PUC

VALÉRIA CORRÊA VAZ DE PAIVA

TRANSFORMAÇÕES DE HURWITZ-RADON

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rio de Janeiro, 24 de abril de 1984

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rua Marquês de São Vicente, 225 - CEP 22453
Rio de Janeiro — Brasil

VALÉRIA CORRÊA VAZ DE PAIVA

TRANSFORMAÇÕES DE HURWITZ-RADON

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da PUC/RJ como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador : Alwyn Duane Randall

Departamento de Matemática

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, abril de 1984

A meus pais

Meus agradecimentos

- a Alwyn Duane Randall, orientador da dissertação, pelo apoio e confiança depositada.
- ao Departamento de Matemática PUC/RJ, por ter facilitado a execução deste trabalho.
- ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (CNPq), pela ajuda financeira durante o curso.

RESUMO

Começamos resolvendo o problema de determinar todas as dimensões possíveis para Álgebras Normadas sobre os reais. Depois consideramos transformações normadas mais gerais $\phi : R^p \times R^m \to R^m$ e estabelecemos que dado m o valor máximo de p é dado pela função de Hurwitz-Radon. Então consideramos o problema mais geral de ϕ transformações normadas $\phi : F^p \times F^m \to F^m$ onde F é um corpo qualquer de característica diferente de 2 e construímos algumas transformações normadas $F^p \times F^m \to F^m$ utilizando o processo de Cayley-Dickson para construir as Álgebras generalizadas dos reais, complexos, quaternions e números de Cayley.

Finalmente, ligando a álgebra à topologia, aplicamos os resultados acima à construção de campos vetoriais sobre esferas e a imersões do plano projetivo.

ABSTRACT

We begin solving the problem of determing all the possible dimensions for normed Algebras. After that we consider more general normed transformations $\phi : R^p \times R^m \to R^m$ $(p \neq m)$ and we establish that, given m, the maximum value of p is obtained by the Hurwitz-Radon function $\rho(m)$. Then we work with normed transformations over any field F with characteristic different of 2. We build up some of these transformations using the Cayley-Dickson process and we create the general real, complex, quaternions and Cayley numbers algebras

Finally we apply the algebraic results above to topology building vector fields over spheres and emerging projective spaces.

ÍNDICE

pág.

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem dois objetivos principais: (1) Discutir o problema algébrico de saber sob que condições existem determinadas transformações normadas (2) aplicar a existência, (e construção!) destas transformações normadas à topologia, especificamente à teoria de fibrados. Em particular desejamos determinar certas equivalências relativas ao fibrado de Hopf.

Tratamos do primeiro objetivo nos 4 primeiros capítulos os mais algébricos. No 1º capítulo demonstramos que as únicas dimensões possíveis para álgebras normadas sobre os reais são 1, 2, 4 e 8, que correspondem respectivamente aos números reais, complexos quartenions e de Cayley.

No 2º capítulo introduzimos o conceito de transformação de Hunwitz-Radon - seguindo a linha de Adem - e construímos explicitamente algumas destas transformações.

No 3º capítulo, generalizamos um pouco e trocando R por um corpo F qualquer demonstramos que $\rho(m)$ é o valor máximo para p em $\phi : F^p \times F^m \to F^m$ ϕ de H.R.

No 4º capítulo discutimos um pouco sobre álgebras não-associativas e construímos transformações normadas sobre um corpo F qualquer.

A partir do 5º capítulo, utilizamos as transformações normadas em topologia. No 5º capítulo falamos de fibrados genéricos (bundles simplesmente) no capítulo 6 em fibrados vetoriais (R-dimensional - fiber bundles) e em feixes fibrados ou fibrados vetoriais, sem utilizar teoria de Homotopia. No 7º capítulo assumindo alguns resultados de homologia demonstramos uma série de equivalências que relacionam o fibrado de Hopf com a existência de certas transformações normadas.

Terminando, gostaria de fazer 2 observações:

(1) O trabalho ficou talvez volumoso demais devido a minha intenção de fazê-lo acessível a qualquer aluno de gradução. Isto é, tudo está explicado com detalhes, por vezes excessivos, até o capítulo 5.

(2) Este trabalho é, em sua maior parte baseado em José Adem - Álgebra Linear, Campos Vectoriales e Immersionnes e em menor medida em D. Huskemoller - Fibre Bundles. Não seria justo justo simplesmente citá-los na bibliografia.

1. ÁLGEBRAS NORMADAS

Neste capítulo estabelecemos algumas definições básicas e o 1º resultado de Hurwitz, i.e. que 1, 2, 4 e 8 são as únicas dimensões possíveis para uma álgebra normada sobre os reais.

DEF0: A é um espaço vetorial sobre o corpo F se satisfaz

(1) A é um grupo abeliano com operação + isto é, satisfaz:

$x+y = y+x$ (comutatividade)

$(x+y)+z = x+(y+z)$ (associatividade)

$\exists 0 \in A$ tq $x+0 = x \ \forall x \in A$ (elem. neutro)

dado $x \in A$, $\exists (-x) \in A$ tq $x+(-x) = 0$ (simétrico)

(2) Para $\lambda \in F$, $x \in A$ definimos λx e $x\lambda \in A$

$\lambda x = x\lambda$ isto é A é um F-módulo à esquerda e à direita.

se $0 \in F$, $0 \in A$ então $0 . x = 0 . \lambda = 0 \in A$

se $1 \in F$, $1 . x = x \ \forall x \in A$

se $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, $x, y \in A$ temos $(\lambda_1+\lambda_2)x = \lambda_1 x+\lambda_2 x$

$$\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$$

$$(\lambda_1\lambda_2)x = \lambda_1(\lambda_2 x)$$

DEF 1: Uma <u>álgebra</u> A sobre o corpo F é um espaço vetorial de dimensão finita onde se tem um produto:

$\phi : A\times A \to A$ tal que $\phi(x,y) = x \cdot y$ satisfaz

1: $x(\lambda y) = (\lambda x)y = \lambda(xy)$

2: $x(y+z) = xy + xz$

3: $(y+z)x = yx + zx$ para todo $\lambda \in F$, $x, y, z \in A$

i.e ϕ é função bilinear

DEF.2: A é uma <u>álgebra associativa</u> se $(x.y).z = x.(y.z) \forall x, y, z \in A$

DEF.3: A é uma <u>álgebra comutativa</u> se $x.y = y.x \forall x, y \in A$

DEF.4: A é uma <u>álgebra com divisão</u> se dados $a, b \in A$, as equações $ax=b$ e $xa=b$ têm sempre solução para $a\neq 0$.

OBS.: Seja $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_M$ uma base para a álgebra A sobre F (faz sentido, pois A é um espaço vetorial).
Então todo elemento $x \in A$ pode ser escrito de maneira única como

$$x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_M\varepsilon_M = \sum_i x_i\varepsilon_i \qquad x_i \in F$$

DEF.5: Dada uma base ε_i para a álgebra A, definimos a <u>norma de $x \in A$</u>, com relação à base ε_i, como $n(x) = x_1^2 + \ldots + x_M^2$ onde $x = x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_M\varepsilon_M$.

DEF.6: A álgebra A é uma <u>álgebra normada</u> se para alguma base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_M$ ela satisfaz a condição:

$$n(xy) = n(x).n(y) \quad \forall\, x, y, \varepsilon A$$

TEO. 1: Toda álgebra normada sobre o corpo dos reais é uma álgebra com divisão.

DEM.: (i) Como F = R temos que $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_M^2 = 0 \Longleftrightarrow$
$x_1 = x_2 = \ldots = x_M = 0$

Logo $n(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(ii) Agora, se supomos $xy=0$ temos que $n(xy) = n(x)n(y)$ $n(xy) = n(x)n(y) = 0$ o que implica $n(x)=0$ ou $n(y) = 0$ e logo $x = 0$ ou $y = 0$, isto é:

$$xy=0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0$$

(iii) Consideraremos as transformações lineares:

La, Ra : $A \to A$ definidas por:

$$\begin{array}{ll} La: A \to A & Ra: A \to A \quad \forall\, x \text{ onde } a \neq 0 \\ x \to ax & x \to xa \end{array}$$

La e Ra são transformações lineares.

(pois $La(x+y) = a(x+y) = ax+ay = La(x) + La(y)$ Ra aná logo).

Como:

se La $x = 0 \Longleftrightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Ra $x = 0 \Longleftrightarrow xa = 0 \Rightarrow x = 0$

Logo La e Ra são transformações lineares que podem ser invertidas, e portanto as equações $xa = b$ e $ax = b$ sempre possuem soluções.

PROBLEMA: Determinar todas as álgebras normadas sobre o corpo dos reais.

SOLUÇÃO: Hurwitz (1898) 1, 2, 4, 8 são as únicas dimensões possíveis para uma álgebra normada sobre R .
Vamos ver esse resultado construtivamente.

OBS. 1: Fixada a base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_M$ em relação a qual A é uma álgebra normada, podemos identificar A com o produto cartesiano $F^M = \underbrace{FxFx\ldots xF}_{M}$, de maneira que

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$
$$\varepsilon_2 = (0,1,0,\ldots,0)$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_M = (0,0,0,\ldots,1)$$

Se $x, y \in A$, temos que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_M) = \sum_i x_i \varepsilon_i$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_M) = \sum_j y_j \varepsilon_j$$

Se $x.y = z$, z pode ser escrito na base $\{\varepsilon_i\}$ como:

$$z = \sum_k z_k \varepsilon_k$$

Por outro lado, $x.y$ é um produto bilinear. Logo,

$$x.y = (\sum_i x_i \varepsilon_i)(\sum_j y_j \varepsilon_j) = \sum_{i,j} x_i y_j (\varepsilon_i . \varepsilon_j).$$

Mas $\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_k c_{ijk} \varepsilon_k$.

Logo, $x.y = \sum_{i,j,k}^{m} c_i y_j x_{ijk} \varepsilon_k = \sum_k z_k \varepsilon_k$

onde os coeficientes c_{ijk} são elementos de F independentes de x e y, isto é, são dependentes somente de ε_i, ε_j. ▨

OBS. 2: Agora, suponha que temos uma transformação bilinear:

$\Psi = F^p \times F^q \to F^m$, tal que para $x \in F^p$, $y \in F^q$ o produto $\Psi(x,y) = x.y = z$ satisfaz a identidade

$$(x_1^2+x_2^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2+y_2^2 + \ldots + y_q^2) =$$

$$= (z_1^2+z_2^2 + \ldots + z_m^2).$$

Usando o mesmo raciocínio:

$$x = \sum_1^p x_i \varepsilon_i \qquad y = \sum_1^q y_j \varepsilon_j \qquad z = \sum_1^m z_k \varepsilon_k$$

$$z = x.y = \sum_{i,j}^{p,q} x_i y_j \ \varepsilon_i . \varepsilon_j \ .$$

Como $\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{1}^{m} c_{ijk}\varepsilon_k$,

$$z = \sum_{i,j,k}^{p,q,m} x_i y_j c_{ijk}\varepsilon_k \quad e \quad z_k = \sum_{i,j}^{p,q} x_i y_j c_{ijk}$$

Ou seja, agrupando termos temos

$$z_k = a_{k_1} y_1 + a_{k_2} y_2 + \ldots + a_{k_q} y_q \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$z_k = \sum_j a_{k_j} y_j \quad \blacksquare \tag{1}$$

DEF.: Uma transformação bilinear $\Psi = F^p \times F^q \to F^m$

$$(x,y) \mapsto x.y = z$$

tal que $\Psi(x,y) = x.y = z$ satisfaz:

$$(x_1^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + \ldots + y_q^2) = (z_1^2 + \ldots z_m^2) \quad (2),$$

é dita uma transformação normada.

DEF.7: Dados dois vetores u, $v \in F^s$, seu produto escalar $u.v \in F$ se define utilizando o produto de matrizes , isto é, $u.v = uv^t$. Logo, $u.u = n(u)$.

OBS. 3: Consideremos as matrizes abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mq} \end{bmatrix} \qquad (a_{kj} \text{ como em } (1))$$

$$y^t = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

Então,

$$My^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1q}y_q \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mq}y_q \end{bmatrix}$$

isto é, $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1q}y_q = \sum_j a_{1j}y_j = z_1$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mq}y_q = \sum_j a_{mj}y_j = z_m$$

ou, equivalentemente: $z^t = My^t$ ou $z = yM^t$ (3)

OBS. 4: Seja agora $\Psi(x, \varepsilon_i + \varepsilon_j) = x.(\varepsilon_i + \varepsilon_j)$, onde ε_i, ε_j com $i \neq j$ são dois elementos da base canônica de F^q.

Como $n(\varepsilon_i+\varepsilon_j) = n(0,\ldots,1,\ldots,1,0) = 2$, temos que $n(x(\varepsilon_i+\varepsilon_j)) = n(x).n(\varepsilon_i+\varepsilon_j) = 2n(x)$.

Por outro lado, utilizando o produto escalar em F^m, calculamos a norma de $x(\varepsilon_i+\varepsilon_j)$, obtendo:

$$n(x(\varepsilon_i+\varepsilon_j)) = [x(\varepsilon_i+\varepsilon_j)][x(\varepsilon_i+\varepsilon_j)] = [x\varepsilon_i+x\varepsilon_j][x\varepsilon_i+x\varepsilon_j]$$

$$= x.x.\varepsilon_i.\varepsilon_i + x\varepsilon_i.\ x\varepsilon_j + x\varepsilon_j\ .\ x\varepsilon_i + x\varepsilon_j\ .\ x\varepsilon_j =$$

$$= n(x) + 2(x\varepsilon_i)(x\varepsilon_j) + n(x) =$$

$$= 2n(x) + 2(x\varepsilon_i)(x\varepsilon_j) = 2n(x).$$

Logo, $2(x\varepsilon_i)(x\varepsilon_j) = 0 \Longrightarrow (x\varepsilon_i)(x\varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$ ▨ (4)

OBS. 5: Podemos calcular também $x\varepsilon_i = \varepsilon_i M^t$,

onde $\varepsilon_i = (0,0,\ldots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-ésima posição}}}{1},0,\ldots,0)$

$$\varepsilon_i.M^t = (0,\ldots,1,\ldots,0)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix} = (a_{1i}, a_{2i},\ldots,a_{mi})$$

Como $(x\varepsilon_i)(x\varepsilon_i) = n(x\varepsilon_i) = n(x).n(\varepsilon_i) = n(x).1$ (5)

e $x\varepsilon_i = (a_{1i}, a_{2i},\ldots, a_{mi})$, então:

$$(x\varepsilon_i).(x\varepsilon_j) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})(a_{ij}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) =$$

$$= a_{1i}.a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \dots + a_{mi}am_j \qquad (6)$$

$$\begin{cases} n(x), \text{ se } i=j \text{ por } (5) \\ 0 \ , \text{ se } i\neq j \text{ por } (4) \end{cases}$$

Disto se obtém que $MM^t = n(x)I_{q\times q}$. (7)

(7) e (6) são equivalentes, claramente.

PROPOSIÇÃO 1: A relação $MM^t = n(x)I_{q\times q}$ expressa a condição necessária e suficiente para que a matriz M determine uma transformação normada $\Psi: F^p\times F^q \to F^m$.

DEM.: Com efeito, dada $\Psi(x,y)=z$ construímos M da maneira já vista. Ou seja, existe uma base ε_i para a álgebra,

logo, $x = \sum_1^p x_i\varepsilon_i \quad y = \sum_1^q y_j\varepsilon_j \quad z = \sum_1^m z_k\varepsilon_k$

$$x.y = z = \sum_{i,j} x_iy_j\varepsilon_i\varepsilon_j = \sum_{i,j,k} x_iy_jc_{ijk}\varepsilon_k = \sum_k z_k\varepsilon_k$$

Logo: $z_k = \sum_{i,j} x_iy_jc_{ijk} = \sum_j a_{kj}y_1 \Rightarrow a_{k_j} = \sum_i c_{ijk}x_i$,
isto é:

$$M_{mxq} = [a_{k_j}], \quad \begin{matrix} 1\leq k\leq m \\ 1\leq j\leq q \end{matrix} \quad \text{e } M \text{ satisfaz } MM^t = n(x)I_q$$

por OBS. 4 e 5.

Por outro lado, dada M, se definimos $\Psi(x,y) = yM^t$, temos $n(z) = z.z^t = (yM^t)(My^t)$.

Como $M^tM = MM^t = n(x)I_q$,

$$z.z^t = (yM^t)(My^t) = y(M^tM)y^t = y.n(x)Iy^t = n(x)y.y^t =$$

$$= n(x)n(y) \quad ▨$$

Vamos particularizar um pouco: 1. Suponhamos que q=m de modo que se tem uma transformação normada

$$\sum : F^p \times F^m \longmapsto F^m .$$

Esta determina uma matriz M que, com as convenções anteriores, satisfaz

$$MM^t = n(x)I_m \qquad (8)$$

2. Cada elemento em M é uma função linear em $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pois como já visto na proposição anterior, cada a_{kj} é tal que: $a_{kj} = \sum_{i=1}^{p} c_{ijk}x_i$.

Como a soma de várias matrizes é uma matriz cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes das matrizes que se somam, M pode ser escrita como:

$M = x_1M_1 + x_2M_2 + \ldots + x_pM_p$ onde $M_1, \ldots, M_p$ são matrizes constantes m×m.

3. Já sabemos: $M^tM = n(x)I_m = (x_1^2+x_2^2 + \dots + x_p^2)I_m$, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & & & \\ a_{1q} & a_{2q} & \dots & a_{mq} \end{bmatrix} =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & & -1 \end{bmatrix}$$

ou $M^tM = (x_1^2 + \dots + x_p^2)I_m \Rightarrow (x_1M^t + \dots + x_pM_p^t)(x_1M_1 + \dots +$ $+ x_pM_p) = (x_1^2 + \dots + x_p^2)I_m$.

Se tomarmos o caso particular:

$x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = 0$, temos $x_p^2M_p^tM_p = x_p^2I_m$, ou seja :

em M^tM, o coeficiente de x_p^2 é $M_p^tM_p$.

Logo, $M_p^tM_p = M_pM_p^t = I_m$ e podemos definir

$$B_i = M_p^tM_i \quad \text{para } i = 1, \dots, p^{-1} \text{ e } M_i = M_pB_i.$$

4. Substituindo isto obtemos:

$$M^tM = (x_1M_1^t + \dots + x_pM_p^t).(x_1M_1 + x_2M_2 + \dots + x_pM_p) =$$

$$= (x_1B_1^tM_p^t + \dots + x_pM_p^t).(x_1M_pB_1 + x_2M_pB_2 + \dots + x_pM_p) \overset{\text{por (8)}}{=}$$

$$= (x_1^2 + \dots + x_p^2)\ I_m$$

$$\therefore\ (x_1B_1^t + \dots + x_pI)M_p^tM_p(x_1B_1 + \dots + x_pI) =$$

$$= (x_1^2 + \dots + x_p^2)I_m.$$

Calculando os coeficientes:

$$(x_1B_1^t + x_2B_2^t + \dots + x_{p-1}B_{p-1}^t + x_pI)(x_1B_1 + x_2B_2 + \dots +$$

$$+ x_{p-1}B_{p-1} + x_pI) = x_1^2B_1^tB_1 + x_1x_2B_1^tB_2 + \dots +$$

$$+ x_1x_pB_1^tB_{p-1} + x_1x_pB_1^t + x_2x_1B_2^tB_1 + x_2^2B_2^tB_2 + \dots +$$

$$+ x_2x_{p-1}B_2^tB_{p-1} + x_2x_pB_2^t + \dots + x_{p-1}x_1B_{p-1}^tB_1 +$$

$$+ x_{p-1}x_2B_{p-1}^tB_2 + \dots + x_{p-1}^2B_{p-1}^tB_{p-1} + x_{p-1}x_pB_{p-1}^t +$$

$$+ x_1x_pB_1 + x_2x_pB_2 + \dots + x_{p-1}x_pB_{p-1} + x_p^2I =$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} x_i^2B_i^tB_i + \sum_{i\neq j} x_ix_j(B_i^tB_j + B_j^tB_i) + \sum_{i=1}^{p-1} x_ix_p(B_i^t + B_i) +$$

$$+ x_p^2I = (x_1^2+x_2^2 + \dots + x_p^2)I \quad \text{por } (8).$$

Logo, igualando coeficientes, temos:

1 $B_i^tB_i = I$

2 $B_i^t + B_i = 0$

3 $B_i^tB_j + B_j^tB_i = 0$

Segue-se que: $2 \quad B_i^t = -B_i \overset{\text{por } 1}{\Longrightarrow} (-B_i)(B_i) = I$

$\therefore B_i^2 = -I \overset{\text{por } 2}{\Longrightarrow} - B_iB_j - B_jB_i = 0$

$$B_iB_j + B_jB_i = 0$$

$$i \neq j \quad i, j = 1, \ldots, p-1$$

OBS.1: Se B_i é anti-simétrica e se m for ímpar, então $\det B_i = 0$, pois sabemos

$\det A^t = \det A$. Se A é anti-simétrica, $A^t = -A$ e $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^m \det A$.

Se m é ímpar, $(-1)^m = -1 \Rightarrow \det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

OBS.2: Por outro lado, $\det B_i^2 = \det -I = (-1)^m \det I = (-1)^m . 1 = \pm 1$.
Logo, $\det B_i \neq 0$. Logo, m não pode ser ímpar, se $p > 1$.

Estivemos vendo transformações normadas $\sum : F^p \times F^m \to F^m$. Vamos particularizar um pouco e fazer $F = R$, $p = m$ e m par.

Assim, temos uma PROPOSIÇÃO: uma transformação normada $\psi : R^m \times R^m \to R^m$, Determina a existência de um conjunto $\{B_i\}$, $i=1, \ldots, m-1$ de $m-1$ matrizes quadradas $m \times m$, anti-simétricas $(B_i^t = -B_i)$ cujo quadrado é $-I$ e que anticomutam entre si $(B_iB_j + B_jB_i = 0)$. Onde $m > 1$ e m é par.

Demonstraremos que m tem de ser igual a 2, 4 ou 8. Consideremos o conjunto β de 2^{m-1} matrizes:

$$\beta = \{I,\ B_{i_1},\ B_{i_1}B_{i_2},\ B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3},\ \ldots,\ B_1B_2\ \ldots\ B_{m-1}\}$$

Determinaremos quais as matrizes de β são simétricas e quais são anti-simétricas.

. Seja $D = B_{i_1}B_{i_2}\ \ldots\ B_{ir}$ uma das matrizes de β.

$$D^t = B^t_{ir}\ \ldots\ B^t_{i_2}B^t_{i_1}\ (\text{como } B^t_i = -B_i) = (-1)^r B_{i_r}\ \ldots\ B_{i_2}B_{i_1} = (-1)^s D$$

$$(-1)^r B_{i_r}\ \ldots\ B_{i_2}B_{i_1} = (-1)^s D \text{ onde } s = r+(r-1) + \ldots + 2+1\ ,$$

pois para passar B_{i_1} do último lugar da fila para o primeiro, ele terá que fazer r-1 transposições; para passar B_{i_2} para segundo lugar, ele terá que fazer r-2 transposições e assim sucessivamente.

O primeiro r é por causa das transpostas; logo,

$$.\ s = r+(r-1)+(r-2) + \ldots + 2+1 = \frac{r(r+1)}{2}\ .$$

. Vamos comparar as paridades de r e s

r	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
s	1	3	6	10	15	21	28	36
	ímpar		par		ímpar		par	

isto é: se $r = 1$ ou 2 mod. 4, então s é ímpar

se $r = 3$ ou 4 mod. 4, então s é par

RECAPITULANDO: Se temos $\Psi: R^m \times R^m \to R^m$ transformação normada, m par, Ψ determina a existência de um conjunto $\{B_i\}$ $i = 1, \ldots, m-1$ de $m-1$ matrizes:

quadradas $(m \times m)$,

anti-simétricas $B_i^t = -B_i$,

cujo quadrado é $-I$ e

que anti-comutam entre si.

Com as matrizes $\{B_i\}$ construímos o conjunto $\beta = \{I, B_i, \ldots, B_{i_1}B_{i_2}, \ldots, B_1B_2 \ldots B_{m-1}\}$. Sobre os elementos de β, sabemos:

$$D = B_{i_1}B_{i_2} \ldots B_{i_r} \begin{cases} \text{é simétrica se } r = 0 \text{ ou } 3 \text{ mod. } 4 \\ \text{é anti-simétrica se } r=1 \text{ ou } 2 \text{ mod. } 4 \end{cases} \qquad (9)$$

Consideraremos relações lineares possíveis entre as 2^{m-1} matrizes do conjunto β.

$$\beta = \{I, B_{i_1}, B_{i_1}B_{i_2}, \ldots, B_1B_2 \ldots B_{m-1}\}$$

DEF.: Uma relação linear R entre as matrizes de β é dita "irredutível" se não é possível expressá-la como $R = R_1+R_2$, onde $R_1=0$ e $R_2=0$, são relações lineares tais que nenhuma das matrizes em β aparece simultaneamente em R_1 e R_2.

Em particular:

PROPOSIÇÃO 3: Uma relação linear irredutível não contém simultaneamente matrizes simétricas e anti-simétricas.

DEM.: Se $R = \sum_i c_i A_i = 0$, e se existirem A_k simétrica e A_j anti-simétrica, dividimos R em dois grupos:

$$R = \underbrace{S}_{\text{as simétricas}} + \underbrace{A}_{\text{as anti-simétricas}} = 0$$

pois qualquer A_i pode ser decomposto em uma matriz simétrica e outra anti-simétrica.

Então, temos: $S + A = 0$

$$(s+A)^t = 0 \qquad S^t + A^t = 0 \text{ e } S+A=0$$

$$S-A=0$$

$$\therefore\ 2S = 0 \qquad S = 0 \qquad A = 0$$

Logo, R é redutível. Absurdo!

PROPOSIÇÃO 4: Se R=0 é uma relação linear irredutível entre as matrizes do conjunto β, $B_i R$ também é uma relação linear irredutível.

DEM.: Suponha que $B_i R$ não fosse irredutível $\Longrightarrow \exists\ \overline{R_1} = 0$ e $\overline{R_2} = 0$, tal que $B_i R = \overline{R_1} + \overline{R_2}$ e multiplicando por $-B_i$ teremos.

$$-B_i B_i R = -B_i \overline{R_1} + (-B_i \overline{R_2})$$

$\Rightarrow R = -B_i\overline{R_1} + (-B_i\overline{R_2})$, isto é $R = R_1+R_2$
onde $R_1 = 0$ e $R_2 = 0$; logo, R é reduvível .
Absurdo!

RETOMANDO: Seja β o conjunto das matrizes
$I, B_1, B_2, \ldots, B_m, B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_{i_1}B_{i_2}, \ldots,$
$B_1B_2 \ldots B_m$.

Já sabemos que uma relação irredutível entre as matrizes de β só contém matrizes simétricas ou anti-simétricas. Logo, uma relação linear ou é do tipo:

I. $0 = \Sigma c_i B_i + \Sigma c_{i_1 i_2} B_{i_1} B_{i_2} + \ldots + \square$, onde só temos produtos em que r=1, 2 mod. 4,

(só matrizes anti-simétricas)

Ou do tipo

II. $0 = \Sigma c_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} + \Sigma d_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} + \ldots + \square$, onde só temos produtos em que r=3, 4 mod. 4.

(só matrizes simétricas)

($\square$ significa última matriz, pois o conjunto β é finito).

Tentemos obter mais informações:

1 Se R é do tipo I (matrizes anti-simétricas) e $\exists$ k tal que $c_k \neq 0$, temos

$$- c_k B_k = \sum_{i \neq k} c_i B_i + \Sigma c_{i_1 i_2} B_{i_1} B_{i_2} + \ldots$$

e multiplicando por $\frac{1}{c_k} B_k$, temos:

$$-B_k \cdot B_k = \sum_i \frac{1}{c_k} c_i B_i B_k + \Sigma \frac{c_{i_1} c_{i_2}}{c_k} B_{i_1} B_{i_2} B_k + \ldots + \square$$

$$I = \overline{}_i B_i B_k + \Sigma \bar{c}_{i_1 i_2} B_{i_1} B_{i_2} B_k + \ldots + \square \qquad (10)$$

onde $\overline{c_i} = \frac{i}{c_k}$ e $\bar{c}_{i_1 i_2} = \frac{c_{i_1} c_{i_2}}{c_k}$

como I é simétrica, então todo o lado direito de (9) também deve ser.

Mas $B_i B_k$ é anti-simétrica $\forall_i \neq k$, por (9), logo $\overline{c_i} = 0 \;\; \forall_i \neq k, \;\; 1 \leq i < m-1$ e $c_i = 0 \;\; \forall_i \neq k, \;\; 1 \leq i < m-1$. E o mesmo raciocínio serve para r = 5, 9, etc., isto é, para $r \equiv 1$ mod. 4.

2 Logo, I se reduz a uma relação do tipo

$$0 = \Sigma c_{i_1 i_2} B_{i_1} B_{i_2} + \Sigma c_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} B_{i_5} B_{i_6} + \ldots + \_ \qquad (11)$$

ou seja, uma relação linear irredutível entre matrizes de β só compreende produtos de matrizes $B_{i_1} \dots B_{i_r}$, com $r \equiv 2$ mod. 4.

3 Agora seja $c_{kj}B_kB_j$ um elemento de (11) então,

$$-c_{kj}B_kB_j = \sum_{i_1,i_2\neq k,j} c_{i_1i_2}B_{i_1}B_{i_2} + \Sigma c_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5}B_{i_6} +$$

$$+ \dots + \square$$

Então multiplicando ambos os lados por B_j, temos:

$$-c_{kj}B_k\underbrace{B_j.B_j}_{-I} = \Sigma\overline{c}_{i_1i_2}B_{i_1}B_{i_2}B_j + \Sigma\overline{c}_{i_1\dots i_6}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5}B_{i_6}B_j + \dots + \square$$

$$c_{kj}B_k = \Sigma\overline{c}_{i_1i_2}B_{i_1}B_{i_2}B_j + \Sigma\overline{c}_{i_1\dots i_6}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5}B_{i_6}B_j + \dots + \square$$

Mas B_k é anti-simétrica e os produtos $B_{i_1}B_{i_2}B_j$ são simétricos, a menos que i_1 ou $i_2 = j$. Mas i_1, i_2 são diferentes de k, j.

Também podemos repetir o processo para $B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5}B_{i_6}$. Passamos um elemento qualquer para o lado esquerdo. Por exemplo:

$$-c_{j_1j_2j_3j_4j_5j_6}B_{j_1}B_{j_2}B_{j_3}B_{j_4}B_{j_5}B_{j_6} = \sum_{\substack{i_1\neq j_1 \\ i_2\neq j_2 \\ \vdots \\ i_6\neq j_6}} c_{i_1i_2i_3i_4i_5i_6}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5}B_{i_6} +$$

$$+ \dots + \square$$

Multiplico por B_{j_6} :

$$c_{j_1 \ldots j_6} \underbrace{B_{j_1} B_{j_2} B_{j_3} B_{j_4} B_{j_5}}_{\text{anti-simétrica}} = \Sigma c_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} \underbrace{B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} B_{i_5} B_{i_6}}_{\text{simétrica}}$$

logo,

$$c_{i_1 \ldots i_6} = 0 \qquad \forall i_1 \neq j_1,\ i_2 \neq j_2,\ \ldots,\ i_6 \neq j_6$$

Portanto, concluímos que uma relação linear irredutível do tipo

$$0 = \Sigma c_{i_1 i_2} B_{i_1} B_{i_2} + \Sigma c_{i_1 \ldots i_6} B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_6} + \ldots + \square$$

é uma relação entre matrizes LI's.

4 Por outro lado: se a relação linear for do tipo II (matrizes simétricas)

$$0 = \Sigma c_{i_1 i_2 i_3} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} + \Sigma c_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4} + \ldots + \square$$

Então, podemos transformá-la numa relação da forma

$$I = \Sigma c'_{i_1 i_2 i_3} B'_{i_1} B'_{i_2} B'_{i_3} + \Sigma d'_{i_1 i_2 i_3 i_4} B'_{i_1} B'_{i_2} B'_{i_3} B'_{i_4} + \ldots + \quad , \square$$

pois tomamos um elemento qualquer $c_{ijk} B_i B_j B_k$, $c_{ijk} \neq 0$ e passamo-lo para o lado esquerdo.

$$-c_{ijk}B_iB_jB_k = \sum_{\substack{i_1\neq i\\ i_2\neq j\\ i_3\neq k}} c_{i_1i_2i_3}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3} + \Sigma c_{i_1i_2i_3i_4}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4} + \dots + \square$$

Logo, multiplicando por $\dfrac{1}{c_{ijk}} B_kB_jB_i$ ambos os lados, temos:

$$I = \Sigma \overline{c}_{i_1i_2i_3}B'_{i_1}B'_{i_2}B'_{i_3} + \Sigma d_{i_1i_2i_3i_4}B'_{i_1}B'_{i_2}B'_{i_3}B'_{i_4} + \dots + \square$$

Isto porque nos termos tipo $B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_3}B_{i_4}B_{i_5} = -B_{i_1}B_{i_2}B_{i_4}B_{i_5}$ que cancelem algum componente, isto é, que tenham i_1, i_2, i_3 iguais a i, j ou k o termo produto terá de ter 3 ou 4 matrizes, pois se tiver 1 ou 2 ela será anti-simétrica e seu coeficiente será nulo.

5 Logo, temos:

$$I = \Sigma c_{i_1i_2i_3}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3} + \Sigma d_{i_1i_2i_3i_4}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4} + \dots + \square \quad (12)$$

Agora multiplicando os dois lados de   por Bi, obtemos:

$$B_i = \Sigma c_{i_1i_2i_3}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_1 + \Sigma d_{i_1i_2i_3i_4}B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_i$$

Como B_i é anti-simétrica e o produto de quatro fatores distintos é simétrico temos que:

$c_{i_1i_2i_3} = 0$ se i é distinto de i_1, i_2, i_3.

Como i pode ter qualquer valor $\leq$ m-1, segue que $c_{i_1i_2i_3} = 0$, a menos que $m-1 = 3$.

6 para mostrar que todo $d=0$, tomamos $i = i_4$, então, o coeficiente de $-d_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} = 0$, pois
$B_i = \Sigma d_{i_1 i_2 i_3 i_4} B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3} B_{i_4}$ multiplicado por B_{i_4}
$\underbrace{B_i B_{i_4}}_{\text{anti-simétricas}} = \Sigma d_{i_1 i_2 i_3 i_4} \underbrace{B_{i_1} B_{i_2} B_{i_3}}_{\text{simétricas}} - I$. Logo, $-d_{i_1 i_2 i_3 i_4} = 0$

7 O método usado para mostrar $C=0$ se aplica quando o número de fatores $B_i \equiv 3$ mod. 4 e $r < m-1$ o método usado para mostrar $d=0$ se aplica quando o número de fatores $B_i \equiv 0$ mod. 4 e $r < m-1$. P.rtanto, se existe uma relação, ela tem de ser da forma $I = kB_1B_2 \ldots B_{m-1}$, onde $B_1B_2 \ldots B_{m-1}$ é simétrica, pois I o é. Logo, $m-1 \equiv 0$ ou 3 mod. 4, mas M é par. Portanto, $m \equiv 0$ mod. 4.

8 Se $I = kB_1B_2 \ldots B_{m-1}$, elevando ao quadrado, temos:

$$I = I^2 = k^2(B_1B_2 \ldots B_r)(B_1B_2 \ldots B_r).$$

Para trocar a ordem de B_1, $B_2 \ldots B_r$ são necessárias $\bar{s} = (r-1)+(r-2) + \ldots + 2+1$ transposições.

$$k^2(-1)^{\bar{s}}(B_1B_2 \ldots \underbrace{B_r)(B_r}_{-I} \text{——} B_2B_1) = k^2(-1)^{\bar{s}}.(-1)^r I$$

Logo, $I = k^2(-1)^s I$, onde $s = \frac{r(r+1)}{2}$. Portanto, $I = k^2 I$
$\therefore\ k^2 = \pm 1$.

Juntando todos esses elementos, demonstramos:

TEOREMA 2: As 2^{m-1} matrizes de β são linearmente independentes se $m \equiv 2$ (mod. 4). Se $m \equiv 0$ (mod. 4) elas são LI's ou estão conectadas por relações que são geradas a partir de $I = \pm B_1 B_2 \ldots B_{m-1}$ (ao multiplicar isto por matrizes de β) nenhuma outra relação linear irredutível existe entre elas.

Vamos determinar m.

1 Ao multiplicar $I = \pm B_1 B_2 \ldots B_{m-1}$ por $B \in \beta$ um dos produtos reduzidos tem menos da metade dos Bi's de $B_1 B_2 \ldots B_{m-1}$ e o outro mais da metade.

Logo, se existe uma relação linear irredutível, podemos usá-la para expressar os últimos produtos em termos dos primeiros.

2 Logo, as matrizes de β que são produto de, no máximo, $\frac{m-2}{2}$ fatores B_i, são linearmente independentes. E como tínhamos 2^{m-1} matrizes, passamos a ter 2^{m-2} matrizes linearmente independentes. Cada matriz m×m pode ser identificada com um ponto de R^{m^2}. Como já temos 2^{m-2} matrizes LI's temos:

$2^{m-2} \leq m^2$ onde m é par.

Verificando por casos temos:

1. se m=2 $\quad 2^{2-2} \leq m^2 \quad 1 \leq 2^2$
2. se m=4 $\quad 2^{4-2} \leq 4^2 \quad 2^2 \leq 4^2$
3. se m=6 $\quad 2^{6-2} \leq 6^2 \quad 16 \leq 36$
4. se m=8 $\quad 2^{8-2} \leq 8^2 \quad 64 \leq 64$
5. se m=10 $\quad 2^{10-2} \leq 10^2 \quad 256 \leq 100$ Falso!

No caso m=6, o conjunto tem $2^{6-1} = 32$ matrizes. Destas, 16 são simétricas e 16 são anti-simétricas e LI's, pois $6 \equiv 2$ mod. 4. Mas, em geral, o número máximo de matrizes anti-simétricas linearmente independentes é $\frac{m(m-1)}{2}$, em que se $m = 6$ é $\frac{6(5)}{2} = 15$.

<u>TEOREMA 3</u>: À exceção dos casos m = 1, 2, 4, 8, não existe uma identidade:

$$(x_1^2+x_2^2 + \ldots + x_m^2)(y_1^2+y_2^2 + \ldots + y_m^2) = (z_1^2+z_2^2 + \ldots + z_m^2) \tag{13}$$

onde cada Z_i, para todo $i=1, \ldots, m$, seja função bilinear com coeficientes reais em $x_1, \ldots, x_m$ e em $y_1, \ldots, y_m$.

Segue-se que 1, 2, 4, 8 são as únicas dimensões possíveis para a existência de uma álgebra normada sobre os reais. Estas são respectivamente os números reais, os números complexos, os quaternions e os números de Cayley.

A essas álgebras correspondem identidades como em (13), que, curiosamente, eram conhecidas muito antes das respectivas álgebras.

Para m = 2, temos:

$$(a^2+b^2)(\alpha^2 + \beta^2) = (a\alpha-b\beta)^2 + (a\beta+b\beta)^2$$

A norma do produto de dois números complexos é igual ao produto de suas normas - que já era conhecida por Diofante, segundo Cayley.

Para m = 4, temos:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = A^2+B^2+C^2+D^2$$ (fórmula estabelecida por Euler em 1748).

onde:

$A = a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta$ $\qquad$ $B = a\beta+b\alpha+c\delta+ d\gamma$

$C = a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta$ $\qquad$ $D = a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha$

Para m=8, a fórmula foi estabelecida em 1818 por Degen.

APÊNDICE

MULTIPLICAÇÕES EM R^m

CONTINUAMOS COM $F = R$.

DEF.: Diremos que uma transformação contínua $\psi : R^p \times R^q \to R^m$ é não-singular, se temos que $\psi(x,y) = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$.

TEOREMA: O espaço vetorial R^m é uma álgebra com divisão , $\iff \exists$ uma transformação $\emptyset: R^m \times R^m \to R^m$ que é bilinear e não-singular.

DEMONSTRAÇÃO: $(\Leftarrow)$ dada $\emptyset$, seja $xy = \emptyset(x,y)$ com o mesmo argumento de Teo. 1, mostra-se que as equações $ax=b$ e $xa=b$ tem solução, com $a \neq 0$.

$(\Rightarrow)$ se R^m é uma álgebra com divisão, o produto da álgebra define $\emptyset$ (que já é bilinear) e que resulta ser não-singular.

Determinamos todas as dimensões possíveis de álgebras normadas sobre R. Podemos querer determinar as dimensões possíveis de todas as álgebras com divisão sobre o corpo dos números reais.

Hopf demonstrou em 1940 que R^m é uma álgebra com divisão se e só se m é uma potência de 2. A solução final do problema foi encontrada em 1957 de forma independente por Bott e Milnor e por Kerwaire.

A resposta é a mesma que para álgebras normadas, isto é, m = 1, 2, 4 e 8 são as únicas dimensões possíveis para álgebras com divisão sobre os reais.

Ambas as demonstrações dependem de resultados não triviais de Bott [ ] sobre a homotopia dos grupos clássicos.

Podemos ainda "enfraquecer" um pouco as hipóteses e perguntar quais são as dimensões possíveis para a existência de uma multiplicação em R^m.

<u>DEF.</u>: Uma multiplicação $\mu : R^m \times R^m \to R^m$ é uma transformação contínua $\mu(x,y) \equiv xy$ tal que:

(1) μ não é singular

(2) $\exists$ um elemento $\underline{e} \in R^m$ em que $e.x. = x.e = x \; \forall x \in {}^m$

(3) para todo número real $t \geq 0$ se tem $(tx)y = t(xy) = x(ty)$.

Uma diferença entre uma multiplicação e uma estrutura de álgebra com divisão é que não podemos assegurar que $\mu(-x,y) = \mu(x,-y) = -\mu(x,y)$ nem quando x, y são elementos de S^{m-1}.

Adem demonstrou que existe multiplicação em R^m se e só m é potência de 2.

Adams demonstrou utilizando co-homologia que existe multiplicação em R^m se e só se m = 1, 2, 4 ou 8.

2. CONSTRUÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE HURWITZ-RADON

Queremos resolver dois problemas:

1. Dados dois inteiros p e q, determinar o número inteiro mínimo m tal que exista uma fórmula do tipo

$$(x_1^2+x_2^2 + \dots + x_p^2)(y_1^2+y_2^2 + \dots + y_q^2) = (z_1^2+z_2^2 + \dots + z_m^2) \quad (1)$$

2. Se q=m, isto é, se $(x_1^2 + \dots + x_p^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) = (z_1^2 + \dots + z_m^2)$ e m é fixo, se quer determinar o valor máximo de p.

Hurwitz, usando coeficientes complexos, resolve o último problema dizendo:

se $m = 2^r(2k+1)$, então

$$p = \begin{cases} 2r & \text{se} \quad r \equiv 1,2 \quad \text{mod. } 4 \\ 2r+1 & \text{se} \quad r \equiv 0 \quad \text{mod. } 4 \\ 2r+2 & \text{se} \quad r \equiv 3 \quad \text{mod. } 4 \end{cases}$$

Radon obteve o mesmo resultado usando coeficientes reais de forma independente e os escreve numa única expressão:

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } m = 2^{4a+b}(2k+1) \\ \text{então } p = \rho(m) = 8a+2^b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(2)\ 0 \le b \le 3 \\ \text{é o valor máximo de } p.\end{array}$$

A função $\rho(m)$ se chama função de Hurwitz-Radon.

Associada com a identidade

$$(x_1^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + \ldots + y_m^2) = (z_1^2 + \ldots + z_m^2) ,$$

Temos uma transformação normada $\emptyset$: $R^p \times R^m \to R^m$ que chamaremos transformação de Hurwitz-Radon.

Seja M a matriz determinada por $\emptyset$. Então, M é uma matriz quadrada de ordem m tal que:

$$M^tM = MM^t = (x_1^2 + \ldots + x_p^2) I_m$$

e como já vimos, a existência de M é equivalente à existência de $\emptyset$. (prop. 1 cap 1).

Assim como escrevemos $z_i = a_{i_1} y_1 + a_{i_2} y_2 + \ldots + a_{i_m} y_m$, poderíamos ter escrito $z_i = x_1 b_{1_i} + \ldots + x_p b_{p_i}$ $i = 1, 2, \ldots, m$, pois $z = \emptyset(x,y)$ e,

RECORDANDO:

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i \varepsilon_i \quad y = \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j \quad z = \sum_{k=1}^{m} z_k \varepsilon_k$$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{p} x_i \varepsilon_i \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j \varepsilon_j = \sum_{i,j}^{p,m} x_i y_j \ (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j) =$$

como sempre, $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \Sigma c_{ijk} \varepsilon_k$

Logo,

$$\sum_{i,j,k} x_i y_j \, c_{ijk}\varepsilon_k = \sum_k z_k \varepsilon_k \, .$$

$$\sum_{i,j} x_i y_j \, c_{ijk} = z_k \quad e \quad z_k = \sum_{i,j} x_i c_{ijk} y_j$$

$$z_k = \underbrace{\sum x_i c_{ijk} y_1}_{ak_1} + \dots + \underbrace{\sum x_i c_{imk} y_m}_{ak_m} \quad \text{ou}$$

$$z_k = \sum_j x_1 \; {}_{ijk} y_j + \dots + \sum_j x_p c_{pjk} y_j =$$

$$x_1 b_{1k} + x_2 b_{2k} + \dots + x_p b_{pk}$$

isto é: $z_k = x_i b_{ik}$, onde $b_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \; {}_{ijk} y_j$.

E cada b_{ik} é uma função linear homogênea nas variáveis $y_1, y_2, \dots, y_m$.

Temos então uma matriz N,p×m

$$N = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pm} \end{bmatrix}$$

tal que

$$\emptyset(x,y) = z = xN$$

Além disso, temos:

$NN^t = (y_1^2 + \dots + y_m^2)I_p$, pois se $x = \varepsilon_i$ como $z = xy = x.N =$
$= \varepsilon_i N$, $z = (b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m})$.

Como $(\varepsilon_i y)(\varepsilon_i y) = n(\varepsilon_i y) = n(y)$ segue que:

$$(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m})(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_m}) =$$

$$b_{i_1}b_{j_1} + b_{i_2}b_{j_2} + \dots + b_{i_m}b_{j_m} = \begin{cases} n(y), & \text{se } j=i \\ 0, & \text{se } j\neq i \end{cases} \qquad (3)$$

$$\text{Logo, } NN^t = n(y)I_p \qquad (4)$$

Como no caso de M, aqui a existência de uma matriz p×m N, cujos elementos b_{ij} são equações lineares nas variáveis $y_1, y_2, \dots, y_p$, que satisfaz $NN^t = (y_1^2 + \dots + y_m^2)I_p$ é equivalente à existência de uma transformação $\emptyset$.

Vamos mostrar neste capítulo
que para todo par (p,m)
determinado por (2),
isto é, se $m=2^{4a+b}(2k+1)$ $p = 8a+2b$,
podemos construir uma transformação normada que satisfaz

$$(x_1^2 + \dots + x_p^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) = (z_1^2 + \dots + z_m^2)$$

Para isto, basta construir uma matriz N satisfazendo (4) , isto é,

$$NN^t = (y_1^2 + \dots + y_m^2) I_p$$

Equivalentemente, basta construir N tal que os vetores de N sejam mutuamente ortogonais e que tenham n(y) como norma.

Alguns elementos de álgebra linear.

<u>DEF</u>.: Produto interno

Seja V um espaço vetorial sobre K, um corpo qualquer um produto interno sobre V é uma função $<,>$.

$<,>: v\times v \to k$, tal que:

1) $\forall$ u, v $\in$ V $<u,v> = \overline{<v,u>}$

2) $\forall$ u, v $\in$ V, $\forall$ k $\in$ K $<ku,v> = k<u,v>$

3) $\forall$ u, v, w $\in$ V $<u+v, w> = <u,w> + <v,w>$

4) $\forall$ u $\in$ V $<u,u> \geq 0$ e $<u,v> = 0 \Leftrightarrow u = 0$

<u>DEF</u>.: Funcional linear

Se V é um espaço vetorial sobre um corpo k, um funcional linear $\alpha : V \to K$ é uma transformação linear entre os espaços vetoriais V e K, isto é, uma função $\alpha : V \longrightarrow K$ tal que:

1) $\forall$ v, u $\in$ V $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

2) $\forall$ v $\in$ V e k $\in$ K $\alpha(kv) = k\alpha(v)$

Teorema da representação dos funcionais lineares

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno $<,>$ sobre o corpo K e Ψ: $V \to K$ um funcional linear.

Então, existe um único vetor $u_\Psi \in V$, tal que $\forall v \in V$,

$$\Psi(v) = <v,u_\Psi>$$

DEM.: Suponha que existe um tal u_Ψ. Vejamos como ele deveria ser. Seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base para V, ortonormal. Seja $u_\Psi = \sum_i x_i e_i$.

Se $\Psi(v) = <v,u_\Psi>$, então $\Psi(e_j) = <e_j, u_\Psi> = <e_j, \Sigma x_i e_i> =$

$$= \Sigma \bar{x}_i <e_j,e_i> = \bar{x}_j$$

Logo, $x_j = \overline{\Psi(e_j)}$.

Vamos definir $u_\Psi = \Sigma \overline{\Psi(e_i)} e_i$.

Observe que a expressão $<v, u_\Psi>$ define um funcional linear:

$T: V \to K$

$v \longrightarrow <v,u_\Psi>$, pois $T(v+u) = <v+u, u_\Psi> = <v,u_\Psi> + <u,u_\Psi> =$

$= T(v) + T(u)$

$T(kv) = <kv,u> = k<v,u>$.

Para mostrar que T é o funcional linear Ψ, basta veri ficar que T coincide com Ψ nos vetores $\{e_i\}$ da base.

Mas:

$$<e_i, u_\Psi> = <e_i, \sum_j \overline{\Psi(e_j)}e_j> = \sum_j \overline{\overline{\Psi(e_j)}} <e_i,e_j> = \Psi(e_i)$$

$$\text{Logo, } T(v) = <v,u_\Psi> = <v,\Sigma\overline{\Psi(e_i)}e_i> = \Sigma\Psi(e_i)<v,e_i> =$$

$$= \Sigma\Psi(e_i)v_i = \sum_i v_i\ \Psi(e_i) = \Psi(\Sigma v_i e_i) = \Psi(v)$$

<u>DEF.</u>: Adjunta de uma transformação linear

1. A função Ψ_w: $V \to K$ definida por $\Psi_w(v) = <Tv,w> \forall v \in V$ é um funcional linear.

2. se Ψ_w é um funcional linear, então existe um único vetor $w^* \in V$ tal que $\Psi_w(v) = <v,w^*>, \forall v \in V$, e a correspondência $w \mapsto w^*$ é uma transformação linear.

3. Dada uma transformação linear $T:V \to W$, a transformação linear T^*: $W \to V$ definida por $w \to w^*$ é chamada de transformação adjunta de T e definida pela equação: $<Tv,w> = <v,T^*w>\ \forall v \in V,\ w \in W$.

<u>OBS.</u>: Se β e β' são bases ortonormais a matriz $T^*]^{\beta'}_{\beta}$ é a transposta conjugada de $T]^{\beta}_{\beta'}$

DEF.: Transformações unitárias

Seja V espaço vetorial real ou complexo. Uma transformação linear $T: V \to V$ é dita unitária se $TT^* = T^*T = I$. Ou seja: $T^* = T^{-1}$. Se V é real, dizemos transformações ortogonais.

TEOREMA: Se $T: V \to V$ é uma transformação linear em um espaço vetorial de dimensão finita, então as condições abaixo são equivalentes:

1) T é unitária
2) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais.
3) T preserva produto interno, isto é, $\forall u, v \in V$ $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u,v\rangle$.
4) T preserva norma $\forall v \in V$, $||Tv|| = ||v||$.

Voltando ao problema 2. , ou seja, dado m, queremos determinar o p máximo que satisfaz $(x_1^2 + \ldots + x_p^2)(y_1^2 + \ldots + y_m^2) = (z_1^2 + \ldots + z_m^2)$.

Como já vimos na seção anterior, associada à identidade acima temos uma transformação normada, $\emptyset: R^p \times R^m \to R^m$, chamada transformação de Hurwitz-Radon. Também já vimos que foi estabelecida uma relação entre p e m, dada por se $m=2^{4a+b}$ $0 \leq b \leq 3$, então, $p = \rho(m) = 8a+2^b$.

Os métodos de Hurwitz-Radon são construtivos, isto é ; permitem, dado m, construir explicitamente $\emptyset: R^p \times R^m \to R^m$. mas utilizam complicados esquemas iterativos. Este capítulo é dedicado à exposição da construção simplificada de Lam para $\emptyset$, isto é, mostraremos que dado m, podemos efetivamente constuir $\emptyset: R^p \times R^m \to R^m$, onde p é dado como acima. No próximo capítulo, vamos mostrar que este p é máximo.

PROPOSIÇÃO 1: Seja $\emptyset: R^p \times R^m \to R^m$ uma transformação de Hurwitz-Radon, $d_1, d_2, \ldots, d_p$ a base canônica de R^p. Como $\emptyset$ é normada, cada $f_i: R^m \to R^m$ definida por $\emptyset(d_i,y) = f_i(y)$, é uma transformação ortogonal e portanto, cada f_i tem inversa.

DEM.: $\emptyset$ é normada $\Leftrightarrow \emptyset(x,y) = z$

$$||\emptyset(x,y)|| = ||z|| = ||x|| \, ||y||$$

$$f_i: R^m \to R^m$$
$$y \to d_i \cdot y = \emptyset(d_i,y)$$

f_i é transformação linear, pois $\emptyset$ é bilinear. Além disso, $||f_i(y)|| = ||\emptyset(d_i,y)|| = ||d_i|| \, ||y|| = 1||y||$. Por teorema sobre transformações unitárias $\Rightarrow f_i$ é ortogonal (espaço vetorial real).

PROPOSIÇÃO 2: Sempre podemos supor que $\emptyset(d_p,y) = y$, já que se assim não for, basta trocar $\emptyset$ por $\emptyset' = f_p^{-1}\emptyset$ que também é normada e tem a propriedade requerida.

DEM.: $\emptyset'(d_p,y) = f_p^{-1}\emptyset(d_p,y) = f_p^{-1}(d_p \cdot y) = f_p^{-1}(fpy) = y$

$$||\emptyset'(x,y)|| = ||f_p^{-1}\emptyset(x,y)|| = ||f_p^{-1}\, x \cdot y|| = ||f_p^{-1}z|| =$$
$$= ||z|| = ||x|| \, ||y||$$

pois f_p^{-1} é ortonormal

Para construir a matriz N introduzimos os seguintes conceitos:

DEF. 2: Um conjunto de operadores que atuam em R^m é dito um conjunto de operadores de Clifford, se cada $\varepsilon_i: R^m \to R^m$ é uma transformação ortogonal,

tal que ε_o = operador identidade

$\varepsilon_i^2 = -I$, para $1 \leq i \leq p-1$ e

$\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0$ para $1 \leq i \neq j \leq p-1$

OBSERVAÇÃO:

1. Cada ε_i pode ser interpretado como uma matriz ortogonal, ou seja, $\varepsilon_i\varepsilon_i^t = I$, onde ε_i^t = transposta de ε_i.

   Se $\varepsilon_i\varepsilon_i^t = I$

   $\underbrace{\varepsilon_i\varepsilon_i}\varepsilon_i^t = \varepsilon_i$

   $-I\varepsilon_i^t = \varepsilon_i \Rightarrow \varepsilon_i^t = -\varepsilon_i$.

   Logo, para cada $i>0$, cada ε_i representa uma matriz anti-simétrica.

PROPOSIÇÃO 3: Um conjunto de operadores de Clifford determina uma transformação $\emptyset$ e vice-versa.

DEMONSTRAÇÃO: 1) com efeito, dados os operadores ε_i $(i = 0,1,\ldots,p-1)$, definimos $\emptyset(x,y)$, onde $x = x_1d_1 + x_2d_2 + \ldots + x_pd_p$, como

$$\emptyset(x,y) = x_py + \sum_{i=1}^{p-1} x_i\varepsilon_i(y).$$

Usando as propriedades dos operadores ε_o, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$, se obtém que

$$\emptyset(x,y).\emptyset(x,y)^t = [x_p y + \sum_{i=1}^{p-1} x_i \varepsilon_i(y)][x_p + \sum_{i=1}^{p-1} x_i \varepsilon_i(y)]^t \overset{?}{=} n(x)n(y)$$

Vamos demonstrar:

$$(x_1\varepsilon_1(y) + \ldots + x_{p-1}\varepsilon_{p-1}(y) + x_p y)(x_1\varepsilon_1(y) + \ldots + x_{p-1}\varepsilon_{p-1}(y) + x_p y)^t =$$

$$(x_p y + x_1\varepsilon_1(y) + \ldots + x_{p-1}\varepsilon_{p-1}(y))(x_p y^t + x_i y^t \varepsilon_1^t + \ldots + x_{p-1} y^t \varepsilon_{p-1}^t) =$$

$$= x_p^2 yy^t + x_p x_1 yy^t \varepsilon_1^t + \ldots + x_p x_{p-1} yy^t \varepsilon_{p-1}^t +$$

$$+ x_1 x_p \varepsilon_1 yy^t + x_1^2 \varepsilon_1 yy^t \varepsilon_1^t + \ldots + x_1 x_{p-1} \varepsilon_1 yy^t \varepsilon_{p-1}^t +$$

$$+ x_{p-1} x_p \varepsilon_{p-1} yy^t + x_{p-1} x_1 \varepsilon_{p-1} yy^t \varepsilon_1^t + \ldots + x_{p-1}^2 \varepsilon_{p-1} yy^t \varepsilon_{p-1}^t =$$

$$= x_p^2 n(y) + x_1 x_p n(y) \varepsilon_1^t + \ldots + x_p x_{p-1} n(y) \varepsilon_{p-1}^t +$$

$$+ x_1 x_p n(y) \varepsilon_1 + x_1^2 n(y) \varepsilon_1 \varepsilon_1^t + \ldots + x_1 x_{p-1} n(y) \varepsilon_1 \varepsilon_{p-1}^t +$$

$$+ x_{p-1} x_p n(y) \varepsilon_{p-1} + x_{p-1} x_1 n(y) \varepsilon_{p-1} \varepsilon_1^t + \ldots + x_{p-1}^2 n(y) \varepsilon_{p-1} \varepsilon_{p-1}^t .$$

Como $\varepsilon_i^t = -\varepsilon_i$ e $\varepsilon_i \varepsilon_i^t = I$, temos:

$$x_p^2 n(y) + x_1^2 n(y) + \ldots + x_{p-1}^2 n(y) = n(x)n(y).$$

2) Reciprocamente, dada $\emptyset$ definimos:

$\varepsilon_o(y) = \emptyset(d_p,y) = y$ e para $i = 1,2,\ldots, p-1$

$y\varepsilon_i = \varepsilon_i(y) = \emptyset(d_i,y) = d_i \cdot y$

Como $\emptyset$ é normada (ver PROPOSIÇÃO 1), segue que cada ε_i é ortogonal, isto é, $\varepsilon_i\varepsilon_i^t = I$ e se tem $\varepsilon_o = I$ (PROPOSIÇÃO 2). Para estabelecer as outras propriedades, consideremos S^{p-1} a esfera unitária em R^p.

Seja $x=a$, onde $a \in S^{p-1}$ com $a = a_1d_1 + \ldots + a_pd_p$.

Logo, $\emptyset(a,y) = \sum_{i=1}^{p} a_i\emptyset(d_i,y) = a_py\varepsilon_o +$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} a_i(y\varepsilon_i) = y(a_p\varepsilon_o + \sum_{i=1}^{p-1} a_i\varepsilon_i)$$

Assim, $n(\emptyset(a,y)) = n(a)n(y) = n(y)$, pois $n(a) = 1$ e portanto, o operador $a_p\varepsilon_o + \sum_{i=1}^{p-1} a_i\varepsilon_i$ é ortogonal (teorema das transformações unitárias - caso real). $(a_p\varepsilon_o + \sum_{i=1}^{p-1} a_i\varepsilon_i)$ Consequentemente, o produto deste operador por seu transposto é igual a I.

Falta mostrar que $\varepsilon_i^2 = -I$ e $\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0$.

Isto é feito no seguinte LEMA:

Da identidade $(a_p\varepsilon_o + \sum_{1}^{p-1} a_i\varepsilon_i)(a_p\varepsilon_o + \sum_{1}^{p-1} a_i\varepsilon_i)^t = I$, se deduzem as igualdades $\varepsilon_i^2 = -I$ e $\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0$ entre os operadores de Clifford.

<u>DEM.</u>: $(a_p\varepsilon_o + \sum_1^{p-1} a_i\varepsilon_i)\cdot(a_p\varepsilon_o + \sum_1^{p-1} a_i\varepsilon_i)^t = I$

$$[a_p\varepsilon_o + a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_{p-1}\varepsilon_{p-1}][a_p\varepsilon_o + a_1\varepsilon_1 + \ldots +$$

$$+ a_{p-1}\varepsilon_{p-1}]^t = I$$

$$[a_p\varepsilon_o + a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_{p-1}\varepsilon_{p-1}][a_p\varepsilon_o^t + a_1\varepsilon_1^t + \ldots + a_{p-1}\varepsilon_{p-1}^t] = I$$

$$a_p^2\varepsilon_o\varepsilon_o^t + a_pa_1\varepsilon_o\varepsilon_1^t + \ldots + a_pa_{p-1}\varepsilon_o\varepsilon_{p-1}^t + a_1a_p\varepsilon_1\varepsilon_o^t + a_1^2\varepsilon_1\varepsilon_1^t + \ldots +$$

$$+ a_1a_{p-1}\varepsilon_1\varepsilon_{p-1}^t + a_{p-1}a_p\varepsilon_{p-1}\varepsilon_o^t + a_{p-1}a_1\varepsilon_{p-1}\varepsilon_1^t + \ldots +$$

$$+ a_{p-1}^2\varepsilon_{p-1}\varepsilon_{p-1}^t = I$$

$$= (a_p^2 + a_1^2 + \ldots + a_{p-1}^2)I + a_1a_p(\varepsilon_o\varepsilon_1^t + \varepsilon_1\varepsilon_o^t) + a_{p-1}a_p(\varepsilon_o\varepsilon_{p-1}^t +$$

$$+ \varepsilon_{p-1}\varepsilon_o^t) + a_{p-1}a_p(\varepsilon_1\varepsilon_{p-1}^t + \varepsilon_{p-1}\varepsilon_1^t) + \ldots = I$$

Mas os a_i's são arbitrários; tomando todos a_i's$=0$, à exceção de 2, concluímos que $\varepsilon_i^2 = -I$ e $\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0$.

Regressamos a construção da matriz N.

Dado um conjunto de p operadores de Clifford $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ que atuam em R^m, a tabela anexa define um conjunto de p+8 operadores de Clifford atuando em R^{16m}.

Se um vetor $y \in R^{16m}$ se escreve como $y = (w_1, w_2, \ldots, w_{16})$ onde $w_j \in R^m$, então o primeiro operador ε_o atuando em y é dado pela primeira linha da tabela . O segundo operador atuando em y é dado pela segunda linha da tabela abaixo.

Tabela de k,y LAM para a construção indutiva das transformações de Hurwitz-Radon.

Observe que o primeiro operador em y é a identidade, que cada um dos operadores, 2º. 3º, ..., p-ésimo se obtém aplicando ε_i aos componentes do vetor $(w_1, -w_2, w_3, -w_4, \ldots, w_{15}, -w_{16})$ e os oito últimos operadores permutam os componentes de y trocando alguns sinais.

Comprovar que os p+8 operadores definidos na tabela formam um conjunto de operadores de Clifford, é equivalente a verificar que as linhas da tabela têm norma n(y) e são mutuamente ortogonais.

Por outro lado, estas condições são as que caracterizam a matriz N; logo, tomando a tabela como matriz de uma transformação permite-se construir uma transformação de $R^{p+8} \times R^{16m} \to R^{16}$ a partir de uma transformação de $R^p \times R^m \to R^m$.

Vamos agora a demonstração das propriedades da tabela.

1) Claramente, a norma de cada linha é simplesmente $n(y)$, pois: a 1ª é certamente $(w_1, w_2, \ldots, w_{16})$;
a 2ª, $(w_1\varepsilon_1, -w_2\varepsilon_2, \ldots, -w_{16}\varepsilon_{16})$; como $n(\varepsilon_i w_i) = n(w_i)$.

2) A ortogonalidade se comprova com o uso repetido dos 3 lemas seguintes.

<u>LEMA 1</u>: se $u, v \in R^m$, então $(u,v) \perp (v,-u)$ em R^{2m}.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Em geral, dados 2 vetores $w, z \in R^k$ a comutatividade do produto escalar se expressa com a igualdade $wz^t = zw^t$. Os vetores são ortogonais, isto é, $w \perp z \Leftrightarrow wz^t = 0$. No nosso caso, temos $(u,v)(v,-u)^t = uv^t - vu^t = 0$; logo, $(u,v) \perp (v,-u)$. ▨

<u>LEMA 2</u>: Se $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ é um conjunto de operadores de Clifford em R^m, então $\varepsilon_i v \perp \varepsilon_j u$ para todo $u \in R^m$ com $i \neq j$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Primeiro, suponhamos que i, j são diferentes de zero. Como já sabemos $\varepsilon_j^t = -\varepsilon_j$.
Calculando, temos:

$$
\begin{aligned}
(u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t = (u\varepsilon_i)(\varepsilon_j^t u^t) &= -u(\varepsilon_i\varepsilon_j)u^t = \\
&= u(\varepsilon_j\varepsilon_i)u^t = -(u\varepsilon_j)(\varepsilon_i^t u^t) = \\
&= -(u\varepsilon_j)(u\varepsilon_i)^t.
\end{aligned}
$$

Por comutatividade do produto escalar:

$$(u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t = (u\varepsilon_j)(u\varepsilon_i)^t \therefore (u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t - (u\varepsilon_j)(u\varepsilon_i)^t = 0$$

Do cálculo acima:

$$(u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t = -(u\varepsilon_j)(u\varepsilon_i)^t \therefore (u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t + (u\varepsilon_j)(u\varepsilon_i)^t = 0$$

$\therefore (u\varepsilon_i)(u\varepsilon_j)^t = 0$ o que demonstra $u\varepsilon_i \perp u\varepsilon_j$ quando $i, j \neq 0$.

Se supomos que $i=0$, tem-se:

$u(u\varepsilon_j)^t = u\varepsilon_j^t.u^t = -u\varepsilon_j u^t$. Logo, como

$$u(u\varepsilon_j)^t = (u\varepsilon_j)u^t \quad e \quad u(u\varepsilon_j)^t = -u\varepsilon_j u^t \Rightarrow u(u\varepsilon_j)^t = 0$$

<u>LEMA 3</u>: Se $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$ é um conjunto de operadores de Clifford em R^m, então $(u,v) \perp (v\varepsilon_j, u\varepsilon_j)$ em R^m para todo $1 \leq j \leq p-1$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: $(u,v)(v\varepsilon_j, u\varepsilon_j)^t = u(v\varepsilon_j)^t + v(u\varepsilon_j)^t =$

$$= u(\varepsilon_j^t v^t) + v(\varepsilon_j^t u^t) =$$

$$= -(u\varepsilon_j)v^t + v(u\varepsilon_j)^t = 0.$$

<u>UM EXEMPLO</u>: O vetor $(-w_1\varepsilon_{p-1}, +w_2\varepsilon_{p-1})$ é ortogonal ao vetor $(w_2, -w_1)$ na linha $p+1$. Deste modo, a ortogonalidade pode ser verificada caso por caso.

Com os reais, os complexos, os quaternions e os números de Cayley construímos primeiro, tomando a soma direta, transformações de Hurwitz-Radon.

$R^{2^b} \times R^{s2^b} \to R^{s2^b}$, respectivamente para b = 0, 1, 2, 3, isto é, dadas

$$
\begin{array}{ll}
R \times R \to R & \text{reais} \\
R^2 \times R^2 \to R^2 & \text{complexos} \\
R^4 \times R^4 \to R^4 & \text{quaternions} \\
R^8 \times R^8 \to R^8 & \text{nº de Cayley}
\end{array}
,
$$

CONSTRUÍMOS:

$$
\begin{array}{lll}
R \times R^s & \to R^s & b=0 \\
R^2 \times R^{2s} & \to R^{2s} & b=1 \\
R^4 \times R^{4s} & \to R^{4s} & b=2 \\
R^8 \times R^{8s} & \to R^{8s} & b=3
\end{array}
$$

Fazendo, respectivamente, a multiplicação real, complexa, quaterniônica ou de Cayley, em cada coordenada.

Dado m, o escrevemos na forma $m = s2^b 16^a$, onde $0 \leq b \leq 3$ com $s = 2k+1$ número ímpar.

Com os números s, b selecionamos a transformação correspondente acima indicada e lhe aplicamos a construção de Lam a-vezes em forma iterativa.

$$p = 2^b \quad \emptyset: \quad R^{2^b} \times R^{2^b} \longrightarrow s2^b$$

Verifica-se facilmente que se obtém uma transformação de Hurwitz-Radon para os valores de m, p já descritos.

Exemplos da construção de algumas transformações de Hurwitz-Radon:

1. se $m=6=16^{0}.2.3$ $a=0$ $b=1$ $s=3$

   O maior p, tal que, $\emptyset: R^{p} \times R^{6} \to R^{6}$ é normada é $p=2$, isto é, $\emptyset: R^{2} \times R^{2.3} \to R^{2.3}$.

$$(a,b)\ (\underbrace{s_1,s_2},\underbrace{s_3,s_4},\underbrace{s_5,s_6}) \to as_1,-bs_2;as_2+as_1;\ as_3-bs_4;\ as_4+bs_3,\ as_5-bs_6;\ as_6+ba_5.$$

ou
$$\underset{C}{(c_1,}\ \underset{\times\ C^3}{(c_2,\ c_3\ ,\ c_4))} \longrightarrow \underset{C^3}{(c_1c_2,\ c_1.c_3,\ c_4.c_4)}$$ multiplicação complexa

como $p=2$, temos 2 operadores de Clifford.

1) $\varepsilon_o = I = \emptyset(d_1,s) = \emptyset(1,0),s) = s$

em forma matricial, $\varepsilon_o = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & 1 & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$

2) $\varepsilon_1 = \emptyset(d_2,s) = \emptyset((0,1),s)$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_i$ em forma matricial

$s\varepsilon_1 = (-s_2, s_1, -s_4, s_3, -s_6, s_5)$

$\emptyset((x,y),s) = x\emptyset\varepsilon_o(s) + y\emptyset\varepsilon_1(s)$

2. se $m=12=16^o.2^2.3^1$ $\quad p = \rho(m) = 4$

$a=0,\ b=2,\ s=3$

$R^{2^2} \times R^{2^2.3} \to R^{2^2.s}$

$R^4 \times R^{4.3} \to R^{4s}$

$((a,b,c,d)),\ (s_1, s_2, \ldots, s_{11}, s_{12}) \longrightarrow (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{12})$

$p=4$ $\therefore$ logo temos quatro operadores de Clifford

$\varepsilon_o = I$

$\varepsilon_o = \emptyset((1,0,0,0),\ (s_1, s_2, \ldots, s_{11}, s_{12})) =$

$= (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{12}) = I$

$\varepsilon_1 = \emptyset((0,1,0,0),(s_1,s_2, \ldots, s_{12}) = (-s_2,s_1,-s_4,s_3,-s_6, \ldots, s_{11}$

$$\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_2 = \emptyset((0,0,1,0)(s_1,s_2,\ldots,s_{12})) = (-s_3,s_4,s_1,-s_2,-s_7,s_8,s_5,-s_6,\ldots,-s_{10})$$

$$\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\\ -1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\\ -1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1\\ -1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_s = \emptyset((0,0,0,1)(s_1,\ldots,s_{12}) = (-s_4,-s_3,s_2,s_1,\ldots,-s_{12},-s_{11},s_{10},s_9)$$

$$\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{matrix} 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&-1&0&0\\ -1&0&0&0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

OBS: Multiplicação de quaternions:

$$(a,b,c,d)(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \to [a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta;\ a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma;\ a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta;\ a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha]$$

3. se $m = s2^b.16^a$, o valor de p é $p = 8a+2^b = 8+2 = 10$

$a=1$ $b=1$ $s=1$ como $a=1$ vamos repetir o processo 1 vez.

$m = 16.2 = 32$

(1) $b=1$ $\therefore$ $m=2$ $p = 2 \Rightarrow 2$ operadores de Clifford $\bar{\varepsilon}_o = 1$ $\overline{\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$R^2 \times R^{2.s} \to R^{2s}$ $s=1$ ou seja

$R^2 \times R^2 \to R^2$ ou $C \times C \to C$

$(x,y).(a,b) \longrightarrow (xa-yb,\ xb+ya)$ $(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 z_2$

(2) $R^{10} \times R^{32} \to R^{32}$ Na repetição temos $p=2+8$ operadores de Clifford e $p=10$.

$(x_1, \ldots, x_{10})(y_1, \ldots, y_{32}) \to (z_1, \ldots, z_{32})$

$2+8 = 10$ operadores em R^{32}

se $y = (w_1, \ldots, w_{16})$ onde cada $w_i = (w_{i1}, w_{i2})$.

Temos, como na tabela:

$\varepsilon_o = 1 = (w_1, w_2, \ldots, w_{15}, w_{16})$

$\varepsilon_1 = (w_1\overline{\varepsilon_1}, -w_2\overline{\varepsilon_1}, w_3\overline{\varepsilon_1}, -w_4\overline{\varepsilon_1}, \ldots, w_{15}\overline{\varepsilon_1}, -w_{16}\overline{\varepsilon_1})$

$\varepsilon_2 = (w_2, -w_1, w_4, -w_3, \ldots, w_{16}, -w_{15})$

$\varepsilon_3 = (w_4, w_3, -w_2, -w_1, w_8, w_7, \ldots, -w_{14}, -w_{13})$

$\vdots$

$\varepsilon_9 = (w_{16}, w_{15}, w_{14}, \ldots, -w_2, -w_1)$

A função $\emptyset(n)$

De acordo com $\begin{cases} m = 2^{4a+b}(2k+1) \\ p = \rho(m) = 8a + 2^b \end{cases}$,

dado um número m, o valor máximo de p que é possível ter em uma transformação normada $R^p \times R^m \to R^m$ é por $p = \rho(m)$.

Acabamos de estabelecer a existência destas transformações $R^{\rho(m)} \times R^m \to R^m$ indicando a forma explícita de construí-las. Demonstraremos no próximo capítulo que o valor determinado pela função $\rho(m)$ é máximo.

Utilizaremos este fato para analisar o problema inverso: dado um número natural p, determinar o menor inteiro $m \neq 0$ tal que exista uma transformação normada $R^p \times R^m \to R^m$.

Antes de expressar m como função de p, vamos mostrar que m é potência de 2.

PROPOSIÇÃO 4: Dado um inteiro p, queremos mostrar que o menor inteiro $m \neq 0$, tal que exista uma transformação normada $R^p \times R^m \to R^m$, é uma potência de 2.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Como $p \leq \rho(m)$ (supondo que já mostramos $\rho(m)$ máximo),

se supomos que $m=2^c(2k+1)$ com $k > 0$, isto é, se m não é potência de 2, segue-se que $\rho(m) = \rho(2^c)$, pois ρ só depende do expoente de 2.

Se $m=(2k+1)$ então $\rho(m) = 8a+2^b$

Logo, como possível restrição [se $p < \rho(m)$] de $R^{\rho(m)} \times R^{2^c} \to R^{2^c}$ se tem a transformação normada $R^p \times R^{2^c} \to R^{2^c}$, contradizendo o fato de que m é mínimo; logo, m é uma potência de 2.

<u>DEF.</u>: Dado um número natural n, definimos $\emptyset(n)$ como o número de inteiros t, tais que $0 < t \leq n$ com $t = 0, 1, 2$ ou 4 (mod. 8).

Logo:

TABELA 2:

p	8a+1	8a+2	8a+3	8a+4	8a+5	8a+6	8a+7	8a+8
(p-1)	4a	4a+1	4a+2	4a+2	4a+3	4a+3	4a+3	4a+3

Isto pode ser visto calculando efetivamente alguns valores de $\emptyset(p)$.

$\emptyset(0) = 0$	$\emptyset(11) = 6$
$\emptyset(1) = 1$	$\emptyset(12) = 7$
$\emptyset(2) = 2$	$\emptyset(13) = 7$
$\emptyset(3) = 2$	$\emptyset(14) = 7$
$\emptyset(4) = 3$	$\emptyset(15) = 7$
$\emptyset(5) = 3$	$\emptyset(16) = 8$
$\emptyset(6) = 3$	$\emptyset(17) = 9$
$\emptyset(7) = 3$	$\emptyset(18) = 10$
$\emptyset(8) = 4$	$\emptyset(19) = 10$
$\emptyset(9) = 5$	$\emptyset(20) = 11$
$\emptyset(10) = 6$	$\emptyset(21) = 11$ etc...

Com a ajuda da Tabela 2 podemos estabelecer:

PROPOSIÇÃO 5: Dado p, O inteiro $m = 2^{\emptyset(p-1)}$ é o valor mínimo para a existência de uma transformação normada

$$R^p \times R^{2\emptyset(p-1)} \to R^{2\emptyset(p-1)} \qquad (1)$$

Verificar que $m = 2^{\emptyset(p-1)}$ é o valor mínimo é o objetivo.

Vamos completar a Tabela 2:

p	8a+1	8a+2	8a+3	8a+4	8a+5	8a+6	8a+7	8a+8
$\emptyset$ (p-1)	4a	4a+1	4a+2	4a+2	4a+3	4a+3	4a+3	4a+3
$m=2^{\emptyset(p-1)}$	2^{4a}	2^{4a+1}	2^{4a+2}	2^{4a+2}	2^{4a+3}	2^{4a+3}	2^{4a+3}	2^{4a+3}
ρ (m)	$8a+2^0$	8a+2	8a+4	8a+4	8a+8	8a+8	8a+8	8a+8

Para os oito casos que são indicados na tabela as transformações $R^p \times R^{2\emptyset(p-1)} \to R^{2\emptyset(p-1)}$ existem.

Segue-se de $R^{\rho(m)} \times R^m \to R^m$ considerando as restrições respectivas para os casos 8a+3, 8a+5, 8a+6, 8a+7.

Por exemplo se $p = 8a+5$ o valor mínimo em (1) de $\underline{m}$ deve ser 2^{4a+3}.

Com efeito, o valor mínimo é sempre uma potência de 2 e para qualquer outra potência menor como 2^{4a+2} se tem $\rho(2^{4a+2}) = 8a+4$.

OBSERVAÇÕES:

1. A construção de Lam permite obter transformações normadas $F^{\rho(m)} \times F^m \to F^m$ onde F é um corpo de característica diferente de 2. Com efeito, podemos comprovar que essencialmente não se utilizam as propriedades específicas dos reais (isto também será visto no capítulo 3).

   Assim, a construção nos dá um esquema para passar de uma transformação normada $F^p \times F^q \to F^q$ para outra da forma $F^{p+8} \times F^{16q} \to F^{16q}$.

   Logo, começando com as transformações normadas clássicas

$$F^{2^b} \times F^{2^b} \to F^{2^b} \qquad b = 0,1,2,3$$

Determinadas, respectivamente pela multiplicação em F e pelas multiplicações complexa, quaterniônica e de Cayley sobre F (ver capítulo 4) e procedendo como no caso real, se obtém as transformações $F^{\rho(m)} \times F^m \to F^m$.

2. Adams, Lax e Philips assinalam, sem fazer, outro esquema para obter as transformações de Hurwitz-Radon. [

3. D. Handel constrói as transformações de Hurwitz-Radon de outra maneira. [

4. P. Zvengrowski também estudou várias maneiras de construir transformações de Hurwitz-Radon, para m par. [

5. A função $\emptyset(n)$ definida neste capítulo é a mesma definida por Adams em como $\emptyset(n,o)$ para outros propósitos.

3. DETERMINAÇÃO DO VALOR MÁXIMO $\rho(m)$ PARA UM CORPO F

Já mostramos que dado m, podemos construir uma transformação normada $\emptyset: R^{\rho(m)} \times R^m \to R^m$; mostraremos que $\rho(m)$ é o valor máximo para p em $\emptyset$: $F^p \quad F^m \quad F^m$, $\emptyset$ de Hurwitz-Radon, mas antes vamos estabelecer uma cota superior para $\rho(m)$.

<u>TEOREMA 1</u>: Seja F um corpo de característica diferente de 2 e m um número inteiro tal que $m = h2^q$ com h ímpar. Um conjunto de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de ordem m sobre F, tais que:

(1) $A_i^2 = -I$, $A_iA_j + A_jA_i = 0$ não contém mais de $2q+1$ matrizes, isto é, $r \leq 2q+1$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Seja F* uma extensão algébrica de F que contêm a raiz quadrada de -1. Mostraremos que o número máximo de matrizes m×m C_k sobre F* , anticomutativas, com a propriedade $C_k^2 = -I$ é igual a $2q+1$, onde $m = h2^q$ Com isso, fica demonstrado o teorema, já que se existem sobre F mais de $2q+1$ matrizes que satisfazem (1), ao considerá-las sobre F* se obtém uma contradição.

(1) Seja $C_1, C_2, \ldots, C_{\Psi(m)}$ um conjunto máximo de matrizes $m\times m$ sobre F^*, anticomutativas e cujo quadrado é igual a $-I$. Queremos mostrar que $\Psi(m) \leq 2q+1$.

Se $C_1, \ldots, C_{\Psi(m)}$ satisfaz $C_iC_k + C_kC_i = 0$ e $C_i^2 = -I$ $i = 1, \ldots, \Psi(m)$, então, a mesma propriedade tem o conjunto $QC_1Q^{-1}, \ldots, QC_{\Psi(m)}Q^{-1}$ para cada matriz Q não singular, pois:

1. $C_iC_k + C_kC_i = 0$

$$\Rightarrow 0 = Q(C_iC_k + C_kC_i)Q^{-1} = QC_iC_kQ^{-1} + QC_kC_iQ^{-1} =$$

$$= QC_iQ^{-1}\ QC_kQ^{-1} + QC_kQ^{-1}\ QC_iQ^{-1}$$

2. $C_2 = -I$

$$\Rightarrow (QC_iQ^{-1})^2 = QC_iQ^{-1} \cdot QC_iQ^{-1} = QC_i^2Q^{-1} = Q\text{-}IQ^{-1}\ -I$$

(2) Isto permite, tomando por exemplo C_1 colocá-la na forma normal racional.

$$C_1 = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_k \end{bmatrix}$$

onde cada D_i é uma matriz companheira ou associada.

D_j tem a forma

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_{j1} \\ 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \alpha_{j2} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 & \alpha_{j\lambda_j} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{onde } \alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j\lambda_j} \in F^* \\ j = 1, \ldots, k \end{array}$$

Como $C_1^2 = -I$, segue que as D_j podem ser no máximo 2×2. Se D_j fosse 3×3 teríamos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{j1} \\ 1 & 0 & \alpha_{j2} \\ 0 & 1 & \alpha_{j3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{j1} \\ 1 & 0 & \alpha_{j2} \\ 0 & 1 & \alpha_{j3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{j1} & \alpha_{j3} \cdot \alpha_{j1} \\ 0 & \alpha_{j2} & \alpha_{j1} + \alpha_{j2}\alpha_{j3} \\ 1 & \alpha_{j3} & \alpha_{j2} + \alpha_{j_3}^2 \end{pmatrix} \neq -I$$

Como $D_j^2 = -I$ se tem:

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou } D_j = i \quad \text{ou} \quad D_j = -i$$

(3) Agora, como:

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} i & -1 \\ -i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ i/2i & -1/2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

sabemos que C_1 é similar a uma matriz diagonal com termos $\pm i$ na diagonal.

(4) Então, concluímos que se m é ímpar, então $\Psi(m) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, supondo $\rho(m) > 1$, segue da anticomutividade das matrizes C_j que: $C_1C_2 + C_2C_1 = 0$

$$C_1C_2 = -C_2C_1.$$

Multiplicando por C_2^{-1}

$$C_2^{-1}C_1C_2 = C_2^{-1}(-C_2)C_1$$
$$C_2^{-1}C_1C_2 = -C_1$$

Porém, o conjunto de autovalores de PC_1P^{-1} é igual ao conjunto dos autovalores de $C_1, \forall P$, P matriz inversível.

