ДЗ 4. БЧХ код. Камаев Виктор БИБ214

Tuesday, May 30, 2023 3:14 PM

БЧХ-код: $\boxed{n=12,\ \delta=5}$

$\delta = 2t+1 \Rightarrow \boxed{t=2}$ – код исправляет 2 ошибки

Для БЧХ кодов $n+1=q^m$, где код строится над полем $GF(q^m)$

$\Rightarrow q^m = 13 \Rightarrow \boxed{q=13,\ m=1}$

① Найдем α

Для примитивного элемента поля справедливо, что все его степени $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ – элементы поля, причем уникальные. Найти можно перебором. Пусть $\alpha=2$

$\alpha^1=2$	$\alpha^5=6$	$\alpha^9=18=5$
$\alpha^2=4$	$\alpha^6=12$	$\alpha^{10}=10$
$\alpha^3=8$	$\alpha^7=24=11$	$\alpha^{11}=20=7$
$\alpha^4=16=3$	$\alpha^8=22=9$	$\alpha^{12}=14=1$

Видим, что все степени α уникальны $\Rightarrow$ $\alpha=2$ является примитивным элем. поля $GF(13)$

②

$\alpha=2$	$\alpha^5=6$	$\alpha^9=5$
$\alpha^2=4$	$\alpha^6=12$	$\alpha^{10}=10$
$\alpha^3=8$	$\alpha^7=11$	$\alpha^{11}=7$
$\alpha^4=3$	$\alpha^8=9$	$\alpha^{12}=1$

③ Циклотомические классы

$K_i = \{\alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots, \alpha^{q^{m-1}}\}$

Заметим, что т.к. $m=1$, то $q^{m-1}=q^0=1$, то есть каждый класс будет состоять только из 1 элемента – α^i.

Всего таких классов $\delta-1=4$.

Также для каждого класса min многочлен будет выражаться как

$m_i = \prod_{\alpha^j \in K_i} (x-\alpha^j) = x-\alpha^i$

Теперь найдем все K_i и $m_i(x)$

$K_1 = \{\alpha\}$; $m_1 = x-\alpha$

$K_2 = \{\alpha^2\}$; $m_2 = x-\alpha^2$

$K_3 = \{\alpha^3\}$; $m_3 = x-\alpha^3$

$K_4 = \{\alpha^4\}$; $m_4 = x-\alpha^4$

$K_0 = \{1\}$; $m_0 = x-1$

④ Порождающий многочлен $g(x)$

$g(x) = \text{НОК}(m_1(x), m_2(x), \dots, m_{\delta-1}(x))$

Т.к. все наши $m(x)$ состоят из 1 множителя, а также $m_i(x) \ne m_j(x)\ \forall i \ne j$, то:

$g(x) = m_1(x)\cdot m_2(x)\cdot m_3(x)\cdot m_4(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)(x-\alpha^4) =$

$= (x^2+\alpha^3 - x\underbrace{(\alpha+\alpha^2)}_{6=\alpha^5})(x^2+\alpha^7 - x\underbrace{(\alpha^3+\alpha^4)}_{11=\alpha^7}) = (x^2+\alpha^3-\alpha^5x)(x^2+\alpha^7-\alpha^7x) =$

$= (x^4+\alpha^7x^2-\alpha^7x^3) + (x^2\alpha^3+\alpha^{10}-\alpha^{10}x) - (\alpha^5x^3+\alpha^{12}x-\alpha^{12}x^2)$

$= x^4+\alpha^{10} - x^3\underbrace{(\alpha^7+\alpha^5)}_{17=4=\alpha^2} + x^2\underbrace{(\alpha^7+\alpha^3+\alpha^{12})}_{20=7=\alpha^{11}} - x\underbrace{(\alpha^{10}+\alpha^{12})}_{11=\alpha^7} =$

$= x^4 - \alpha^2x^3 + \alpha^{11}x^2 - \alpha^7x + \alpha^{10}$

В нашем поле $-x = (13-1)x = 12x = \alpha^6x$

$g(x) = x^4+\alpha^2\cdot\alpha^6x^3+\alpha^{11}x^2+\alpha^7\cdot\alpha^6x+\alpha^{10} = x^4+\alpha^8x^3+\alpha^{11}x^2+\alpha x+\alpha^{10}$

$$\boxed{g(x) = x^4+\alpha^8x^3+\alpha^{11}x^2+\alpha x+\alpha^{10} = (\alpha^{10}\ \alpha\ \alpha^{11}\ \alpha^8\ 1)}$$

5 Кодирование

$\deg g(x) = 4 \Rightarrow$ имеем 4 проверочных символа

Тогда информационных символов $k = n - 4 = 8 = \deg \bar{u}(x)$, где

$\bar{u}(x)$ – кодируемое сообщение

Пусть $\bar{u}(x) = (1\ \alpha\ 0\ \alpha^4\ 0\ \alpha^6\ \alpha^3\ 1) = 1 + \alpha x + \alpha^4 x^3 + \alpha^6 x^5 + \alpha^3 x^6 + x^7$

$$\bar{v}(x) = g(x) \cdot \bar{u}(x) = (\alpha^{10} + \alpha x + \alpha^{11} x^2 + \alpha^8 x^3 + x^4)(1 + \alpha x + \alpha^4 x^3 + \alpha^6 x^5 + \alpha^3 x^6 + x^7) =$$

$$= \alpha^{10} + \alpha^{11} x + \alpha^2 x^3 + \alpha^4 x^5 + \alpha x^6 + \alpha^{10} x^7 +$$
$$+ \alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^5 x^4 + \alpha^7 x^6 + \alpha^4 x^7 + \alpha x^8 +$$
$$+ \alpha^{11} x^2 + x^3 + \alpha^3 x^5 + \alpha^5 x^7 + \alpha^2 x^8 + \alpha^{11} x^9 +$$
$$+ \alpha^8 x^3 + \alpha^9 x^4 + x^6 + \alpha^2 x^8 + \alpha^{11} x^9 + \alpha^8 x^{10} +$$
$$+ x^4 + \alpha x^5 + \alpha^4 x^7 + \alpha^6 x^9 + \alpha^3 x^{10} + x^{11} =$$
$$= \alpha^{10} + \alpha^8 x + \alpha^7 x^2 + x^3 + \alpha^6 x^4 + 0 \cdot x^5 + x^6 +$$
$$+ \alpha^8 x^7 + \alpha^{10} x^8 + 0 \cdot x^9 + \alpha^2 x^{10} + x^{11} =$$
$$= \boxed{(\alpha^{10}\ \alpha^8\ \alpha^7\ 1\ \alpha^6\ 0\ 1\ \alpha^8\ \alpha^{10}\ 0\ \alpha^2\ 1) = \bar{v}(x)}$$

$\alpha^{11} + \alpha = 9 = \alpha^8$

$\alpha^{11} + \alpha^2 = 11 = \alpha^7$

$\alpha^2 + 1 + \alpha^8 = 1$

$\alpha^5 + \alpha^9 + 1 = 12 = \alpha^6$

$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha = 0$

$\alpha + \alpha^7 + 1 = 1$

$\alpha^{10} + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^4 = 9 = \alpha^8$

$\alpha + \alpha^2 + \alpha^2 = 10 = \alpha^{10}$

$\alpha^{11} + \alpha^{11} + \alpha^6 = 0$

$\alpha^8 + \alpha^3 = 4 = \alpha^2$