d^2(x_1,x_2) = \bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)-x_2(t)|^2\,dt$$

$x_1(t) = Ae^{-jn\omega_0 t}$ con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$

$x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t}$

Determinar la distancia entre las dos señales

- Ahora:

$$d^2(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T |Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jm\omega_0 t}|^2\,dt$$

- Sabiendo que $|a|^2 = aa^*$ con $a \in \mathbb{C}$

$$d^2(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jm\omega_0 t})(Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jm\omega_0 t})^*\,dt$$

- Aplicando distributiva

$$d^2(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jm\omega_0 t})((Ae^{-jn\omega_0 t})^* - (Be^{jm\omega_0 t})^*)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T (Ae^{-jn\omega_0 t} - Be^{jm\omega_0 t})(Ae^{jn\omega_0 t} - Be^{-jm\omega_0 t})\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T ((A)^2 e^{-jn\omega_0 t}e^{jn\omega_0 t} - ABe^{-jn\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t} - ABe^{jm\omega_0 t}e^{jn\omega_0 t} + (B)^2 e^{jm\omega_0 t}e^{-jm\omega_0 t})\,dt$$

- Aplicando que $aa^* = |a|^2$ y que $(A)^2 = A^2$ ya que $A \in \mathbb{R}^+$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T (A^2|e^{jn\omega_0 t}|^2 - ABe^{-j\omega_0 t(n+m)} - ABe^{j\omega_0 t(n+m)} + B^2|e^{jm\omega_0 t}|^2)\,dt$$

- Aplicando factor común $-AB$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T (A^2|e^{jn\omega_0 t}|^2 - \underbrace{AB(e^{-j\omega_0 t(n+m)} + e^{j\omega_0 t(n+m)})}_{*} + B^2|e^{jm\omega_0 t}|^2)\,dt$$

②

- Expandiendo *

$$-AB(\cos(w_0t(n+m)) - j\,sen(w_0t(n+m)) + \cos(w_0t(n+m)) + j\,sen(w_0t(n+m)))$$

$$= -AB(2\cos(w_0t(n+m))) = -2AB\cos(w_0t(n+m))$$

- Reemplazando la expresión anterior

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T (A^2|e^{jnw_0t}|^2 - 2AB\cos(w_0t(n+m)) + B^2|e^{jmw_0t}|^2)\,dt$$

- Sabiendo que la integral de una suma es la suma de las integrales

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2\int_T |e^{jnw_0t}|^2\,dt - 2AB\int_T \cos(w_0t(n+m))\,dt + B^2\int_T |e^{jmw_0t}|^2\,dt\right.$$

- Evaluando cada integral

- $A^2\int_T |e^{jnw_0t}|^2\,dt \rightarrow$ volviendo a que $|a|^2 = aa^*$

$$A^2\int_T e^{jnw_0t}\,e^{-jnw_0t}\,dt \rightarrow \text{aplicando } e^{jnw_0t} = \cos(nw_0t) + j\,sen(nw_0t)$$

$$A^2\int_T (\cos(nw_0t) + j\,sen(nw_0t))(\cos(nw_0t) - j\,sen(nw_0t))\,dt \rightarrow \text{aplicando distributiva}$$

$$A^2\int_T \cos^2(nw_0t) - j\,sen(nw_0t)\cos(nw_0t) + j\,sen(nw_0t)\cos(nw_0t) - j^2 sen^2(nw_0t)\,dt$$

$$A^2\int_T \cos^2(nw_0t) + sen^2(nw_0t)\,dt$$

Por la identidad trigonométrica: $\cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$

$$\therefore A^2\int_T dt = A^2T$$

- $$-2AB\int_T \cos(w_0t(n+m))\,dt = -2AB\left[\frac{1}{w_0(n+m)} sen(w_0t(n+m))\right]_0^T$$

$$= \frac{-2AB}{w_0(n+m)} sen(w_0T(n+m))$$

③

- $B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt$

Como es posible observar, la integral es muy similar a la de: $A^2\int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt = A^2 T$ la cual fue calculada anteriormente