Como no caso também temos $PC_1P^{-1} = -C_1$, o conjunto de autovalores de $-C_1$ é igual ao conjunto de autovalores de C_1.

Logo, os autovalores de C_1, que são $\pm i$ se trocam por uma mudança de sinal, e isto só é possível se m é par.

(5) Suponhamos agora que m é par. Então, se pode tomar C_1 como uma matriz diagonal com o mesmo número de $+i$ como de $-i$ e também podemos ordenar por meio de uma transformação de similitude, para que:

$$C_1 = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \qquad I = \frac{m}{2} \times \frac{m}{2}$$

Para $r = 2, \ldots, \Psi(m)$ se tem:

$$C_r^{\,2} = -I, \quad C_1C_r + C_rC_1 = 0$$

Decompomos cada C_r em blocos de modo que:

$$C_r = \begin{bmatrix} B_r & A_r \\ \tilde{B}_r & \tilde{A}_r \end{bmatrix}$$ onde A_r, $\tilde{A}_r$, B_r, $\tilde{B}_r$ representam matrizes de ordem m/2.

(6) Usando a anticomutatividade temos:

$$C_1C_r = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r & A_r \\ \tilde{B}_r & \tilde{A}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iB_r & iA_r \\ -i\tilde{B}_r & -i\tilde{A}_r \end{bmatrix}$$

$$C_rC_1 = \begin{bmatrix} B_r & A_r \\ \tilde{B}_r & \tilde{A}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iB_r & -iA_r \\ i\tilde{B}_r & -i\tilde{A}_r \end{bmatrix}$$

$$C_1C_r + C_rC_1 = 0 = \begin{bmatrix} 2iB_r & 0 \\ 0 & -2i\tilde{A}_r \end{bmatrix} \therefore \begin{cases} B_r = 0 \\ \tilde{A}_r = 0 \end{cases}$$

(7) Logo, $C_r = \begin{bmatrix} 0 & A_r \\ \tilde{B}_r & 0 \end{bmatrix}$

Como $C_r^2 = -I = \begin{bmatrix} 0 & A_r \\ \tilde{B}_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_r \\ \tilde{B}_r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r\tilde{B}_r & 0 \\ 0 & A_r\tilde{B}_r \end{bmatrix}$

$A_r\tilde{B}_r = -I \therefore \tilde{B}_r = -A_r^{-1}$

Logo, cada $C_r = \begin{bmatrix} 0 & A_r \\ -A_r^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ com A_r matriz de ordem m/2, não-singular.

(8) Como $C_rC_s + C_sC_r = 0$, temos que:

$$\begin{bmatrix} 0 & A_r \\ -A_r^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_s \\ -A_s^{-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_s \\ -A_s^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_r \\ -A_r^{-1} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A_r A_s^{-1} & 0 \\ 0 & -A_r^{-1} A_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_s A_r^{-1} & 0 \\ 0 & -A_s^{-1} A_r \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -A_r A_s^{-1} - A_s A_r^{-1} & 0 \\ 0 & -A_r^{-1} A_s - A_s^{-1} A_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} A_r A_s^{-1} + A_s A_r^{-1} = 0 \quad (A) & 2 \leq r,s \leq \Psi(m) \\ A_r^{-1} A_s + A_s^{-1} A_r = 0 \quad (B) \end{cases}$$

Particularizando, obtemos $A_t A_2^{-1} + A_2 A_t^{-1} = 0 \therefore A_t A_2^{-1} = -A_2 A_t^{-1}$.

Logo, $(A_t A_2^{-1})^2 = (A_t A_2^{-1})(A_t A_2^{-1}) = (A_t A_2^{-1})(-A_2 A_t^{-1}) =$

$$= A_t I A_t^{-1} = -I$$

e $(A_t A_2^{-1})^2 = -I$

(9) Analogamente, podemos fazer: $A_s A_t^{-1} + A_t A_s^{-1} = 0$

$A_s A_2^{-1} + A_2 A_s^{-1} = 0$

Então:

1. $A_s A_t^{-1} + A_t A_s^{-1} = 0 \Rightarrow A_s A_t^{-1} = -A_t A_s^{-1}$

2. $A_sA_2^{-1} + A_2A_s^{-1} = 0 \Rightarrow A_sA_2^{-1} = -A_2A_s^{-1} \Rightarrow A_2A_s^{-1} = -A_sA_2^{-1}$

3. $A_tA_2^{-1} + A_2A_t^{-1} = 0 \Rightarrow A_tA_2^{-1} = -A_2A_t^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = -A_t^{-1}\,A_2A_t^{-1}$

$\Rightarrow A_2^{-1}A_t = -A_t^{-1}A_2.$

Logo,

$$(A_sA_2^{-1})(A_tA_2^{-1}) = A_s(A_2^{-1}A_t)\,A_2^{-1} \overset{3.}{=} A_s(-A_t^{-1}A_2)A_2^{-1} = -A_sA_t^{-1} =$$

$$\overset{1.}{=} A_tA_s^{-1} = A_tA_2^{-1}A_2A_s^{-1} = -(A_tA_2^{-1})(A_sA_2^{-1}).$$

Assim, $(A_sA_2^{-1})(A_tA_2^{-1}) + (A_tA_2^{-1}) + (A_tA_2^{-1})(A_sA_2^{-1}) = 0.$

Desse modo, as $m/2 \times m/2$ matrizes $A_sA_2^{-1}$ $(s = 3, \ldots, \Psi(m))$ formam, da mesma maneira que as matrizes C_r $(r = 1, \ldots, \Psi(m))$, um conjunto de matrizes anticomutativas cujo quadrado é igual a $-I$.

Se considerarmos que o número máximo de tais matrizes de ordem $m/2$ é $\Psi(m/2)$, segue que $\Psi(m/2) \geq \Psi(m) - 2$ (*).

(10) Seja E_t $(t = 1, \ldots, \Psi(m/2))$ um conjunto máximo de matrizes de ordem $m/2$ satisfazendo

$$E_tE_s + E_sE_t = 0 \quad \text{e} \quad E_t^2 = -I \qquad (**)$$

Então se verifica que $\begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E_t \\ E_t & 0 \end{bmatrix}$

É um conjunto de matrizes $m \times m$ também satisfazendo (**). Logo, se tem $\Psi_{(m)} \geq \Psi_{(m/2)} + 2$. Portanto, junto com a desigualdade anterior, resulta que:

$$\Psi_{(m)} = \Psi_{(m/2)} + 2 .$$

(11) Como $\Psi_{(h)} = 1$ para h ímpar, veremos que $\Psi_{(m)} = \Psi_{(h2^q)} = 2q+1$

DEMONSTRAÇÃO: Por indução em q: 1. $\Psi(h2^0) = \Psi(h) = 1$ onde h ímpar. 2. Se vale para q, isto é, $\Psi(h2^q) = 2q+1$, queremos mostrar que vale para q+1

$$\Psi(\underbrace{h2^{q+1}}_{m}) = \Psi(m/2) + 2 = \Psi\left(\frac{h2^q.2}{2}\right) + 2 =$$

$$= \Psi(h2^q) + 2 = 2q+1+2 = 2q+3 = 2q+2+1 =$$

$$= 2(q+1) + 1 = \Psi(h2^{q+1})$$

TEOREMA 2: Seja $\xi: F^p \times F^m \to F^m$ uma transformação normada, onde F é um corpo arbitrário de característica $\neq 2$. Se $m=2^q(2k+1)$, então $p \leq 2q + 2$.

DEMONSTRAÇÃO: Obtém-se de ξ um conjunto $B_1, B_2, \dots, B_{p-1}$ de matrizes de ordem m sobre F, satisfazendo $B_iB_j + B_jB_i = 0$ e $B_i^2 = -I$.
Aplicando o TEOREMA 1, $p - 1 \leq 2q+1$ $\therefore$

$$p \leq 2q+2$$

OBSERVAÇÕES: 1 Como já foi dito, as matrizes B_1, B_2, .., B_{p-1} construídas no capítulo 1 são anti-simétricas, isto é, $(B_i)^t = -B_i$.

Esta condição não é satisfeita em geral pelas matrizes construídas no TEOREMA 1. Portanto, estas matrizes não podem ser usadas diretamente para estabelecer a existência de transformações normadas.

2 Como o TEOREMA 2 generaliza o resultado do capítulo 1 para um corpo F de características $\neq 2$ arbitrário e p qualquer, se particularizarmos F=R e p=m, devemos obter o mesmo resultado. Isto é, se $F = R$, $m = 2^q(2k+1)$ e p=m, por teorema 2 acima $p \leq 2q+2$. Como p=m. $2^q(2k+1) \leq 2q+2$ desigualdade que só é possível em inteiros não-negativos se k=0 e q = 0, 1, 2, 3.

DEMONSTRAÇÃO: De fato, se k=0, temos $2^q \leq 2q + 2$ que é satisfeita para

$q = 0$	$2^0 \leq 2$
$q = 1$	$2^1 \leq 2+2$
$q = 2$	$2^2 \leq 4+2$
$q = 3$	$2^3 \leq 6+2$
$q = 4$	$2^4 \leq 2.4+2$
	$16 \leq 10$ Falso!

Se $k \neq 0$, o menor k, k=1 nos dá

$2^q(2.1+1) = 2^q(2+1) = 2.2^q+2^q$

Como $2^n > n, \forall n \geq 1$, $2^q > 2q \; \forall q \geq 1$

Logo, $2.2^q + 2q > 2q + 2^q > 2q + 2$

Falta só verificar k=1, q=0. $2^0(3) \leq 2$ Falso!

CONSEQUÊNCIA: Existe uma álgebra normada $F^m \times F^m \to F^m$ sobre F corpo de característica $\neq 2$, só se m = 1, 2, 4, 8.

A existência destas álgebras será tratada no capítulo seguinte.

[3] Comparemos as cotas dos valores de p que se obtêem do TEOREMA 2 com os valores de p que resultam da função de Hurwitz-Radon.

Seja $m=2^{4a+b}(2k+1)$ com $0 \leq b \leq 3$. Tem-se a seguinte tabela:

	Função de Hurwitz-Radon $\rho(m) = 8a+2^b$	TEOREMA 2 $p \leq 2q+2$ $q=4a+b$ $p \leq 8a+2b+2$
b=0	8a+1	8a+2
b=1	8a+2	8a+4
b=2	8a+4	8a+6
b=3	8a+8	8a+8 ←

4 Como indicamos no princípio deste capítulo , a construção de Lam permite obter transformações normadas

$F^{\rho(m)} \times F^m \to F^m$ onde F é um corpo de característica $\neq 2$.

Se $m=2^{4a+3}(2k+1)$ a tabela acima nos assegura que o valor $\rho(m)$ é máximo; isto é, $\rho(m)$ é máximo no caso b=3. ←

5 Hurwitz, no trabalho original [ ], determinou o conjunto máximo de matrizes quando a condição $A_i^2 = -I$ é substituída pela condição $A_i^2 = I$.

A demonstração do TEOREMA 1 para números complexos é devida a M.H.A. Newman [ ] e [ ].

Uma demonstração do TEOREMA 1, usando representação de grupos foi publicada por D.E. Littlewood [ ].

Alguns anos depois, W. Eichorn notou [ ] que os argumentos de Newman valiam também para um conjunto de matrizes sobre um corpo qualquer F com característica diferente de 2.

Finalmente, Dieudonné generalizou em [ ] os problemas de Hurwitz e Newman e os considera sobre corpos não necessariamente abelianos.

UMA FORMA CANÔNICA PARA UM CONJUNTO DE MATRIZES

Dado um conjunto numerado de matrizes

$\Sigma = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ de ordem m sobre F satisfazendo

$$A_iA_j + A_jA_i = 0$$
$$A_i^2 = -I \quad ,$$

Demonstraremos que existe um conjunto similar

$Q\,\Sigma\,Q^{-1} = (QA_1Q^{-1}, \ldots, QA_rQ^{-1})$ que tem uma forma canônica particular. Para isto, vamos sistematizar alguns resultados já vistos.

No que se segue supomos $i = \sqrt{-1} \in F$.

PROPOSIÇÃO 1: Seja a uma matriz sobre F de ordem m, tal que $A^2 = -I$. Então, A é similar a $\begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix}$ com $\alpha+\beta = m$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: A pode ser colocada na forma canônica racional

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & D_2 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_k \end{bmatrix}$$

onde cada D_j é da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \dots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \alpha_k \end{bmatrix}$$

Logo, cada D_j é no máximo 2×2.

Isto é: ou D_j é 1×1, $D_j = i$ ou $D_j = -i$, ou D_j é 2×2 e

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \end{matrix} \quad D_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

temos que

$$A = \begin{bmatrix} i & & & & & & & \\ & -i & & & & & & \\ & & i & & & & & \\ & & & i & & & & \\ & & & & -i & & & \\ & & & & & -i & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & i \end{bmatrix}$$

e podemos através de uma transformação de similaridade colocá-la na forma pedida, isto é

$$\begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{com } \alpha + \beta = m \\ \alpha , \beta \geq 0 \end{array}$$

Por exemplo: suponha $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

Queremos fazer uma transformação de similaridade que a transforme em $A' = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$, para isto, basta fazer

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

PROPOSIÇÃO 2: Seja $\Sigma = (A_1 , A_2)$ um conjunto de duas matrizes sobre F de ordem m satisfazendo

$$A_i A_j + A_j A_i = 0$$
$$A_i^2 = -I$$

Então, m é par e existe uma matriz Q não-singular, tal que:

$$Q \Sigma Q^{-1} = \left[\begin{bmatrix} iI & \\ & -iI \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} \right]$$

DEMONSTRAÇÃO:

1) m é par:

se m fosse ímpar como $A_1A_2 + A_2A_1 = 0$

$$A_2^{-1}A_1A_2 = -A_2A_1$$

$$e\ -A_1 = A_2^{-1}A_1A_2\ ,$$

os autovalores de A_1 e de $-A_1$ seriam os mesmos e teriam seus sinais trocados. Logo, m tem que ser par.

2) existe Q não-singular, tal que

$$Q\,\Sigma\,Q^{-1} = \begin{bmatrix} iI & \\ & -iI \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}$$

pela proposição 1, A_1 é similar a $\begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix}$

logo, A_2 é $\begin{bmatrix} & B \\ -B^{-1} & \end{bmatrix}$

se $Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ temos que: $Q^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$

e 1. $QA_1Q^{-1} = A_1$, pois

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iB^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix}$$

2. $QA_2Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B \\ -B^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B^{-1} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

PROPOSIÇÃO 3: Seja $\Sigma = (A_1, \ldots, A_r)$ um conjunto numerado de r matrizes sobre F de ordem m tais que $A_iA_j + A_jA_i = 0$ e $A_i^2 = -I$. Então, a menos de similaridade podemos supor que

$$A_1 = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} , \quad A_j = \begin{bmatrix} 0 & B_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix}$$

$j = 3, 4, \ldots, r$ onde as $r-2$ matrizes de ordem $m/2$ de $\Sigma_1 = (B_3, \ldots, B_r)$ satisfazem também as condições $B_i^2 = -I$ $B_iB_j + B_jB_i = 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela proposição 2, podemos supor que A_1, A_2 tem a forma acima.

Seja $E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ suponhamos que

$E^2 = -I$ e que E anticomuta com A_1 e A_2.

Então,

$$A_1E = -EA_1 \therefore A = D = 0$$

$$E^2 = -I \therefore C = -B^{-1}$$

$$EA_2 = -A_2E \therefore B = -B^{-1}$$

Portanto, $E = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$ com $B^2 = -I$. Isto demonstra que

$A_j = \begin{bmatrix} 0 & B_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix}$ com $B_j^2 = -I$.

Como $A_jA_k + A_kA_j = 0$,

$$\begin{bmatrix} 0 & B_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B_k \\ B_k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_k \\ B_k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} B_jB_k & 0 \\ 0 & B_jB_k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_kB_j & 0 \\ 0 & B_kB_j \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; B_jB_k + B_kB_j = 0$$

$$B_kB_j + B_jB_k = 0$$

<u>DEFINIÇÃO 1</u>: Uma cadeia de Hurwitz é uma sucessão Σ_o, Σ_1, ..., $\Sigma_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ que

(1) começa com um conjunto numerado de r matrizes de ordem m.

$\Sigma_o = (A_1^o, A_2^o, \ldots, A_r^o)$, onde se $r = 2t$ ou se $r = 2t+1$, supomos que 2^t divide m.

(2) Agora, para todo k, $0 \leq k \leq \left[\frac{r-1}{2}\right]$ supõe-se que $\Sigma_k = (A^k_{2k+1}, A^k_{2k+2}, \ldots, A^k_r)$ é um conjunto ordenado com r-2k matrizes A^k_j de ordem m/2k que sempre inicia com

$$A^k_{2k+1} = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \qquad A^k_{2k+2} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$\forall k$

(3) Além disso, supõe-se que Σ_{k+1} determina Σ_k, como se segue:

$$\Sigma_k = \left[\begin{bmatrix} iI & \\ & iI \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & A^{k+1}_{2k+3} \\ A^{k+1}_{2k+3} & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & A^{k+1}_r \\ A^{k+1}_r & \end{bmatrix}\right]$$

(4) Finalmente, o último termo fica determinado pela paridade de r da seguinte forma:

$$\Sigma_{\left[\frac{r-1}{2}\right]} = \begin{cases} \Sigma_{t-1} = \begin{bmatrix} iI & \\ & -iI \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}, & \text{se } r = 2t \\ \Sigma_t = \begin{vmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{vmatrix}, & \text{se } r = 2t+1 \end{cases}$$

Algumas observações sobre uma cadeia de Hurwitz:

1. Claramente, todas as matrizes de cada Σ_k satisfazem as condições $A_i^2 = -I$ e $A_i A_k + A_k A_i = 0$ pois isto é verdade para o último termo $\Sigma_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ e se é verdade para Σ_k, também o é para Σ_{k-1}.

2. Se $m = 2^q(h)$ é a dimensão de cada matriz. Então, r = número de matrizes $\leq 2q+1$ pelo teorema 1. No melhor caso teremos $r = 2q+1$.

   Por outro lado, cada termo Σ_k da cadeia de Hurwitz tem elementos, matrizes, com a metade da dimensão dos elementos do termo anterior Σ_{k-1}.

   Isto é, se m = dimensão das matrizes de Σ_o

   $m/2$ = dimensão das matrizes de Σ_1

   $m/2^2$ = dimensão das matrizes de Σ_2

   $m/2^q$ = dimensão das matrizes do último termo = Σ_q.

   Logo, o último termo

   $$q = \left[\frac{r-1}{2}\right] \quad \text{será} \quad \begin{cases} t, \text{ se } r = 2t+1, \text{ isto é, } r \text{ ímpar} \\ t-1, \text{ se } r = 2t, \text{ isto é, } r \text{ par.} \end{cases}$$

Continuando gostaríamos de mostrar 2 fatos:

(1) Que todo conjunto $\Sigma = (A_1, \ldots, A_r)$ de $\underline{r}$ matrizes de ordem $\underline{m}$ sobre F tais que $A_i^2 = -I$, $A_i A_k + A_k A_i = 0$ pode ser

transformado, usando matrizes não-singulares, numa cadeia de Hurwitz;

(2) Que se o conceito de cadeia de Hurwitz for ampliado - um pouco-esta transformação acima pode ser feita utilizando uma única matriz não-singular Q.

Este segundo fato leva à demonstração, já prometida, de que $\rho(m)$ é máximo.

TEOREMA 3: Dado $\Sigma = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ um conjunto de r matrizes de ordem m sobre F, tais que:

$$(*) \quad \begin{cases} A_i^2 = -I \\ A_iA_k + A_kA_i = 0 \quad i \neq k \quad i,k = 1, \ldots, r \end{cases}$$

Então Σ pode ser transformado, através da multiplicação por matrizes não-singulares P'_{is} $i = 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]$ em uma cadeia de Hurwitz $\Phi_o, \Phi_1, \ldots, \Phi_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$.

DEM.: (1) Por proposições 2 e 3 existe uma matriz não-singular P_o, de ordem m tal que

$P_o \Sigma P_o^{-1} = \{B_{10}^o, B_{20}^o, B_{30}^o, \ldots, B_{ro}^o\} = \phi_o^o$ onde para cada matriz

B_{io}^o . o índice superior indica que a ordem da matriz é $m/2^o = m$.

. o 1º índice inferior indica de qual matriz do conjunto $\Sigma = (A_i)$, B^o_{io} provém

e . o 2º índice inferior indica que esta matriz foi multiplicada à esquerda por P_o e à direita por P_o^{-1}, isto é, que ela sofreu a 0-ésima transf. de similitude.

Isto é $B^o_{20} = P_o\, A_2\, P_o^{-1}$.

Sabemos pelas proposições já citadas que

$$B^o_{10} = \left[\begin{array}{c:c} iI & \\ \hdashline & -iI \end{array}\right] \qquad B^o_{20} = \left[\begin{array}{c:c} & I \\ \hdashline -I & \end{array}\right]$$

e B^o_{jo} para $j = 3, \ldots, r$ é da forma

$$B^o_{jo} = \left[\begin{array}{c|c} & B^1_{jo} \\ \hline B^1_{jo} & \end{array}\right]$$

onde B^1_{jo} é uma matriz de ordem m/2

e B^1_{jo}'s resultam da aplicação das props.

para

$j \geq 2, \ldots, r$.

Temos então o conjunto

$$\phi^1_o = \{B^1_{30}, B^1_{10}, \ldots, B^1_{ro}\}$$

de r-2 matrizes de ordem m/2 que satisfazem (*).

(2) Aplicando de novo props. 2 e 3 ao conjunto ϕ^1_o, segue que existe uma matriz P_1 de ordem m/2, tal que:

$$P_1\phi_o^1 P_1^{-1} = \{B_{31}^1, B_{41}^1, B_{51}^1, \dots, B_{r1}^1\} = \phi_1^1 \text{ onde}$$

$B_{31}^1 = \left[\begin{array}{c:c} iI & \\ \hdashline & -iI \end{array}\right]$ $\quad B_{41}^1 = \left[\begin{array}{c:c} & I \\ \hdashline -I & \end{array}\right]$ e B_{j1}^1 para $j = 5, \dots, r$

é da forma

$B_{j1}^1 = \left[\begin{array}{c:c} & B_{j1}^2 \\ \hdashline B_{j1}^2 & \end{array}\right]$ onde B_{j1}^2 é uma matriz que ordem $m/2^2$ e cada B_{j1}^2 já foi multiplicada por P_o e P_1.

Podemos então considerar o conjunto

$\phi_1^2 = \{B_{51}^2, B_{61}^2, \dots, B_{r1}^2\}$ de matrizes de ordem $m/2^2$, com $r-4$ matrizes que satisfazem (*),

e aplicar o mesmo procedimento, i.e., existe P_2 de ordem $m/2^2$ tal que ...

(3) em geral: para $1 \le k < \left[\frac{r-1}{2}\right]$

$\phi_{k-1}^k = \{B_{2k+1\ k-1}^k, B_{2k+2\ k-1}^k, \dots, B_{r\ k-1}^k\}$ é um

conjunto de $r-2k$ matrizes de ordem $m/2k$ que satisfazem (*) e aplicando props. 2 e 3 existe P_k de ordem $m/2^k$ tal que

$$P_k\phi_{k-1}^k \ P_k^{-1} = \phi_k^k = \{B_{2k+1\ k}^k, B_{2k+2\ k}^k, B_{2k+3\ k}^k, \dots, B_{r\ k}^k\}$$

onde

$$B^k_{2k+1\ k} = \begin{bmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{bmatrix} \qquad B^k_{2k+2\ k} = \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} \quad e$$

$B^k_{j\ k}$ para $j \geqslant 2k+3, \ldots, r$ é da forma

$$B^k_{jk} = \left[\begin{array}{c|c} & B^{k+1}_{jk} \\ \hline B^{k+1}_{jk} & \end{array}\right]$$

como sempre então podemos considerar o conjunto

$\phi^{k+1}_k = \{B^{k+1}_{2k+3_k}, \ldots, B^{k+1}_{r\ k}\}$ de matrizes de ordem $m/2^{k+1}$ que satisfazem (*).

(4) Agora para o último termo, quando $k+1 = \left[\frac{r-1}{2}\right]$ temos 2 possibilidades:

ou $\begin{cases} r = 2t \text{ i.e. } r \text{ é par e } \left[\frac{r-1}{2}\right] = t-1 \\ \text{ou} \\ r = 2t+1 \quad \text{i.e. } r \text{ é ímpar } \left[\frac{r-1}{t}\right] = t \end{cases}$

(4.1) se r é par: ϕ^{t-1}_{t-2} é um conjunto de 2 matrizes

$\left\{B^{t-1}_{r-1\ t-2}, B_{r\ t-2}^{t-1}\right\}$ de ordem $m/2^{t-1}$

onde $\exists$ P_{t-1} não singular tal que

$$P_{t-1}B^{t-1}_{r-1\ t-2}P^{-1}_{t-1} = \begin{pmatrix} iI & \\ & -iI \end{pmatrix} = B^{t-1}_{r-1\ t-1}$$

$$\text{e } P_{t-1}\ B^{t-1}_{r\ t-2}\ P^{-1}_{t-1} = \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix} = B_{r\ t-1}^{\ t-1}$$

e tal que $\phi_{t-1} = \left\{B^{t-1}_{r-1\ t-1}\ ,\ B_{r\ t-1}^{\ t-1}\right\}$ é o último elemento da cadeia de Hurwitz.

(42) Se r é ímpar:

ϕ^{t}_{t-1} é um conjunto com 1 matriz $B_{r\ t-1}^{\ t}$ de ordem $m/2^t$.

e existe P_t tal que

$$P_t B_{r\ t-1}^{\ t} P_t = B^{t}_{r-t} = \begin{pmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{pmatrix} \text{onde } \alpha+\beta = m/2^t$$

Além disso $B^{t}_{rt} = \phi_t$ é o último termo da cadeia de Hurwitz.

(5) Queremos mostrar que $\phi_o,\ \phi_1,\ \ldots,\phi_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ é uma cadeia de Hurwitz.

Agora por construção se fizermos

$$\Phi_o = \{B^{o}_{10}\ ,\ B_{20},\ B^{o}_{31},\ B^{o}_{41},\ B^{o}_{52},\ B^{o}_{62},\ \ldots,\ B^{o}_{r-1\,\blacksquare},\ B^{o}_{r\,\blacksquare}\ \}$$

$$\Phi_1 = \{B^{1}_{31},\ B^{1}_{41},\ B^{1}_{52},\ B^{1}_{62},\ \ldots,\qquad B^{1}_{r-1\,\square},\ B^{1}_{r\,\blacksquare}\ \}$$

$$\Phi_2 = \{B^{2}_{52},\ B^{2}_{62},\ \ldots\ ,\qquad B^{2}_{r-1\,\square},\ B^{2}_{r\,\square}\ \}$$

$$\vdots$$

$$\Phi_{\left[\frac{r-1}{2}\right]} = \begin{cases} \Phi_{t-1} = \left\{B^{\ t-1}_{r+t-1}\ ,\ B^{\ t-1}_{rt-1}\right\} & r \text{ par} \\ \text{ou} & \\ \Phi_t = \left\{B^{\ t}_{rt}\right\} & r \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$\Phi_i \quad i = 1,\ \ldots,\ \left[\frac{r-1}{2}\right] \text{ é uma cadeia de Hurwitz.}$$

onde $\square$ significa t-1 se r é par

e t se r é ímpar

(6) Note que esta construção funciona efetivamente pois

As 2 primeiras matrizes só estão multiplicadas por P_o;

As 2 seguintes estão multiplicadas de maneira dimensionalmente correta, por P_o e P_1;

As seguintes estão multiplicadas de maneira dimensionalmente correta, por P_o, P_1, P_2.

etc... sucessivamente até o último termo.

Vamos agora generalizar o conceito de cadeia de Hurwitz permitindo na cláusula 2 da definição que cada Σ_k inicie com:

TIPO A: $A^k_{2k+1} = \begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \qquad A^k_{2k+2} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

ou

TIPO B: $A^k_{2k+1} = \begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \qquad A^k_{2k+2} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$

Com esta definição mostraremos o teorema seguinte:

TEOREMA 4: Dado um conjunto de matrizes $\Sigma = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ de r matrizes de ordem m sobre F satisfazendo:

$$A_i^2 = -I \qquad i, k = 1, \ldots, r$$

$$A_i A_k + A_k A_i = 0 , \qquad i \neq k .$$

Existem uma cadeia generalizada de Hurwitz $\Sigma_o, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ e uma matriz não-singular Q tais que $Q \Sigma Q^{-1} = \Sigma_o$.

DEM.: (1) Construção dos conjuntos Σ^k índice superior

1. Por proposições 2 e 3, existe P_o não-singular tal que

$$P_o \Sigma P_o^{-1} = \left[A_1^o,\ A_2^o,\ \begin{bmatrix} & B_3^1 \\ B_3^1 & \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} & B_4^1 \\ B_4^1 & \end{bmatrix},\ \ldots,\ \begin{bmatrix} & B_4^1 \\ B_4^1 & \end{bmatrix}\right]$$

onde $A_1^o = \begin{bmatrix} iI & \\ & iI \end{bmatrix}$ $\quad A_2^o = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ e para

$\forall_j \geq 3, \ldots, r$ $\quad B_j^1$ são as matrizes que resultam de aplicar a proposição 2.

2. Consideremos agora $\Sigma^1 = (B_3^1, B_4^1, \ldots, B_r^1)$. Σ^1 é um conjunto de r-2 matrizes de ordem m/2 que satisfazem (*). Aplicando prop. 2 e 3 a Σ^1, obtemos P_1 tal que

$$P_1 \Sigma^4 P_1^{-1} = \left[A_3^1,\ A_4^1,\ \begin{bmatrix} & B_5^2 \\ B_5^2 & \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} & B_6^2 \\ B_6^2 & \end{bmatrix}\ \cdots\ \begin{bmatrix} & B_r^2 \\ B_r^2 & \end{bmatrix}\right]$$

onde $A_3^1 = \begin{bmatrix} iI & \\ & -iI \end{bmatrix}$ e $A_4^1 = \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}$ de ordem m/2 e

as B_j^2 são matrizes de ordem $m/2^2$ que resultam de ($j = 5, \ldots, r$) aplicar proposição 3.

3. Logo, temos $\Sigma^2 = (B_5^2, B_6^2, \ldots, B_r^2)$ que é um conjunto de r-4 matrizes de ordem $m/2^2$ e podemos aplicar de novo o mesmo procedimento.

4. Em geral: para $1 \leq k \leq \left[\frac{r-1}{2}\right]$

$\Sigma^k = (B_{2k+1}^k, \ldots, B_r^k)$ é um conjunto de r-2k matrizes que satisfazem (*) e aplicando proposições 2 e 3 resulta:

$$P_k \Sigma^k P_k^{-1} = \left[(A^k_{2k+1})\ (A^k_{2k+2}) \begin{pmatrix} & B^{k+1}_{2k+3} \\ B^{k+1}_{2k+3} & \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} & B^{k+1}_{r} \\ B^{k+1}_{r} & \end{pmatrix} \right]$$

onde $A^k_{2k+1} = \begin{pmatrix} iI & \\ & -iI \end{pmatrix}$ $\quad A^k_{2k+2} = \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}$ e novamente obtém-se um conjunto

$\Sigma^{k+1} = (B^{k+1}_{2K+3}, B^{k+1}_{2k+4}, \ldots, B^{k+1}_r)$ formado por matrizes de ordem $m/2^{k+1}$.

5. Para o último termo $k = \left[\frac{r-1}{2}\right]$ temos dois casos:

$$\frac{r-1}{2} \begin{cases} t-1 & \text{se } r=2t, \text{ isto é, se } r \text{ é par} \\ t & \text{se } r=2t+1, \text{ isto é, se } r \text{ é ímpar} \end{cases}$$

onde

$$\Sigma^{[r-1/2]} \begin{cases} \Sigma^{t-1} = (B^{t-1}_{r-1},\ B^{t-1}_r) & \text{se } r = 2t \\ \Sigma^{t} = (B^{t}_{r}) & \text{se } r = 2t+1 \end{cases}$$

Para ambos os casos existem, respectivamente, Σ_{t-1} e P_t não singulares, tais que:

$$\Sigma_{t-1} = P_{t-1} \Sigma^{t-1} P^{-1}_{t-1} = \left[\begin{pmatrix} iI & \\ & -iI \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix} \right]$$

$$\Sigma_t = P_t \Sigma^t P_t^{-1} = \left[\begin{pmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{pmatrix} \right] \qquad \alpha + \beta = m/2^t$$

onde Σ_{t-1} e Σ_t são, respectivamente, o último termo da cadeia de Hurwitz generalizada para r par ou r ímpar.

2ª PARTE: Construção de Q:

Queremos obter Q_k's tais que: $\Sigma_k = Q_k \Sigma^k Q_k^{-1}$.

Definimos para $0 \leq k+j \leq [(r-1)/2]$

$$m_k^j = \begin{bmatrix} & & P_{j+k} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ P_{j+k} & & \end{bmatrix}$$

A matriz que tem 2^j blocos P_{j+k} na diagonal secundária e zeros fora disso.

Temos $M_k^o = P_k$.

Como P_i é de ordem $m/2^i$, M_k^j é de ordem $m/2^k$.

Logo, para $0 \leq k \leq [r-1/2]$ definimos as matrizes

$$Q_k = M_k^{\left[\frac{r-1}{2}\right]-k} \cdots M_k^1 \cdot M_k^o$$

Seja D uma matriz não-singular de ordem $m/2^{k+1}$

se $E = \begin{bmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{bmatrix}$ para as matrizes

$$A_{2k+1}^k = \begin{pmatrix} iI & \\ & -iI \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2k+2}^k = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Temos

<u>PROPRIEDADE 1</u>: $E\, A_{2k}^{k} E^{-1} = -A_{2k+1}$ e $A_{2k+2}^{k}\, E^{-1} = -A_{k+2}^{k}$

Usando a propriedade 1 iterativamente, encontramos:

$\Sigma_k \; Q_k \Sigma^k Q_k^{-1}$ onde significa que podemos ter como duas pri primeiras matrizes.

TIPO (A) $\begin{pmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ ou

TIPO (B) $\begin{pmatrix} -iI & 0 \\ 0 & iI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ i & 0 \end{pmatrix}$

e o último termo da cadeia continua correto.

Se $Q = Q_o$, temos $\Sigma_o \; Q_o \Sigma Q_o^{-1}$.

Isto é, encontramos Q_o que nos leva à uma cadeia de Hurwitz generalizada, onde os dois primeiros termos de cada Σ_k podem ser do tipo A ou B.

$\blacksquare$

Usando o conceito de cadeia de Hurwitz generalizada temos:

(1) $\Sigma_o = Q_o \, \Sigma \, Q_o^{-1}$ onde Σ_o é uma cadeia de Hurwitz generalizada.

Suponha agora que as matrizes de Σ são anti-simétricas, isto é,

$$A_k^t = -A_k \quad \forall_k = 1, 2, \ldots, r.$$

Podemos escrever $\Sigma^t = -\Sigma$.

Usando (1) temos $\Sigma_1 = Q_o^{-1}\Sigma_o Q_o$ logo $(Q_o^{-1}\Sigma_o Q_o)^t = -Q_o^{-1}\Sigma_o Q_o$

$$Q_o \Sigma_o^t (Q_o^{-1})^t = -Q_o^{-1}\Sigma_o Q_o$$

Portanto $Q_o Q_o^t \Sigma_o^t = -\Sigma_o Q_o Q_o^t$ e se chamamos $Q_o Q_o^t = U_o$ temos (2) $U_o \Sigma_o^t = -\Sigma_o U_o$ e $U_o^t = (Q_o Q_o^t)^t = Q_o Q_o^t = U_o$ logo U_o é simétrica.

Vamos agora chamar os elementos da cadeia de Hurwitz generalizada Σ_o de

$$\Sigma_o = (B_1, B_2, \ldots, B_r)$$

Assim a condição (2) se reduz a

$$U_o B_k^t = -B_k U_o \qquad k = 1, \ldots, r$$

Sejam:

$$C_1 = \begin{bmatrix} I & \\ & -I \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} -I & \\ & +I \end{bmatrix}$$

$$\text{e} \quad C_5 = \begin{bmatrix} & -I \\ I & \end{bmatrix}$$

5 matrizes que observamos tem a mesma estrutura das matrizes em Σ_o, à exceção do i de C_1, C_4.

PROPOSIÇÃO 4: Seja U uma matriz tal que

$$UC_j^t = -C_jU \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Então 1) $U = \begin{bmatrix} & U_* \\ -U_* & \end{bmatrix}$ onde $U_*D^t = DU_*$.

2) se $U^t = \varepsilon U$ onde $\varepsilon = \pm 1$ então $U_*^t = -\varepsilon U_*$.

DEM: Seja U uma matriz qualquer $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

Então:

1. Como $UC_1^t = C_1U$ temos $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ A = -A \Rightarrow A=0 \qquad \text{logo } U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$
$$D = -D \Rightarrow D=0$$

2. Como $UC_2^t = -C_2U$ temos: $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$B = -C \quad \text{logo } U = \begin{pmatrix} 0 & -C \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

3. Como $UC_3^t = -C_3U$ temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D^t \\ D^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -D \\ -D & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} BD^t & 0 \\ 0 & -BD^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DB & 0 \\ 0 & -DB \end{pmatrix} \qquad BD^t = DB$$

se $B = U_*$

segue $U_*D^t = DU_*$

$UC_4^t = -C_4U$ e $UC_5^t = -C_5U$

4 e 5 são análogos.

e se $U^t = \varepsilon U$ então $U_*^t = -\varepsilon U_*$ pois:

$$U = \begin{pmatrix} & B \\ -B & \end{pmatrix} \qquad U^t = \begin{pmatrix} 0 & -B^t \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$$

se $U^t = -U$ então $-B^t = -B \therefore U_*^t = U_*$

se $U^t = U$ então $-B^t = B \therefore U_*^t = -U_*$

<u>PROPOSIÇÃO 5</u>: Suponha agora que $UC_j = C_jU$ para $j = 1, 2, \ldots, 5$

Então: 1. $U = \begin{bmatrix} U_* & \\ & -U_* \end{bmatrix}$ com $U_*D^t = -DU_*$

2. se também supomos que $U^t = \varepsilon U$, $\varepsilon = \pm 1$,

resulta que $U_*^t = \varepsilon U_*$.

<u>DEM</u>: Seja U qualquer, $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

1) $UC_1^t = C_1U \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ C & -D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & -D \end{pmatrix}$$

$$-B = B \Rightarrow B = 0$$

$$-C = C \Rightarrow C = 0$$

Logo:

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

2) $UC_2^t = C_2U \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -A \\ D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -A & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -D$$

Logo:

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

3) $UC_3^t = C_3U \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D^t \\ D^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & AD^t \\ -AD^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -DA \\ DA & 0 \end{pmatrix}$$

Se $U_*=A$ $\quad U_*D^t = -DA$

$$-U_*D^t = DA$$

$$UC_4^t = C_4U \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -A & B \\ -C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -B \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$B = -B \Rightarrow B=0$$

$$C = -C \Rightarrow C=0$$

$$UC_5^t = C_5U \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & A \\ -D & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -D \\ A & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -D$$

Além disso se $U^t = \varepsilon U$ então $U_*^t = \varepsilon U_*$ pois se

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U^t = \begin{pmatrix} A^t & \\ & -A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

então $A^t = A$

e se $U^t = \begin{pmatrix} A^t & \\ & -A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & \\ & A \end{pmatrix}$ então $A^t = -A$

Logo vamos mostrar:

<u>TEOREMA 5</u>: Suponha que as matrizes $\Sigma = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ de ordem $\underline{m}$ sobre F satisfaçam:

$$A_1^2 = -I$$
$$A_iA_j + A_jA_i = 0 \qquad \forall_{i,j} = 1, \ldots, r$$
$$A_i^t = -A_i$$

Então existe uma sucessão $U_o, U_1, \ldots, U_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ onde cada U_i é uma matriz não-singular de ordem $m/2^j$ tal que são satisfeitas as seguintes relações:

(1) $U_{2t} = \begin{bmatrix} & U_{2k+1} \\ -U_{2k+1} & \end{bmatrix}$; $U_{2k+1} = \begin{bmatrix} U_{2k+2} & \\ & U_{2k+2} \end{bmatrix}$

(2) $U_k\Sigma_k^t = (-1)^{k+1}\Sigma_kU_k$

(3) $U_k^t = (-1)^{k(k+1)/2}\ U_k$ onde:

Σ_k com $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{r-1}{2}\right]$ é a cadeia de Hurwitz generalizada determinada por Σ_1 de acordo com o teorema passado.

O termo U_o é determinado por $U_o = Q_oQ_o^t$ e como já vimos satisfaz

(2) $U_o\Sigma_o^t = -\Sigma_oU_o$ e também $U_o^t = (-1)^oU_o$ pois

$$U_o^t = (Q_oQ_o^t)^t = Q_oQ_o^t = U_o\ .$$

Se U_o satisfaz (2) isto é $U_o B_k^t = -B_k U_o$ onde B_k tem a forma de C_1, C_2, C_3, C_4 ou C_5 usamos a proposição 1 que nos diz que.

$$U_o = \begin{bmatrix} & U_1 \\ -U_1 & \end{bmatrix}$$ onde $U_1 = U_*$ da prop. 1 como também sabemos

que $U_* D^t = DU_*$ isto é $U_1 D^t = DU_1$ segue que

1) $U_1 \Sigma_1^t = \Sigma_1 U_1$

2) $U_1^t = -U_1$ (final prop. 1)

Claramente $\det(U_o) \neq 0 \Longrightarrow \det(U_1) \neq 0$

e U_1 é uma matriz anti-simétrica de ordem $m/2$ que satisfaz (2) e (3) para $k = 1$.

