Linealización de sistema mecánico

Un sistema mecánico se puede presentar como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}] & [\boldsymbol{0}] \\ [\boldsymbol{0}] & [\boldsymbol{\mathcal{I}}] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}]' & [\boldsymbol{0}] \\ [\boldsymbol{0}] & [\boldsymbol{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau_{in}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_{uv}} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\tau_{in}})} . \quad (1)$$

Debido a que se va a realizar una aproximación a través de una serie de Taylor multivariable, matemáticamente no se diferencia entre las variables de estado $\boldsymbol{x}$ y las entradas $\boldsymbol{\tau_{in}}$ del sistema. Por lo tanto, se va a denominar $\boldsymbol{q}$ a todo el conjunto de variables.

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau_{in}}) = (\boldsymbol{q}) \quad (2)$$

Las ecuaciones diferenciales algebráicas (DAEs) son más complejas de manejar que las ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs), por lo tanto, a través de la matriz inversa $[\boldsymbol{T}]^{-1}$ se convierte el sistema original en un sistema de ODEs.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [\boldsymbol{T}]^{-1}\, \boldsymbol{s}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau_{in}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \quad (3)$$

Este sistema de ODEs es un campo vectorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ que representa la dinámica del sistema.

El teorema de Taylor multivariable en un punto es

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{|\alpha|\le k} \frac{D^\alpha f(\boldsymbol{a})}{\alpha!}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^\alpha, \\ \text{y} \quad & \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} h_\alpha(\boldsymbol{x}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Si se aplica el teorema de Taylor al campo vectorial $\boldsymbol{f}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q_0}) + \left.\frac{D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{1!}\right|_{\boldsymbol{q_0}} (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_0}) + \underbrace{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})}_{\text{Ordenes superiores}} \quad (5)$$

y se despecian las componentes de ordenes superiores, se puede obtener una aproximación lineal de la dinámica del sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q_0}) + \left.\frac{D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{1!}\right|_{\boldsymbol{q_0}} (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q_0}), \quad (6)$$

donde $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ es la matriz jacobiana de $\boldsymbol{f}$.

Siendo n el número de variables de estado $\boldsymbol{x}$ y m el número de variables de entrada $\boldsymbol{\tau_{in}}$, $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ se puede calcular como:

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_{(n+m)}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_{(n+m)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial q_{(n+m)}} \end{bmatrix}_{n\times(n+m)} . \tag{7}$$

O de forma más compacta:

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_{(n+m)}} \end{bmatrix}_{n\times(n+m)} . \tag{8}$$

Cada una de las columnas de la matriz jacobiana puede ser calculada como

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_j} = \frac{\partial \left([\boldsymbol{T}]^{-1} \boldsymbol{s} \right)}{\partial q_j} = \frac{\partial \left([\boldsymbol{T}]^{-1} \right)}{\partial q_j} \boldsymbol{s} + [\boldsymbol{T}]^{-1} \frac{\partial (\boldsymbol{s})}{\partial q_j} \tag{9}$$

La complejidad del cálculo de estas columnas $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_j}$ de la matriz jacobiana $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ radica en el hecho de que la matriz inversa $[\boldsymbol{T}]^{-1}$, en un principio, se debe calcular de forma simbólica, posteriormente realizar la diferenciación respecto a cada variable y finalmente sustituir las variables en el punto de operación. El cálculo de inversas simbólicas requiere un coste computacional muy elevado además de que, en algunos casos (como es en el de la torre grúa con 6 grados de libertad) estas inversas simbólicas son inmanejables.

Este inconveniente se ha solventado introduciendo la propiedad de la diferenciación de las matrices inversas

$$(K^{-1})' = -K^{-1}K'K^{-1}. \tag{10}$$

A través de esta relación, cada una de las columnas de la matriz jacobiana puede ser calculada como

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial q_j} = \left(-[\boldsymbol{T}]^{-1} \frac{\partial ([\boldsymbol{T}])}{\partial q_j} [\boldsymbol{T}]^{-1} \right) \boldsymbol{s} + [\boldsymbol{T}]^{-1} \frac{\partial (\boldsymbol{s})}{\partial q_j}. \tag{11}$$

La matriz $\frac{\partial ([\boldsymbol{T}])}{\partial q_j}$ y el vector $\frac{\partial (\boldsymbol{s})}{\partial q_j}$ se pueden calcular simplemente por diferenciación simbólica.

Esta expresión tiene la ventaja de que se puede realizar la matriz inversa de forma numérica. Si se tiene la matriz $[\boldsymbol{T}]$ simbólica y se calcula en el punto de operación $\boldsymbol{x_0}$ ($[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_0})]$), al ser esta matriz numérica, el cálculo de la inversa $[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x_0})]^{-1}$ se vuelve mucho más sencillo.

Búsqueda de puntos de operación

Un sistema mecánico se puede presentar como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\mathcal{I}}] \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}]' & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau_{in}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_{uv}} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau_{in}})} . \quad (12)$$

La busqueda de puntos de operación se reduce a encontrar configuraciones del sistema dinámico en los que este se encuentra en equilibrio. Para ello la evolución del sistema debe ser nula y por lo tanto $[\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{u}}]^T = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$. Sustituyendo esto en las ecuaciones del sistema (resulta también en $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$) se deben buscar configuraciones que cumplan

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau_{in}} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Estos puntos de operación se pueden calcular de forma analítica.