$\therefore B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt = B^2 T$

- Retomando expresión completa

$$d^2(X_1,X_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2\int_T |e^{jn\omega_0 t}|^2 dt - 2AB\int_T \cos(\omega_0 t(n+\omega))dt + B^2\int_T |e^{jm\omega_0 t}|^2 dt\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[A^2 T - \frac{2AB}{\omega_0(n+m)} \operatorname{sen}(\omega_0 T(n+m)) + B^2 T\right]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[A^2 - \frac{2AB}{\omega_0(n+m)T} \operatorname{sen}(\omega_0 T(n+m)) + B^2\right]$$

- Sabiendo que el límite de una resta es la resta de los límites

$$= \lim_{T\to\infty} A^2 - \lim_{T\to\infty} \frac{2AB}{\omega_0(n+m)T} \operatorname{sen}(\omega_0 T(n+m)) + \lim_{T\to\infty} B^2$$

$$= A^2 - \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{2AB}{\omega_0(n+m)T} \operatorname{sen}(\omega_0 T(n+m))}_{*} + B^2$$

- Evaluando $*$ se llega a: $\frac{0}{0}$ $\therefore$ aplicar L'hopital:

$$-\frac{2AB}{\omega_0(n+m)} \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(\omega_0 T(n+\omega))}{\frac{d}{dt} T} = -\frac{2AB}{\omega_0(n+m)} \lim_{T\to\infty} \frac{\cos(\omega_0 T(n+m))(\omega_0(n+m))}{1}$$

$$= -2AB \lim_{T\to\infty} \cos(\omega_0 T(n+m))$$

- Sabiendo que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$= -2AB \lim_{T\to\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{T} T(n+m)\right)$$

4

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \forall r2\pi \quad \cos(r2\pi) = 1$

$$= -2AB \lim_{T \to \infty} \cos(2\pi(n+m)) = -2AB$$

- La respuesta final sería:

$$d^2(X_1, X_2) = A^2 - 2AB + B^2$$

$$d(X_1, X_2) = \sqrt{A^2 - 2AB + B^2}$$

2 $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\text{sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Sabiendo que $\omega_0 = 2\pi F \rightarrow F = \frac{\omega_0}{2\pi}$

- Hallar frecuencia para cada término

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\,Hz \\ F_2 &= \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500\,Hz \\ F_3 &= \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz \end{aligned}\right\} F_{max} = 5500\,Hz$$

- Esta señal es periodica si y solo si las frecuencias son conmensurables, es decir, existe un $F_0 > 0$ tal que todas las F_K son múltiplos enteros de F_0.

$\therefore$ es necesario hallar el mínimo común múltiplo entre las frecuencias F_1, F_2 y F_3, el cual sería $500\,Hz = F_0$

de tal manera que el periodo fundamental es: $T_0 = \frac{1}{F_0} = 2ms$

- Teniendo en cuenta que se pide una frecuencia de muestreo (F_s) de $5KHz$, verificar si cumple con el teorema de Nyquist que establece que:

$$F_s \geq 2F_{max}$$

$$5000Hz \geq 11000Hz \rightarrow \text{Falso} \therefore \text{se generan copias (aliasing) en la señal}$$

lo cual es posible demostrar si al calcular Ω, no está en el rango de $[-\pi, \pi]$ o $[0, 2\pi]$ para cada componente de la señal.