(2) Como $U_1^t = -U_1$ e utilizando a proposição 2 pois

$$U_1 \Sigma_1^t = \Sigma_1 U_1 \quad \text{implica que } U_1 C_1^t = C_j U_1$$

Resulta que $U_1 = \begin{bmatrix} U_2 & \\ & -U_2 \end{bmatrix}$ onde $U_2 C_j^t = -C_j U_2$
logo $U_2 \Sigma_2^t = -\Sigma_2 U_2$ e $U_2^t = -U_2$

Das relações (1), (2), (3) segue que a estrutura da sucessão U_j tem periodicidade de ordem 4

$$
\begin{array}{llll}
U_o^t = U_o & e & U_o\Sigma_o^t = -\Sigma_o U_o \\
U_1^t = -U_1 & e & U_1\Sigma_1^t = \Sigma_1 U_1 \\
U_2^t = -U_2 & e & U_2\Sigma_2^t = -\Sigma_2 U_2 \\
U_3^t = U_3 & e & U_3\Sigma_3^t = \Sigma_3 U_3 \\
\vdots
\end{array}
$$

Por indução aplicando alternadamente as proposições 1 e 2 se completa a demonstração.

Analisemos agora a estrutura do último termo da sucessão.

Temos o seguinte <u>LEMA</u>:

Se $r=2s$, isto é se r é par então $\left[\frac{(r-1)}{2}\right] = s-1$

$$
\text{E temos } U_{s-1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} U & \\ & -U \end{bmatrix} & \text{se } s \text{ é par} \\ \begin{bmatrix} & U \\ U & \end{bmatrix} & \text{se } s \text{ é ímpar} \end{cases}
$$

$$
\text{onde } U^t = (-1)^{\frac{s(s+1)}{2}} U
$$

Se $r=2s+1$, isto é se r é ímpar então $\left[\frac{r-1}{2}\right] = s$ e se tem:

$$
U_s \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} = (-1)^{s+1} \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} U_s \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} = I_s
$$

o último termo da cadeia de Hurwitz.

DEM.: 1) Se $r=2s$ r par temos de (2) $U_{s-1}\Sigma^t_{s-1} = (-1)^s \Sigma_{s-1}U_{s-1}$

onde

$$\Sigma_{s-1} = \left[\begin{pmatrix} iI & \\ & -iI \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & I \\ -I & \end{pmatrix}\right].$$

e $U^t_{s-1} = (-1)^{(s-1)s/2} U_{s-1}$

se $\underline{s}$ for par temos $U_{s-1}\Sigma^t_{s-1} = \Sigma_{s-1}U_{s-1}$ isto é apli cando prop. 2 obtemos

$$U_{s-1} = \begin{pmatrix} U_s & \\ & -U_s \end{pmatrix}$$

se $\underline{s}$ for ímpar temos $U_{s-1}\Sigma^t_{s-1} = -\Sigma_{s-1}U_{s-1}$ e apli- cando prop. 1 obtemos

$$U_{s-1} = \begin{pmatrix} & U_s \\ -U_s & \end{pmatrix}$$

2) se $r=2+1m$,r ímpar então $\left[\frac{r-1}{2}\right] = s$

$$U_s \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} = (-1)^{s+1} \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} U_s$$ é simplesmente

a condição (2) para $k=s$. ▨

De acordo com o sinal de $s(s+1)/2$ temos respectivamente 4 casos em 1) e 4 casos em 2), o que dá (-1) um total de 8 casos para a estrutura do último termo $U_{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$.

TEOREMA 6:

Seja F um corpo de característica diferente de dois. Um conjunto de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de ordem m sobre F tais que:

1) $A_j^t = -A_j$
2) $A_j^2 = -I$
3) $A_jA_k + A_kA_j = 0 \quad j \neq k \quad j, k = 1, 2, \ldots, r$

Não contém mais que $\rho(m)-1$ matrizes, isto é, sempre se tem $r < \rho(m) - 1$ onde $\rho(m)$ é a função de Hurwitz-Radon.

1) Como na DEM. do TEO. 1 se $i \notin F$ consideramos uma extensão algébrica F* de F tal que $i = \sqrt{-1} \in F^*$.
   Um conjunto de matrizes sobre F, também o é sobre F*.
   Logo se não existirem $\rho(m)$ matrizes sobre F*, também não existem sobre F.

   Seja $m=2^q(2k+1)$ com $q=4a+b$ onde $a \leq b \leq 3$.
   Precisamos agora considerar 4 casos: b=0
   b=1
   b=2
   b=3

   Caso b=3 basta olhar a tabela. Não se pode ter $r=\rho(m)$ se b=3.

   Logo $r \leq \rho(m)-1$

Caso b=2 temos $q=4a+2$ e supondo $r = \rho(m)$ resulta $r=8a+4$.

Logo $r=2s$ onde $s = 4a+2$ aplicando TEO com s par.

Temos

$$U_{s-1} = \begin{bmatrix} U & \\ & -U \end{bmatrix} \quad \text{com } U^t = -U$$

Agora $\det U \neq 0$ sua ordem é $m/2^s = m/2^q = 2k+1$. $2k+1$ é ímpar e U é anti-simétrica.

Impossível! (ver cap. 1) Logo $r < \rho(m)$

(5) Caso b=1 - Temos $q=4a+1$ e supondo $r = \rho(m)$ resulta $r=8a+2$.

Logo $r=2s$ onde $s = 4a+1$ aplicando TEO com s ímpar temos

$$U_{s-1} = \begin{bmatrix} 0 & U \\ -U & 0 \end{bmatrix}$$

com $U^t = -U$ e o mesmo raciocínio do caso anterior demonstra $r<\rho(m)$.

(6) Caso b=0 - Temos $q=4a$ e supondo $r = \rho(m)$ resulta $r=8a+1$.

Logo $r=2s+1$ onde $s=4a$.

Aplicando o TEO temos:

$$U_s \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} iI_\alpha & \\ & -iI_\beta \end{bmatrix} U_s \quad \text{com } \alpha+\beta = m/2^s.$$

Esquecendo do $\underline{i}$ sabemos que $U_s \begin{bmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{bmatrix}$ é a matriz resultante de trocar o sinal dos elementos de U_s das últimas β colunas. Por outro lado $-\begin{bmatrix} I_\alpha & \\ & -I_\beta \end{bmatrix} U_s$ troca o sinal dos elementos U_s nas primeiras colunas. Logo a igualdade implica que $U_s = \begin{bmatrix} & A_{\alpha\beta} \\ B_{\beta\alpha} & \end{bmatrix}$.

Agora sabemos que det $U_s \neq 0$. Porém sabemos usando a DEF de determinante que se det $U_s \neq 0$, $\alpha = \beta$.

Logo como $\alpha+\beta = m/2^s = 2k+1$ absurdo e portanto $r < \rho(m)$.

<u>TEOREMA</u>: Seja $F^p \times F^m \to F^m$ uma transformação normada, onde F é um corpo de característica diferente de dois . Então para um valor fixo de <u>m</u> o valor máximo de p é $p = \rho(m)$.

<u>DEM.</u>: Como já vimos no 1º capítulo a existência de uma transformação normada $F^p \times F^m \to F^m$ é equivalente à existência de um conjunto de matrizes $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ de ordem <u>m</u> sobre F satisfazendo

$$A_i^2 = -I$$
$$A_i^t = -A_i$$
$$A_iA_k + A_kA_i = 0$$

Logo por TEO 6 temos $p \leq \rho(m)$.

Por outro lado também já sabemos que dado <u>m</u> sempre existe uma transformação normada com $p = \rho(m)$. Isto demonstra o TEO.

4. CONSTRUÇÃO DE ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES NORMADAS

4.1. Processo de Construção de Álgebras de Cayley-Dickson

Seja A uma álgebra com identidade 1, de dimensão m sobre um corpo F de característica $\neq 2$.

DEF. 1: Dizemos que A tem uma involução (ou automorfismo involutório), se existe um operador linear.

$$s: A \to A$$

$x \to \bar{x}$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} \therefore s(xy) = s(y)s(x)$

(2) $\bar{\bar{x}} = x \therefore s^2 = I$

DEF. 2: Interessam-nos álgebras A com involução s que satisfaçam:

$$x + \bar{x} = t(x).1 \qquad t(x) \in F$$

$$x.\bar{x} = \bar{x}.x = n(x).1 \quad n(x) \in F$$

$t(x)$ e $n(x)$ são chamados, respectivamente, o traço e a norma de x.

Utilizando o processo de Cayley-Dickson, construiremos, para um Θ fixo, $\Theta \in F, \Theta \neq 0$, uma álgebra $\beta = A(\Theta)$ de dimensão 2m sobre F.

β tem como elementos o conjunto de todos os pares ordenados $w = (x,y)$, $x, y \in A$.

A adição e a multiplicação por escalar são definidas componente a componente.

A definição de multiplicação é a seguinte:

DEF. 3: Dados os pares $w_1 = (x_1, y_1)$ $w_2 = (x_2, y_2)$, defimos:

$$w_1 \cdot w_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 + \Theta \bar{y}_2 y_1, y_2 y_1 + y_1 \bar{x}_2)$$

se identificarmos o par $(x,0)$ com o elemento x, A pode ser vista como subálgebra de β e o elemento $(1,0) = 1$ é a unidade de β.

Pois: $(x_1, y_1)(1,0) = (x_1 . 1 - 0,\ y_1 . \bar{1}) = (x_1 . y_1)$

$$(1,0)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)$$

Sabemos que $\bar{1} = 1$, pois

$$\forall x \in A \quad \overline{x.1} = \bar{1}\,\bar{x} = \bar{x}$$

Logo, $\bar{\bar{1}} = 1 \underset{\downarrow}{=} \overline{\bar{1}\,1} = \bar{1}\,1 = \bar{1}$

utilizando $x=\bar{1}$ na última equação

<u>PROPOSIÇÃO 1</u>: Temos uma involução em β dada pela transformação $w = (x,y) \xrightarrow{F} \bar{w} = (\bar{x}, -y)$.

<u>DEM.</u>: F é de fato uma involução, pois

1. $\overline{xy} = \bar{y}\,\bar{x}$

2. $\bar{\bar{x}} = x \qquad \theta = -1$ por simplicidade

Verificando:

1. $w_1 = (x_1, y_1) \quad w_2 = (x_2, y_2)$

$$w_1w_2 = (x_1x_2 + \theta\overline{y_2}y_1,\ y_2x_1 + y_1\overline{x_2})$$

$$\overline{w_1w_2} = (\overline{x_1x_2 + \theta\bar{y}_2y_1},\ -y_2x_1 - y_1\bar{x}_2) =$$

$$= (\bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1y_2,\ -y_2x_1 - y_1\bar{x}_2)$$

$$\bar{w}_1 = (\bar{x}_1, -y_1) \qquad \bar{w}_2 = (\bar{x}_2, -y_2)$$

$$\bar{w}_2\bar{w}_1 = (\bar{x}_2, -y_2)\cdot(\bar{x}_1, -y_1) =$$

$$= (\overline{x_2}\,\overline{x_1} - \bar{y}_1y_2,\ -y_1\bar{x}_2 - y_2\bar{\bar{x}}_1) =$$

$$= (\bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{y}_1 y_2, -y_1\bar{x}_2 - y_2 x_1) = \overline{w_1 w_2}$$

2. $w_1 = (x_1, y_1)$ $\bar{w}_1 = (\overline{x_1}, -y_1)$ $\bar{\bar{w}}_1 = (\bar{\bar{x}}_1, y_1) = (x_1, y_1)$

PROPOSIÇÃO 2: Utilizando A involução para β, definida anteriormente temos que:

se $w = (x,y)$

(1) $t(w) = t(x)$ (2) $n(w) = n(x)+n(y)\ \forall w \in \beta$

<u>DEM.</u>: (1) $w = (x,y)$ $\bar{w} = (\bar{x},-y)$

$$t(w).1 = w+\bar{w} = (x,y)+(\bar{x},-y) =$$

$$= (x+\bar{x}, y-y) = (t(x).1, 0) = t(x)$$

(2) $n(w).1 = (x,y)(\bar{x},-y) = (x\bar{x} + y\bar{y}, -yx + yx) =$

$$= (x\bar{x} + y\bar{y}, 0) = n(x).1 + n(y).1$$

<u>DEF. 4</u>: Para qualquer álgebra A podemos definir:

(1) o comutador $[x,y] = xy-yx$

(2) o associador $(x,y,z) = (xy)z-x(yz)$

Estas entidades são lineares em cada variável, pois

(1) $[x+z,y] = (x+z)y-y(x+z) = xy+zy-yx-yz =$

$= xy-yx+zy-yz = [x,y] + [z,y]$

e analogamente na 2ª variável.

(2) $(x+x_1, y,z) = [(x+x_1)y] z - (x+x_1)(yz) =$

$= [xy + x_1y] z - [x(yz) + x_1(yz)] =$

$= (xy)z + (x_1y)z - x(yz) - x_1(yz) = (xy)z - x(yz) +$

$+ (x_1y)z-x_1(yz) = (x,y,z) + (x_1,y,z)$

e analogamente nas duas outras variáveis.

PROPOSIÇÃO 3: Podemos remover barras de conjugação ou involução utilizando a identidade $\bar{w} = t(w).1 - w$, isto é:

(1) $[x,y] = -[\bar{x},y] = -[x,\bar{y}] = [\bar{x},\bar{y}]$

(2) $(x,y,z) = -(\bar{x},y,z) = (\bar{x},\bar{y},z) = -(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \ldots$

<u>DEM.</u>: (1) $\bar{x} = t(x).1 - x \quad \bar{y} = t(y).1-y$

$$[\bar{x},\bar{y}] = [t(x).1-x,\ t(y).1-y] =$$

$$= [t(x).1 - x,\ t(y).1] - [t(x).1 - x, y] =$$

$$= [t(x).1,\ t(y).1] - [x, t(y).1] - [t(x).1, y] + |x,y| = |x,y|$$

(2) $(\bar{x},y,z) = (t(x).1-x,y,z) = (t(x).1,y,z) - (x,y,z) =$

$$= -(x,y,z)\ ,$$

pois $(t(x).1,y,z) = t(x)(1,y,z) = 0$

<u>DEF. 5</u>: Uma álgebra é comutativa se $[x,y] = 0\ \forall x,\ y \in A$.

<u>DEF. 6</u>: Uma álgebra é associativa se $(x,y,z) = 0\ \forall\, x,y,z \in A$.

<u>DEF. 7</u>: Uma álgebra A sobre F é alternativa se $(x,x,y) = 0$ e $(y,x,x) = 0\ \ \forall x,y \in A$.

<u>PROPOSIÇÃO 4</u>: Se a álgebra A é alternativa, o associador é anti-simétrico nas suas três variáveis, isto é:

$$(x,y,z) = -(x,z,y) = -(y,x,z) = \dots$$

DEM.: Vamos mostrar $(x,y,z) = -(y,x,z)$

Se A é alternativa, $(x+y, x+y, z) = 0$. Como associador é linear

$$(x+y,\ x+y,\ z) = (x+y,\ x,\ z) + (x+y,\ y,\ z) =$$

$$= (x,x,z) + (y,x,z) + (x,y,z) + (y,y,z) =$$

$$= (x,y,z) + (y,x,z) = 0 \therefore (x,y,z) = -(y,x,z)$$

DEF. 8: Uma álgebra A é flexível, se $(x,y,x) = 0 \ \forall x, y \in A$.

PROPOSIÇÃO I: Em uma álgebra alternativa A, temos as identidades de Moufang.

(1) $(xzx)y = x(z(xy))$

(2) $y(xzx) = ((yx)z)x$

(3) $(xy)(zx) = x(yz)x$

$\forall x, y, z \in A$

Queremos mostrar que:

(1) $(xzx)y - x(z(xy)) = 0$

como:

$(xzx)y-x(z(xy)) = (xz,x,y) + (x,z,xy) = (xzx)y-(xz)(xy)+(xz)(xy)-x(z(xy)) =$

Assoc. é anti-simétrico $= -(x,xz,y)-(x,xy,z) =$

$$-[x(xz)]y + x[(xz)y] - [x(xy)]z + x[(xy)z]$$

A é alternativa $\therefore$ $(xx)z = x(xz)$

$$= -(x^2z)y - (x^2y)z + x[(xz)y + (xy)z]$$

Somando e subtraindo $x^2(zy)$ e $x^2(yz)$, obtemos

$$= -(x^2z)y + x^2(zy) - x^2(zy) - (x^2y)z + x^2(yz) - x^2(yz) +$$

$$+ x[(xz)y + (xy)z]$$

$$= -(x^2,z,y) - (x^2,y,z) - x^2(zy) - x^2(yz) + x[(xz)y + (xy)z]$$

Associador é anti-simétrico

$$= -(x^2,z,y) - (-(x^2,z,y)) - x^2(zy) - x^2(yz) + x[(xz)y + (xy)z]$$

$$= x[-x(zy) - x(yz) + (xz)y + (xy)z]$$

$$= x[(x,z,y) + (x,y,z)] = 0$$

(2) Analogamente, temos:

$$y(xzx) = ((yx)z)x$$

$y(xzx) - ((yx)z)x = 0$

$= -(y,x,zx)-(yx,z,x) = -(yx)(zx)+y(x(zx))-((yx)z)x+(yx)(zx)$

Associador é anti-simétrico

$= (y,zx,x)+(z,yx,x) = (y(zx))x-y((zx)x)+(z(yx))x-z((yx)x)$

$= [y(zx)]x-y[(zx)x]+[z(yx)]x-z[(yx)x] =$

$= [y(zx)+z(yx)]x-y(zx^2)-z(yx^2)$

Somando e subtraindo $(yz)x^2$ e $(zy)x^2$, obtemos:

$= [y(zx)+z(yx)]x-y(zx^2)+(yz)x^2-z(yx^2)+z(yx^2)-(yz)x^2-(zy)x^2$

$= [y(zx)+z(yz)]x-(y,z,x^2)-(z,y,x^2)-(yz)x^2-(zy)x^2 =$

$= [y(zx)+z(yx)-(yz)x-(zy)x]\ x$

$= [-(y,z,x)-(z,y,z)]x = 0$

e finalmente,

(3) $(xy)(zx) = x(yz)x$

$(xy)(zx)-x(yz)x = (x,y,zx)+x[y(zx)-(yz)x]$

$= (xy)(zx)-x(y(zx)+x(y(zx))-x(yz)x$

$= (x,y,zx)-x(y,z,x)$

$= -(x,zx,y) = x(y,z,x)$

$= -(x(zx))y+x((zx)y) - x(y,z,x)$.

Como já mostramos que $(xzx)y = x(z(xy))$

$= -(x(z(xy))) + x|(zx)y-(y,z,x)|$

$= -x|z(xy)-(zx)y+(y,z,x)| = -x|-(z,x,y)+(y,z,x)| = 0$

<u>PROPOSIÇÃO II</u>: Numa álgebra flexível A temos que

$t((xa)y) = t(x(ay)) \ \forall x,\ a,\ y \in A.$

<u>DEM</u>: Para mostrar II ou equivalentemente que $t((x,a,y)) = 0$ basta efetuar:

$t((x,a,y)) = t((xa)y - x(ay)) = t((xa)y) - t(x(ay))$

$= (xa)y + \bar{y}(\bar{a}\bar{x}) - x(ay) - (\bar{y}\ \bar{a})\bar{x} =$

$= (x,a,y) - (\bar{y},\bar{a},\bar{x}) = (x,a,y) - (-(y,a,x)) = 0$

PROPOSIÇÃO III: A $2^{\underline{a}}$ identidade de Moufang $y(xzx) = |(yx)z|x$ é equivalente à: $(y,xz,x) = -(y,x,z)x$.

DEM.: $(y,xz,x) = (y(xz))x - y|(xz)x|$

$= y(xz)\ x - |(yx)z|x$ por I(2)

$= |y(xz) - (yx)z|x$

$= -(y,x,z)x$

PROPOSIÇÃO 5: Toda álgebra alternativa é flexível.

DEM.: A alternativa $(x-y),\ x-y,\ x) = 0$

$(x-y,\ x-y,x) = (x,\ x-y,\ x) + (-y,\ x-y,\ x) =$

$= (x,x,x) + (x,-y,x) + (-y,x,x) + (-y,-y,x) =$

$= (x,-y,x) = 0\ \forall x,\ y,\ \varepsilon\ A$

Porém, nem toda álgebra flexível é alternativa como veremos adiante.

PROPOSIÇÃO 6: Se a álgebra A é flexível, temos $(x,y,z) + (z,y,x) = 0 \ \forall x, y, z \in A$.

DEM.: Se A é flexível, $(x+z, y, x+z) = 0$.

$$(x,y,x+z) + (z,y,x+z) = (x,y,x) + (x,y,z) + (z,y,x) + (z,y,z) = 0$$

Logo, $(x,y,z) + (z,y,x) = 0 \ \forall x, y, z \in A$.

Como já foi dito, o produto em β pode ser definido mais geralmente usando θ, ou mais particularmente, usando $\theta = -1$. Se for mais geral, podemos fazer: Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, k elementos de F, onde cada $\theta_i \neq 0$.

Começando com $A_o=F$, onde $x \to x=x$, isto é, a involução sendo a identidade em A_o (a multiplicação no corpo é comutativa e usando o processo de Cayley-Dickson construímos $A_1 = A_o(\theta_1)$ $A_2 = A_1(\theta_2)$ ... $A_k = A_{k-1}(\theta_k)$, onde cada $A_R = A_{R-1}(\theta_R) = F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_R)$ é uma álgebra 2^R-dimensional sobre F.

A_1, A_2, A_3 são, respectivamente, as álgebras dos complexos, quaternions e números de Cayley generalizados.

$A_1 = \mathbb{C}$ é comutativa e associativa.

$A_2 = \mathbb{H}$ é associativa e não-comutativa.

$A_3 =$ é alternativa, mas não associativa.

Cayley

4.2. Algumas Propriedades do Traço e da Norma

PROPOSIÇÃO 7: Temos claramente que:

1) $t(x).1 = x+\bar{x} = \bar{x} + \bar{\bar{x}} = t(\bar{x}).1$

2) $t(x+y).1 = x+y + \bar{x} + \bar{y} = t(x).1 + t(y).1,$

isto é, o traço é linear.

3) $t(xy) = t(yx)$, pois $[x,y] = |x,y|$

(proposição 3).

Logo, $xy-yx = \bar{x}\bar{y}-\bar{y}\bar{x}$. Assim,

$$xy + \bar{y}\bar{x} - yx - \bar{x}\bar{y} = 0$$

$$t(xy).1 - t(yx).1 = 0 \therefore t(xy) = t(yx)$$

De maneira análoga à do traço, a definição de norma implica que $n(x)$ é uma função quadrática.

Assim, temos que:

4) $n(x).1 = x.\bar{x} = \bar{x}.x = n(\bar{x}).1$ e

5) $n(\lambda x).1 = (\lambda x)(\lambda\bar{x}).1 = \lambda^2 \; x\bar{x} = \lambda^2 \; n(x).1 \; \forall \; \lambda \in F$

<u>PROPOSIÇÃO 8</u>: Se A é uma álgebra flexível, então

$$n(xy) = n(x\bar{y}) = n(y\bar{x}) = n(yx) \qquad x,\; y \in A$$

<u>DEM.</u>: Como $\bar{y} = -y + t(y).1$, então

$$(x\bar{y})(yz) = (x(-y+t(y).1))(yz) = -(xy)(yz) + x(yz)t(y)$$

$t(y) \in F$

Mas,

$$x(yz)t(y) = -(x,y,z)(t(y))+(xy)z \; t(y)$$

Logo,

$$-(xy)(yz) - (x,y,z)t(y) + (xy)z \; t(y).1 =$$

$$= -(xy)(yz)-(x,y,z)t(y) + (x.y)(y+\bar{y})z =$$

$$= -(xy)(yz)-(x,y,z)t(y) + (xy)(yz) + (xy)(\bar{y}z) =$$

$$= (xy)(\bar{y}z) - (x,y,z)t(y)$$

Portanto, temos a identidade $(x\bar{y})(yz) = (xy)(\bar{y}z)-(x,y,z)t(y)$.

Então, substituímos $z=\bar{x}$.

Isto é: $(x\bar{y})(y\bar{x}) = (xy)(\bar{y}\bar{x}) - (x,y,\bar{x})t(y)$.

Como a álgebra é flexível, temos $(x,y,\bar{x}) = -(x,y,x) = 0$

e então: $(x\bar{y})(y\bar{x}) = (xy)(\bar{y}\bar{x})$.

Logo, $n(x\bar{y}) = n(yx)$. Trocando y por x na identidade acima, temos: $n(y\bar{x}) = n(yx)$.

<u>PROPOSIÇÃO 9</u>: Temos a seguinte identidade:

$$n(z_1 + z_2) = n(z_1) + n(z_2) + t(z_1\overline{z_2})$$

$$\text{pois } (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) =$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$

$$= n(z_1).1+n(z_2).1 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = n(z_1).1 +$$

$$+ n(z_2).1 + t(z_1\overline{z_2}).1$$

<u>LEMA 1</u>: Seja $A_r = A_{r-1}(\theta)$ construída segundo o processo de Cayley-Dickson e suponha que $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ são elementos em A_r, tais que suas componentes $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A_{r-1}$, satisfazem as seguintes condições:

$$n(x_1x_2) = n(x_1)n(x_2) \qquad n(y_1y_2) = n(y_1)n(y_2)$$

$$n(x_1y_2) = n(x_1)n(y_2) \qquad n(y_1x_2) = n(y_1)n(x_2)$$

Então, temos que

$$n(w_1w_2) = n(w_1)n(w_2) + \theta t[x_1(x_2,y_1,y_2)]$$

DEM.: $w_1w_2 = (x_1y_1).(x_2,y_2) = (x_1x_2-\overline{y_2}y_1,\ y_2x_1 + y_1\overline{x_2})$

$n(w_1w_2) \Rightarrow n(x_1x_2-\overline{y_2}y_1) + n(y_2x_1+y_1\overline{x_2})$ por proposição 9 usando a proposição 2(2).

$n(x_1,x_2) + n(-\overline{y_2}y_1) + t((x_1x_2).\overline{(-\overline{y_2}y_1)}) + n(y_2x_1)+n(y_1\overline{x_2}) +$

$+ t((y_2x_1)\overline{(y_1\overline{x_2})}) =$

$= n(x_1x_2)+(-1)^2n(\overline{y_2}y_1)+n(y_2x_1)+n(y_1\overline{x_2})+t((x_1x_2)(-\overline{y_1}y_2)) +$

$+ t((y_2x_1)(x_2\overline{y_1}))$ e (PROP. 7(3))$\Rightarrow t((x_2\overline{y_1})(y_2x_1) = t((y_2x_1)(x_2\overline{y_1})$

$= n(x_1x_2)+n(\overline{y_2}y_1)+n(y_2x_1)+n(y_1\overline{x_2})-t(((x_1x_2)(\overline{y_1}y_2)) -$

$(x_2\overline{y_1})(y_2x_1)))$.

Como, usando LEMA 3

$t[(x_1x_2)(\overline{y_1}y_2)] = t[x_1(x_2(\overline{y_1}y_2))]$ e

$t[(x_2\overline{y_1})(y_2x_1)] = t[((x_2\overline{y_1})y_2)x_1]$;

e usando proposição 7(3): $t[((x_2\overline{y_1})y_2)x_1] = t[x_1((x_2\overline{y_1})y_2]$, Temos: $-t((x_1x_2)(\overline{y_1}y_2)-(x_2\overline{y_1})(y_2x_1)) =$

$= -t(x_1(x_2(\overline{y_1}y_2))-x_1((x_2\overline{y_1})y_2)) = -t(x_1[-(x_2\overline{y_1})y_2+x_2(\overline{y_1}y_2)]) =$

$= t(x_1(x_2,\overline{y_1},y_2)) = t(x_1(-(x_2,y_1,y_2))) = -t(x_1(x_2,y_1,y_2))$

Logo, $n(x_1)n(x_2)+n(\overline{y_2})n(y_1)+n(y_2)n(x_1)+n(y_1)n(\overline{x_2})$ -

$t(x_1(x_2,y_1y_2)) = n(w_1 \cdot w_2) =$

$$= n(x_1)[n(x_2)+n(y_2)]+n(y_1)[\underset{\underset{n(\bar{y}_2)}{\shortparallel}}{n(y_2)}+\underset{\underset{n(\bar{x}_2)}{\shortparallel}}{n(x_2)}]-t(x_1(x_2,y_1,y_2))$$

$= [n(x_1)+n(y_1)][n(x_2)+n(y_2)]-t(x_1(x_2,y_1,y_2))$

$= n(w_1)n(w_2) - t(x_1(x_2,y_1,y_2))$

<u>PROPOSIÇÃO 10</u>: Se denominamos $\Theta(w_1,w_2)$ ao $t(x_1(x_2,y_1,y_2))$, temos que $\Theta(w_1,w_2) = \Theta(w_2,w_1)$.

<u>DEM.</u>: $n(w_1w_2) = n(w_2w_1)$

$= n(w_1)n(w_2)-t(x_1(x_2,y_1,y_2)) = n(w_2)n(w_1)-t(x_2(x_1,y_2,y_1))$,

Logo $\Theta(w_1,w_2) = \Theta(w_2,w_1)$

4.3. Dois Teoremas Importantes

TEOREMA 1: A álgebra $\beta = A(\theta)$ é alternativa $\Longleftrightarrow$ a álgebra A é associativa.

(Referência: Albert; "Quadratic Forms Permiting Composition".)

DEM.: Como β é composta por pares de elementos de A, dizemos

ALBERT que $x \in \beta = (g_1, g_2) = g_1 + g_2 w \quad g_1, g_2 \in A$.

Como já vimos, a involução razoável dada em β é

$\bar{x} = (\overline{g_1}, -g_2)$ ou equivalentemente, $\bar{x} = \overline{g_1} - g_2 w$.

Queremos mostrar β alternativa $\Longleftrightarrow$ A associativa

1 Mostrar A associativa $\Longrightarrow$ β alternativa

Mostrar β alternativa é mostrar $(x,x,y) = 0 = (x,y,y)$, isto é,

$$x^2 y - x(xy) = 0, \quad \text{onde } x = g_1 + g_2 w$$

$$x, y, \in \beta$$

$$y = h_1 + h_2 w$$

1) $x^2 y = [(g_1+g_2w)(g_1+g_2w)]y = [(g_1^2-(+1)\overline{g_2}g_2)+(g_2g_1+g_2\overline{g_1})w][h_1+h_2w]$

$$x^2y = [\underset{1}{g_1^2 h_1} - \underset{2}{(\overline{g_2}g_2)h_1} - \underset{3}{\overline{h_2}(g_2g_1)}-\underset{4}{\overline{h_2}(g_2\overline{g_1})}] +$$

$$+ [\underset{5}{h_2g_1^2} - \underset{6}{h_2(\overline{g_2}g_2)} + \underset{7}{(g_2g_1)\overline{h_1}}+\underset{8}{(g_2\overline{g_1})\overline{h_1}}]w$$

Por outro lado

$$x(x.y) = [g_1+g_2w][(g_1h_1-\overline{h_2}g_2)+(h_2g_1+g_2\overline{h_1})w] =$$

$$= [\underset{A}{g_1(g_1h_1)}-\underset{B}{g_1(\overline{h_2}g_2)}-\underset{C}{(\overline{g_1}\overline{h_2})g_2}-\underset{D}{(h_1\overline{g_2})g_2}] +$$

$$+ [\underset{E}{(h_2g_1)g_1}+\underset{F}{(g_2\overline{h_1})g_1}+\underset{G}{g_2(\overline{h_1}\overline{g_1})}-\underset{H}{g_2(\overline{g_2}h_2)}]w$$

Como A é associativa, e queremos $x^2y-x(xy)$, vejamos:

$$g_1^2h_1 - g_1(g_1h_1) = 0 \qquad 1 \leftrightarrow A$$

Também: $h_2g_1^2 -(h_2g_1)g_1 = 0 \qquad 5 \leftrightarrow E$

$$-h_2n(g_2)+n(g_2)h_2 = 0 \qquad 6 \leftrightarrow H$$

Por outro lado:

3+4 $\quad -\overline{h_2}g_2(g_1+\overline{g_1}) = -\overline{h_2}g_2t(g_1)$

B+C $\quad -(g_1+\overline{g_1})\overline{h_2}g_2 = -\overline{h_2}g_2\ t(g_1)$

Logo, $(3+4)-(B+C) = 0$

e, analogamente,

$$(7 + 8) - (F + G)$$

$$g_2(g_1\overline{h_1} + \overline{g_1}\overline{h_1}) - [g_2(\overline{h_1}g_1) + g_2(\overline{h_1}\overline{g_1})] =$$

$$= g_2(g_1+\overline{g_1})\overline{h_1} - g_2\overline{h_1}(g_1+\overline{g_1}) = g_2t(g_1)\overline{h_1} - g_2\overline{h_1}t(g_1) = 0$$

Logo, $x^2y - x(xy) = 0$ $\therefore$ β é alternativa.

2) Mostrar β alternativa $\Rightarrow$ A é associativa.

Se β é alternativa e A está contida como subálgebra em β, A é alternativa, queremos mostrar que A é associativa.

β alternativa $\Rightarrow$, usando a mesma expressão anterior.

$$\Rightarrow x^2y - x(xy) = 0$$

$$\boxed{1} \quad [\underset{1}{g_1^2h_1} - \underset{2}{(\overline{g_2}g_2)h_1} - \underset{3}{\overline{h_2}(g_2g_1)} - \underset{4}{\overline{h_2}(g_2\overline{g_1})}] = [\overset{A}{g_1(g_1h_1)} - \overset{B}{g_1(\overline{h_2}g_2)} -$$

$$- \overset{C}{(\overline{g_1}\overline{h_2})g_2} - \overset{D}{(h_1\overline{g_2})g_2}]$$

e

$$\boxed{2} \quad h_2g_1^2 - h_2(\overline{g_2}g_2) + (g_2\overline{g_1})\overline{h_1} + (g_2g_1)\overline{h_1} = (h_2g_1)g_1 + (g_2\overline{h_1})g_1 +$$

$$+ g_2(\overline{h_1}\overline{g_1}) - g_2(\overline{g_2}h_2)$$

Como A é alternativa, sabemos que $g_1^2 h_1 = g_1(g_1h_1)$ $1 \leftrightarrow A$

$$-(\overline{g_2}g_2)h_1 = -(h_1\overline{g_2})g_2 \quad 2 \leftrightarrow D$$

Logo,

$$-[\overline{h_2}(g_2g_1)+\overline{h_2}(g_2\overline{g_1})] = -[g_1(\overline{h_2}g_2) + (\overline{g_1}\overline{h_2})g_2]$$

$$\overline{h_2}(g_2[g_1+\overline{g_1}]) = [g_1+\overline{g_1}]\overline{h_2}g_2 = g_1(\overline{h_2}g_2)+(\overline{g_1}\overline{h_2})g_2$$

$$\Longleftrightarrow (\overline{g_1}\overline{h_2})g_2 = \overline{g_1}(\overline{h_2}g_2) \quad \forall\, \overline{g_1},\ g_2,\ \overline{h_2}$$

Se isso acontece, A é associativa.

<u>DEM.</u>: Dados $x = (a,\alpha)$, $y = (b,\beta)$ e $z = (c,\gamma)$ elementos de

<u>ADEM</u> β, a álgebra construída a partir de A.

Vamos escrever o associador (x,y,z) explicitamente usando associadores e comutadores de A.

$$(x,y,z) = (xy)z - x(yz) \ ,$$

onde

$$xy = (a,\alpha).(b,\beta) = (ab-\bar{\beta}\alpha,\ \beta a+\alpha\bar{b})$$

$$(xy).z = (ab-\bar{\beta}\alpha, \beta a+\alpha\bar{b})(c,\gamma) =$$

$$=[(ab)c-(\bar{\beta}\alpha)c-\bar{\gamma}(\beta a)-\bar{\gamma}(\alpha\bar{b});\ \gamma(ab)-\gamma(\bar{\beta}\alpha)+(\beta a)\bar{c}+(\alpha\bar{b})\bar{c}]$$

Por outro lado,

$$yz = (b,\beta).(c,\gamma) = (bc-\bar{\gamma}\beta,\ \gamma b+\beta\bar{c})$$

$$x(yz) = (a,\alpha).(bc-\bar{\gamma}\beta\ ,\ \gamma b+\beta\bar{c}) =$$

$$= [a(bc)-a(\bar{\gamma}\beta)-(\bar{b}\bar{\gamma})\alpha-(c\bar{\beta})\alpha;\quad (\gamma b)a+(\beta\bar{c})a+\alpha(\bar{c}\bar{b})-\alpha(\bar{\beta}\gamma)]$$

Logo, $(x,y,z) = (xy)z - x(yz) = 1-2 = (I,II)$. Onde:

$$\Rightarrow I = (ab)c - (\bar{\beta}\alpha)c - \bar{\gamma}(\beta a) - \bar{\gamma}(\alpha\bar{b}) - a(bc) + a(\bar{\gamma}\beta) + (\bar{b}\bar{\gamma})\alpha + (c\bar{\beta})\alpha$$

Vamos construir algumas identidades que nos permitam expressar (x,y,z) em termos de associadores e comutadores em A.

1. $(c\bar{\beta})\alpha-(\bar{\beta}\alpha)c = (c,\bar{\beta},\alpha) + [c,\ \bar{\beta}\alpha]$, pois

$$= (c\bar{\beta})\alpha - c(\bar{\beta}\alpha) + c(\bar{\beta}\alpha)-(\bar{\beta}\alpha)c$$

2. $(\bar{b}\bar{\gamma})\alpha-\bar{\gamma}(\alpha\bar{b}) = (\bar{\gamma},\alpha,\bar{b}) + (\bar{b},\bar{\gamma},\alpha) + [\bar{b},\bar{\gamma}\alpha]$

pois: $=(\bar{\gamma}\alpha)\bar{b} - \bar{\gamma}(\alpha\bar{b})+(\bar{b}\bar{\gamma})\alpha-\bar{b}(\bar{\gamma}\alpha)+\bar{b}(\bar{\gamma}\alpha)-(\bar{\gamma}\alpha)\bar{b}$

3. $a(\bar{\gamma}\beta)-\bar{\gamma}(\beta a) = (\bar{\gamma},\beta,a) + [a,\bar{\gamma}\beta]$

pois $=(\bar{\gamma}\beta)a - \bar{\gamma}(\beta a)+a(\bar{\gamma}\beta)-(\bar{\gamma}\beta)a$

Logo, $I = (a,b,c)+(c,\bar{\beta},\alpha) + [c,\bar{\beta}\alpha] + (\bar{\gamma},\alpha,\bar{b}) +$

$+ (\bar{b},\bar{\gamma},\alpha) + (\bar{\gamma},\beta,a) + [\bar{b},\bar{\gamma}\alpha] + [a,\bar{\gamma}\beta]$

e se, $A = (a,b,c) + (c,\bar{\beta},\alpha) + (\bar{\gamma},\alpha,\bar{b})+(\bar{b},\bar{\gamma},\alpha)+(\bar{\gamma},\beta,a)$

e

$B = [c,\bar{\beta}\alpha]+[\bar{b},\bar{\gamma}\alpha] + [a,\bar{\gamma}\beta]$,

então, $I = A+B$

Analogamente:

$II= \gamma(ab)-\gamma(\bar{\beta}\alpha)+(\beta a)\bar{c}-(\gamma b)a-(\beta\bar{c})a-\alpha(\bar{c}\bar{b})+\alpha(\bar{\beta}\alpha)+ (\alpha\bar{b})\bar{c}$

Onde:

4. $-\gamma(\bar{\beta}\alpha)+\alpha(\bar{\beta}\gamma) = -(\alpha,\bar{\beta},\gamma)-\gamma[\bar{\beta},\alpha]-[\gamma,\alpha\bar{\beta}]$,

Pois: $-(\alpha\bar{\beta})\gamma+\alpha(\bar{\beta}\gamma)-\gamma(\bar{\beta}\alpha)+\gamma(\alpha\bar{\beta})-\gamma(\alpha\bar{\beta}) + (\alpha\bar{\beta})\gamma$.

5. $\gamma(ab)-(\gamma b)a = -(\gamma,b,a) +\gamma[a,b]$

Pois: $-(\gamma b)a+\gamma(ba)+\gamma(ab)-\gamma(ba)$

6. $(\alpha\bar{b})\bar{c} -\alpha(\bar{c}\bar{b}) = (\alpha,\bar{b},\bar{c})+\alpha[\bar{b},\bar{c}]$

Pois: $(\alpha\bar{b})\bar{c}-\alpha(\bar{b}\bar{c}) + \alpha(\bar{b}.\bar{c})-\alpha(\bar{c}\bar{b})$

7. $(\beta a)\bar{c}-(\beta\bar{c})a = (\beta,a,\bar{c}) +\beta[a,\bar{c}] -(\beta,\bar{c},a)$

Pois: $\quad = (\beta a)\bar{c}-\beta(a\bar{c})+\beta(a\bar{c})-\beta(\bar{c}a)-(\beta\bar{c})a+\beta(\bar{c}a)$

e portanto, II = C + D onde

$C = -(\alpha,\bar{\beta},\gamma)-(\gamma,b,a)+(\alpha,\bar{b},\bar{c})+(\beta,a,\bar{c})-(\beta,\bar{c},a) =$

$= +(\alpha,\beta,\gamma)-(\gamma,b,a)+(\alpha,b,c)-(\beta,a,c)+(\beta,c,a)$ e

$D = -\gamma[\bar{\beta},\alpha]-[\gamma,\alpha\bar{\beta}] + \gamma[a,b] +\alpha[\bar{b},\bar{c}] +\beta[a,\bar{c}]$

Agora, considerando associadores particulares, temos:

$(x,x,y) = (A+B,\ C+D)$

$A+B = (a,a,b)-(b,\alpha,\alpha)+(a,\beta,\alpha)+(\beta,\alpha,a) -$

$- (\beta,\alpha,a)+[b,\bar{\alpha}\alpha] +[a,\bar{\beta}\alpha] -[a,\bar{\beta}\alpha]$

$C+D = (\alpha,\alpha,\beta)-(\beta,a,a)+(\alpha,a,b)+(\alpha,a,b) +$

$+ (\alpha,b,a)+\beta[\alpha,\alpha] -[\beta,\ \alpha\bar{\alpha}] + \beta[a,a] +$

$+ \alpha[a,b] -\alpha[a,b]$

Logo, $(x,x,y) = ((a,a,b)-(b,\alpha,\alpha)+(a,\beta,\alpha);(\alpha,\alpha,\beta) -$

$- (\beta,a,a)+(\alpha,a,b))$.

