

## Aprendizado de Máquina e Reconhecimento de Padrões (UTFPR/CPGEI) - Lista de Exercícios 2

**Tópicos:** Modelos Estatísticos e Classificadores baseados em Teoria de Decisão Bayesiana

- 1) Gere dois conjuntos de dados,  $\mathbf{X}$  (treinamento) e  $\mathbf{X}_1$  (teste), com  $N=1000$  exemplos constituídos por vetores tridimensionais que pertencem a três classes equiprováveis  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , and  $\omega_3$ . Os parâmetros das classes são:

$$\begin{aligned} m_1 &= [0, 0, 0]^T \\ m_2 &= [1, 2, 2]^T \\ m_3 &= [3, 3, 4]^T \end{aligned} \quad S_1 = S_2 = S_3 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} = \sigma^2 I$$

- Utilizando  $\mathbf{X}$ , calcule o estimador ML da média e das matrizes de covariância para as três classes. Como assume-se que as três matrizes de covariância devem ser as mesmas, calcule para as três classes e realize uma média entre as três como a estimativa final.
  - Utilize o classificador com base em distância Euclideana para classificar os padrões de  $\mathbf{X}_1$ , utilizando os valores computados (MLE) no item anterior.
  - Utilize o classificador com base em distância de Mahalanobis para classificar os padrões de  $\mathbf{X}_1$ , utilizando os valores computados (MLE) no item anterior.
  - Utilize o classificador de Bayes para classificar os padrões de  $\mathbf{X}_1$ , utilizando os valores computados (MLE) no item anterior.
  - Para cada caso, calcule o erro de classificação e compare os resultados? Por que os desempenhos são próximos?
- 2) Gere um conjunto  $\mathbf{X}$  com  $N=1000$ , seguindo:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{j=1}^3 P_j p(x|j) & m_1 &= [1, 1]^T \\ & & m_2 &= [3, 3]^T \\ S_1 &= 0.1I, S_2 = 0.2I, S_3 = 0.3I & m_3 &= [2, 6]^T \\ P_1 &= 0.4, P_2 = 0.4, \text{ and } P_3 = 0.2. \end{aligned}$$

- a) Aplique o algoritmo EM para definir os parâmetros do conjunto de dados acima, assumindo que esses parâmetros são previamente desconhecidos. Utilize:

$$J = 3, m_{1,ini} = [0, 2]^T, m_{2,ini} = [5, 2]^T, m_{3,ini} = [5, 5]^T$$

$$S_{1,ini} = 0.15I, S_{2,ini} = 0.27I, S_{3,ini} = 0.4I \text{ and } P_{1,ini} = P_{2,ini} = P_{3,ini} = 1/3$$

- b) Altere os parâmetros iniciais e verifique o impacto no resultado final. Compare também, os valores obtidos com os valores verdadeiros das pdfs.

- 3) Gere um conjunto de dados  $\mathbf{x}$  em uma dimensão tal que  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , seguindo a seguinte pdf:

$$p(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.2$$

- a) Utilize o método Janela de Parzen, com  $h = 0.05$ ;  $N = 500$  e  $h = 0.2$ ;  $N = 5000$  para estimar a pdf. Qual a relação entre  $h$  e  $N$ ? Qual a relação entre  $h$  e  $\sigma$ ?
- b) Considere o mesmo conjunto de dados com  $N=1000$ . Utilize o modelo k-vizinhos-mais-próximos com  $k = 21$  e estime a pdf. Qual o impacto da variação de  $k$ ? Justifique.