Sabiendo que $\Omega = 2\pi \frac{F}{F_s}$

⑤

- para 500 Hz: $\Omega_1 = 2\pi \cdot \frac{500}{5000} = \frac{2\pi}{5}$

- para 1500 Hz: $\Omega_2 = 2\pi \cdot \frac{1500}{5000} = \frac{3\pi}{5}$

- para 5500 Hz: $\Omega_3 = 2\pi \cdot \frac{5500}{5000} = \frac{11}{5}\pi$ → no se encuentra dentro del rango

∴ como uno de los términos no cumple con el rango, la señal completa ya no cumple Nyquist

- muestreo con $t = nT_s$

$$X[n] = 3\cos(1000\pi n T_s) + 5\,\text{sen}(3000\pi n T_s) + 10\cos(11000\pi n T_s)$$

- Reemplazando $T_s = \frac{1}{F_S} = \frac{1}{5000\,Hz}$

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{11\pi}{5}n\right)$$

$$3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + \underbrace{10\cos\left(\frac{\pi}{5}n + 2\pi n\right)}_{*}$$

- Evaluando *

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)\cos(2\pi n) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}n\right)\text{sen}(2\pi n)$$

- Sabiendo que $r \in \mathbb{Z} \rightarrow \forall\, r2\pi \quad \cos(r2\pi) = 1$ y $\text{sen}(r2\pi) = 0$

$$10\cos\left(\frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

- la expresión completa queda:

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)$$

- Factor común

$$X[n] = (3+10)\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$

$$X[n] = 13\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{5}n\right)$$ → ya contiene el alias

- Para corregir el aliasing en la señal usar el criterio de Nyquist

$Fs \geq 2 \cdot 5500\,Hz$ $\quad \therefore Fs = 11000\,Hz$ como mínimo

③ Sea $X''(t)$ la segunda derivada de $X(t)$ con $t \in [t_i, t_F]$

Demuestre que $C_n = \frac{1}{(t_i - t_F)n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_F} X''(t) e^{-jnw_0t}\, dt$ con $n \in \mathbb{Z}$

- Partiendo de que: $X(t) = \sum_n C_n e^{jnw_0t}$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T X(t) e^{-jnw_0t}\, dt$$

- $X''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left[\sum_n C_n e^{jnw_0t}\right] = \sum_n \left[\frac{d^2}{dt^2} C_n e^{jnw_0t}\right]$

- Evaluar $X'(t) = \frac{d}{dt}$:

$$X'(t) = \sum_n C_n \frac{d}{dt} e^{jnw_0t} = \sum_n C_n (jnw_0) e^{jnw_0t}$$

- Evaluar $X''(t) = \frac{d^2}{dt^2}$:

$$X''(t) = \sum_n C_n (jnw_0) \frac{d}{dt} e^{jnw_0t} = \sum_n C_n (jnw_0)^2 e^{jnw_0t}$$

$$= \sum_n C_n j^2 n^2 w_0^2 e^{jnw_0t} = \sum_n (-C_n n^2 w_0^2) e^{jnw_0t}$$

- Realizando sustitución $\tilde{C}_n = -C_n n^2 w_0^2$

$\sum_n \tilde{C}_n e^{jnw_0t} \rightarrow$ otra serie de Fourier

- $\tilde{C}_n = \frac{1}{T} \int_T X''(t) e^{-jnw_0t}\, dt$

(7)

- Reemplazando $\tilde{C}n$

$$-C_n n^2 W_0^2 = \frac{1}{T}\int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2 w_0^2}\int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$$

- Sabiendo que $T = (t_F - t_i) \rightarrow -T = (t_i - t_F)$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_F)\, n^2 W_0^2}\int_T x''(t)\, e^{-jnw_0t}$$

- Hallar a_n y b_n a partir de $x''(t)$

Escribir la serie trigonométrica de Fourier de $x(t)$:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_0t) + b_n\operatorname{sen}(nw_0t)]$$

- Derivar dos veces término a término

- $\frac{d}{dt}\cos(nw_0t) = -nw_0\operatorname{sen}(nw_0t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(nw_0t) = -(nw_0)^2\cos(nw_0t)$$