Queremos mostrar que A associativa $\Leftrightarrow \beta$ alternativa

($\Rightarrow$) se A associativa, então $(x,x,y) = 0$ e analogamente $(x,y,y) = 0$.

Logo β é alternativa.

($\Leftarrow$) se β é alternativa, temos $(x,x,y) = 0 \ \forall x,y \in \beta$

$x = (a,\alpha)$

$y = (b,\beta)$

Em particular, se $\beta = 0$, temos:

$(x,x,y) = 0 = ((a,a,b)-(b,\alpha,\alpha);(\alpha,b,a))$.

Logo, $(\alpha,b,a) = 0 \ \forall \ \alpha, b, a \in A$. Assim A é associativa.

<u>TEOREMA 2</u>: A álgebra $\beta = A(\theta)$ é flexível $\Leftrightarrow$ A é flexível.

<u>DEM. 1</u>: (Shafer) "On the Algebras Formed by the Cayley-Dickson Process".

Considere as funções multiplicação à esquerda por x, Lx, e multiplicação à direita por x, Rx, na álgebra.

$R_x: A \to A$ $\qquad$ $L_x: A \to A$

$y \to yR = yx$ $\qquad$ $y \to yL_x = xy$

se $s: A \to A$

$x \to \bar{x} = xs$ é involução de A, então

(1) $R_{xs} = sL_{xs}$ e $L_x s = sR_{xs}$ $\forall x \varepsilon A$

$$yR_x s = (yx)s = \overline{yx} = ysL_{xs} = \bar{y}\, L_{xs} = \bar{x}\bar{y}$$

(2) $y\, L_x s = (xy)s = \overline{xy} = ysR_{xs} = \bar{y}\, R_{xs} = \bar{y}\bar{x}$

A condição de flexibilidade de uma álgebra é:

$\forall$ $x \varepsilon A$ $[R_x, L_x] = 0$, pois $R_xL_x - L_xR_x = 0$

$$R_xL_x = L_xR_x$$

e $yL_xR_x = (xy)R_x = (xy)x = y\, R_xL_x = (yx)L_x = x(yx)$, isto é,

$$(xy)x = x(yx) \quad \forall x, y \varepsilon A$$

Linearizada, esta identidade torna-se

(3) $L_xR_y + L_yR_x = R_xL_y + R_yL_x$, pois:

$$z(L_xR_y)+z(L_yR_x) = (xz)R_y+(yz)R_x = (xz)y+(yz)x =$$

$$= z(R_x L_y)+z(R_y L_x) = (zx)L_y+(zy)L_x = y(zx)+x(zy)$$

Logo, $(xz)y+(yz)x-y(zx)-x(zy) = 0$

$$(x,z,y) + (y,z,x) = 0 \quad \text{(PROPOSIÇÃO 6)}$$

Como a multiplicação em β é dada por

$z_1 z_2 = (x_1,y_1).(x_2,y_2) = (x_1x_2 - \overline{y_2}y_1,\ y_2x_1+y_1\overline{x_2})$

Matrizes para multiplicação à esquerda e à direita em β podem ser escritas em termos das multiplicações de A como:

$$R_z = \begin{pmatrix} R_x & L_y \\ -L_{ys} & R_{xs} \end{pmatrix}$$

pois $xR_z = xz = (x_1,x_2)(z_1,z_2) = (x_1z_1 + (-1(z_2x_2,\ \overline{z_2}x_1 + x_2\overline{z_1})$

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix} R_{z_1} & L_{z_2} \\ -L_{z_2s} & R_{z_1s} \end{pmatrix} = (x_1R_{z_1}+(-)x_2L_{z_2s},\ x_1L_{z_2} + x_2R_{z_1s}) =$$

$$= (x_1z_1+(-1)\overline{z_2}x_2,\ z_2x_1 + x_2\overline{z_1})$$

Analogamente:

$$L_z = \begin{pmatrix} L_{z_1} & SL_{z_2} \\ -SR_{z_2} & R_{z_1} \end{pmatrix} \qquad \text{pois}$$

$xL_z = zx = (z,z_2).(x,x_2) = (z_1x_1+(-1)\overline{x_2}z_2;\ x_2z_1 + z_2\overline{x_1})$

e

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix} L_{z_1} & SL_{z_2} \\ -SR_{z_2} & R_{z_1} \end{pmatrix} = (x_1L_{z_1}+(-)x_2SR_{z_2},\ x_1SL_{z_2} + x_2R_{z_1})$$

$$= (z_1x_1+(-1)\overline{x_2}R_{z_2},\ \overline{x_1}L_{z_2}+x_2\quad) = (z_1x_1+(-1)\overline{x_2}z_2,\ z_2\overline{x_1} + x_2z_1)$$

<u>LEMA 2</u>: se uma álgebra A é flexível, então

(4) $R_{ys}R_y = L_{ys}L_y = L_yL_{ys} = R_yR_{ys} \quad \forall y \in A$

<u>DEM.</u>: Por (3) aplicado à $\bar{y}$, temos:

$$\bar{y}(L_xR_y + L_yR_x) = \bar{y}(R_xL_y + R_yL_x) \therefore$$

$$\therefore \quad x\bar{y}R_y + y\bar{y}R_x = \bar{y}xL_y + \bar{y}yL_x$$

$$\therefore \quad (x\bar{y})y + n(y).1x = y(\bar{y}x)+xn(y).1$$

$$\therefore \quad xR_{ys}R_y = xL_{ys}L_y \ \forall x$$

Agora queremos mostrar

$$L_{ys}L_y \overset{(1)}{=} t(y)L_y - L_y^2 \overset{(2)}{=} L_yL_{ys}$$

$$xL_{ys}L_y = (\bar{y}x)L_y = y(\bar{y}x)$$

Mas: $xL_{ys} = xL_{t(y).1} - xL_y$(I), pois $\bar{y} = t(y).1-y$
e a multiplicação é distributiva, isto é,

$$XL_{ys} = \bar{y}x = t(y).1x - yx = xL_{t(y).1} - xL_y$$

$$\bar{y}x = (y+\bar{y})x-yx$$

$$= yx+\bar{y}x-yx \ .$$

Logo, multiplicando (I) por L_y, ou melhor, compondo com L_y , obtemos:

$$xL_{ys}L_y = xL_{t(y).1}\, L_y - xL_y^2$$

Mas $a \in F$ $yL_{ax} = (ax)y \underset{\varepsilon_F}{=} a(xy) = ayL_x$

Logo, $L_{t(y).1} = t(y)L_1$

e portanto, $xL_{ys}L_y = xt(y)L_1L_y - xL_y^2$

$$= t(y).xL_1L_y-xL_y^2$$

$$= t(y).y(x)-yx\ L_y = t(y).yx-y(yx) =$$

$$= (y+\bar{y})yx-y(yx)=y(yx)+y(yx)-\bar{y}(yx) = xL_yL_{ys}$$

e, similarmente, $R_{ys}R_y = R_yR_{ys}$ ▨

<u>TEOREMA 2'</u>: As álgebras A_t são flexíveis para todo t.

1) Isto é fato sabido para t=1 números complexos

t=2 números quaternions

t=3 números de Cayley

Queremos mostrar por indução sobre t, isto é, queremos mostrar que A_{t+1} é flexível, sabendo que A_t é flexível.

Como já vimos, a condição de flexibilidade em A_{t+1} é equivalente à

$$[R_z, L_z] = 0 \quad \forall z \in A_{t+1},$$

Isto é, $w[R_z,L_z] = w[R_zL_z - L_zR_z] =$

$$= (wz)L_z - (zw)R_z = z(wz)-(zw)z = 0$$

$$= (z,w,z) = 0$$

Como R_z e L_z podem ser pensadas em termos de matrizes , temos: (no que segue queremos $\gamma = -1$)

$$R_z = \begin{pmatrix} R_x & L_y \\ \gamma L_{ys} & R_{xs} \end{pmatrix} \qquad L_z = \begin{pmatrix} L_x & SL_y \\ \gamma SR_y & R_x \end{pmatrix}$$

Queremos mostrar $[R_zL_z] = 0$, isto, $R_zL_z - L_zR_z = 0$

Logo:

$$\begin{pmatrix} R_x & L_y \\ \gamma L_{ys} & R_{xs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_x & SL_y \\ \gamma SR_y & R_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_x & SL_y \\ \gamma SR_y & R_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x & L_y \\ \gamma L_{ys} & R_{xs} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R_xL_x+\gamma L_ySR_y-L_xR_x-\gamma SL_yL_{ys} & R_xSL_y-L_xL_y+L_yR_x-SL_yR_{xs} \\ \gamma(L_{ys}L_x-SR_yR_x+R_{xs}SR_y-R_xL_{ys}) & \gamma(L_{ys}SL_y-SR_yL_y)+R_{xs}R_x-R_xR_xS \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{1}{[R_x,L_x] + \gamma(L_ySR_y-SL_yL_{ys})} & \overset{2}{R_xSL_y+L_yR_x-L_xL_y-SL_yR_{xs}} \\ \underset{3}{\gamma(L_{ys}L_x+R_{xs}SR_y-SR_yR_x-R_xL_{ys})} & \underset{4}{\gamma(L_{ys}SL_y-SR_yL_y)+[R_{xs},R_x]} \end{pmatrix}$$

Logo, temos que verificar que 1, 2, 3 e 4 são todos nulos $\forall x,\ y \in A_t$.

1. $[R_x,L_x]+\gamma(L_ySR_y-SL_yL_{ys}) = 0$

$[R_x,L_x] = 0$, pois A_t é flexível

Mas utilizando (1) e (2) : $R_xS = SL_{xs}$

$L_xS = SR_{xs} \quad \forall x \in A$

e também que

$SR_y = SR_{\bar{y}s} = L_{\bar{y}s}$ e $SL_y = SL_{\bar{y}s} = R_{\bar{y}s}$

$$\gamma((L_{ys})R_y-(SL_y)L_{ys}) = \gamma S\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{(R_{ys}R_y - L_yL_{ys})},$$

por lema 2 .

2. $\underbrace{R_x}SL_y + L_yR_x-L_xL_y-SL_yR_{xs} = \underbrace{SL_{xs}}L_y+L_yR_x-L_xL_y-SL_yR_{xs} =$

$= L_yR_x - L_xL_y + S(L_{xs}L_y - L_yR_{xs}) = I(L_yR_x - L_xL_y) + S(L_yR_x - L_xL_y)$,

se $L_{xs}L_y - L_yR_{xs} = L_yR_x - L_xL_y$.

Mas:

$a(L_{xs}L_y - L_yR_{xs}) = a(L_yR_x - L_xL_y)$ pois

$(\bar{x}a)L_y - (ya)R_{xs} = (ya)R_x - (xa)L_y$

$\therefore\ y(\bar{x}a) - (ya)\bar{x} = (ya)x - y(xa)$

$y(\bar{x}a) - (ya)\bar{x} - (ya)x + y(xa) =$

$= -(ya)t(x).1 + y(t(x).1)a = 0$

Logo, temos: $2 = (I+s)(L_yR_x - L_xL_y)$, o que aplicado a εA_t, dá:

$a(I+s)(L_yR_x - L_xL_y) = a+\bar{a}(L_yR_x - L_xL_y) =$

$= t(a).1(L_yR_x - L_xL_y) = t(a)(y.1R_x - x.1L_y) = t(a)(yx-yx) = 0$ ▨

3. $\gamma(L_{ys}L_x + R_{xs}SR_y - SR_yR_x - R_xL_{ys}) =$

$= \gamma(L_{ys}L_x - R_xL_{ys} + R_{xs}L_{\bar{y}}S - L_{\bar{y}}SR_x) = \gamma(L_{ys}L_x - R_xL_{ys} + R_{xs}L_{\bar{y}}S - L_{\bar{y}}L_{\bar{x}}S) =$

$= \gamma(L_{ys}L_x - R_xL_{ys} + (R_{xs}L_{\bar{y}} - L_{\bar{y}}L_{\bar{x}})S) = \gamma(L_{ys}L_x - R_xL_{ys})(I+S)$, Se $R_{xs}L_{\bar{y}}-L_{\bar{y}}L_{\bar{x}} = L_{ys}L_{x}-R_{x}L_{ys}$ De *novo*:

$$a(R_{xs}L_{\bar{y}}-L_{\bar{y}}L_{\bar{x}}) = a(L_{ys}L_{x}-R_{x}L_{ys}) \therefore$$

$$\bar{y}(a\bar{x})-\bar{x}(\bar{y}a) = x(\bar{y}a)-\bar{y}(ax) \therefore$$

$$\bar{y}(a\bar{x})-\bar{x}(\bar{y}a)-x(\bar{y}a)+\bar{y}(ax) = 0 \therefore$$

$$\bar{y}(a\bar{x}+ax)-(\bar{x}+x)\bar{y}a = \bar{y}(at(x).1)-t(x)\bar{y}a = 0$$

Então:

$$\gamma(L_{ys}L_{x}-R_{x}L_{ys})(I+S) \Longrightarrow$$

$$a(L_{ys}L_{x}-R_{x}L_{ys})(I+S) = (x(\bar{y}a)-\bar{y}(ax))(I+S)$$

$$= t(x(\bar{y}a)-\bar{y}(ax)) = t((\bar{y}a)x-\bar{y}(ax)) = 0$$

Usando LEMA 3

4. $\gamma(L_{ys}SL_{y}-SR_{y}L_{y})+[R_{xs},R_{x}] =$

$$= \underbrace{\gamma(L_{ys}SL_{y}-L_{ys}SL_{y})}_{0}+\underbrace{R_{xs}R_{x}-R_{x}R_{xs}}_{0}$$

$$= 0 + 0$$ LEMA 1

Logo, (1) = (2) = (3) = (4) = 0 e a álgebra A_{t+1} é flexível.

DEM.: A álgebra $\beta = A_{t+1}$ é flexível $\Leftrightarrow$ a álgebra A_t é flexível.

ADEM

DEM.: Como $A \subseteq \beta$ como subálgebra, se β é flexível então A é flexível.

Por outro lado, se A é flexível, usando os cálculos sobre associadores, temos:

$c = a \quad \gamma = \alpha$

$$(x,y,x) = (A+B,\ C+D)$$

$$= ((a,b,a)+(a,\bar{\beta},\alpha)+(\bar{\alpha},\alpha,\bar{b})+(\bar{b},\bar{\alpha},\alpha)+(\bar{\alpha}\ ,\beta,a)$$

$$+ [a,\bar{\beta}\alpha] + [\bar{b},\bar{\alpha}\alpha] + [a,\bar{\alpha}\beta] \ ;$$

$$; + (\alpha,\beta,\alpha)-(\alpha,b,a)+(\alpha,b,a)-(\beta,a,a)+(\beta,a,a) +$$

$$- \underbrace{\alpha[\bar{\beta},\alpha] - [\alpha,\alpha\bar{\beta}]}_{=\ (\alpha,\bar{\beta},\alpha)} + \alpha[a,b] + \alpha[\bar{b},a] + \beta[a,\bar{a}])$$

Se $[a,\bar{\beta}\alpha] + [a,\bar{\alpha}\beta] = 0$, temos que

$(x,y,x) = 0$ e portanto, β é flexível como queríamos

Mas $\overline{(\bar{\alpha}\beta)} = \bar{\beta}\alpha$ e $[a,y] + [a,\bar{y}] = 0$ pois

$$ay-ya+a\bar{y}-\bar{y}a = a(t(y).1)-(t(y).1) = 0$$

4.4. Uma Base Normalizada

Como nos casos conhecidos dos complexos, quaternions e números de Cayley, podemos determinar uma base normalizada para A_r, r qualquer.

PROPOSIÇÃO 11: Seja $m = 2^r$. Então, existe uma base $\varepsilon_o = 1$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ para A_r, tal que para todo $1 \leq i \neq j \leq m-1$, temos:

(1) $\varepsilon_i^2 = -1$

(2) $\varepsilon_i \varepsilon_j = -\varepsilon_j \varepsilon_i = \pm\varepsilon_k$, onde $\varepsilon_k \neq 1$ é um elemento da base determinado de forma única pelos elementos $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ e diferente deles.

DEMONSTRAÇÃO: (Por Indução) Para A_1 = N$^{\underline{os}}$ complexos, começamos com a base $\varepsilon_o = 1 = (1,0)$ e $\varepsilon_1 = (0,1)$ então $\varepsilon_1^2 = (0,1)(0,1) = (0.0-\bar{1}.1, 1.0+1.0) = (-1,0) = -1$, pois $\bar{1} = 1$.

Agora seja $\varepsilon_o = 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ uma base normalizada, construída para $A_r \subset A_{r+1}$.

Se acrescentamos novos elementos $\varepsilon_j = (0, \varepsilon_{j-m})$ para $j = m, m+1, \ldots, 2m-1$, obtemos uma base normalizada para A_{r+1}, pois:

1) Todo elemento de $A_{r+1} = (x,y) = \sum_{i=0}^{2m-1} C_i\varepsilon_i$ é escrito $x = \sum_{i=0}^{m} k_i\varepsilon_i \quad y = \sum_{i=0}^{m} \ell_i\varepsilon_i$ como combinação linear dos 2m vetores.

2) O conjunto $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \underset{(0,\varepsilon_o)}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon_m}}, \ldots, \underset{(0,\varepsilon_{m-1})}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon_{2m-1}}},$

é LI, pois $a_1\varepsilon_o + \ldots. + a_{2m}\varepsilon_{2m-1} = (0,0)$.

$\Rightarrow a_1\varepsilon_o + \ldots + a_{m-1}\varepsilon_m = 0 \therefore a = 0$, pois ε_i é base e

$a_m\varepsilon_m + \ldots + a_{2m-1}\varepsilon_{2m-1} = 0 \Rightarrow a_i=0$, para $i = m, \ldots, 2m-1$, pois ε_i é base para A_r.

3) $\{\varepsilon_o, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m, \ldots, \varepsilon_{2m-1}\}$ é uma base <u>normalizada</u>

para A_r, pois:

(1) $\varepsilon_i^2 = -1$

(2) $\varepsilon_i\varepsilon_j = - \varepsilon_j\varepsilon_i = \pm\varepsilon_k$

Para (1)

Para ε_i até $i = m-1$ por hipótese de indução.

ε_i para $i \geq m \qquad \varepsilon_i = (0, \varepsilon_{i-m})$

Então $\overline{\varepsilon_i} = (\overline{0, \varepsilon_{i-m}}) = (\bar{0}, -\varepsilon_{i-m}) \qquad \forall\ i \geq m-1$

Logo, $n(\varepsilon_i) = \varepsilon_i\overline{\varepsilon_i} = (0,\varepsilon_i)(0,-\varepsilon_i) = (0+\overline{\varepsilon_i}\varepsilon_i, 0) = -1$

Para (2)

$\varepsilon_i\varepsilon_j$ pode ser de quatro tipos

1. $\varepsilon_i\varepsilon_j$, onde $i, j \leq m-1$. Então $\varepsilon_i\varepsilon_j = -\varepsilon_j\varepsilon_i = \pm\varepsilon_k$
   Pela hipótese de indução

2. $\varepsilon_i\varepsilon_j$, onde $i \leq m-1$, $j>m$. Então

$$(\varepsilon_i,0)(0,\varepsilon_\ell) = (\varepsilon_i 0 + -\bar{\varepsilon}_\ell 0,\ \varepsilon_\ell\varepsilon_i + 0.0) = (0,\pm\varepsilon_k)$$

3. $\varepsilon_i\varepsilon_j$, onde $i \geq m$ $j \leq m-1$. Então,

$$(0,\varepsilon_\ell)(\varepsilon_j,0) = (0-0,\ 0+\varepsilon_i\varepsilon_j) = (0,\ \pm\varepsilon_k)$$

4. $\varepsilon_i\varepsilon_j$, onde $i, j \geq m$. Então,

$$(0,\varepsilon_\ell)(0,\varepsilon_p) = (0-\overline{\varepsilon_\ell}\varepsilon_p,\ 0+0) = (\pm\varepsilon_k,0)$$

<u>OBSERVAÇÃO</u>: se $x = x_o 1 + \Sigma x_i\varepsilon_i$ onde $x_i \in F$ e $\overline{\varepsilon_i} = -\varepsilon_i$, $\forall i$,
Temos $\bar{x} = x_o 1 - \Sigma\, x_i\varepsilon_i$.
Logo, $x+\bar{x} = 2x_o = t(x)$
Da proposição 11, conclui-se que

$$n(x) = x_o^2 + x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 \quad ▨$$

Seja $F^m = F x F x \ldots x F$ o produto cartesiano de m cópias de F. Se ao ponto $x \in A_r$ fazemos corresponder o elemento $(x_o, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in F^m$, obtemos um produto bilinear induzido,

$(*)\ F^m \times F^m \to F^m,$

De modo que A_r e F^m ficam isomorfos como álgebras com involução sobre F.

Sob esse isomorfismo a base normalizada de A_r e a base canônica de F^m são associadas:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_o \longleftrightarrow (1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \\ \vdots \\ \varepsilon_{m-1} \longleftrightarrow (0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \end{array}$$

Usando a existência e propriedades da base dada na proposição 11, Schafer mostrou a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 12: $\forall_r$, os elementos da base normalizada satisfazem

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_i,\varepsilon_j) = (\varepsilon_j,\ \varepsilon_i,\ \varepsilon_i) = 0$$

Isto é: $(\varepsilon_i\varepsilon_i)\varepsilon_j - \varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = (\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i - \varepsilon_j(\varepsilon_i\varepsilon_i) = 0$

$$(\varepsilon_i^2\varepsilon_j) = \varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) \text{ e } (\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i = \varepsilon_j\varepsilon_i^2$$

DEM.: Como $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_j^2 = -1,$

Basta mostrar $\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = -\varepsilon_j = (\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i$

1. Mas, pela proposição 11:

$\varepsilon_i\varepsilon_j = -\varepsilon_j\varepsilon_i$. Logo, $\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon_j\varepsilon_i = 0$ e
$(\varepsilon_i\varepsilon_j)\varepsilon_i + (\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i = 0$.

Como também: $\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) + \varepsilon_i(\varepsilon_j\varepsilon_i) = 0$
Subtraindo: $(\varepsilon_i\varepsilon_j)\varepsilon_i+(\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i-\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j)-\varepsilon_i(\varepsilon_j\varepsilon_i) = 0$
Usando o Teorema 2: $(\varepsilon_i\varepsilon_j)\varepsilon_i - \varepsilon_i(\varepsilon_j\varepsilon_i) = 0$.

Logo, $(\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i - \varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = 0$ e

$$(\varepsilon_j\varepsilon_i)\varepsilon_i = \varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j)$$

2. Devemos mostrar $\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = -\varepsilon_j$ por indução em t, assumindo para A_t queremos mostrar para A_{t+1}. Devemos considerar três casos.

(1) $1 \leq i \leq m-1$; $m \leq j \leq r-1$

onde $\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \varepsilon_i((\varepsilon_i, 0)(0,\varepsilon_{j-m}))$

$= \varepsilon_i(0-\bar{\varepsilon}_{j-m}0, \varepsilon_{j-m}\varepsilon_i+0)$
$= (\varepsilon_i,0)(0, \varepsilon_{j-m}\varepsilon_i)$
$= (0+0; (\varepsilon_{j-m}\varepsilon_i)\varepsilon_i+0) = (0,(\varepsilon_{j-m}\varepsilon_i)\varepsilon_i)$

= Por hipótese de indução = $(0, -\varepsilon_{j-m}) = -\varepsilon_j$

(2) $m \leq i \leq r-1, \quad 1 \leq j \leq m-1$

$$\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \varepsilon_i((0,\varepsilon_{i-m}).(\varepsilon_j,0))$$

$$= \varepsilon_i(0-0,0+\varepsilon_{i-m}\ \bar{\varepsilon}_j)$$

$$= \varepsilon_i(0,\varepsilon_{i-m}\ \bar{\varepsilon}_j)$$

$$= (0,\varepsilon_{i-m})(0,\varepsilon_{i-m}\ \bar{\varepsilon}_j) =$$

$$= (0-(\overline{\varepsilon_{i-m}\ \bar{\varepsilon}_j})\varepsilon_{i-m},\ 0)$$

$$= (-(\varepsilon_j\overline{\varepsilon}_{i-m})\varepsilon_{i-m},0)$$

Mas: $\quad \bar{\varepsilon}_{i-m} = t(\varepsilon_{i-m}).1-\varepsilon_{i-m}$

$$= (-(\varepsilon_j(t\square 1-\varepsilon_{i-m}))\varepsilon_{i-m},0)$$

$$= (+(\varepsilon_j\varepsilon_{i-m})\varepsilon_{i-m},0) \quad \text{por indução}$$

$$= (-\varepsilon_j,0) = -\varepsilon_j$$

(3) $m \leq i \leq r-1 \ , \quad m \leq j \leq r-1$

$$\varepsilon_i(\varepsilon_i\varepsilon_j) = \varepsilon_i((0,\varepsilon_{i-m}).(0,\varepsilon_{j-m})) = \varepsilon_i(-\bar{\varepsilon}_{j-m}\varepsilon_{i-m},0)$$

$$= (0,\varepsilon_{i-m})(-\bar{\varepsilon}_{j-m}\varepsilon_{i-m},\ 0)$$

$$= (0,-\varepsilon_{i-m}(\overline{\varepsilon_{j-m}\varepsilon_{i-m}}))$$

$$= (0,-\varepsilon_{i-m}(\varepsilon_{i-m}\varepsilon_{j-m}))$$ usando o mesmo raciocínio.

$$= (0,\ \varepsilon_{i-m}(\varepsilon_{i-m}\varepsilon_{j-m})) = (0,\ -\varepsilon_{j-m}) = -\varepsilon_j$$

PROPOSIÇÃO 12.A: Vamos usar a proposição 12, como se segue: Como o associador é linear em cada variável, temos:

$(\varepsilon_i,\ \varepsilon_i,\ z) = (\varepsilon,\ \varepsilon_i,\ \varepsilon_r) = 0$ para todo $z \varepsilon A_r$

Seja $x = a_o 1 + a_i\varepsilon_i$ e $y = b_o 1 + b_j\varepsilon_j$.

Então, $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$

$$= [(a_o 1+a_i\varepsilon_i)(b_o 1+b_j\varepsilon_j)]\ z-(a_o 1+a_i\varepsilon_i)[(b_o 1+b_j\varepsilon_j)z] =$$

$$= a_ob_oz + (a_ob_j\varepsilon_j)z + (a_ib_o\varepsilon_i)z + (a_ib_j\varepsilon_i\varepsilon_j)z$$

$$- a_ob_oz - (a_ob_j\varepsilon_j)z - (a_ib_o\varepsilon_i)z - (a_ib_j\varepsilon_i(\varepsilon_j\ z)) =$$

$$= a_ib_j\ (\varepsilon_i,\varepsilon_j,z)$$

e analogamente, $(z,x,y) = a_ib_j\ (z,\ \varepsilon_i,\ \varepsilon_j)$.

Consequentemente, usando a proposição 12, Se i=j, $(x,y,z) = (z,x,y) = 0$,

o que vale em particular se x e y são números "reais" ou "complexos" generalizados. ▨

4.5. Funções Normadas

Sob o isomorfismo visto na seção anterior, identificamos a álgebra A_r com F^m (o produto m-vezes de F), onde $m=2^r$.

Por conveniência, um elemento x de A_r vai ser considerado indistintamente como um elemento x de F^m.

Olhamos F^m como espaço vetorial sobre F e seja $F^p \subset F^m$ o subespaço formado por alguns p fatores de F^m.

Isto é equivalente a especificar p elementos da base $\varepsilon_o, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$.

Claramente, a notação F^p é ambígua, já que o plano z=0 é diferente do plano x=0 em R^3, mas será tornada mais precisa quando for necessário.

PROPOSIÇÃO 13: Assuma que a unidade $\varepsilon_o = 1$ está sempre contida em todos os subespaços que vão ser considerados.

Então, se $x \in F^p$, $\bar{x} = t(x).1-x$ $\bar{x} \in F^p$.

Agora seja:

$\emptyset: F^p \times F^q \to F^s$ a restrição da função bilinear (*) onde F^p, F^q e F^s são três subespaços de F^m.

Dados $x \in F^p$, $y \in F^q$, vamos mostrar que $xy = \emptyset(x,y)$ e $yx=\emptyset(y,x)$ estão ambos no mesmo subespaço F^s.

DEM.: De fato, como $\bar{x} \in F^p$ e $\bar{y} \in F^q$, segue que $\bar{x}\bar{y} \in F^s$; mas $\bar{x}\bar{y} = \overline{yx}$, portanto, $\overline{yx} \in F^s$ e logo $xy \in F^s$, consequentemente.

DEF. 9: A função $\emptyset$ bilinear é dita uma função normada se $n(xy) = n(x)n(y)$ para todo $x \in F^p$ e $y \in F^q$.

Aqui a norma em cada subespaço é a norma obtida restringindo a expressão $n(x) = x_o^2+x_1^2+ \ldots + x_m^2$ aos elementos da base normalizada que geram o espaço.

Seja $A_r = A_{r-1}(-1)$ e $x = (x_1, y_1)$ $y = (x_2,y_2)$ dois elementos de A_r, onde as componentes $x_1, y_1, x_2, y_2 \in A_{r-1}$ e satisfazem as condições do lema 1. Então, de acordo com este lema, $\emptyset$ é normada $\Leftrightarrow$

$$\Theta(x,y) = t(x_1(x_2, y_1, y_2)) = 0$$

Se $p = q = s = m$, a condição da DEF. 9 diz que A_r é uma álgebra normada.

Para $r \leq 3$, sempre temos $\Theta(x,y) = 0$, pois $(x_2, y_1, y_2) = 0$. Se $r > 3$, A_{r-1} não é associativa; portanto, podemos encontrar elementos x_2, y_1, y_2 em A_{r-1}, tais que $(x_2, y_1, y_2) \neq 0$.

Agora, para estudar funções normadas, estabeleceremos dois lemas e um corolário.

LEMA 4: Dada a função normada $\emptyset: F^p \times F^q \to F^s$ restrição de $F^m \times F^m \to F^m$, sempre podemos construir as seguintes transformações normadas.

$\emptyset_1$: $F^{p+1} \times F^{2q} \to F^{2s}$
$\emptyset_2$: $F^{2p} \times F^{q+1} \to F^{2s}$,

onde ambas são restrições de $F^{2m} \times F^{2m} \to F^{2m}$.

DEM.: Seja $w_1 = (x_1, f)$ $w_2 = (x_2, y_2)$ com $x_1 \in F^p$ $x_2, y_2 \in F^q$ e $f \in F = A_o$.

Considere o produto

$$w_1 w_2 = (x_1, f)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - \overline{y_2} f,\ y_2 x_1 + f\overline{x_2}).$$

Como $x_1 x_2 \in F^s$, $\overline{y_2} f \in F^q$,

$$y_2 x_1 = \overline{\bar{x}_1 \bar{y}_2} ,$$

e $\bar{x}_1 \bar{y}_2 \in F^s$, $y_2 x_1 \in F^s$, $f\bar{x}_2 \in F^q$

Cada uma das duas componentes de $w_1w_2 \in F^s$.

Então, $w_1w_2 \in F^s$. Também as condições do Lema (1) são satisfeitas.

Pois:

$$(1)\ n(\underset{\substack{\varepsilon \\ F^p}}{x_1}\underset{\substack{\varepsilon \\ F^q}}{x_2}) = n(x_1)n(x_2) \qquad (2)\ n(x_1y_2) = n(x_1)n(y_2)$$

$$(3)\ n(fy_2)=f^2n(y_2) \qquad (4)\ n(fx_2) = f^2n(x^2)$$

$$e\ \theta(w_1w_2) = -t(x_1(x_2,f,y_2)) = 0, \text{ pois } (x_2,f,y_2)=0.$$

Portanto, o produto w_1w_2 define a transformação normada $\emptyset_1$.

De maneira análoga, definimos a transformação normada $\emptyset_2$:

Sejam $w_1 = (x_1,y_1) \qquad x_1,\ y_1 \in F^p$

$w_2 = (x_2,f) \qquad x_2 \in F^q,\ f \in F$

Considere o produto:

$$w_1w_2 = (x_1,y_1)(x_2,f) = (x_1x_2-\bar{f}y_1,\ fx_1+y_1\bar{x}_2)$$

Como $x_1x_2 \in F^s$, $fy_1 \in F^p$, $fx_1 \in F^p$, $y_1\bar{x}_2 \in F^s$, ambas componentes de $w_1w_2 \in F^s$ logo, $w_1w_2 \in F^{2s}$, e da mesma maneira,

$\Theta(w_1,w_2) = -t(x_1(x_2,y_1,f) = 0$, pois $(x_2, y_1, f) = 0$ e usando o lema 1 definimos $\emptyset_2$. ▨

Agora:

<u>DEF. 10</u>: Seja ε_i um elemento fixo da base normalizada, onde $0 < i < m$, considere $u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_i$ e $v = f_3\varepsilon_o + f_4\varepsilon_i$, onde $f_i \in F$.

Se $\varepsilon_i = \varepsilon_1$, então u, v são "números complexos".

Defina o conjunto $Q(F^p, F^q, \varepsilon_i) \subset F^m$ por

$$Q(F^p, F^q, \varepsilon_i) = \{vx+uy \mid x \in F^p, y \in F^q \;\forall u, v\}.$$

E seja F^λ o menor subespaço de F^m contendo $Q(F^p, F^q, \varepsilon_i)$ (λ = dimensão de F^λ).

Pode ser mostrado que $\lambda = \lambda(F^p, F^q, \varepsilon_i)$ depende de p, q e também dos subespaços particulares de F^p e F^q considerados.

Por exemplo, se tomamos F, F^1 pode ser gerado por ε_i ou ε_j. Mas, se F^1 é gerado por ε_i

$$[Q(F^1,F^q,\varepsilon_i)=\{vx+uy \mid x \in 1\; k\varepsilon_i\}, y \in F^q \;\forall u, v\}]$$

onde u e v são da forma $u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_i$

$v = f_3\varepsilon_o + f_4\varepsilon_i$

Seja V = [subespaço gerado por $y \in F^q$] dim V = dim $Q(f^1, F^q, \varepsilon_i)$ e se F^1 é gerado por ε_j, $j \neq 1$.

dim $Q(F^1, F^q, \varepsilon_i) > \dim V$ pois ao multiplicarmos vx estaremos saindo do subespaço gerado por ε_o, ε_1.

LEMA 5: Seja $\emptyset$: $F^p \times F^q \to F^s$ uma transformação normada obtida com restrição de $F^m \times F^m \to F^m$.

Assuma que $\varepsilon_i \in F^p \cap F^q$. Então, existe uma transformação normada

$\emptyset_3$: $F^{p+2} \times F^{q+2} \to F^{s+\lambda}$ obtida como restrição de $F^{2m} \times F^{2m} \to F^{2m}$, onde $\lambda = \lambda(F^p, F^q, \varepsilon_i)$ é o número definido acima.

DEM.: Tome $w_1 = (x_1, u)$ e $w_2 = (x_2, v)$ onde $x_1 \in F^p$, $x_2 \in F^q$,

$u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_i$, $v = f_3\varepsilon_o + f_4\varepsilon_i$ e faça o produto:

$$w_1w_2 = (x_1x_2 - \bar{v}u,\ vx_1 + u\bar{x}_2).$$

Então, $x_1x_2 \in F^s$ $\bar{v} = f_3\varepsilon_o - f_4\varepsilon_i \in F^p$ $u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_i \in F^q$

Pois $\varepsilon_o\varepsilon_1 \in F^p \cap F^q$ (hipótese) e segue que $\bar{v}u \in F^s$. Logo, a primeira componente de $w_1w_2 \in F^s$. Também $vx_1 + u\overline{x_2}$, por definição, está em F^λ, logo $w_1w_2 \in F^{s+\lambda}$.

Assim, as hipóteses do Lema (2) são satisfeitas pois:

$n(x_1x_2) = n(x_1)n(x_2)$ $n(uv) = n(u)n(v)$ $n(x_1v) = n(x_1)n(v)$

$n(ux_2) = n(u)n(x_2)$.

Como $(x_2, u, v) = (x_2u)v - x_2(uv) = 0$ por pro. 12A.

$$= (x_2(f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_i)).$$

Logo $\theta(w_1, w_2) = 0$ e consequentemente, o produto w_1w_2 define a função.

$\emptyset_3$: $F^{p+2} \times F^{q+2} \to F^{s+}$, que é normada.

COROLÁRIO (1): Seja $\emptyset$: $F^p \times F^q \to F^s$ uma função normada, obtida como restrição de $F^m \times F^m$.

Então, existe uma transformação normada

$$\emptyset_4: F^{2p+2} \times F^{2q+3} \to F^{4s+2p+2}$$

DEM.: Começando com $\emptyset_1$ e $\emptyset_2$, temos

$F^{p+1} \times F^{2q} \to F^{2s}$, e então.

$F^{2p+2} \times F^{2q+1} \to F^{4s}$, que é uma restrição de $F^{4m} \times F^{4m} \to F^{4m}$.

Se $x \in F^{2p+2}$ e $y \in F^{2q+1}$, podemos representar estes elementos por

$x = ((x_1,f_1),\ (x_2,f_2))$ e $y = ((y_1,y_2),(f_3,0))$

onde $x_1,\ x_2 \in F^p$

$y_1,\ y_2 \in F^q$

$f_1,\ f_2,\ f_3 \in F$

Agora utilizamos $\emptyset_3$ com $u=0$ e $v = (f_4\varepsilon_o + f_5\varepsilon_{2m})$, onde $\varepsilon_o = ((1,0),\ (0,0))$ e $\varepsilon_{2m} = ((0,0),\ (1,0))$.

Então, $(x,0)(y,v) = (xy-\bar{v}.0,\ vx + 0.\bar{y}) = (xy,\ vx)$.

e $vx = (f_4\varepsilon_o + f_5\varepsilon_{2m})((x_1,\ f_1),\ (x_2,f_2))$

$$\| $$

$$((f_4,0)+(f_5,0))((x_1,f_1),\ (x_2,f_2)) =$$

$$= ((f_4,0)(x_1,f_2)-(\overline{x_2,f_2})(f_5,0);\ (x_2,f_2)(f_4,0)+(f_5,0)(\overline{x_1,f_1})$$

$$= ((x_1f_4,\ f_2f_4)-(\overline{x_2},-f_2)(f_5,0);\ (x_2f_4,\ f_2\overline{f_4}) + (f_5,0)(\overline{x_1},-f_1))$$

$$= ((x_1f_4,\ f_2f_4)-(\overline{x_2}f_5,-f_2\overline{f_5});\ (x_2f_4,\ f_2\overline{f_4})+(f_5\overline{x_1},-f_1f_5))$$

$$= ((\underbrace{x_1f_4-\overline{x_2}f_5}_{\varepsilon F^p},\ \underbrace{f_2f_4-f_2\overline{f_5}}_{\varepsilon F});\ (\underbrace{x_2f_4+f_5\overline{x_1}}_{\varepsilon F^p},\ \underbrace{f_2\overline{f_4}-f_1f_5}_{\varepsilon F})$$

$$= ((F^p,F);\ (F^p,F)).$$

Logo, $vx \in F^{2p+2}$. Como $xy \in F^{4s}$, o produto

$$(x,0)(y,v) = (\underset{\underset{F^{4s}}{\varepsilon}}{xy},\ \underset{\underset{F^{2p+2}}{\varepsilon}}{vx}) \in F^{4s+2p+2},$$

e é normada pelo lema anterior.

TEOREMA: Obtemos as seguintes transformações normadas, como restrições de $A_r \times A_r \to A_r$ com $r = 4, 5, 6$.

1. $F^9 \times F^{16} \to F^{16}$
2. $F^{10} \times F^{10} \to F^{16}$
3. $F^{10} \times F^{32} \to F^{32}$
4. $F^{18} \times F^{17} \to F^{32}$
5. $F^{12} \times F^{12} \to F^{26}$

6. $F^{11} \times F^{20} \to F^{32}$
7. $F^{13} \times F^{13} \to F^{28}$
8. $F^{11} \times F^{14} \to F^{28}$
9. $F^{10} \times F^{15} \to F^{31}$
10. $F^{12} \times F^{14} \to F^{31}$

11. $F^{22} \times F^{21} \to F^{64}$
12. $F^{18} \times F^{19} \to F^{50}$
13. $F^{20} \times F^{19} \to F^{58}$
14. $F^{19} \times F^{19} \to F^{56}$

DEM.: Começamos com a multiplicação de Cayley $F^8 \times F^8 \to F^8$ como função normada. Usando o Lema 1, obtemos:

1 [1] $F^9 \times F^{16} \to F^{16}$

Usando agora Lema (2) em $F^8 \times F^8 \to F^8$, obtemos:

[2] $F^{10} \times F^{10} \to F^{8+\lambda}$

Como $\varepsilon_i = \varepsilon_1$, temos $\lambda = 8$ e $F^{10} \times F^{10} \to F^{16}$.

Pois $Q(F^8, F^8, \varepsilon_1) = \{vx+uy \mid x \in F^8,\ y \in F^8, \forall u,\ v$ onde

$u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_1,\ v = f_3\varepsilon_o + f_4\varepsilon_1\}$.

$vx + uy \in F^8$.

Logo, $F^\lambda = F^8$ e $\lambda = 8$

2 Agora, usando 1. $F^9 \times F^{16} \to F^{16}$ como transformação normada e aplicando a ela as construções dos lemas 4 e 5, obtemos:

[3] $F^9 \times F^{16} \to F^{16}$

$F^{10} \times F^{32} \to F^{32}$

[4] $F^{2.9} \times F^{16+1} \to F^{16+\lambda}$

$F^{18} \times F^{17} \to F^{32}$ $\qquad \varepsilon_j = \varepsilon_j \quad \lambda = 16$

3 e aplicando a construção do Lema 5 à $F^{10} \times F^{10} \to F^{16}$, como $\varepsilon_i = \varepsilon_1$,

$Q(F^{10}, F^{10}, \varepsilon_1) = \{vx+uy \mid x \in F^{10},\ y \in F^{10}$

e

$u = f_1\varepsilon_o + f_2\varepsilon_1,\ v = f_3\varepsilon_o + f_4\varepsilon_1\}$.

Temos $F^{\lambda} = F^{10}$ e $\lambda = 10$

Obtemos

$$F^{10+2} \times F^{10+2} \to F^{16+\lambda}$$

$$[5] \quad F^{12} \times F^{12} \to F^{26}$$

4 Para obter 6. $F^{11} \times F^{20} \to F^{32}$, usamos Lema 4 em

$$F^{10} \times F^{10} \to F^{16}$$

$$F^{10+1} \times F^{2.10} \to F^{32}$$
$$F^{11} \times F^{20} \to F^{32}$$

7. $F^{13} \times F^{13} \to F^{28}$ é uma restrição de 4. $F^{18} \times F^{17} \to F^{32}$

Vamos mostrar como isso deve ser feito.

Seja $w_1 = ((x_1, q_1), (f_1, 0)$ e $w_2 = ((x_2, f_2), (q_2, 0))$

onde $f_1, f_2 \in F$

$q_1, q_2 \in A_2 \simeq F^4$

$x_1, x_2 \in A_3 \simeq F^8$

OBS.: $w_1 = ((\underset{F_8}{\underset{\downarrow}{x_1}}, \underset{F_4}{\underset{\downarrow}{q_1}}), (\underset{1}{f_1}, \underset{1}{0})) \in F^{14}$, mas sua última coordenada é zero.

Logo, $w_1 \in F^{13}$. Idem para $w_2 = ((x_2, f_2), (q_2, 0))$

Sejam $y_1 = (x_1, q_1) \quad y_2 = (x_2, f_2)$

$z_1 = (f_1, 0) \quad z_2 = (q_2, 0)$

Então, $w_1 = (y_1, z_1) \; w_2 = (y_2, z_2)$

Logo, $w_1w_2 = (y_1, z_1)(y_2, z_2) = (y_1y_2 - \overline{z_2}z_1, z_2y_1 + z_1\overline{y_2})$

Onde $y_1y_2 = (x_1, q_1)(x_2, f_2) = (\underbrace{x_1x_2-f_2q_1}_{\varepsilon F^8}, \underbrace{f_2x_1 + q_1x_2}_{\varepsilon F^8})$

$$-\overline{z_2}z_1 = -\underbrace{(q_2,0)(f_1,0)}_{\varepsilon F^4} = (q_2f_1-0,0) = (\underbrace{-q_2f_1}_{\varepsilon F^5},0)$$

$$z_2y_1 = (q_2,0)(x_1,q_1) = (q_2x_1, q_1q_2)$$
$$\varepsilon F^8 \quad \varepsilon F^{\pm} \qquad\qquad \varepsilon F^{12}$$

$$z_1\overline{y_2} = (f_1,0)(\overline{x_2},-f_2) = (\underbrace{f_1\overline{x_2}}_{\varepsilon F^8}, \underbrace{-f_2f_1}_{\varepsilon F}) \; \varepsilon \; F^9$$

Logo, $w_1w_2 \; \varepsilon \; (F^{16}, F^{12}) \; \varepsilon \; F^{26}$.

Agora também

$n(y_1y_2) = n(y_1)n(y_2) \qquad n(z_1z_2) = n(z_1)n(z_2)$

$n(y_1z_2) = n(y_1)n(z_2) \qquad n(z_1y_2) = n(z_1)n(y_2)$

$\Theta(w_1,w_2) = t(x_2(y_1,z_2,z_1)) = 0$ pois $z_1, z_2 \; \varepsilon \; F$

Logo, a prova está terminada.

6 Agora, deveríamos mostrar:

8. $F^{11} \times F^{14} \to F^{28}$
9. $F^{10} \times F^{15} \to F^{31}$
10. $F^{12} \times F^{14} \to F^{31}$
11. $F^{22} \times F^{21} \to F^{64}$
12. $F^{18} \times F^{19} \to F^{50}$
13. $F^{20} \times F^{19} \to F^{58}$
14. $F^{19} \times F^{19} \to F^{56}$, porém as demonstrações são absolutamente análogas às já feitas.

4.6. Um 3 Produto Vetorial em R^8

DEF.: Um r-produto vetorial em R^n é uma função contínua.

$$X: R^{nr} = \underbrace{R^n \times R^n x \ldots x R^n}_{\text{r-vezes}} \to R^n$$

Que satisfaz: (A) $X(a_1, a_2, \ldots, a_r).a_i = 0, \; 1 \leq i \leq n$

(B) $||x(a_1, \ldots, a_r)||^2 = |a_i . a_j|$

Pode ser deduzido de [2] e [4] que R^n admite um r-produto vetorial, precisamente nos seguintes casos:

(1) r=1 e n é par

(2) $r = n-1$

(3) $r=2$ e $n = 3,7$

(4) $r=3$ e $n=8$

Fórmulas explícitas para esses produtos eram conhecidas em todos os casos, menos no último, e fazê-lo utilizando os números de Cayley é o objetivo desta seção.

Para (1), temos:

$X: R^{rm} = R^{2n} \rightarrow R^{2n} \quad r = 1$ n é par

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \rightarrow (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1})$$

Valem

(A) $X(a1).a1 = 0$, pois

$$(-x_2, x_1, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1}).(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = 0$$

(B) $||\ (a_1)\ ||^2 = |a_1.a_1|$

$$x_2^2 + x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2 + x_{2n-1}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2$$

Para (2), temos:

$$X = R^{(n-1)n} = \underbrace{R^n \times R^n x \dots x R^n}_{n-1 \text{ vezes}} \to R^n$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \to v \perp \underbrace{<v_1, \dots, v_{n-1}>}_{\text{dim. } n-1}$$

Para (3), temos o produto vetorial usual $R^3 \times R^3 \to R^3$ e queremos encontrar agora fórmulas explícitas para

$$R^8 \times R^8 \times R^8 \to R^8 \text{ e } R^7 \times R^7 \to R^7$$

I. Números de Cayley

$\mathcal{C}$ = Números de Cayley = álgebra de dimensão 8 sobre os reais com base de vetores $e_1, e_2, \dots, e_8$ e produtos convenientemente definidos.

Em particular, $e_1=1$ é a unidade e para $i, j > 1$, temos

$$e_ie_j = \begin{cases} -1, & i=j \\ -e_je_i & i\neq j \end{cases}$$

O subespaço de $\mathcal{C}$ ortogonal a e_1 é chamado de subespaço dos números de Cayley puros.

Conjugação é definida escrevendo qualquer número de Cayley como:

$x = re_1 + x'$ onde x' é puro e

$\bar{x} = re_1 - x'$

Os números de Cayley herdam a norma e o produto escalar do R^8 e

$$x\bar{x} = \bar{x}x = x.x = |x|^2 \quad ,$$

pois: $x.\bar{x} \stackrel{?}{=} x.x$

$$(x_1e_1 + x_2e_2)(x_1e_1 - x_2e_2) =$$

$$x_1^2e_1e_1 - x_1x_2e_1e_2 + x_2x_1e_2e_1 - x_2^2e_2e_2 - x_1^2 + x_1x_2e_2e_1 +$$

$$+ x_2x_1e_2e_1 + x_2^2 =$$

$$= x_2^2 - x_1^2 + (x_1x_2 + x_2x_1)e_2e_1.$$

LEMA 1: Para quaisquer números de Cayley a, b, temos $\bar{\bar{a}} = a$,
$\overline{ab} = \overline{ba}$ e $a\bar{b} + b\bar{a} = 2(a.b)$.

DEM.: Por linearidade, é suficiente provar quando a, b são os elementos da base $e_1, e_2, \ldots, e_8$.

$$\forall_{i > 1} \quad \overline{e_i} = -\bar{\bar{e}}_i \quad \bar{\bar{e}}_i = e_i \quad \overline{e_ie_j} = \overline{e_j}\overline{e_i}$$

$$e_i\overline{e_j} + e_j\overline{e_i} = -e_ie_j + -e_je_i = -e_ie_j + e_ie_j = 0$$

$= 2(e_i . e_j) = 0$

<u>COROLÁRIO</u>: $\bar{a}b + \bar{b}a = 2(\bar{a}.\bar{b}) = 2(a.b)$

<u>DEM.</u>: Basta tomar $a=\bar{a}$ e $b=\bar{b}$ no Lema (1).

A multiplicação em $\mathfrak{C}$ pode ser definida explicitamente olhando C como uma álgebra 2-dimensional sobre os quaternions com base 1 e k e fazendo:

$$(q_1+q_2k)(q_1'+q_2'k) = (q_1q_1' - \bar{q}_2'q_2) + (q_2'q_1 + q_2\bar{q}_1')k$$

<u>LEMA 2</u>: Para quaisquer números de Cayley a, b, c

$$a(\bar{b}c) + b(\bar{a}c) = 2(a.b)c$$

<u>DEM.</u>: Usando distributividade, associatividade dos quaternions e que se $B = (b_1+b_2k)$ então $\bar{B} = (\overline{b_1}-b_2k)$, temos:

$$a(\bar{b}c)+b(\bar{a}c) = (b_1\overline{a_1}+a_1\overline{b_1})c_1+c_1(\overline{a_2}b_2+\overline{b_2}a_2) +$$

$$+ [c_2(\bar{a}_1b_1+\bar{b}_1a_1) + (b_2\bar{a}_2+a_2\bar{b}_2)c_2]k$$

COROLÁRIO + LEMA 1

$$= 2\ [\underbrace{(b_1.a_1)}_{\varepsilon R}c_1+c_1\underbrace{(a_2.b_2)}_{\varepsilon\ R}+(c_2(a_1.b_1)+(b_2.a_2)c_2)k]$$

$= 2[(a_1.b_1+a_2.b_2)c_1+(a_1.b_1+a_2.b_2)c_2k]$

$= 2[((a_1.b_1+a_2.b_2)(c_1+c_2k))] = 2(a.b)c$ ▨

PROPOSIÇÃO: A subálgebra de C gerada por quaisquer dois elementos e seus conjugados é associativa (Schaffer).

Já vimos que $\forall$ a, b, c números de Cayley o produto a(bc)a é bem definido (a álgebra é flexível) e temos que a(bc)a = = (ab)(ca) - identidade de Moufang.

LEMA 3: Para quaisquer a, b, c números de Cayley, temos:

(i) $a.(a(\bar{b}c)) = |a|^2 (b.c)$

(ii) $c.(a(\bar{b}c)) = |c|^2 (a.b)$ e

(iii) $b.(a(\bar{b}c)) = -|b|^2(c.a) + 2(a.b)(b.c)$

DEM.: (i) Usando que $2(x.y) = x\bar{y} + y\bar{x}$ (Lema 1), temos:

$$2a.(a(\bar{b}c)) = a.\overline{(a(\bar{b}c))} + (a(\bar{b}c))\bar{a}$$

$$= a((\bar{c}b)\bar{a} + (a(\bar{b}c))\bar{a}$$

Usando a proposição que diz que a, $\bar{a}$, $\bar{c}b$, e $\overline{\bar{c}b} = \bar{b}c$ geram uma álgebra associativa, temos:

$$a(cb)\bar{a}+a(\bar{b}c)a = a(\bar{c}b+\bar{b}c)\bar{a} = 2a(b.c)\bar{a} = 2|a|^2(b.c)$$

(ii) $$2c.\ (a(\bar{b}c)) = c\overline{(a(\bar{b}c))} + (a(\bar{b}c)).\bar{c}$$

$$= c.((\bar{c}b)\bar{a}) + (a(\bar{b}c)).\bar{c} = 2r \quad r \in R$$

$$rc = c((\bar{c}b)\bar{a})c + (a(\bar{b}c))\bar{c}c = c((\bar{c}b)\bar{a})c+a(\bar{b}c)|c|^2$$

$$= ((c(\bar{c}b)(\bar{a}c))+(a(\bar{b}c)|c|^2 = |c|^2\ [(b(\bar{a}c))+(a(\bar{b}c))]$$

$$= |c|^2\ [(b\bar{a})c+(a\bar{b})c] = 2|c|^2(a.b)c$$

$$\underset{2(a.b)c}{\shortparallel}$$

(iii) $$2b.\ (a(\bar{b}c)) = b((\bar{c}b)\bar{a}) + (a(\bar{b}c))\bar{b}$$

$$= b[(\neg bc+2\ b.c)\bar{a}] + [a(-\bar{c}b+2\ b.c)]\bar{b}$$

$$= 2(b.c)(b\bar{a}+a\bar{b})-b((\bar{b}c)\bar{a}-(a(\bar{c}b))\bar{b} \quad \text{p/algum real } r$$

$$= 4(b.c)(a.b)-2r$$

e

$$rb = ([b(\bar{b}c)]\bar{a}+[a(\bar{c}b)]\bar{b})b$$

$$= b(\bar{b}c)\bar{a}b+(a(\bar{c}b))|b|^2$$

se é associativa $= |b|^2\ (c(\bar{a}b) + a(\bar{c}b))$

$$= |b|^2((c\bar{a})b + (a\bar{c})b)$$

$$= |b|^2\ (a.c)b$$

Logo, $2b.(a(\bar{b}c)) = 4(b.c)(a.b) - 2\ |b|^2\ (a.c)$

$\therefore\ b.(a(\bar{b}c)) = 2(a.b)(b.c) - |b|^2\ a.c$

OBSERVAÇÕES:

Quando restrito à variedade de Stiefel (ver cap. 5) o 2-produto vetorial

x_2: $R^7 \times R^7 \to R^7$ produz uma seção x_2: $V_{7,2} \to V_{7,3}$.

Similarmente x_3: $R^8 \times R^8 \to R^8$ produz uma seção x_3: $V_{8,3} \to V_{8,4}$. Então o fato de $x_3(e_1, b, c) = bc + b.c = x_2(b,c)$ onde $(e_1, b, c) \in V_{8,3}$ e b,c são números Cayley puros implica que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} V_{7,2} & \xrightarrow{i} & V_{8,3} \\ {\scriptstyle x_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_3} \\ V_{7,3} & \xrightarrow{i'} & V_{8,4} \end{array}$$

onde $i: V_{7,2} \to V_{8,3}$

$(bc) \longrightarrow (e_1, b, c)$

$x_3: V_{8,3} \to V_{8,4}$

$(a,b,c) \to (a,b,c, x_3(a,b,c)$

$(e_1,b,c) \to (e_1,b,c, x_3(e_1,b,c)) \simeq (b,c, x_2(b,c))$

Aplicações a Produtos Vetoriais

DEF.: Podemos obter um produto vetorial de dois vetores em R^7, identificando R^7 com os números de Cayley puros, da seguinte maneira:

b,c números de Cayley puros

$$\begin{cases} b = 0 + b_1k = \sum_{i=2}^{8} b_i e_i \\ c = 0 + c_1k = \sum_{i=2}^{8} c_i e_i \end{cases}$$

Logo,

$$\overset{\text{multiplicação de Cayley}}{bc} = \left(\sum_{i=2}^{8} b_i e_i\right)\left(\sum_{j=2}^{8} c_j e_j\right) = \sum_{i,j=2}^{8} b_i c_j e_i e_j .$$

Como $e_i e_j = \begin{cases} -1 & \text{se } i=j,\ i,\ j > 1 \\ -\ e_j e_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$, Logo,

$$bc = -\underbrace{\overbrace{b.c}^{\in R}}_{\text{produto interno}}\, 1 + \sum_{i \neq j} b_i c_j e_i e_j$$

Portanto,

$$x_2(b,c) = \underbrace{bc}_{\substack{\text{multiplicação} \\ \text{de Cayley}}} + \underbrace{b.c}_{\substack{\text{produto} \\ \text{interno}}} \text{ é um número de Cayley puro.}$$

<u>TEOREMA</u>: Sejam a, b, c vetores em R^8 olhados como números de Cayley.

Então, $x_3(a,b,c) = -a(\bar{b}c)+a(b.c)-b(c.a)+c(a.b)$ define um produto vetorial de três vetores em R^8.

<u>DEM.</u>: Temos que mostrar:

1. $x_3(a,b,c).a = 0 \quad x(a,b,c).b = 0 \quad x(a,b,c).c = 0$

2. x_3 é contínua

3. $$||x_3(a,b,c)||^2 = \det \begin{pmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{pmatrix}$$

1. $a.x_3 = a.(-a(\bar{b}c)) + a(b.c)-b(c.a)+c(a.b)$

$$= -|a|^2(b.c)+|a|^2(b.c)-(a.b)(c.a)+(a.c)(a.b) = 0$$

$$b.x_3 = +b.\left[-a(\bar{b}c)+a(b.c)-b(c.a)+c(a.b)\right]$$

$$= -b(a(\bar{b}c)+(b.a)(b.c)-|b|^2(c.a)+(b.c)(a.b)$$

$$= |b|^2 \ (c.a)-2(a.b)(b.c)+2(b.a)(b.c)-|b|^2(c.a) = 0$$

$$c.x_3 = c.(-a(\bar{b}c)+a(b.c)-b(c.a)+c(a.b))$$

$$= -|c|^2(a.b)+(c.a)(b.c)-(c.b)(c.a)+|c|^2(a.b) = 0$$

2. x_3 é obviamente contínua.

3. Falta mostrar que $||x_3||^2 = \det \begin{pmatrix} a.a & a.b & a.c \\ b.a & b.b & b.c \\ c.a & c.b & c.c \end{pmatrix}$

Escrevendo $d = (a(\bar{b}c))$, temos:

$$||x_3||^2 = x_3.x_3 = (-a(\bar{b}c)+a(b.c)-b(c.a)+c(a.b)).(-a(\bar{b}c)+a(b.c)-b$$
$$- b(c.a)+c(a.b)$$

$$= |d|^2 + |a|^2(b.c)^2 + |b|^2(a.c)^2 + |c|^2(a.b)^2$$

$$- 2(a.d)(b.c)+2(a.c)(b.d)-2(a.b)(c.d)-2(a.b)(a.c)(b.c)$$

$$I = |a|^2 \ |b|^2 \ |c|^2 + |a|^2(b.c)^2 + |b|^2(a.c)^2 + |c|^2(a.b)^2$$

$$- 2|a|^2(b.c)^2-2 \ |b|^2(a.c)^2-2 \ |c|^2(a.b)^2+4(a.b)(b.c)(c.a)$$

$$- 2(a.b)(b.c)(c.a).$$

Pois, $-2(a.d)(b.c) = -2(a.(a(bc)))(b.c) =$

$$= -2|a|^2(b.c)(b.c) = -2|a|^2(b.c)^2$$

e analogamente para $2(a.c)(b.d)$ e $-2(a.b)(c.d)$.

Portanto igual a:

$$\left[\begin{array}{ccc} |a|^2 & a.b & a.c \\ b.a & |b|^2 & b.c \\ c.a & c.b & |c|^2 \end{array}\right]\begin{array}{cc} |a|^2 & a.b \\ b.a & |b|^2 \\ c.a & c.b \end{array}$$

5. APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS DAS TRANSFORMAÇÕES DE HURWITZ-RADON

5.1. Generalidades sobre Fibrado

DEF. 1: Um fibrado (Bundle) é uma tripla (E, p, B) onde $p: E \to B$ é uma função contínua, o espaço B é chamado espaço base, o espaço E é chamado o espaço total e a função p é chamada projeção do fibrado.

DEF. 2: Para cada $b \in B$, o espaço $p^{-1}(b)$ é chamado a fibra do fibrado sobre $b \in B$.
Usualmente, utilizamos letras gregas (ξ, η, ζ, λ, etc) para denotar fibrados; então, $E(\xi)$ é o espaço total do fibrado ξ e $B(\xi)$ é o espaço-base do fibrado ξ.

EXEMPLO BÁSICO: o fibrado produto sobre B com fibra F é $(B \times F, p, B)$, onde p é a projeção no 1º fator.

DEF. 3: (subfibrado) Um fibrado (E', p', B') é um subfibrado de (E, p, B) se E' é subespaço de E, B' é subespaço de B e $p' = p|_{E'}: E' \to B$.

DEF. 4: Uma seção de um fibrado (E, p, B) é uma função $s: B \to E$ tal que $p.s = 1_B$.
Em outras palavras, uma seção é uma função $s: B \to E$, tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$ = A fibra sobre b para cada $b \in B$.

Seja (E', p', B) um subfribrado de (E, p, B) e seja s uma seção de (E, p, B) então, s é uma seção de (E', p', B) se e só se $s(b) \in E'$ para todo $b \in B$.

PROPOSIÇÃO 1: Toda seção s de um fibrado produto $B \times F$, p, B tem a forma $s(b) = (b, f(b))$ onde $f: B \to F$ é uma função definida unicamente por s.

DEM.: Toda função $s: B \to B \times F$ tem a forma $s(b) = (s'(b), f(b))$, onde $s': B \to B$ e $f: B \to F$ são funções unicamente definidas por s. Como $ps(b) = s'(b)$, s é uma seção $\Longleftrightarrow$ $s(b) = (b, f(b))$ para cada $b \in B$.

OBS: A proposição diz que a função que atribui a cada seção s do fibrado produto ($B \times F$, p, B) a função projeção na 2ª coordenada $pr_2 s: B \to F$ é uma bijeção do conjunto de todas as seções de ($B \times F$, p, B) no conjunto das funções de $B \to F$.

Isto é: $\mathcal{S}(B \times F, p, B) \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{F}(B \to F)$

$$s: B \to B \times F \to f: B \to F$$

$$b \to (b, f(b))$$

$\mathcal{H}$ é bijeção

OBS: Se (E, p, B) é um subfibrado do fibrado produto ($B \times F$, p, B) as seções de (E, p, B) têm a forma $s(b) = (b, f(b))$, onde $f: B \to F$ é uma função tal que $(b, f(b)) \in E$ para cada

$b \in B$.

5.2. Exemplos

1) O fibrado tangente à S^n $\tau(S^n) = (T, p, S^n)$ é um subfibrado do fibrado produto $(S^n \times R^{n+1}, p, S^n)$ cujo espaço total é definido pela relação $(b,x) \in T \Leftrightarrow \langle b,x\rangle = 0$ $b \in S^n$ $x \in R^{n+1}$

produto interno usual em R^n.

Um elemento $(b,x) \in T$ é chamado um vetor tangente a S^n em b e a fibra $p^{-1}(b)$ é um espaço vetorial de dimensão n, pois

$$p^{-1}(b) = \{x \in R^{n+1} \ \langle x,b\rangle = 0\}$$

Uma seção de $\tau(S^n)$ é chamada um campo de vetores tangentes à S^n.

2) O fibrado normal à S^n em R^{n+1}, $\nu(S^n) = (N, q, S^n)$ é um subfibrado do fibrado produto $(S^n \times R^{n+1}, p, S^n)$ cujo espaço total N é definido pela relação $(b,x) \in N \Leftrightarrow x = kb$ para $k \in R$.

Um elemento (b,x) é dito um vetor normal a S^n em b. A fibra $q^{-1}(b)$ é um espaço de dimensão 1.

Uma seção de $\nu(S^n)$ é chamada um campo de vetores normais a S^n.

3) O fibrado dos k-referenciais ortonormais sobre S^n $\tau_k(S^n)$ para $k \leq n$ denotado (E, p, S^n) é um subfibrado do fibrado produto $(S^n \times (S^n)^k, p, S^n)$ cujo espaço total E é o subespaço de $(b, v_1, v_2, \ldots, v_k) \in S^n \dot{x} (S^n)^k$, tal que $<b,v_i>=0$ e $<v_i, v_j> = \delta_{i\,j}$ para $i \leq i, j \leq k$.

$\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$; $\delta_{ij} = 1$, se $i=j$

Um elemento $(b, v_1, v_2, \ldots, v_k) \in E$ é um sistema ortonormal de k vetores tangentes à S^n em b.

Uma seção de $\tau_k(S^n)$ é chamada um campo de k referenciais. Para o fibrado $\tau_k(S^n)$ a existência de uma seção é um problema difícil, mas já resolvido.

Porém, utilizando a projeção nos primeiros fatores , a existência de uma seção de $\tau_\ell(S^n)$ implica a existência de uma seção de $\tau_k(S^n)$ para $k \leq \ell \leq n$.

DEF. 5: A variedade de Stiefel (Stiefel variety) de k-referenciais ortonormais em R^n denotada $v_k(R^n)$ é o subespaço de $(v_1, \ldots, v_k) \varepsilon (S^{n-1})^k$, tal que $<v_i, v_j> = \delta_{i\,j}$.

Como $v_k(R^n)$ é um subconjunto fechado de um espaço compacto, ele é um espaço compacto.

A cada referencial $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ está associado o subespaço k-dimensional $<v_1, v_2, \ldots, v_k>$ gerado por $v_1, \ldots, v_k$ com base $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Cada subespaço k-dimensional de R^n é da forma $<v_1, v_2, \ldots, v_k>$

5.3. Morfismos de Fibrados

DEF. 7: Sejam (E, p, B) e (E', p', B') dois fibrados. Um morfismo de fibrados $(u,f):(E, p, B)\to(E', p', B')$ é um par de funções $u: E\to E'$ e $f:B\to B'$, tal que $p'u=fp$.

Em outras palavras, queremos que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array} \qquad p'u = fp$$

A condição de morfismo entre fibrados também pode ser expressa pela relação $u(p^{-1}(b))\subset(p')^{-1}(f(b))\forall b\in B$.

DEF. 8: Sejam (E, p, B) e (E', p', B) dois fibrados sobre B. Um morfismo de fibrados sobre B (B-morfismo) $u:(E, p, B) \to (E', p', B)$ é uma função $u: E\to E'$ tal que $p=p'u$.

De novo, a condição $p=p'u$ é equivalente à comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} \qquad p=p'u$$

que também pode ser expressa pela relação $u(p^{-1}(b)) \subset (p^{1})^{-1}(b)\ \forall b \in B$, isto é, u preserva fibras.

Os morfismos de fibrados u sobre B são exatamente os morfismos de fibrados $(u,\ 1_B)$.

EXEMPLOS:

1) se (E', p', B') é subfibrado de (E, p, B) e se $f\colon B' \to B$ e $u\colon E' \to E$ são inclusões, então $(u,f)\colon(E',\ p',\ B') \to (E,\ p,\ B)$ é um morfismo de fibrados.

2) As seções de (E, p, B) são exatamente os B-morfismos $s\colon(B,1,B) \to (E,p,B)$. Consequentemente, toda propriedade geral de B-morfismos se aplica a seções.

3) o par $(1_E,\ 1_B)\colon(E,\ p,\ B) \to (E,\ p,\ B)$ é um morfismo que é B-morfismo.

4) se $(u,f)\colon(E,\ p,\ B) \to (E',\ p',\ B')$ e

$(u',f')\colon(E',\ p',\ B') \to (E'',\ p'',\ B'')$ são dois morfismos.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{u'} & E'' \\ p\downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow p'' \\ B & \xrightarrow{f} & B' & \xrightarrow{f'} & B'' \end{array}$$

Consequentemente, a composição define um morfismo de fibrados $(u'u\ ,\ f'f\ ):(E,\ pB) \to (E'',\ p'',\ B'')$, que é, por definição, a composição $(u,f).(u',f')$ de (u,f) e (u',f').

DEF. 9: Um morfismo de fibrados $(u,f):(E,p,B) \to (E',\ p',\ B')$ é um isomorfismo existe um morfismo (u',f'), (u',f'): $(E',\ p',\ B') \to (E,\ p,\ B)$ com $ff' = 1_B = f'f\ u'u = u'u = 1_E$.

Quando existe um isomorfismo, dizemos que os fibrados são isomorfos.

DEF. 10: Um espaço F é a fibra do feixe fibrado $(E,\ p,\ B)$ se toda fibra $p^{-1}(b)$ para $b \in B$ é homeomorfa à F.

DEF. 11: Um fibrado $(E,\ p,\ B)$ é trivial se $(E,\ p,\ B)$ é B-isomorfo ao fibrado produto $(B{\times}F,\ p,\ B)$.

5.4. Produtos e "Fibre Products"

DEF. 12: O produto de dois fibrados (E, p, B) e (E', p', B') é o fibrado $(E\times E', p\times p', B\times B')$.

DEF. 13: A soma de Whitney, $\xi_1 \oplus \xi_2$ de dois fibrados $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ e $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ sobre B é $\xi_1 \oplus \xi_2 = (E_1 \oplus E_2, q, B)$ onde $E_1 \oplus E_2$ é o subespaço de todos os (x, x') e $E_1 \times E_2$ com $p_1(x) = p_2(x')$ e $q(x,x') = p_1(x) = p_2(x')$.

OBS.: Na soma de Whitney, a fibra $q^{-1}(b)$ de $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ sobre $b \in B$ é $p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b) \subset E_1 \times E_2$.

DEF. 14: A categoria dos fibrados denotada Bun tem como objetos todos os fibrados (E, p, B) e como morfismos de (E, p, B) e (E', p', B') o conjunto de todos os morfismos de fibrados. A composição é a composição de morfismos de fibrados como definida acima.

Para cada espaço B, a subcategoria de fibrados sobre B denotada Bun_B, tem como objetos fibrados com espaço base B e como morfismos B-morfismos.

DEF. 15: Sejam $u_1: (E_1, p_1, B) \to (E_1', p_1', B)$ e $u_2: (E_2, p_2, B) \to (E_2', p_2', B)$ dois B-morfismos. Então, podemos definir o B-morfismo

$$u_1 \oplus u_2: (E_1 \oplus E_2, q, B) \to (E_1' \oplus E_2', q', B)$$

Pela relação:

$$(u_1 \oplus u_2)(x_1, x_2) = (u_1(x_1), u_2(x_2))$$

como

$p_1'(u_1(x_1)) = p_1(x_1) = p_2(x_2) = p_2'(u_2(x_2))$, $u_1 \oplus u_2$ é um morfismo bem definido.

Valem:

(1) $1_{E_1} \oplus 1_{E_2} = 1_{E_1 \oplus E_2}$

(2) Se V_1: $(E_1', p_1', B) \to (E_1'', p_1'', B)$ e V_2: $(E_2', p_2', B) \to (E_2'', p_2'', B)$

são também B-morfismos, então temos

$$(v_1 \oplus v_2)(u_1 \oplus u_2) = (v_1 u_1) \oplus (v_2 u_2)$$

(3) A função u: $B \times F_1 \to F_2 \to (B \times F_1) \oplus (B \times F_2)$ definida por $u(b, y_1, y_2) = (b, y_1, y_2) = (b_1 y_1, b_1 y_2)$ é um homeomorfismo e define um B-isomorfismo de fibrados produto U: $(B \times F_1 \times F_2, q, B) \to (B \times F_1, p_1, B) \oplus (B_2 \times F_2, p_2, B)$.

PROPOSIÇÃO 2: As seções s da soma de Whitney $(E_1 \oplus E_2, q, B)$ são da forma $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$ onde s_1 é uma seção de (E_1, p_1, B) e s_2 é uma seção de (E_2, p_2, B) unicamente definidas por s.

DEM.: Cada seção s é uma função $B \to E_1 \oplus E_2 \subset E_1 \times E_2$. Portanto, s é da forma $s(b) = (s_1(b), s_2(b))$ onde $s_1 : B \to E_1$ e $s_2 : B \to E_2$. Para que s seja seção

$qs(b) = b = p_1 s_1(b) = p_2 s_2(b)$ para todo $b \in B$, isto é, s_1 e s_2 são seções.

5.5. Aplicações Geométricas das Transformações de Hurwitz-Radon.

Campos Vetoriais sobre Esferas

Consideraremos $F=R$ corpo dos números reais.

1. Seja $\emptyset : R^p \times R^m \to R^m$ uma transformação bilinear que preserva a norma.

Dada a base canônica de R^p, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ definimos p transformações lineares $f_i : R^m \to R^m$ $i = 1, 2, \ldots, p$ por meio de $\emptyset$, como se segue:

$$f_i(v) = \emptyset(\varepsilon_i, v) \ \forall \ v \in R^m$$

OBS.: (1) Cada f_i é linear e preserva norma dos vetores de R^m, como já vimos no capítulo 2.
Logo, $f_i \in \Theta(m)$ = grupo de transformações lineares ortogonais.

Segue também do capítulo 2 que

$f_i(v).f_j(v) = \delta_{ij}\ n(v)$ onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Por outro lado, suponha que nos são dadas p transformações $f_i \in \Theta(m)$ e que para $u \in {}^p$, $v \in {}^m$ definimos

$$\emptyset(u,v) = \sum_{i=1}^{p} u_i f_i(v) \text{ onde } u = (u_1, u_2, \ldots, u_p).$$

Podemos comprovar que $\emptyset$ definida desta forma é normada $\Longleftrightarrow$ temos

$$f_i(v).f_j(v) = \delta_{ij}\ n(v),\ \forall v.$$

(2) Agora, suponhamos que nos dão $\emptyset$ e que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ são as transformações ortogonais determinadas por $\emptyset$.

Como já vimos, podemos supor que $f_1(v) = v$, pois como f_1 é ortogonal, existe f_1^{-1}, e se f_1 não é a identidade, então $\emptyset^1 = f_1^{-1}\ \emptyset$ é uma transformação que satisfaz as condições requeridas.

Assim, podemos sem perda de generalidade supor $f_1 = 1$.

Se $S^{m-1} \subset R^m$ é a esfera unitária, então $\forall v \in S^{m-1}$, os vetores $f_2(v), f_3(v), \ldots, f_p(v)$ formam um conjunto de p-1 vetores tangentes à S^{m-1} em v.

E utilizando a def. 5, temos que se $V_p(R^m)$ = variedade de Stiefel formada por p-referenciais ortonormais em R^m, então $[v, f_2(v), f_3(v), \ldots, f_p(v)] \in V_p(R^m)$.

E esta variedade de Stiefel pode ser vista como um fibrado sobre S^{m-1}, pois temos E = espaço total =

$V_p(R^m)$, $B = S^{m-1}$, $p = \pi : V_p(R^m) \to S^{m-1}$

$[v, f_2(v), \ldots, f_p(v)] \to v$.

Dado $v_o \in S^{m-1}$, a fibra sobre v_o é $\pi^{-1}(v_o)$ e consiste de todos os p-1 - referenciais ortonormais no espaço de dimensão m-1, espaço este perpendicular ao vetor v_o.

Logo, a fibra é a variedade de Stiefel

$V_{p-1}(R^{m-1})$

A transformação $\emptyset$ determina uma distribuição contínua de (p-1)-referenciais tangentes à S^{m-1}, isto é, em S^{m-1}, se tem p-1 campos de vetores tangentes, linearmente independentes em cada ponto (até mais, pois os vetores são ortogonais dois a dois e unitários).

Em relação a continuidade, está assegurada pelas transformações lineares f_i: $R^m \to R^m$.

Abreviadamente, dizemos que em S^{m-1}, temos um p-1-campo. Portanto, considerando as transformações de Hurwitz-Radon determinadas no capítulo 2, temos o seguinte.

<u>TEOREMA 1</u>: Na esfera unitária S^{m-1} as transformações de Hurwitz-Radon permitem construir $\rho(m)-1$ campos de vetores tangentes, linearmente independentes em cada ponto.

<u>DEF. 16</u>: O espaço projetivo P^{m-1} se obtém na esfera S^{m-1}, identificando os pontos diametralmente opostos.

$$\text{Logo, } P^{m-1} = S^{m-1}/\sim \; = \{ [x] \mid [x] = \{x, -x\} \quad x, -x \in S^{m-1} \}$$

Onde cada par não-ordenado $(v, -v)$ representa um ponto de P^{m-1}.

Isto é: pensamos em π como a função que identifica x e $-x$: $\pi(-x) = \pi(x)$

$$\begin{array}{c} S^n \\ \downarrow \pi \\ P^n \end{array}$$

Por ser f_i: $R^m \to R^m$ linear, a restrição f_i: $S^{m-1} \to S^{m-1}$ é ímpar, isto é, $f_i(-V) = -f_i(V)$.

Por outro lado, o fibrado tangente do espaço projetivo P^{m-1} $\tau(P^{m-1})$ pode ser visto como quociente do fibrado tangente da esfera $\tau(S^{m-1})$.

Seja $\tau(P^{m-1}) = (E, P, B)$ onde

$B = P^{m-1}$

$E = \{y \mid y$ é um par $\pm(b,v)$ onde $b \in S^{m-1}$, $v \in t(S^{m-1})\}$

e $p: E \to S^{m-1}/\sim \;\simeq P^{m-1}$

$$\begin{array}{l} \pm(b,v) \to \pm b = \{b, -b\} \\ \quad \Vert \\ \{(b,v), (-b, -v)\} \end{array}$$

Isto é, os vetores v e -v no fibrado tangente do espaço projetivo são identificados.

Vamos ver melhor.

Sejam:

$f: (-1,1) \to U$ uma curva no domínio da parametrização.

$\emptyset: U \to P^{m-1}$ uma parametrização do plano projetivo.

Então, $v \in T_x(P^{m-1})$ se $v = \left.\dfrac{d(\emptyset\ f)}{dt}\right|_{t=0}$ onde

espaço tangente do plano projetivo em x.

$\emptyset(f(o)) = x \in P^{m-1}$.

Seja $\emptyset\ f = F(t)$. $F(o) = \emptyset f(o) = x \in P^{m-1}$.

Consideremos agora $A: S^{m-1} \to S^{m-1}$ a aplicação antípoda;

$x \to -x$ como A é linear,

$d_x A = -I$.

Então, $g = A\ F: (-1,1) \to S^{m-1}$ é uma curva em S^{m-1}.

1- $g(o) = A\ F(o) = A(x) = -x$

2- $\left.\dfrac{dg}{dt}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{dA_o F}{dt}\right|_{t=0} = -I \left.\dfrac{dF}{dt}\right|_{t=0} = -I(v)\ -v$

Logo, se identificamos x com -x, devemos identificar $v \in T_x\ P^{m-1}$ com $-v \in T_{\pi(x)}\ P^{m-1}$.

Logo, os campos vetoriais em S^{m-1} (Teorema 1) induzem $\rho(m)-1$ campos de vetores tangentes linearmente independentes em cada ponto de P^{m-1}.

Utilizando o conceito de seção (DEF. 4) vemos que as f_i's já definidas $f_i(V) = \emptyset(\varepsilon_i, V)\ \forall V \in {}^m$ produzem uma seção ao definir $f: S^{m-1} \to V_p(R^m)$

$$v \to f(v) = [v, f_2(v), \ldots, f_p(v)]$$

PROPOSIÇÃO 3: Toda seção de (v_p R^m, p, S^{m-1}) determina p-1 campos linearmente independentes.

DEM.: Se g: $S^{m-1} \to v_p(R^m)$ é uma seção, então por definição, para cada $v \in S^{m-1}$ tem-se $g(v) = [v, g_2(v), \ldots, g_p(v)]$, onde cada $g_i(v)$ é uma função contínua de v.

Utilizando k-teoria Adams demonstrou em [ ] que o número máximo de campos linearmente independentes que se obtém em S^{m-1} ao considerar seções arbitrárias é $\rho(m)-1$.

Isto é: o nº de campos não aumenta ao considerarmos $g_i(v)$ funções unicamente contínuas, ao invés de transformações lineares, como as $f_i(v)$.

PROPOSIÇÃO 4: Suponhamos que h: $R^p \times R^m \to R^m$ é uma transformação contínua, não-singular, linear na 1ª variável $u \in R^p$ e tal que $h(\varepsilon_i, v) = v$, para todo $v \in S^{m-1}$.

Nestas condições, o teorema de Adams sobre campos vetoriais afirma que sempre se tem $p \leq \rho(m)$.

DEM.: Precisamos ver como da existência de h, como no enunciado, segue a existência de uma seção g.

Dado $v \in S^{m-1}$ seja $v_i = h(\varepsilon_i, v)$ onde $v_1 = v$, por hipótese.

Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_p$ são linearmente independentes, pois se $a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_pv_p = 0$, então

$$a_1h(\varepsilon_1,v) + a_2h(\varepsilon_2,v) + \dots + a_ph(\varepsilon_p,v) = 0$$

$\therefore$ $h(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_p\varepsilon_p,\ v) = 0$ pois h é linear na 1ª variável.

e pela não-singularidade de h

$$h(a_1\varepsilon_1 + \dots + a_p\varepsilon_p,\ v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \text{ ou } a_1\varepsilon_1 + \dots + a_p\varepsilon_p = 0$$

$v \neq 0$, pois v qualquer ε S^{m-1}. Logo,

$a_1\varepsilon_1 + \dots + a_p\varepsilon_p = 0$. Assim, $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$.

Para construir a seção g aplicamos primeiro o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, como segue:

Começamos com $w_1 = v_1 = v$. Será $v_2' = v_2 - \langle v_2,\ w_1\rangle w_1$.

Fazemos $w_2 = \dfrac{v_2'}{||v_2'||}$ onde $||v_2'|| = \sqrt{n(v_2')}$

Temos então $\langle w_1,w_2\rangle = \langle w_2,w_1\rangle = 0$ e $\langle w_1,w_1\rangle = \langle w_2,w_2\rangle = 1$

Se já sabemos $w_1, \dots, w_{k-1}$ com $2 \leq k \leq p$, tais que $\langle w_i,\ w_j\rangle = \delta_{ij}$ definimos

$$v_k' = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot w_i) w_i$$

e se $w_k = \dfrac{v_k'}{||v_k'||}$ temos $v_k' \cdot w_j = 0 \ \forall_j = 1, \dots, k-1$

e o sistema $v, w_2, \ldots, w_p$ é ortonormal.

Agora, definimos g_i: $S^{m-1} \to S^{m-1}$

$$g_i(v) \to w_i$$

Como o processo de ortogonalização preserva a continuidade das funções se definimos

$$g: S^{m-1} \to V_p(R^m)$$

$$v \to [v, w_2, \ldots, w_p] ,$$

g é uma seção. ▨

Campos Ímpares

DEF. 17: Um (p-1) - campo determinado pela seção g é ímpar (Skew-linear) se $g(-v) = -g(v)$ para todo $v \in S^{m-1}$.

Em um trabalho recente, Milgran e Zvenrowski demonstraram que todo (p-1)-campo na esfera S^{m-1} é homotópico a um (p-1)-campo ímpar.

Isto é: toda seção g pode ser deformada usando seções numa seção f que seja ímpar.

Em símbolos: se $I = [0,1]$, existe uma homotopia

$$H: S^{m-1} \times I \to V_p(R^m)$$

onde $H(v,0) = g(v)$

$H(v,1) = f(v)$ $f(v)$ é ímpar

E tal que $\pi H(v,t) = v \; \forall v \in S^{m-1} \; \forall 0 \leq t \leq 1$.