- $\frac{d}{dt}\operatorname{sen}(nw_0t) = nw_0\cos(nw_0t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}\operatorname{sen}(nw_0t) = -(nw_0)^2\operatorname{sen}(nw_0t)$$

$$\therefore\ x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-(nw_0)^2 a_n\cos(nw_0t) - (nw_0)^2 b_n\operatorname{sen}(nw_0t)\right]$$

No aparece a_0 porque su derivada es cero

- Por ortogonalidad de senos y cosenos con las siguientes identidades

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B) = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

⑧

$$\operatorname{sen}(A)\cos(B) = \frac{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)}{2}$$

- Demostrar caso por caso con $A = n\omega_0 t$ y $B = K\omega_0 t$

- $$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n-K)\omega_0 t) + \cos((n+K)\omega_0 t)\,dt$$

  - Para $n \neq K$ la integral en un periodo completo es 0
  - Para $n = K$ da $T/2$

- $$\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos((n-K)\omega_0 t) - \cos((n+K)\omega_0 t)\,dt$$

  - Para $n \neq K$ la integral en un periodo completo es 0
  - Para $n = K$ da $T/2$

- $$\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}((n+K)\omega_0 t) + \operatorname{sen}((n-K)\omega_0 t)\,dt$$

En todos los casos da 0 por tener un periodo completo de una función impar

- Hallar a_n multiplicando por $\cos(K\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0} \cos(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\cos(K\omega_0 t)\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(K\omega_0 t)\,dt = \frac{-T}{2}(K\omega_0 t)^2 a_K \rightarrow \text{para } n = K$$

$$a_K = a_n = -\frac{2}{T(n\omega_0 t)^2}\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \rightarrow n \geq 1$$

- Hallar b_n multiplicando por $\operatorname{sen}(K\omega_0 t)$ e integrando a ambos lados de la expresión de $x''(t)$

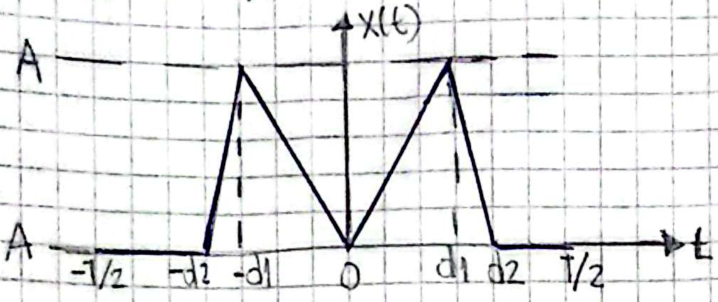
$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n\omega_0)^2 a_n \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t) - (n\omega_0)^2 b_n \int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\operatorname{sen}(K\omega_0 t)\,dt = -\frac{T}{2}(K\omega_0 t)^2 b_n \rightarrow \text{para } n = K$$

$$b_n = \frac{-2}{T(n\omega_0 t)^2}\int_{t_0}^{t_0+T} x''(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt \rightarrow n \geq 1$$

(4) Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginario, magnitud, fase y error relativo

$n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ a partir de $x''(t)$



• definición de la señal

$$x(t) = \begin{cases} 0 & -T/2 \leq t < -d_2 \\ m_1 + b_1 & -d_2 \leq t < -d_1 \\ -m_2 + b_2 & -d_1 \leq t < 0 \\ m_2 + b_2 & 0 \leq t < d_1 \\ -m_1 + b_1 & d_1 \leq t < d_2 \\ 0 & d_2 \leq t < T/2 \end{cases}$$