Temos $f(v) = [v, f_2(v), f_3(v, \ldots, f_p(v)]$ onde cada f_i é ímpar.

Agora definindo $\Theta(\varepsilon_i, v) = f_i(v)$, onde $\varepsilon_i \in R^p$, resulta uma transformação contínua e

$$\Theta: R^p \times S^{m-1} \to R^m$$

estendendo-a radialmente, obtém-se $\Theta: R^p \times R^m \to R^m$.

Logo:

A existência de uma transformação contínua $h: R^p \times R^m \to R^m$ não singular, linear na primeira variável $u \in R^p$ e tal que $h(\varepsilon_1, v) = v \; \forall v \in S^{m-1}$ é equivalente a existência de uma transformação contínua $\Theta: R^p \times R^m \to R^m$ não-singular linear-ímpar (linear em R^p, ímpar em $V \in R^m$) tal que os vetores

$$v = \Theta(\varepsilon_1, v), \Theta(\varepsilon_2, v), \ldots, \Theta(\varepsilon_p, v) \; \forall v \in S^{m-1}$$

Formam um sistema ortonormal. ▨

6. FIBRADOS VETORIAIS E FEIXES FIBRADOS

1 Fibrados Vetoriais

Definição e Exemplos

DEF. 1: Um fibrado vetorial de k-planos (ou k-dimensional) sobre F é um fibrado (E, p, B) com uma estrutura de espaço vetorial k-dimensional sobre F em cada fibra $p^{-1}(b)$, tal que a seguinte condição de trivialidade local é satisfeita:

Para cada ponto b de B, deve existir uma vizinhança aberta $V \subset B$, um inteiro $k \geq 0$ e um homeomorfismo $h: U \times F^k \to p^{-1}(U)$ tal que, para cada $b \in U$ a correspondência $x \to h(b,x)$ define um isomorfismo entre F^k e o espaço vetorial $p^{-1}(b)$.

ou equivalentemente:

$\exists\ h: U \times F^k \to p^{-1}(U)$, h é U-isomorfismo tal que

$h\big|_{b \times F^k} \to p^{-1}(b)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais para cada $b \in B$.

Naturalmente um F-fibrado vetorial é chamado:

Fibrado vetorial real se $F = R$

Fibrado vetorial complexo se $F = C$

Fibrado vetorial quaternions se $F = H$

Vamos concentrar-nos em $F = R$.

DEF. 2: Um par (U,h) como na definição 1 é chamado um sistema local de coordenadas para ξ em torno de $b \in B$, ou uma carta coordenada local de ξ.

OBS: Se exigimos que E e B sejam variedades diferenciáveis e p uma função diferenciável, h um difeomorfismo, temos um fibrado vetorial diferenciável.

Exemplos:

(1) O fibrado produto sobre B é o fibrado cujo espaço total é $B \times R^n$, com projeção $p: B \times R^n \to B$ e tal que a estrutura $(b,x) \to b$ de espaço vetorial.

Na fibra $p^{-1}(b)$ é dada pela estrutura vetorial de R^n, isto é:

$$t_1(b,x_1)+t_2(b,x_2) = (b,t_1x_1+t_2x_2).$$

A condição de trivialidade local é satisfeita fazendo $U=B$ e $H=1_{B\times R^n}$.

(2) O fibrado tangente τ_M da variedade diferenciável M.

O espaço total de τ_M é a variedade DM que consiste de todos os pares (x,v) onde $\begin{cases} x \in M \\ v \in T_x M \end{cases}$ ver (Guillemin, pg. 50)

A função projeção p: $DM \longrightarrow M$ é definida por:

$$(x,v) \to x$$

A estrutura de espaço vetorial é análoga a do exemplo 1.

1) M é variedade $\Rightarrow \forall x \in M\ \exists$ parametrização local $\phi: U \subset R^n \to W \subset M$ tal que $\phi(0) = x$.

2) DM para ser fibrado vetorial basta mostrar a condição de trivialidade local, isto é basta mostrar que $\exists\ \bar{U}$ aberto em M tal que h: $\bar{U} \times R^n \to p^{-1}(\bar{U})$ é homeomorfismo e para cada $x \in M$,

$$h\Big|_{x \times R^n} \to p^{-1}(x) \text{ é isomorfismo de E.V's.}$$

(3) O fibrado tangente a S^n, $\tau(S^n)$ é um caso particular do exemplo 2 e tem estrutura natural de espaço vetorial, pois é subfibrado de $(S^n \times R^{n+1}, p, S^n)$ o fibrado tangente a P^n. $\tau(P^n)$ também é um caso particular de (2). [Ver cap. 5].

(4) O fibrado normal ν de uma variedade diferenciável $M \subset R^n$, obtido da seguinte maneira:

> O espaço total $E \subset M \times R^n$ é o conjunto de todos os os pares (x,v) onde v é ortogonal ao espaço tangente a M em x, $T_x M$. A projeção $\pi : E \to M$ é definida como sempre: $\pi(x,v) = x$ e a estrutura de espaço vetorial também é a mesma.

(5) Considerando P^n como no capítulo 5 queremos agora definir o fibrado de retas canônico sobre P^n, γ_n^1, fibrado de Hopf.

Seja $E(\gamma_n^1)$ = espaço total de $\gamma_n^1 = \{(\{\pm x\}, v) \in P^n \times R^{n+1}$ tal que v é múltiplo de $x\}$ defina $p: E \to P^n$ por

$$(\{\pm x\}, v) \to \{\pm x\}$$

Então cada fibra $p^{-1}(\{\pm x\})$ pode ser identificada com a reta que passa através de x e $-x$ em R^{n+1}. A esta reta deve ser dada a estrutura usual de espaço vetorial.

Temos que mostrar a condição de trivialidade local:
Seja $U \subset S^n$ um conjunto aberto pequeno o suficiente para não conter nenhum par de pontos antípodas. Seja U_1 a imagem de U em P^n.

Então definimos: $h: U_1 \times R \to p^{-1}(U)$ por

$$(\{\pm x\}, t) \to (\{\pm x\}, tx)$$

Para cada $(x,t) \in U \times R$.

Então (U_1,h) é um sistema de coordenadas local.

DEF. 3: Uma seção de um fibrado vetorial ξ com espaço base B é uma função contínua $s: B \to E(\xi)$

$$b \to p^{-1}(b)$$

Isto é s é tal que $p.s = 1_B$

Morfismos de Fibrados Vetoriais

DEF. 4: Sejam $\xi = (E, p, B)$ e $\xi' = (E', p', B')$ dois fibrados vetoriais. Um morfismo de fibrados vetoriais $(u,f): \xi \to \xi'$ é um morfismo dos fibrados subjacentes, isto é:

$u: E \to E'$ são funções tais que: 1. $p'u = fp$

$f: B \to B'$ 2. a restrição

$u: p^{-1}(b) \to p'^{-1}(f(b))$ é linear para cada $b \in B$.

Ou seja temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow[f]{} & B' \end{array}$$

<u>DEF. 5</u>: Sejam $\xi = (E, p, B)$ e $\xi' = (E', p', B)$ dois fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base B.

Um B-morfismo de fibrados vetoriais $u: \xi \to \xi'$ é definido como um morfismo da forma $(u, 1_B): \xi \to \xi'$.

Isto é: 1. $p'u = p$

2. $u: p^{-1}(b) \to p'^{-1}(b)$ é linear para cada $b \in B$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

<u>EXEMPLO</u>: Quais são os B-morfismos entre os fibrados vetoriais-produto $\xi = (B\times R^k, p, B)$ e $(B\times R^m, p, B)$?

Temos que ter:

$$\begin{tikzcd} B\times R^k \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & B\times R^m \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$u: B\times R^k \to B\times R^m$ tal que

(1) $p'u = p$

(2) $u: p^{-1}(b) \to p'^{-1}(b)$ é linear para $b \in B$.

Logo u é da forma:

$$u(b,v) = (f_1(b,v), f_2(b,v))$$

como (1) $p'u = p$ temos:

$p'(f_1(b,v), f_2(b,v)) = p(b,v)$

$\shortparallel$

$f_1(b,v) = b$

Então: $u(b,v) = (b, f(b,v))$ onde $f\colon B \times R^k \to R^m$ é contínua $\quad (b,v) \to f(b,v)$

Como por (2) $u\colon p^{-1}(b) \to p'^{-1}(b)$ é linear, $f(b,v)$ é linear em v.

Além disso $f\colon B \times R^k \to R^m$ é contínua e induz uma função de

B em $L(R^k, R^m)$ contínua

$b \longrightarrow f(b,-)$

DEF.6: Um B-morfismo é dito um isomorfismo de fibrados vetoriais de dado $u\colon \xi \to \xi'$ existe um B-morfismo $v\colon \xi' \to \xi$ tal que $vu = 1_\xi$ e $uv = 1_{\xi'}$.

LEMA: Um B-morfismo $u\colon \xi \to \xi'$ entre fibrados vetoriais $\xi = (E, p, B)$ e $\xi' = (E', p', B')$ é um isomorfismo $\Longleftrightarrow$ $u\colon p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais para cada $b \in B$.

DEM: ($\Rightarrow$) é claro, pois se u é isomorfismo então existe $v\colon \xi' \to \xi$ tal que $vu = 1_\xi$ e $uv = 1_{\xi'}$. Como v é um B-morfismo, $v\colon (p')^{-1}(b) \to p^{-1}(b)$ é a inversa de $u\colon p^{-1}(b) \to (p')^{-1}(b)$.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar agora que basta $u|_{p^{-1}(b)}$ ser isomorfismo de espaços vetoriais para existir $v: \xi' \to \xi$ B-morfismo. Portanto queremos mostrar que u é homeomorfismo.

Dado qualquer ponto $b_o \in B$ escolhemos sistemas de coordenadas (U,g) para ξ e (V,h) para ξ' com $b_o \in U \cap V$.

$g: U \times R^k \to p^{-1}(b_o) \subset E$ e $h: V \times R^k \to (p')^{-1}(b_o) \subset E'$

Para mostrar que u é homeomorfismo basta mostrar que a composta

$(U \cap V) \times R^k \xrightarrow{h_o^{-1} u_o g} (U \cap V) \times R^k$ é um homeomorfismo que leva $(b,x) \longrightarrow (b,y)$ é fácil ver pois $h^{-1}(u(g(b,x))) = (b,y)$.

Como $u|_{p^{-1}(b)}$ é isomorfismo $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ pode ser expresso na forma $y_i = \sum_j f_{ij}(b) x_j$ onde $[f_{ij}(b)]$ denota uma matriz não-singular de números reais. Além disso, as entradas $f_{ij}(b)$ dependem continuamente de b. Seja $[F_{ij}(b)]$ a matriz inversa.

Claramente $g^{-1} o f^{-1} o h(b,y) = (b,x)$ onde $x_j = \sum_i F_{ij}(b) y_i$.

Como os números $F_{ij}(b)$ dependem continuamente da matriz $[f_{ij}(b)]$ eles dependem continuamente de b. Logo $g^{-1} o f^{-1} o h$ é contínua. ▨

DEF.7: Dois fibrados vetoriais $\xi = (E_1, p_1, B)$ e $\eta = (E_2, p_2, B)$ de k-planos sobre o mesmo espaço base B são ditos equivalentes, $\xi \simeq \eta$ se existe um B-isomorfismo entre eles.

PROPOSIÇÃO 1: A relação $\simeq$ é de fato uma relação de equivalência.

(1) $\simeq$ é reflexiva isto é $(E_1, p_1, B) \simeq (E_1, p_1, B)$ $\forall \xi$ o isomorfismo é a identidade 1_E.

(2) $\simeq$ é simétrica isto é $\xi_1 \simeq \xi_2 \Rightarrow \xi_2 \simeq \xi_1$ pois basta aplicar Teo. anterior.

(3) $\simeq$ é transitiva, isto é $\xi_1 \simeq \xi_2$ e $\xi_2 \simeq \xi_3 \Rightarrow \xi_1 \simeq \xi_3$.

pois se $\exists\, f_1: E_1 \to E_2$ tal que

(1) $p_2 = p_1 f_1$

(2) $f_1\big|_{A^{-1}(b)}$ é linear não singular.

Se $\exists\, f_2: E_2 \to E_3$

tal que (1) $p_3 = p_2 f_2$

(2) $f_2\big|_{p_2^{-1}(b)}$ é linear não singular

Então $f_2 o f_1: E_1 \to E_3$ é tal que

(1) $p_3 = p_2 f_2 = p_1 f_1 f_2$

(2) $f_2 o f_1\big|_{p_1^{-1}(b)}$ é linear não-singular.

DEF.8: Um fibrado vetorial de n-planos é trivial se é equivalente ao fibrado produto $B\times R^n$.

NOTAÇÃO: Nos casos em que se subentenda o espaço base o fibrado produto de n-planos será denotado por n. Assim ξ fibrado vetorial de n-planos sobre B é trivial se $\xi \simeq n$.

DEF.9: A soma de Whitney de 2 fibrados vetoriais ξ_1 e ξ_2 sobre B, denotada por $\xi_1 \oplus \xi_2$ é a soma de Whitney [cap. 5 def.] dos fibrados ξ_1 e ξ_2 com a estrutura de espaço vetorial em cada fibra $q^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$ dada pela soma direta das estruturas vetoriais de $p_1^{-1}(b)$ e $p_2^{-1}(b)$.

A condição de trivialidade é satisfeita utilizando as cartas h_1, h_2 de ξ_1 e ξ_2 através de $h_1 \oplus h_2$ ver def. [15].

PROPOSIÇÃO 2: Com a equivalência de fibrados como igualdade a soma de Whitney $\oplus$ é comutativa e associativa , isto é:

(1) $\xi \oplus \eta \simeq \eta \oplus \xi$

(2) $(\xi \oplus \eta)\oplus\zeta \simeq \xi \oplus(\eta \oplus \zeta)$

DEM.: Para mostrar (1) $\xi \oplus \eta \simeq \eta \oplus \xi$

Temos que exibir $f: E_1 \oplus E_2 \to E_2 \oplus E_1$ tal que:

(1) $q_2 f = q_1$

(2) $f|_{q_1^{-1}(b)}$ é linear não-singular.

Seja $f: E_1 \oplus E_2 \to E_2 \oplus E_1$ dada por

$(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$

Então: (1) $q_1(x_1, x_2) = p_1(x_1) = p_2(x_2) = q_2 f(x_1, x_2) =$

$= q_2(x_2, x_1) = p_2(x_2) = p_1(x_1).$

(2) $f|_{p_1^{-1}(x_1) \times p_2^{-1}(x_2}$ é transformação linear não-singular.

Para mostrar (2) temos que mostrar que existe

$g: E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) \to (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3.$

Tal que: (1) $q_2 = q_4 g$

(2) $g|_{p_1^{-1}(x_1) \times p_2^{-1}(x_2) \times p_3^{-1}(x_3)}$ é linear não-singular.

Seja $g: E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) \to ((E_1 \oplus E_2) \oplus E_3)$,

Dada por $(x_1, (x_2, x_3)) \to ((x_1, x_2), x_3)$.

Vemos que claramente g satisfaz (1) e (2) quando escolhemos q_2 e q_4 da maneira correta.

Queremos agora definir produto tensorial de dois fibrados vetoriais. Para isso vamos relembrar duas definições de produto tensorial.

DEF.10: Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão m e n respectivamente. Chamamos de produto tensorial de U por V a todo par $(Z, \emptyset)$ que satisfaça os seguintes axiomas:

1. Z é um espaço vetorial e $\emptyset: U \times V \to Z$ é uma aplicação bilinear.

2. DIM Z = DIM U . DIM V

3. $\emptyset(U \times V)$ gera Z isto é todo elemento de Z pode ser obtido como combinação de elementos de $\emptyset(U \times V)$.

Equivalentemente podemos fazer:

1. Z é um espaço vetorial e $\emptyset: U \times V \to Z$ é bilinear.

2. Se $\varepsilon = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ e $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ são bases de U e V respectivamente, então as mn-uplas $\emptyset(e_i, f_j)$ $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

   Formam uma base para Z.

Pode ser mostrado ver [ ] que dados dois espaços vetoriais U e V, existe um par $(Z, \emptyset)$ satisfazendo aos axiomas acima e que tal par é único, a menos de um isomorfismo canônico.

Aplicando aos fibrados:

1. Já vimos que a soma de Whitney corresponde a tomar em cada ponto $b \in B$ a soma direta das fibras sobre este ponto. O espaço total de $\xi \oplus \eta$ é

$$E = \bigcup_{b \in B} (p_1^{-1}(b) \oplus p_2^{-1}(b))$$

onde E se topologiza com a topologia relativa induzida pela inclusão $E \subset E_1 \times E_2$.

2. De maneira análoga definimos o produto tensorial das fibras em cada ponto.

$$\text{O espaço total } E = E(\xi \otimes \eta) = \bigcup_{b \in B} (p^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b))$$

onde a fibra é isomorfa à $R^m \otimes R^n \approx R^{mn}$.

Temos uma forma natural de topologizar E, utilizando a estrutura local de produto dos fibrados ξ e η, ver [ ].

Um Teorema Sobre Seções

DEF.11: Dizemos que k seções $s_i: B \to E$ $i = 1, 2, \ldots, k$ de um fibrado vetorial $\xi = (E, p, B)$ são linearmente independentes se $\forall b \in B$, $s_1(b), s_2(b), \ldots, s_k(b)$ são vetores linearmente independentes de $p^{-1}(b)$.

<u>TEOREMA 1</u>: Um fibrado vetorial de n-planos $\xi = (E, p, B)$ tem k seções ($k \leq n$) linearmente independentes $\Leftrightarrow$ $k \oplus \eta$ onde k é o fibrado trivial k-dimensional e η é um fibrado de (n-k) planos sobre B.

<u>DEM</u>: ($\Rightarrow$) Supondo que ξ tem k seções LI's vamos construir e mostrar o isomorfismo.

1. Suponhamos que ξ tem K seções LI's. Se $p^{-1}(x)$ tem estrutura vetorial, $x \in B$, $p^{-1}(x \cong R_x^n$ seja $R_x^k \subset p^{-1}(x)$ o espaço vetorial gerado por $s_1(x), \ldots, s_k(x)$ e R_x^{n-k} o espaço ortogonal a R_x^k em $p^{-1}(x)$.

   Temos então que $p^{-1}(x) = R_x^k \oplus R_x^{n-k}$.
   Como queremos mostrar que $\xi \simeq k \oplus \eta$ vamos construir η.

   Definindo $E_1 = \bigcup_{x \in B} R_x^{n-k}$ e $p_1: E_1 \to B$ por:
   se $v \in R_x^{n-k}$ então $p_1(v) = x$.
   Determinamos um fibrado vetorial de (n-k)-planos $\eta = (E_1, p_1, B)$.

2. Seja agora $k \oplus \eta = (E_2, p_2, B)$ a soma de Whitney de k com η acima onde k representa o fibrado trivial de k-planos sobre B. Queremos mostrar que $k \oplus \eta$ e ξ são equivalentes, isto é, que $\exists$ $f: E \to E_2$ tal que $p = p_2 f$ e $f|_{p^{-1}(x)}$ é transformação linear não-singular.

Dado $e \in E$, seja $x = p(e)$. Logo $e \in p^{-1}(x)$ e portanto $e = (u,v)$ onde $u \in R_x^k$ e $v \in R_x^{n-k}$.

Usando as seções LI's escrevemos: $u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_i(x)$ pois $u \in R_x^k$, isto é, u pode ser escrito na base $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., $s_k(x)$ com coeficientes $\lambda_i \in R$.

Agora construímos a transformação

$f: E \to E_2$ dada por

$f(e) = f(u,v) = ((x,\lambda),v)$

onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$

Então f é um isomorfismo pois f satisfaz:

(1) $p = p_2 f \therefore p(e) = p(u,v) = x = p_2 f(e) = p_2((x,\lambda),v) =$

$= \pi((x,\lambda)) = x$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E_2 = E(k)\oplus E(n) \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

(2) f é linear restrita à $p^{-1}(x)$ pois:

seja (u',v'), (u,v) e $p(u',v') = x$ então $u' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i' s_i(x)$ e $f(u',v') = ((x,\lambda'), r')$ onde $\lambda' = (\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_k')$.

Portanto $f((u,v) + (u',v')) = f(u+u', v+v') = ((x,\lambda+\lambda'), v+v')$

$= ((x,\lambda),v) + ((x,\lambda'), v')$

est. de $k = B \times R^n$

(3) f é não-singular pois $f(u,v) = 0$ se $v=0$, $x=0$ e $\lambda=0$ mas $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ onde λ_i é o coeficiente de u na base $s_i(x)$ logo $u=0$.

($\Leftarrow$) reciprocamente, se $\xi \simeq k \oplus \eta$ usando que $\xi \simeq k \oplus \eta \to k \oplus \eta \simeq \xi$ existe $g: E_2 \to E$ tal que g restrita a cada fibra de $k \oplus \eta$ é uma transformação linear não-singular.

Se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ é a base canônica de R^k podemos definir as seções $s_i: B \to E$ por $s_i(x) = g((x,\varepsilon_i),0)$ onde $0 \in R_x^{n-k}$.

Como uma transf. linear não-singular leva vetores LI em vetores LI, o teorema está demonstrado.

COROLÁRIO: Um fibrado vetorial de n-planos é trivial $\Leftrightarrow$ admite n-seções linearmente independentes. Para outra demonstração ver [ ].

[2] Fibrados Definidos por Grupos de Transformações

Um fibrado de n-planos é também um feixe fibrado no sentido de Steenrod. Vamos ver:

DEF. 1: Um grupo topológico G é um conjunto G com uma estrutura de grupo tal que as funções: $G \times G \to G$

$(s,t) \to s.t$ e

$$-1 : G \to G$$
$$t \to t^{-1}$$

Sejam contínuas.

EXEMPLOS:

1. O conjunto dos reais com a operação de soma: $(\mathbb{R}, +)$ pois:

   $(s,t) \to s+t$

   $t \longrightarrow -t$

   são contínuas.

2. Os reais menos o zero com a operação de multiplicação:

   $(R-\{0\},.)$ pois $(s,t) \to st$ são contínuas

   $t \longrightarrow 1/t$

3. O grupo das transformações lineares não-singulares, com a composição como operação do grupo: $GL(n,\mathbb{R})$ ou $GL(n,\mathbb{C})$

   onde: $A \longrightarrow A^{-1}$

   $(A,B) \to A.B$ são contínuas. Ver [ ]

4. Os grupos de transformações lineares clássicos:

   $$\underset{\text{ortogonal}}{\overset{O(n),}{\uparrow}} \qquad \underset{\text{unitário}}{\overset{U(n),}{\uparrow}} \qquad \underset{\text{simpléctico}}{\overset{Sp(n)}{\uparrow}}$$

   Estes grupos são definidos pela relação

   $<T(x), T(y)> = <x,y>$ se $T \in O(n)$, $U(n)$ ou $Sp(n)$

   $\mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{C}$ $\quad$ $\mathbb{H}$

DEF. 2: Dado um grupo topológico G, um G-espaço à direita é um espaço X com uma função contínua de $X \times G \to X$ que satisfaz os seguintes axiomas:

(A1) para cada $x \in X$, $s, t \in G$ vale $x(st) = (xs)t$

(A2) para $x \in X$ temos $x.1 = x$ onde 1 é a identidade de G.

Claramente, temos uma definição análoga para G-espaços à esquerda. Como, se X é G-espaço à esquerda a relação $xs = s^{-1}x$ define em X uma estrutura de G-espaço à direita, existe uma correspondência bijetora entre G-espaços à esquerda e a direita.

Logo vamos estudar somente G-espaços à direita.

EXEMPLO: $\mathbb{R}^n$ é um $GL(n)$-espaço à esquerda onde a ação é dada pela multiplicação de matrizes:

$$
\begin{aligned}
.: GL(n) \times R^n &\longrightarrow R^n \\
(T,v) &\longmapsto T(v) = T.v
\end{aligned}
$$

DEF. 3: Uma função $h: X \to Y$ onde x, Y são G-espaços é chamada um G-morfismo se se $h(xs) = h(x).s \ \forall x \in X,\ s \in G$.

DEF. 4: Dois elementos x, x' em X, onde X é um G-espaço, são ditos G-equivalentes se existe $g \in G$ tal que $xg = x'$, notação $x \simeq x'$.

PROPOSIÇÃO 1: Esta relação é uma relação de equivalência.

DEM: (1) $\simeq$ é reflexiva, $x \simeq x$ basta tomar $g=1$ identidade de G.

(2) $\simeq$ é simétrica, $x \simeq y \to y \simeq x$ pois $x \simeq y$, existe $g \in G$ tal que $y = xg$.
Logo $\exists\, g^{-1}$, G é grupo, tal que $yg^{-1} = xgg^{-1} = x$, $y \simeq x$.

(3) $\simeq$ é transitiva, $x_1 \simeq x_2$ e $x_2 \simeq x_3 \to x_1 \simeq x_3$ pois $\exists\, g_1 \in G$ $x_1 g_1 = x_2$ $\exists\, g_2$ $x_1 g_2 = x_3$ logo $x_3 = x_2 g_2 = x_1(g_1 g_2)$, isto é $\exists$ $g_1 g_2 \in G$ é tal que $x_3 = x_1(g_1 g_2)$.

DEF. 5: A classe de equivalência determinada por x ou a órbita de x é o conjunto $xG = \{xg \mid g \in G\}$.

DEF. 6: Seja x mod G o conjunto de todos os xG, $\forall x \in X$, com a topologia quociente, isto é, a maior topologia tal que a projeção $\pi : X \to X \bmod G$ seja contínua.

$$x \to xG$$

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \pi \\ X/G \end{array}$$

<u>PROPOSIÇÃO 2</u>: Para um G-espaço X: (1) a função $\begin{array}{l} f: X \to X, \\ \quad x \to xs \end{array}$ $s \in G$ fixo é um homeomorfismo.

(2) A projeção $\begin{array}{l} \pi : X \to X \bmod G \\ \quad x \to xG \end{array}$ é uma função aberta.

<u>DEM</u>: (1) A função f é contínua pela definição de ação de G em X, logo basta mostrar que ela possui uma inversa contínua. Considere $\begin{array}{l} g: X \to X, \\ \quad x \to xs^{-1} \end{array}$ g é a inversa de f

pois:

$\to fog(x) = f(g(x)) = f(xs^{-1}) = (xs^{-1})s = x(s^{-1}s) = x$

$\to gof(x) = g(f(x)) = g(xs) = (xs)s^{-1} = x(ss^{-1}) = x$

e g é contínua pelo mesmo motivo que f.

(2) Queremos mostrar que π é função aberta, isto é que se W é aberto em x $\to \pi(W)$ aberto em X mod G. Isto equivale a mostrar: $\pi^{-1}(\pi(W))$ aberto em X $\to \pi(W)$ é aberto em X mod G como π é contínua: $\pi^{-1}(V)$ é aberto em X $\leftarrow$ v é aberto em X mod G. Logo basta mostrar $\pi^{-1}(\pi(W))$ aberto em X.

Mas $\pi^{-1}(\pi(\ )) = \bigcup_{g \in G} W_g$ e W_g é um aberto em X pois W é aberto.

PROPOSIÇÃO 3: Todo G-espaço X determina um fibrado

$\alpha(X) = (X, \pi, X \text{ mod } G)$.

DEF. 7: Um fibrado (X, p, B) é chamado G-fibrado se (X, p, B) e $\alpha(X)$ são isomorfos para alguma estrutura de G-espaço em X, por um isomorfismo:

$(1,f): \alpha(X) = (X, \pi, X \text{ mod } G) \to (X, p, B)$ onde

$f: X \text{ mod } G \to B$ é um homeomorfismo.

DEF. 8: Um G-espaço X é dito efetivo se tem a seguinte propriedade $xs = x \Rightarrow s=1$ para todo $x \in X$.

PROPOSIÇÃO 4: Para um G-espaço X as duas propriedades abaixo são equivalentes:

(P1) $xs = x \Rightarrow s=1$

(P2) $xs = xt \Rightarrow s=t$

DEM: (P2)$\Rightarrow$(P1) pois se $xs=xt \Rightarrow s=t$ em particular se $xs=x1 \Rightarrow s=1$.

(P1)$\Rightarrow$(P2) pois se $xs=x \Rightarrow s=1$ queremos mostrar $xs=xt \Rightarrow s=t$. Mas $xs=xt$ sabemos $xst^{-1} = xtt^{-1} = x$. Como $x(st^{-1})=x \Rightarrow st^{-1}=1$, logo $s=t$.

DEF. 9: Seja X^* = subespaço de todos os $(x, xs) \in X \times X$ onde $x \in X$, $s \in G$ e X é G-espaço efetivo.

Considere uma função $\tau: X^* \to G$ tal que $x\tau(x,x') = x'$ $\forall (x,x') \in X^*$. Esta função $\tau: X^* \to G$ é chamada função de translação.

Observe que sempre existe g_o tal que $xg_o = x'$ pois τ está definida em X^* e portanto $\exists$ uma tal τ e é única pois sendo X um G-espaço efetivo $xg = xs \Rightarrow g=s$.

<u>PROPOSIÇÃO 5</u>: A função translação $\tau : X^* \to G$ tem as seguintes propriedades:

(1) $\tau(x,x) = 1$

(2) $\tau(x,x')\tau(x',x'') = \tau(x,x'')$

(3) $\tau(x,x') = \tau(x',x)^{-1} \quad \forall x,x',x'' \in X^*$

<u>DEM</u>: (1) $x\tau(x,x) = x$ por definição de τ mas X é G-espaço efetivo logo $x\tau(x,x) = x \Rightarrow \tau(x,x) = 1 \in G$.

(2) Queremos mostrar $\tau(x,x')\tau(x',x'') = \tau(x,x'')$.

Sabemos: $x\tau(x,x') = x' \quad x'\tau(x',x'') = x''$ e $x\tau(x,x'') = x''$

Logo: $x'\tau(x',x'') = x\tau(x,x')\tau(x',x'') = x'' = x\tau(x,x'')$

e $x[\tau(x,x')\tau(x',x'')] = x[\tau(x,x'')] \Rightarrow \tau(x,x')\tau(x',x'') = $

$= \tau(x,x'')$.

(3) Queremos mostrar $\tau(x,x') = \tau(x',x)^{-1}$ mas $\tau(x,x') = \tau(x',x)^{-1} \Leftrightarrow \tau(x,x')\tau(x',x) = 1$ o que é verdade por (2) e (1).

<u>DEF. 10</u>: Um G-espaço X é chamado de principal se X é um G-espaço efetivo com uma função de translação $\tau: X^* \to G$.

<u>DEF. 11</u>: Um G-fibrado principal é um G-fibrado (X, p, B) onde X é um espaço principal.

<u>PROPOSIÇÃO 6</u>: Seja $\xi = (x, p, B)$ um G-fibrado principal. Então ξ é um fibrado com fibra G.

DEM: Basta mostrar que G é homeomorfo à fibra $p^{-1}(b)$ para $b \in B$. E para $x \in p^{-1}(b)$ definimos a função bijetora:

$$u: G \to p^{-1}(b)$$
$$s \to xs$$

A função inversa de u é dada por $\bar{u}: p^{-1}(b) \to G$

$$x' \longrightarrow \tau(x,x')$$

Verificando: $u.\bar{u}(x') = u(\bar{u}(x')) = u(\tau(x,x')) = $
$= x\tau(x,x') = x'$.

$\bar{u}.u(s) = \bar{u}(u(s)) = \bar{u}(xs) = \tau(x,xs)$

Mas como por DEF. de τ

$x\tau(x,xs) = xs$ e X é G-esp. efetivo

$\therefore\ \tau(x,xs) = s$

Além disso, $\bar{u}$ é contúnua, logo u é homeomorfismo.

Agora estamos prontos para:

<u>DEFINIÇÃO DE FEIXE FIBRADO</u> (ou fibrado de Steenrod).

Seja $\xi = (X, p, B)$ um G-fibrado principal e seja F um G-espaço à esquerda. Vamos definir uma estrutura de G-espaço à direita em $X\times F$. Para isso utilizamos a relação:

$(X\times F)\times G \longrightarrow X\times F$

$((x,y),g) \to (x,y)g = (xg,\ g^{-1}u)$ onde $x\in X$, $y\in F$, $g\in G$.

Seja agora X_F o espaço quociente $(X\times F)\mathrm{Mod}\ G$ e seja p_F a projeção:

$p_F\colon (X\ F)\mathrm{Mod}\ G \to B$

$((x,y)G) \longrightarrow p(x) = b$

<u>DEF. 11</u>: Com a notação acima o fibrado (X_F, p_F, B) denotado $\xi[F]$ é chamado feixe fibrado sobre B com fibra F, ou fibrado associado a $\xi = (X, p, B)$ com fibra F.

O grupo G é chamado a estrutura de grupo do feixe fibrado $\xi[F]$.

Intuitivamente,

. Um G-fibrado principal $\xi = (X, p, B)$ consiste de uma cópia de G para cada ponto $b \varepsilon B$, todas "coladas" pela topologia de X.

. Um feixe fibrado associado $\xi[F]$ consiste de uma cópia de F para cada ponto $b \varepsilon B$, todas "coladas" da maneira prescrita pela topologia do espaço total X, a ação de G em X e a ação de G em F.

Para mostrar que DEF. 11 define efetivamente um fibrado com fibra F temos a seguinte proposição:

<u>PROPOSIÇÃO 7</u>: Seja $\xi[F] = (X_F, p_F, B)$ o feixe fibrado associado ao G-fibrado principal $\xi = (X, p, B)$, com fibra F.
Então para cada $b \varepsilon B$, a fibra $p_F^{-1}(b)$ é homeomorfa à F.

DEM: (1) Seja $p(x_o) = b$ para algum $x_o \varepsilon X$.

Considere $f: F \to X_F$

$y \to (x_o, y)G$

Como $p_F(x_o,y) = p(x_o) = b \ \forall \ y \in F$ podemos considerar

$f: F \longrightarrow p_F^{-1}(b)$

$\quad y \rightsquigarrow (x_o,y)G$

Queremos mostrar que f é um homeomorfismo.

(2) f é claramente injetora, pois

$f(y)=f(y') \rightarrow (x_o,y)G = (x_o,y')G$

Logo $\exists \ g \in G$ tal que $(x_o,y)g = (x_o,y')$

Logo $(x_og,g^{-1}y) = (x_o,y')$ e $x_og=x_o$ e $g^{-1}y = y'$. Mas X é G-espaço efetivo logo $x_og = x_o \rightarrow g = 1$ o que implica $1y = y'$.

(3) f é sobrejetora: isto é dado $(x_1,y_1)G \in p_F^{-1}(b)$, $[p_F((x_1,y_1)G) = p(x_1)=b]$ queremos mostrar que $\exists \ y \in F$ tal que $f(y) = (x_1,y_1)G$.

Porém dado $(x_1,y_1)G$ existe $g_o \in G$ tal que

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)g_o &= (x_1g_o, \ g_o^{-1}y_1) \\ &= (x_o, \ g_o^{-1}y_1)\end{aligned}$$

Logo se tomamos $y = g_o^{-1}y_1$ temos:

$f(y) = (x_o,y)G = (x_1,y_1)G$

(4) Agora queremos mostrar que f tem uma inversa contínua $g: p_F^{-1}(b) \to F$. Para isso utilizamos a função $g_1: p^{-1}(b) \times F \to F$ dada por $(x,y) \to \tau(x_o,x)y$ onde

$\tau: X^* \to G$ é a translação do G-espaço principal $x\tau(x,x')=x'$.

(5) $g_1: p^{-1}(b) \times F \to F$ satisfaz a seguinte relação $g_1(xs, s^{-1}y) = g_1(x,y)$.

De fato $xy=xy$

$$xs(s^{-1}y) = xy$$

$$x_o\tau(x_o,xs)s^{-1}y = x_o\tau(x_o,x)y$$

$$\tau(x_o,xs)s^{-1}y = \tau(x_o,x)y$$

$$g_1(xs,s^{-1}y) = g_1(x,y)$$

Portanto $g_1(xs,s^{-1}y) = g_1(x,y)$ isto é $(x,y) \approx (xs,s^{-1}y) \Rightarrow g_1(x,y) = g_1(xs,s^{-1}y)$ podemos definir $g: p_F^{-1}(b) \to F$

$$(x_o,y)G \to y$$

(6) Queremos verificar: $fog = 1\, p_F^{-1}(b)$ e $gof=1_F$.

Porém: $fog((x_o,y)G) = f(g(x_o,y)G) = f(y) = (x_o,y)G$

e

$$g\circ f(y) = g(f(y)) = g((x_o,y)G) = y$$

<u>DEF. 12</u>: Um morfismo $(u,f):(X, p, B) \to (X', p', B')$ entre dois G-espaços principais é um morfismo principal se $u\colon X \to X'$ é um morfismo de G-espaços.
Se $B' = B$ e $f = 1_B$ então u é chamado um B-morfismo principal.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Se $(u,f)\colon (X, p, B) \to (X', p', B')$ é um morfismo de fibrados principais, e F é um G-espaço à esquerda, (u,f) define um G-morfismo

$$u\times 1_F\colon X\times F \to X'\times F$$

e passando ao quociente obtemos uma função contínua $u_F\colon X_F \to X'_F$ tal que

$$(u_F,f)\colon \xi[F] \to \xi'[F] \quad \text{é um morfismo.}$$

$$(x,y) \mapsto (x',y) = (u(x),y)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ & \xrightarrow{u_F} & \\ (X\times F) \bmod G & & (X'\times F) \bmod G \\ \wr & & \wr \\ X_F & & X'_F \end{array}$$

DEF. 13: Um morfismo fibrado de $\xi[F]$ à $\xi'[F]$ é um morfismo da forma (u_F, f): $\xi[F] \to \xi'[F]$ onde (u,f): $\xi \to \xi'$ é um morfismo fibrado principal.
Se $B' = B$ e $f = 1_B$ então u_F: $\xi[F] \to \xi'[F]$ é chamado um morfismo fibrado sobre B.

OBS. 2: Um morfismo de fibrados (u_F, f): $\xi[F] \to \xi'[F]$ é um isomorfismo fibrado $\leftrightarrow$ $(u,f): \xi \to \xi'$ é um isomorfismo de fibrados principais.

TEOREMA: Seja ξ o G-fibrado principal produto $(B \times G, p, B)$. Para cada F, G-espaço à esquerda o feixe fibrado (ou fibrado de Steenrod) $\xi[F] = (Y, q, B)$ é B-isomorfo ao fibrado produto $(B \times F, p, B)$.

DEM: Seja g: $Y \to B \times F$ definida por:

$$(b,s,y)G \to (b,sy)$$

Vamos mostrar que g é um B-isomorfismo.

(1) g está bem definida pois
se $(b,s,y) \approx (\bar{b},\bar{s},\bar{y})$ então $\bar{b}=b$ $\bar{s}=sg$ e $\bar{y} = g^{-1}y$
e $g(b,s,y) = (b,sy)$
enquanto $g(\bar{b},\bar{s},\bar{y}) = (\bar{b},\bar{s}\bar{y}) = (b,sgg^{-1}y) = (b,sy)$

(2) g é injetora, pois:

$$(b,sy) = (\bar{b},\overline{sy}) \Rightarrow b=\bar{b} \text{ e } sy = \bar{s}\bar{y} \text{ porém } sy=\bar{s}\bar{y} \Rightarrow \bar{s}^{-1}sy=\bar{y}$$

Logo $\exists\, g \in G$ tal que

$$(b,s,y)G = (\bar{b},\bar{s},\bar{y})G$$

pois se tomarmos $g = s^{-1}\bar{s} \in G$ temos

$$(b,s,y)g = (b,s,y)s^{-1}\bar{s} = (b,\bar{s},\bar{s}^{-1}sy) = (\bar{b},\bar{s},\bar{y})$$

(3) g é sobrejetora, pois:

Dado $(b_o,c) \in B\times F$, existe $(b,s,y)G \in y$ tal que

$g((b,s,y)G) = (b_o,c)$

$b=b_o$

e podemos tomar $s=1 \quad y=c$

(4) g satisfaz $q=p'g$ onde

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "q"'] & & B\times F \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

pois $q((b,s,y)G) = p(b,s) = b$

$$p'q((b,s,y)G) = p((b,s,y)) = b$$

(5) g possui inversa contínua h dada por

$$h: B\times F \longrightarrow Y$$
$$(b,y) \to (b,e,y)G$$

e $goh = 1_{B\times F}$

$hog = 1_Y$

pois: $goh((b,y)) = g(h(b,y)) = g(b,e,y)G) = (b,y)$

e $hog((b,s,y)G) = h((b,sy)) = (b,e,sy)G$

Mas $(b,e,sy)G = (b,s,y)G$ pois $\exists g_o \in G$ tal que

$(b,e,sy)g_o = (b,s,y)$ basta tomar $g_o=s$.

OBSERVAÇÕES:

1) Definimos feixe fibrado $\xi[F]$ sempre associando-o a um fibrado principal $\xi = (E,p,B)$ onde ξ era isomorfo a $(B\times G,\ p,\ B)$.

   Então mostramos que $\xi[F]$ era B-isomorfo ao fibrado produto $(B\times F,\ p,\ B)$ e que a fibra $p_F^{-1}(b)$ de $\xi[F]$ era homeomorfa à F. Esta é a construção mais algébrica de Hussemoler.

2) Outras definições mais diretas podem ser feitas de maneiras muito complicadas [ver Steenrod] ou mais acessíveis [ver P. Parga:].

3) Agora queremos ver que um fibrado vetorial de n-planos é um feixe fibrado muito especial cuja fibra é R^n e cujo

grupo topológico G associado é o grupo das transformações lineares GL(n).

Para isso precisamos trabalhar ainda um pouco.

3 Descrição de Fibrados Usando Coordenadas Locais

1. Automorfismos de Fibrados Triviais

Já vimos (exemplo) que os B-morfismos entre fibrados vetoriais triviais $\xi = (B\times R^n, p, B)$ e $\eta = (B\times R^m, p', B)$ tem a forma:

$$
\begin{aligned}
u:\ & B\times R^n \to B\times R^n \\
& (b,x) \to (b, f(b,x))
\end{aligned}
$$

onde $f: B \to L(R^n, R^m)$ é uma função contínua.