• donde: • $m_1 = \frac{A-0}{-d_1-(-d_2)} = \frac{A}{d_2-d_1}$

Corte en Y: $x(-d_2) = 0$

$x(t) = m_1 t + b_1$

$0 = m_1(-d_2) + b_1$

$b_1 = m_1 d_2$

• $m_2 = \frac{A-0}{d_1-0} = \frac{A}{d_1}$

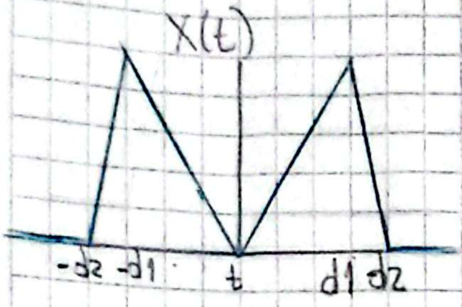
Corte en Y: $b_2 = 0$

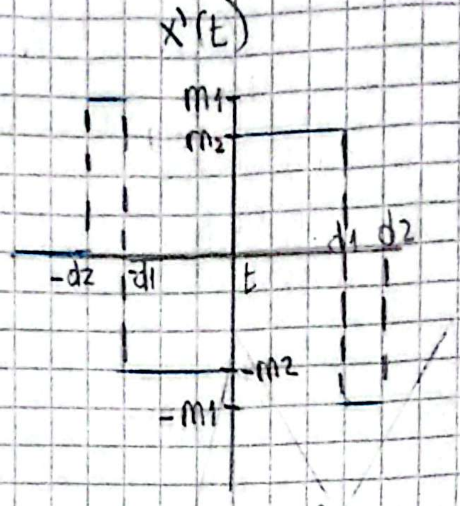
• Coeficientes de Fourier desde $x''(t)$

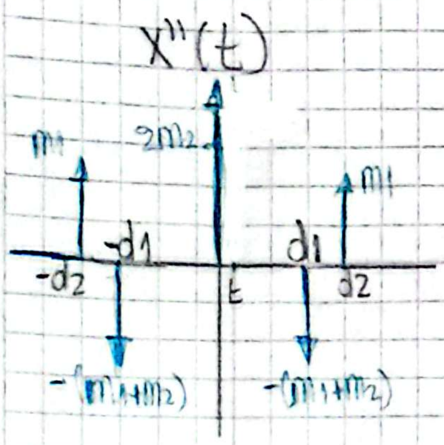
$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\int_T x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

10

- Análisis de las derivadas de $X''(t)$







- Siendo entonces:

$$X''(t) = m_1\delta(t+d_2) - (m_1+m_2)\delta(t+d_1) + 2m_2\delta(t) - (m_1+m_2)\delta(t-d_1) + m_1\delta(t-d_2)$$

$$X''(t) = m_1[\delta(t+d_2) + \delta(t-d_2)] - (m_1+m_2)[\delta(t+d_1) + \delta(t-d_1)] + 2m\delta(t)$$

- Evaluando en C_n

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\Big[\int_T m_1[\delta(t+d_2) + \delta(t-d_2)]e^{-jn\omega_0 t}dt$$
$$- \int_T (m_1+m_2)[\delta(t+d_1) + \delta(t-d_1)]e^{jn\omega_0 t}dt$$
$$+ \int_T 2m_2\,\delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

- Aplicando propiedad de selectividad: $\int x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\Big[m_1\Big[\int_T \delta(t+d_2)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_T \delta(t-d_2)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$
$$- (m_1+m_2)\Big[\int_T \delta(t+d_1)e^{-jn\omega_0 t}dt + \int_T \delta(t-d_1)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$
$$+ 2m_2\int_T \delta(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\Big]$$

11

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2 \omega_0^2}\left[m_1\left(e^{jn\omega_0 d_2} + e^{-jn\omega_0 d_2}\right) - (m_1+m_2)\left(e^{jn\omega_0 d_1} + e^{-jn\omega_0 d_1}\right) + 2m_2 e^{-jn\omega_0 (0)} \right]$$

- expandir $e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j\,\text{sen}(n\omega_0 t)$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\Big[m_1\big(\cos(n\omega_0 d_2) + j\,\text{sen}(n\omega_0 d_2) + \cos(n\omega_0 d_2) - j\,\text{sen}(n\omega_0 d_2)\big)$$
$$-(m_1+m_2)\big(\cos(n\omega_0 d_1) + j\,\text{sen}(n\omega_0 d_1) + \cos(n\omega_0 d_1) - j\,\text{sen}(n\omega_0 d_1)\big)$$
$$+2m_2(\cos(0) - j\,\text{sen}(0)) \Big]$$

$$C_n = \frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\left[2m_1\cos(n\omega_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(n\omega_0 d_1) + 2m_2 \right]$$

- Como es posible observar, C_n no tiene componentes imaginarias

$\therefore\ C_n = \text{Re}\{C_n\} + 0$

- Para hallar la fase:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im}\{C_n\}}{\text{Re}\{C_n\}}\right) = 0$$

- Hallar la magnitud

$$|C_n| = \left|\frac{-1}{Tn^2\omega_0^2}\right| \left| 2m_1\cos(n\omega_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(n\omega_0 d_1) + 2m_2 \right|$$

$$|C_n| = \frac{1}{Tn^2\omega_0} \left| 2m_1\cos(n\omega_0 d_2) - 2(m_1+m_2)\cos(n\omega_0 d_1) + 2m_2 \right|$$

- $C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt \rightarrow$ aprovechando la simetría se puede calcular como $2 \cdot$ Area Triangulo

$$= \frac{1}{T}\left(2\ \frac{d_2 \cdot A}{2}\right) = \frac{A \cdot d_2}{T}$$

- Calcular error relativo

$$E_{relativo} = \left(1 - \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 \frac{P_n}{P_x}\right) 100 \rightarrow \text{con } P_n = 1$$

- Para ello es necesario calcular $\overline{P_x}$

$$\overline{P_x} = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt$$

- Como no se tiene parte imaginaria

$$\overline{P_x} = \frac{1}{T}\int_T (x(t))^2 dt$$

- Como $x(t)$ es par

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} (x(t))^2 dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{d_1} (m_2 t)^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (-m_1 t + b_1)^2 dt\right.$$

$$= \frac{2}{T}\left[m_2^2 \int_0^{d_1} t^2 dt + \int_{d_1}^{d_2} (m_1^2 t^2 - 2m_1 t b_1 + b_1^2) dt\right.$$

$$= \frac{2}{T}\left[m_2^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{d_1} + m_1^2 \left[\frac{t^3}{3}\right]_{d_1}^{d_2} - 2m_1 b_1 \left[\frac{t^2}{2}\right]_{d_1}^{d_2} + b_1^2 \left[t\right]_{d_1}^{d_2}\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{m_2^2 d_1^3}{3} + m_1^2\left(\frac{d_2^3 - d_1^3}{3}\right) - 2m_1 b_1\left(\frac{d_2^2 - d_1^2}{2}\right) + b_1^2 (d_2 - d_1)\right]$$

Reemplazando los valores de pendientes y cortes con el eje y

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_1^2}{3} + \frac{A^2}{(d_2-d_1)^2}\left(\frac{d_2^3}{3} - \frac{d_1^3}{3}\right) - \frac{A^2 d_2 (d_2^2 - d_1^2)}{(d_2-d_1)^2} + \frac{A^2 d_2^2}{d_2 - d_1}(d_2 - d_1)\right]$$

$$\overline{P_x} = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_1}{3} + \frac{A^2 (d_2 - d_1)}{3}\right] = \frac{2}{T}\left[\frac{A^2 d_2}{3}\right]$$

$$\overline{P_x} = \frac{2A^2 d_2}{3T}$$

- $\therefore$

$$E_{relativo} = \left(1 - \frac{\sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2}{\frac{2A^2 d_2}{3}}\right) 100$$

Para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$:

$$E_{relativo} = \left(1 - \frac{3\sum_{n=-5}^{5} |C_n|^2}{2A^2 d_2}\right) 100$$