Além disso u é automorfismo $\Leftrightarrow$ n=m e $f(b): R^n \to R^n$ é um isomorfismo linear para cada $b \in B$.

Temos um resultado algo semelhante para fibrados de Steenrod, que é o corolário do próximo teorema.

TEOREMA: Seja $\xi = (B\times G, p, B)$ G-fibrado produto principal. Então os B-automorfismos $\xi \to \xi$ sobre B estão em correspondência bijetora com as funções contínuas $g: B \to G$.

Mais precisamente: os B-automorfismos de ξ tem a forma

$h_g: B\times G \to B\times G$

$(b,s) \to (b,g(b)s)$ onde $g: B \to G$ é contínua.

DEM: Queremos mostrar: (1) . $h_g(b,s)$ é automorfismo de ξ

(2) . Todo automorfismo de ξ é desta forma.

(1) Devemos mostrar que $h_g^{-1}: B\times G \to B\times G$ tal que

$h_g o h_g^{-1} = 1_{B\times G} = h_g^{-1} \text{ o } h_g$.

Como $h_g(b,st) = (b,g(b)st) = (b,g(b)s)t = h_g(b,s)t$, existe $h_g^{-1} = h_{g'}$, onde $g' = (g(b))^{-1}, b \in B$. Então

$h_g o h_g^{-1}(b,t) = h_g(h_{g'}(b,t)) = h_g((b,g(b)^{-1}t)) =$

$= (b,g(b)g(b)^{-1}t) = (b,t)$ e

$h_g^{-1} \text{ o } h_g(b,t) = h_g^{-1}(b,g(b)t) = (b,g(b)^{-1}g(b)t) = (b,t)$.

(2.) Reciprocamente seja $h: \xi \to \xi$ um Automorfismo

Então h tem a forma $h(b,s) = (f_1(b,s), f_2(b,s)$.

Como $ph = p$ temos $f_1(b,s) = b$.

Logo $h(b,s) = (b,f(b,s))$ para alguma função contínua $f: B\times G \to G$ se $g(b) = f(b,1)$ temos:

$$h(b,s) = h(b,1)s = (b,g(b))s = (b,g(b)s) = h_g(b,s).$$

TEOREMA: Seja F um G-espaço à esquerda.

Os automorfismos do feixe fibrado $\xi[F] \to \xi[F]$ são todos da forma:

$$h_g(b,y) = (b,g(b)y) \text{ onde } g\colon B \to G \text{ é contínua.}$$

<u>DEM</u>: Como já vimos os morfismos de $\xi[F]$ são quocientes dos morfismos dos espaços antes da identificação.

$$\xi[F] = (((B\times G)\times F) \bmod G,\ p_F,\ B)$$

Logo usando TEO. anterior os morfismos de $\xi[F]$ são quocientes de funções da forma:

$$\begin{array}{ccc} (B\times G)\ F & \longrightarrow & (B\times G)\ F \\ ((b,s),y) & \longrightarrow & (b,g(b)s,y) \end{array}$$

e passando ao quociente temos

$$\begin{array}{ccc} \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ (B\times G)\times F/G & \longrightarrow & (B\times G)\times F/G \\ \| & & \\ ((B\times G)\times F) \bmod G & & ((B\times G)\times F) \bmod G \\ (b,s,y)G & & (b,g(b)s,y)G \end{array}$$

Mais um elemento (b,s,y) sempre pode ser colocado na forma $(b,e,s^{-1}y) \simeq (b,y')$

que pode ser identificado com

Analogamente $(b,g(b)s,y)G$ sempre pode ser pensado como

$$(b,e,g(b)sy) \simeq (b,g(b)s,y) \simeq (b,g(b)y')$$

2. Cartas e Funções de Transição

Vamos estabelecer as seguintes convenções:

G é um grupo topológico

Y é um G-espaço à esquerda

Todos os fibrados principais são G-fibrados

Todos os feixes fibrados tem fibra Y

Dado um espaço B seja $\Theta(B) = (B\times Y,\ p,\ B)$ o fibrado produto.

Como ainda não relacionamos formalmente os conceitos de fibrado vetorial e fibrado de Steenrod (ou feixe fibrado) vamos definir tudo que se segue para ambos conceitos.

DEF. 1: Seja η um feixe fibrado sobre B e U um subconjunto aberto de B. Uma carta de η sobre U é um isomorfismo

$$h\colon (U\times Y,\ p,\ U) \to \eta|_U$$

DEF. 1': Seja η um fibrado vetorial sobre B e U um subconjunto aberto de B, η de k-planos. Uma carta de sobre U é um U-isomorfismo de fibrado vetorial,

$$h\colon U\times\mathbb{R}^k \to \eta|_U$$

PROPOSIÇÃO 1: Dadas 2 cartas h_1, h_2: $\Theta(U) \to \eta|_U$ de η (seja η fibrado vetorial ou feixe fibrado) sobre U existe uma função $g\colon U \to G$ tal que $h_1(b,y)=h_2(b,g(b)y)$

para cada $(b,y) \in U\times Y$. Esta g é única e para 2 cartas de fibrados vetoriais a função g contínua é definida $U \to GL(n)$.

DEM: Como h_1, h_2: $\theta(U) = (U\times Y,\ p,\ U) \to \eta_{|U})$ são isomorfismos, admitem inversas h_1^{-1}, h_2^{-1}: $\eta_{|U} \to \theta(U)$. Logo $h_2^{-1} \circ h_1$: $(U\times Y,\ p,\ U)\circlearrowleft$ é um automorfismo de $\theta(U)=(X\times Y,p,U)$.

Pelo teorema todo automorfismo de $\theta(U)$ é da forma

$$(b,y) \to (b,g(b)y) \text{ onde } g \text{ é contínua } g\colon B \to G$$

Logo $h_2^{-1} \circ h_1(b,y) = (b,\ g(b)y)$

e portanto $h_1(b,y) = h_2(b,g(b)y)$ (a unicidade de g vem também do teorema).

DEF. 3: Um atlas de cartas para um fibrado (vetorial ou feixe fibrado) η é uma família de pares $\{(h_i,\ V_i)\}$ para $i \in I$, tal que:

1) a família de conjuntos abertos $\{V_i\}$ cobre B.
2) Cada h_i é uma carta de η sobre V_i.

OBS: 1. A cobertura associada com o atlas $\{(h_i,V_i)\}$ é a cobertura aberta $\{V_i\}$.

2. Um fibrado vetorial é definido em termos do seu atlas de cartas.

Queremos ver agora como podem ser relacionadas cartas:

PROPOSIÇÃO 2: Seja $\{(h_i, V_i)\}$ com $i \in I$ um atlas para um feixe (vetorial) fibrado η. Seja agora $V_i \cap V_j \neq \emptyset$.
Restringimos h_i e h_j a $V_i \cap V_j$ e aplicamos a PROPOSIÇÃO 2.
Então existe uma única função contínua
$g_{i,j}: V_i \cap V_j \to G$.
Tal que $h_j(b,y) = h_i(b, g_{i,j}(b)y)$
$(b,y) \in (V_i \cap V_j) xy$

As funções $g_{i,j}$ em $V_i \cap V_j$ tem as seguintes propriedades:

(P1) Para cada $b \in V_i \cap V_j \cap V_k$ vale a relação
$g_{i,k}(b) = g_{i,j}(b) g_{j,k}(b)$.

(P2) Para cada $b \in V_i$ a função $g_{i,i}(b)$ é a identidade em G.

(P3) Para cada $b \in V_i \cap V_j$ a relação $g_{i,j}(b)$
$g_{i,j}(b) = g_{j,i}(b)^{-1}$ vale.

DEM: Sabemos que $\exists\ g_{i,j}: V_i \cap V_j \to G$
tal que $h_j(b,j) = h_i(b, g_{i,j}(b)y)$ por prop. 2
Quero mostrar que vale (P1) isto é que dado $b \in V_i \cap V_j \cap V_k$.
$g_{i,k}(b) = g_{i,j}(b) g_{i,k}(b)$

Por DEF: $g_{i,j}$ é dada por $h_j(b,y) = h_i(b,g_{i,j}(b)y)$

$g_{i,k}$ é dada por $h_k(b,y) = h_j(b,g_{j,k}(b))$

$g_{i,k}$ $h_k(b,y) = h_i(b,g_{i,k}(b)y)$

Logo: $h_j(b,g_{j,k}(b)y) = h_i(b,g_{i,k}(b)y)$

Mas $h_j(b,\underbrace{g_{i,k}(b)y}_{y'}) = h_i(b,g_{i,j}(b)y') = h_i(b,g_{i,j}(b)g_{j,k}(b)y) =$
$= h_i(b,g_{i,k}(b)y)$

Logo (h é injetora) $\therefore$ $g_{i,j}(b)g_{j,k}(b) = g_{i,k}(b)$

<u>OBSERVAÇÃO</u>:

A propriedade (P1) implica (P2) e (P3) pois:

$\rightarrow$ $g_{i,i}(b)g_{i,i}(b) = g_{i,i}(b)$ $\forall b \in V_i$ por (P1) logo $g_{i,i}(b) = e \in G$.

similarmente se $g_{i,j}(b).g_{j,i}(b) = g_{i,i}(b) = 1 \in G$ então

$$g_{i,j}(b) = g_{j,i}(b)^{-1}$$

<u>DEF. 4</u>: Um <u>sistema de funções de transição</u> num espaço B , relativo a uma cobertura aberta $\{V_i\}$, $i \in I$ de B é uma família de funções contínuas:

$g_{i,j}: V_i \cap V_j \to G$ para cada $i,j \in I$ tal que a propriedade (P1) é satisfeita.

Logo a proposição anterior diz que: um atlas $\{(h_i, V_i)\}$ de um fibrado vetorial η induz um sistema natural de funções de transição $\{g_{i,j}\}$, definidas pelas relações

$$h_j(b,y) = h_i(b, g_{i,j}(b)y)$$

PROPOSIÇÃO 3: Sejam $\{(h_i, V_i)\}$ e $\{(h_i', V_i)\}$ dois atlas para um fibrado η com a mesma cobertura associada $\{V_i\}$ $i \in I$ e com 2 sistemas de funções de transição, $\{g_{i,j}\}$ e $\{g'_{i,j}\}$ seja $r_i: V_i \to G$ a única (PROP. 2) função tal que:

$$h_i'(b,y) = h_i(b, r_i(b)y) \quad \forall\, b \in V\ ; \quad y \in Y$$

Então $g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}\, g_{i,j}(b)\, r_j(b)$ $\forall\, b \in V_i \cap V_j$.

DEM: Calculamos: 1. $h_j'(b,y) \overset{r_j}{=} h_j(b, r_j(b)y) \overset{g_{i,j}}{=} h_i(b, g_{i,j}(b) r_j(b) y)$

2. $h_i'(b, g'_{i,j}(b)y) \overset{r_i}{=} h_i(b, r_i(b) g'_{i,j}(b)y)$

e como $h_j'(b,y) \overset{g'_{i,j}}{=} h_i'(b, g'_{i,j}(b)y)$ temos que

$h_i(b, g_{i,j}(b) r_j(b) y) = h_i(b, r_i(b,) g'_{i,j}(b)y) \Rightarrow h_i$ é injetora $\Rightarrow$

$$g_{i,j}(b)r_j(b) = r_i(b)g'_{i,j}(b) \text{ ou } g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1}g_{i,j}(b)r_j(b)$$

A PROP. 3 motiva a seguinte definição:

<u>DEF.</u>: Dois sistemas de funções de transição $\{g_{i,j}\}$ e $\{g'_{i,j}\}$ relativos à mesma cobertura aberta $\{V_i\}$ de um espaço base B são <u>equivalentes</u> se existe uma função contínua $r_i: V_i \to G$ tal que:

$$(*) \quad g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b)r_j(b) \text{ para cada } b \in V_i \cap V_j$$

<u>PROPOSIÇÃO 4</u>: A relação (*) é de fato uma relação de equivalência.

<u>DEM</u>: (1) $g_{i,j}(b) \simeq g_{i,j}(b)$ basta tomar $r_i: V_i \to G$

$b \to e = 1 \in G$

(2) $g_{i,j}(b) \simeq g'_{i,j}(b) \to g'_{i,j}(b) \simeq g_{i,j}(b)$ pois:

G é grupp

$$\exists r_i: V_i \to G \text{ tal que } g'_{i,j}(b) = r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b)r_j(b) \leftrightarrow$$

Logo $g_{i,j}(b) = (r_i(b)^{-1})^{-1}g'_{i,j}(b)(r_j(b)^{-1})$

isto $\exists r'_i: V_i \to G$ tal que $g_{i,j}(b) = r'^{-1}_i(b)g'_{i,j}(b)r'_j(b)$

(3) $g_{i,j}(b) \approx g'_{i,j}(b)$ e $g'_{i,j}(b) \approx g''_{i,j}(b) \rightarrow g_{i,j}(b) \approx g''_{i,j}(b)$

pois:

$\exists r_i : V_i \to G$ tal que

(1) $g'_{i,j} = r_i^{-1} g_{i,j} r_j$

$\exists r'_i : V_i \to G$ tal que

(2) $g''_{i,j} = r_i'^{-1} g'_{i,j} r'_j$

Logo existe r''_i tal que r''_i: $V_i \to G$ tal que

$$g''_{i,j} = r_i''^{-1} g_{i,j} r''_i \text{ pois:}$$

$$g''_{i,j} \overset{(2)}{=} r_i'^{-1} g'_{i,j} r'_j = r_i'^{-1} r_i^{-1} g_{i,j} r_j r'_j$$

Basta tomar r''_i: $V_i \to G$

$$b \to r_j(b) r'_j(b)$$

<u>TEOREMA 3</u>: 1. Sejam η e η' 2 feixes fibrados com mesma fibra F e estrutura de grupo G sobre o espaço B. [ou η e η' 2 fibrados vetoriais de dimensão L sobre GL(k).]

2. Sejam: $\{(V_i, h_i)\}$ um atlas de η com funções de transição $\{g_{i,j}\}$.
$\{(V_i, h'_i)\}$ um atlas de η' com funções de transição $\{g'_{i,j}\}$.

Então η e η' são isomorfos sobre B $\Leftrightarrow \{g_{i,j}\}$ e $\{g'_{i,j}\}$ são sistemas de funções de transição equivalentes.

DEM: ($\Rightarrow$) Seja $f: \eta \to \eta'$ um B-isomorfismo da relação:

$h_j(b,y) = h_i(b,g_{i,j}(b)y)$ segue que $fh_j = f(h_i)$ e $\{(V_i,fh_i)\}$ é um atlas para η' com funções de transição $\{g_{i,j}\}$. Então $\{(V_i,h_i')\}$ e $\{(V_i,fh_i)\}$ são 2 atlas para η'.

($\Leftarrow$) $\{g_{i,j}\}$ e $\{g'_{i,j}\}$ são S.F.T. equivalentes

$$\exists\, r_i: V_i \to G \text{ tal que } g'_{i,j}(b) \overset{(*)}{=} r_i(b)^{-1} g_{i,j}(b) r_j(b)$$

$$b \in V_i \cap V_j$$

Definimos $f_i: V_i \times Y \to V_i \times Y$ tal que $(b,y) \to (b, r_i(b)^{-1}y)$. Agora definimos $f: \eta \to \eta'$ requerendo $f\big|_{\eta \mid V_i} = h_i' f_i h_i^{-1}$ ou $h_i' f_i = fh_i$.

Em $V_i \cap V_j$ as 2 definições de f levam a mesma função, vamos ver:

$\forall\, (b,y) \in (V_i \cap V_j) \times Y$ vamos mostrar: $h_j' f_j(b,y) = fh_j(b,y) \Rightarrow$

$$h_i' f_i(b,y) = fh_i(b,y)$$

$$h_j' f_j(b,y) = h_j'(b, r_j(b)^{-1}y) = h_i'(b, g'_{i,j}(b) r_j(b)^{-1}y) \overset{(*)}{=}$$

$$= h_i'(b, r_i^{-1}(b) g_{i,j}(b)y) = h_i' f_i(b, g_{i,j}(b)y)$$

Usando: $fh_j(b,y) = fh_i(b,g_{i,j}(b)y)$ temos $fh_i(b,g_{i,j}(b)y) =$

$$= h_i' f_i(b, g_{i,j}(b)y) \text{ ou } fh_i = h_i' f_i.$$

Construção de Fibrados Através de um Conjunto de Funções de Transição

OBSERVAÇÃO: Seja $\eta = \xi[Y]$ um feixe fibrado com fibra Y, estrutura de grupo G e espaço base B.
Se $\{(V_i, k_i)\}$ $i \in I$ é um atlas de η com funções de transição $\{g_{i,j}\}$, então existe um atlas $\{(V_i, h_i)\}$ de η com funções de transição $\{g_{i,j}\}$ onde $h_i\{[Y]\} = k_i$.

TEOREMA: Seja $\{V_i\}$ $i \in I$ uma cobertura aberta do espaço B.
G um grupo topológico
Y um G-espaço à esquerda e
$\{g_{i,j}\}$ um sistema de funções de transição associado à cobertura aberta $\{V_i\}$.

Então existe um feixe fibrado $\eta = \xi[F]$ e um atlas $\{(V_i, h_i)\}$ para η tal que o conjunto de funções de transição deste atlas é $\{g_{i,j}\}$. Além disso, se $Y = R^k$ e se G é um subgrupo fechado de GL(n) então $\xi[F] = \eta$ admite estrutura de fibrado vetorial. Finalmente, η é único a menos de B-isomorfismo.

DEM: (1) Utilizando o teorema anterior se η existe ele é único a menos de B-isomorfismo.

(2) Vamos começar construindo ξ.
Para isto seja Z o espaço soma ou a união disjunta

da família $\{V_i \times G\}$ para $i \in I$. Um elemento de Z é da forma (b,s,i) onde $b \in V_i$, $s \in G$ e i é o índice.

(3) As funções de inclusão $q_i\colon V_i \times G \to Z$ são definidas pela relação $q_i(b,s) = (b,s,i)$ e Z tem a maior topologia tal que todas as q_i's são contínuas.

(4) No espaço Z definimos uma relação de equivalência R dizendo que:

$$(b,s,i)R(b',s',j) \text{ se } b=b' \text{ e } s' = g_{j,i}(b)s$$

(5) R é realmente uma relação de equivalência pois

. $(b,s,i)R(b,s,i)$ porque $b=b$ e $s=g_{i,i}(b)s$ pois $g_{i,i}(b) = 1 \in G$.

. $(b,s,i)R(b',s',j) \Longrightarrow (b',s',j)R(b,s,i)$

pois $b'=b$ e se $s'=g_{j,i}(b)s$ então $s=g_{j,i}(b)^{-1}s'$ e $[g_{j,i}(b)]^{-1}=g_{i,j}(b)$

. $(b,s,i)R(b',s',j)$ e $(b',s',j)R(b'',s'',k)$ implicam $(b,s,i)R(b'',s'',k)$ pois $b=b'=b''$ e

$$s' = g_{j,i}(b)s \qquad s'' = g_{k,j}(b)s' = (g_{kj}(b)g_{j,i})b)s = g_{k,i}(b)s$$

(6) Seja $X = Z/R = Z \bmod R$

Seja $q: Z \to X$ a função quociente canônica e seja $h_i = qq_i$ para $i \in I$. $x \longrightarrow [x]$

Denotamos por $\langle b,s,i \rangle$ a classe de (b,s,i) no espaço X.

(7) Definimos $p: X \to B$ por

$$p(\langle b,s,i \rangle) = b$$

Como p é o quociente de uma projeção, p é uma função aberta.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p'"'] & Z/R = X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad p' = pq$$

(8) Para $b \in V_i$ nós temos $ph_i(b,s) = p(qq_i)(b,s) =$

$$= pq(q_i(b,s)) = pq(b,s,i) =$$

$$= p(\langle b,s,i \rangle) = b \text{ e}$$

$h_i: V_i \times G \to X$ é função contínua injetora.

pois:

$h_i(b,s) = h_i(\bar{b},\bar{s}) \Rightarrow ph_i(b,s) = ph_i(\bar{b},\bar{s}) \Rightarrow b=\bar{b}$

Por outro lado $h_i = qq_i$ logo $h_i(b,s) = h_i(b,\bar{s})$

$$\Rightarrow \langle b,s,i\rangle = \langle b,\bar{s},j\rangle$$

$$\Rightarrow \bar{s} = g_{j,i}(b)s$$

(9) O grupo G age em Z da seguinte maneira:

$(b,s,i)t = (b,st,i)$.

Se (b,s,i) e (b',s',j) são R-relacionados (isto é $b'=b$, $s'=g_{j,i}(b)s$) então (b,st,i) e $(b',s't,j)$ são R-relacionados (pois $b'=b$ e $s't = \underbrace{g_{j,i}(b)s}_{s'}t$).

Portanto X se torna um G-espaço sob a ação de G definida por:

$\langle b,s,i\rangle t = \langle b,st,i\rangle$

Claramente se $x \in X$ nós temos

$p(x) = p(x') \Leftrightarrow xt = x'$ para algum $t \in G$ pois

$x = \langle b,s,i\rangle$ $p(x) = b = p(x')$ logo $x' \cdot \langle b,s',j\rangle$ logo

$\langle b,s,i\rangle t = \langle b,st,i\rangle$

$x' = \langle b', s', j\rangle$ $(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ $\langle b,s,i\rangle t = \langle b',s',j\rangle \Rightarrow b=b'$ $s'=g_{j,i}(b)s$

Logo $p(x) = p(x')$ e $xt = x \Rightarrow t=1$

(10) A função translação $\tau(\langle b,s_1,j\rangle, \langle b,s_2,j\rangle) = \tau(\langle b,s_1,j\rangle,$ $\langle b,g_{i,j}(b)s_2,j\rangle) = s_1^{-1}g_{i,j}(b)s_2$ é contínua.

$\tau\colon X^* \to G$ tal que $x_o\tau(x_o,x) = x$.

$\langle b,s_2,j\rangle(g_{i,j}(b)) = \langle b,g_{i,j}(b)s_2,j\rangle$

$\langle b,s_1,j\rangle\tau(x_o,x) = \langle b,g_{i,j}(b)s_2,j\rangle$

$\tau = s_1^{-1}g_{i,j}s_2$

Logo $\xi = (X, p, B)$ é um G-espaço principal pois p é uma função aberta.

(11) Como $h_i(b,s)t = \langle b,s,i\rangle t = \langle b,st,i\rangle = h_i(b,st)$ as funções

$h_i\colon V_i\times G \to \xi|_{V_i}$

$(b,s) \to \langle b,s,i\rangle$ são G-isomorfismos.

(12) Da relação $h_i(b,g_{i,j}(b)s) = \langle b,g_{i,j}(b)s,i\rangle = \langle b,s,j\rangle = h_j(b,s)$ o conjunto de funções g_{ij} é o conjunto de funções de transição associadas ao atlas $\{(V_i,h_i)\}$.

(13) Finalmente:

Para definir uma estrututa de fibrado vetorial em $\eta = \xi[R^n]$ basta fazermos:

$$a(x,y)\bmod G + a'(x,y')\bmod G = (x,ay+a'y')\bmod G$$

Se $k_i\colon V_i\times R^k \to p^{-1}(V_i)$ é a carta dada pela relação $k_i(b,y) \to ((b,1,i)\bmod G)$ então k_i é um V_i-isomorfismo de fibrados vetoriais.

Logo um fibrado vetorial é um fibrado de Steenrood tal que a fibra $p^{-1}(b)$ é R^n e o grupo G que age é o grupo de transformações lineares GL(n) pois se $b \in V_i \cap V_j$.

$$k_i\colon V_i\times R^n \to \eta|_{V_i} \qquad k_j\colon V_j\times R^n \to \eta|_{V_j}$$

e $k_2^{-1} o k_1(b,v)$ é automorfismo de $(V_i \cap V_j)\ R^n$.
Logo $k_2^{-1} o k_1$ é da forma

$(b,v) \to (b,g(b)v) = (b,f(b,v)$ onde $f\colon B\times G \to G$ contínua onde $g\colon B \to GL(n)$ $\quad f(b,v) \in R^n$.

Agora se $g(b) = f(b,1)$ temos $k_2^{-1} o k_1(b,v) = h(b,v) = h(b,1)v =$

$$= (b, f(b,1))v =$$

$$= (b, g(b))v = (b, g(b)v$$

onde $g(b) = f(b,1)$ $\quad f: B\times G \to G = R^n$

$\quad (b,1) \to g(b) \in f$ linear $\forall b$

$\quad R^n \to R^n$ para $b \in R^n$

PROPOSIÇÃO: Todo fibrado vetorial sobre B, onde B é a variedade diferenciável, é equivalente a um fibrado com grupo O(n). Ver [ ].

Podemos mostrar que $\zeta = (E,p,B)$ sobre $GL(n)$ e $\eta = (E, p', B)$ sobre $O(n)$ tem funções de transição $\{g_{i,j}\}$ e $\{g'_{i,j}\}$ equivalentes.

7. ALGUNS RESULTADOS SOBRE IMERSÕES DE P^n

DEF. 1: Se M^m é uma variedade diferenciável de dimensão m e se existe $f: M^m \to R^{m+k}$ diferenciável tal que o Jacobiano seja não-singular, escrevemos $M^m \subsetneq R^{m+k}$ e dizemos que M^m admite imersão em R^{m+k}.

DEF. 2: Se M^n admite imersão f em R^{n+k} e f é injetora (1-1) dizemos que f é um mergulho e escrevemos $M^n \hookrightarrow R^{n+k}$.

PROPOSIÇÃO 1: Para uma imersão $M^n \subsetneq R^{n+k}$ pode ser demonstrado que a soma de Whitney $\tau^n \oplus \nu^n$ onde τ^n = fibrado tangente a M^n e ν^n = fibrado normal a M^n é trivial.

OBSERVAÇÃO:

1. Se ξ e η são 2 fibrados vetoriais de n e m planos respectivamente sobre B podemos sempre supor que eles tem uma cobertura comum $\{V_j\}$ para as funções de transição correspondentes:

$$g_{i,j}: V_i \cap V_j \to GL(n) \qquad e \qquad \tilde{g}_{i,j}: V_i \cap V_j \to GL(m)$$

De fato, se as coberturas são distintas, digamos $\{V_i | i \in I\}$ e $\{V'_j | j \in I\}$ basta tomar a interseção $\{V_i \cap V'_j\}$

e trocar os índices usando I×J.

2. O fibrado $\xi \oplus \eta$ se obtém com a construção indicada antes e utilizando

$$h_{ij}: V_i \cap V_j \to GL(m+n)$$

$$x \longrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{g}_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g_{ij}(x) \end{bmatrix}$$

3. Da mesma forma o produto tensorial $\xi \otimes \eta$ resulta ao efetuar a construção com as funções de transição

$$f_{ij}: V_i \cap V_j \longrightarrow GL(mn)$$
$$x \longrightarrow g_{ij}(x) \otimes \tilde{g}_{ij}(x)$$

onde $\otimes$ = produto de Kronecker de matrizes.

4. Temos as seguintes equivalências: 1. $\xi \otimes \eta \simeq \eta \otimes \xi$

2. $\xi \otimes (\eta \otimes \nu) \simeq (\xi \otimes \nu) \otimes \nu$

3. $\xi \otimes (\eta \otimes \nu) \simeq (\xi \otimes \eta) \oplus (\xi \otimes \nu$

onde ξ , η e ν são fibrados vetoriais sobre o mesmo espaço base.

Gostaríamos de ver agora outra definição do fibrado de retas sobre P^n, ou fibrado de Hopf, notação ξ_n ou ξ.

Como já vimos: 1) o espaço projetivo P^n se obtém de S^n identificando pontos antípodas.

Isto é: $S^n \xrightarrow{\pi} S^n/\simeq\ = P^n$ ou seja $P^n = \{(x,-x) \mid x \in S^n \subset R^{n+1}\}$

$x \simeq -x \quad \{x,-x\} \to [x]$.

2) Vamos definir o fibrado de Hopf $= (E,p,P^n)$, de novo. Como espaço total E tomamos o produto $S^n \times R$ sob a identificação $(x,\lambda) \cong (-x, -\lambda)$.

Notação $E = S^n \underset{2}{\times} R$.

Definimos a projeção natural $p\colon E \to P^n$ é dada por $p[(x,\lambda), (-x,-\lambda)] = (x,-x)$.

ξ ou $\xi_n = (E,p,P^n)$ é o fibrado de Hopf ou fibrado de retas sobre P^n.

3) Queremos agora ver o fibrado de k-planos

$$k\xi = \underbrace{\xi \oplus \xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{k\text{-vezes}}$$

O espaço total $E(k\xi)$ é formado por elementos $(x;\ u_1, u_2, \ldots, u_k)$ onde $x \in S^n$, $u_i \in R$ pois se em geral $E(\xi_1 \oplus \xi_2) = \{(x,y),\ x \in E(\xi_1),\ y \in \xi\ E(\xi_2)\}$, no caso podemos identificar $(x, u_1;\ x, u_2;\ \ldots,\ x, u_k) \simeq (x;\ u_1, u_2, \ldots, u_k)$.

Também queremos identificar $(x, u_1, \ldots, u_k) \equiv (-x, -u_1, -u_2, \ldots, -u_k)$. Logo podemos dizer que $E(k\xi)$ se obtém de $S^n \times R^k$ ao identificar (x,u) com $(-x,-u)$ $\forall x \in S^n$, $u \in R^k$. O espaço $S^n \times R^k$ sob esta identificação é denotado $S \underset{n}{\times} R^k = E(k\xi)$. A projeção em $k\xi$ é definida por:

$p: E(k\xi) \to P^n$

$((x,u),(-x,-u)) \to (x,-x)$

PROPOSIÇÃO 2: Para todo fibrado vetorial ξ, ξ fibrado de retas sobre B, temos $\xi \otimes \xi = 1$ fibrado trivial.

DEM: Ver [ ].

TEOREMA 1: O fibrado $k\xi = (E,p,P^n)$ tem r-seções linearmente independentes $\Leftrightarrow \exists$ h transformação ímpar-linear não-singular,

$$h: R^{n+1} \times R^r \to R^k$$

DEM: ($\Rightarrow$) Sejam $S_i: P^n \to E = S^n x_2 R^k$ as seções LI's, (i = 1, 2, ..., r). Então as Si's tem a forma:

$$S_i(x,-x)) = ((x,\lambda_i(x)), (-x,-\lambda_i(x))$$

Onde cada $\lambda_i(x)$ define uma função contínua $\lambda_i: S^n \to R^k$ tal que $\lambda_i(-x) = -\lambda_i(x)$.

Além disso para todo $x \in S^n$ os vetores $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x)$ são LI's em R^k. Para $x \in S^n$, $u \in R^r$ construímos $h: S^n \times R^r \to R^k$ dada por

$$h(x,u) = \sum_{i=1}^{r} u_i \lambda_i(x) \text{ onde } u = (u_1, \ldots, u_r)$$

Logo $h(x,u) = 0 \Rightarrow u_i = 0 \ \forall_i = 1, \ldots, r \Rightarrow u=0$.
Estendendo h radialmente sobre S^n se obtém
$h\colon R^{n+1} \times R^r \to R^k$ com as propriedades requeridas.

($\Leftarrow$) Reciprocamente dada h tomamos a restrição
$h\colon S^n \times R^r \to R^k$. Se $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ é a base canônica de R^r,
construímos as funções contínuas $\lambda_i\colon S^n \to R^k$ através de $x \to \lambda_i(x) = h(x,\varepsilon_i)$.
Obviamente cada λ_i é ímpar $\lambda_i(-x) = h(-x,\varepsilon_i) = -h(x,\varepsilon_i) = -\lambda_i(x)$ e definindo $S_i((x,-x)) = ((x,\lambda_i(x)), (-x,-\lambda_i(x))$ se obtém $S_1, S_2, \ldots, S_r$ que são r-seções LI's do fibrado $k\xi$.

Seja $\emptyset(n)$ a função considerada no cap. 2. Isto é $\emptyset(n)$ = nº de inteiros tais que $0 < t \leq n$ e $t = 0, 1, 2$ ou 4 mod. 8.

<u>COROLÁRIO 1</u>: O fibrado $2^{\emptyset(n)}\xi$ sobre P^n é trivial, isto é $2^{\emptyset(n)}\xi \approx 2^{\emptyset(n)}$.

<u>DEM</u>: Como já vimos um fibrado de k-planos é trivial $\Leftrightarrow$ admite k seções LI's.

$$2^{\emptyset(n)}\xi = \underbrace{\xi \oplus \ldots \oplus \xi}_{2^{\emptyset(n)} \text{ vezes}} \text{ é trivial} \Leftrightarrow \text{admite } 2^{\emptyset(n)} \text{ seções LI's.}$$

Mas por TEO passado $k\xi$ admite r seções $\leftrightarrow \exists h\colon R^{n+1} \times R^r \to R^k$ ímpar-linear.
No caso $2^{\phi(n)}\xi$ admite $2^{\phi(n)}$ seções $\leftrightarrow \exists h\colon R^{n+1} \times R^{2^{\phi(n)}} \to R^{2^{\phi(n)}}$

Mas por TEO. do cap. 2, $2^{\emptyset(p)} = m$ é tal que dado p, $2^{\emptyset(p)} = m$ é o valor mínimo para a existência de uma transformação normada

$$\emptyset: R^p \times R^m \to R^m$$
$$R^{n+1} \times R^{2^{\emptyset(n)}} \to R^{2^{\emptyset(n)}}$$

Logo $2^{\emptyset(n)}$ é trivial pois $\emptyset$ normada $\Rightarrow \emptyset$ ímpar-linear.

<u>COROLÁRIO 2</u>: Se $k<n$ o fibrado $k\xi_n$ não admite seções.

<u>DEM. 1</u>: Suponha que $k\xi$ tenha ao menos uma seção.

Então de acordo com o TEO existe h ímpar-linear não singular

$$h: R^{n+1} \times R^1 \to R^k.$$

Definimos 1º $f: S^n \to \{R^k - 0\}$ e $g(x) = \dfrac{f(x)}{||f(x)||^{-1}}$

$$x \longrightarrow h(x, \varepsilon_1)$$

g é uma função contínua ímpar $g: S^n \times S^{k-1} \subseteq S^{n-1}$.

Porém por TEO. de topologia ver [ ] não existe função contínua S^n em S^{n-1} que transforme pontos antípodas de S^n em pontos antípodas de S^{n-1} sem exceção. Logo $k\xi$ não tem seções.

Para DEM 2 vamos precisar de uma rápida introdução - puramente algébrica - a conceitos de homologia.

Algumas idéias básicas:

1. Vamos considerar o anel de cohomologia módulo 2 de P^n,

$H^*(P^n, Z/2) \simeq Z/2[w]/(w^{n+1})$ o anel polinomial truncado de altura n+1 gerado por w.

Seja $w \in H^1(P^n, Z/2)$, $w^{n+1} = 0$ o gerador de $H^*(P^n, Z/2)$.

2. Sabemos: $H_o(P_1^n, Z/2) \simeq Z/2$ grupo de cohomologia DIM zero

$H^1(P_1^n, Z/2) \simeq Z/2$ grupo de cohomologia DIM 1

$\vdots$

$H^n(P^n, Z/2) \simeq Z/2$ grupo de cohomologia DIM n

$H^{n+j}(P^n, Z/2) \simeq 0 \quad \forall\, j \geq 1$

$$H^*(P^n) = H^o(P^n) \oplus H^1(P^n) \oplus \dots \oplus H^n(P^n) \oplus \dots$$

3. Também sabemos: Dada $f: P^n \to P^r$ contínua existe $f^*: H^*(P^r) \to H^*(P^n)$.

Onde f^* é homomorfismo entre anéis de cohomologia, induzido por f.

4. Além disso: Se $g: P^r \to P^\ell$ contínua e $g.f: P^n \to P^\ell$ existe, então

$(gof)^*: H^*(P^\ell) \to H^*(P^n)$ é igual a $f^*.g^*: H^*(P^\ell) \to H^*(P^n)$.

5. Também: dada $f: P^m \to P^\ell$ contínua, $g: S^m \to S^\ell$ contínua sabemos que $f^*: H^1(P^\ell) \to H^1(P^m)$ em particular é um isomorfismo de grupos, se o seguinte diagrama for comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^m & \xrightarrow{g} & S^\ell \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ P^m & \xrightarrow{f} & P^\ell \end{array}$$

onde π é a identificação habitual de x e $-x$.

Ver [ ].

6. Sabemos ainda: $H^1(P^m \times P^\ell) \simeq H^1(P^m) \otimes H^1(P^\ell)$

<u>COROLÁRIO 2</u>: Se $k \leq n$ o fibrado $k\xi_n$ não admite seções.

<u>DEM. 2</u>: Suponhamos que $k\xi_n$ tem ao menos uma seção.

Então pelo TEO existe $h: R^{n+1} \times R^1 \to R^k$ h ímpar-linear se definimos $f: S^n \to \{R^k - 0\}$

$$x \longrightarrow h(x, \varepsilon_i)$$

Obtemos $g(x) = \dfrac{f(x)}{||f(x)||}$ e $g: S^n \to S^{k-1} \subseteq S^{n-1}$ é contínua ímpar

$$x \longrightarrow g(x)$$

e $g(-x) = g(x)$.

Então $g: S^n \to S^{k-1}$

$x \longrightarrow g(x)$ tal que $g(x) = -g(x)$. Se $k-1 = r$

g define $\bar{g}: P^n \to P^r$

e $\bar{g}: P^n \to P^r$ induz $\bar{g}^*: H^*(P^r) \to H^*(P^n)$

Como w é o gerador de $H^*(P^n)$ e w_1 o gerador de $H^*(P^r)$ $g^*(w_1) = w$.
Porém $w_1^{r+1} = 0$ e $\bar{g}^*$ é homomorfismo de anéis logo

$$0 = \bar{g}^*(w_1^{r+1}) = (\bar{g}^* w_1)^{r+1} = w^{r+1} \neq 0 \text{ absurdo!}$$

Logo quando $r<n$ não existe $g\colon S^n \to S^r$ $r<n$.

Este resultado é um caso particular do TEO. de Hopf que veremos a seguir.

DEF: Uma função contínua não-singular $f\colon R^r \times R^s \to R^m$ é dita

ímpar-ímpar se

$$f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y) \quad \forall x \in R^r, \quad y \in R^s$$

OBS: 1. Toda função bilinear ou ímpar-linear é também ímpar-ímpar.

2. Se restringimos uma função f ímpar-ímpar às esferas $S^{r-1} \times S^{s-1}$ obtemos:

$$f^1\colon S^{r-1} \times S^{s-1} \to R^m - (0) \quad ||x|| = 1 \quad ||y|| = 1.$$

3. Podemos então definir $g\colon S^{r-1} \times S^{s-1} \to S^{m-1}$ por

$$g(x,y) = \frac{f^1(x,y)}{||f^1(x,y)||} \qquad x \in S^{r-1},\ y \in S^{s-1}$$

e g também é uma função ímpar-ímpar

isto é: $g(-x,y) = g(x,-y) = -g(x,y)$

4. Logo g induz uma função h: $P^{r-1} \times P^{s-1} \to P^{m-1}$ onde S^{m-1} pode ser considerada cobertura dupla de P^{m-1} e $S^{r-1} \times S^{s-1}$ pode ser considerada cobertura quádrupla de $P^{r-1} \times P^{s-1}$.

<u>TEOREMA 1</u>: Seja $h^*: H^1(P^{m-1}) \to H^1(P^{r-1} \times P^{s-1})$ o homomorfismo induzido por h como acima entre os grupos de cohomologia (mod. 2) de dimensão 1. Temos então $h^*(w) = w_1 \otimes 1 + 1 \otimes w_2$ onde w, w_1, w_2 são, respectivamente, os elementos não-nulos de $H^1(P^{m-1})$, $H^1(P^{r-1})$, $H^1(P^{s-1})$.

<u>DEM</u>: 1. Tomamos $\begin{cases} x_o \in S^{r-1} \\ y_o \in S^{s-1} \end{cases}$ dois pontos fixos. Definimos:

$$\text{Definimos: } \emptyset_1: S^{r-1} \to S^{r-1} \times S^{s-1}$$
$$x \longrightarrow (x, y_o)$$

$$\text{e } \emptyset_2: S^{s-1} \to S^{r-1} \times S^{s-1}$$
$$y \longrightarrow (x_o, y)$$

2. Sejam agora as funções induzidas:

$$\bar{\emptyset}_1: P^{r-1} \to P^{r-1} \times P^{s-1} \quad \text{e} \quad \emptyset_2: P^{s-1} \to P^{r-1} \times S^{s-1}$$

3. A transformação $h\bar{\emptyset}_1$ i.e.

$$P^{r-1} \xrightarrow{\bar{\emptyset}_1} P^{r-1} \times P^{s-1} \xrightarrow{h} P^{m-1}$$

Está coberta pela transformação

$$g\emptyset_1 : S^{r-1} \xrightarrow{\bar{\emptyset}_1} S^{r-1} \times S^{s-1} \xrightarrow{g} S^{m-1}$$

que tem a propriedade:

$$g\emptyset_1(-x) = g(-x, y_o) = -g(x, y_o) = -g\emptyset_1(x)$$

4. Logo considerando os anéis de cohomologia temos:

. $h\bar{\emptyset}_1 : P^{r-1} \to P^{m-1}$ induz $\bar{\emptyset}_1{}^*h^* : H^1(P^{m-1}) \to H^1(P^{r-1})$

. $h\bar{\emptyset}_2 : P^{s-1} \to P^{m-1}$ induz $\bar{\emptyset}_2{}^*h^* : H^1(P^{m-1}) \to H^1(P^{s-1})$

5. Os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} S^{r-1} & \xrightarrow{g\emptyset_1} & S^{m-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ P^{r-1} & \xrightarrow[h\bar{\emptyset}_1]{} & P^{m-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^{s-1} & \xrightarrow{g\emptyset_2} & S^{m-1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ P^{s-1} & \xrightarrow[h\bar{\emptyset}_2]{} & P^{m-1} \end{array}$$

6. Os geradores: $w \in H^1(P^{m-1})$, $w_1 \in H^1(P^{r-1})$ e $w_2 \in H^1(P^{s-1})$ satisfazem:

$$\bar{\emptyset}_1{}^*h^*(w) = w_1 \quad \text{e} \quad \bar{\emptyset}_2{}^*h^*(w) = w_2$$

7. Como $h^*: H^1(P^{m-1}) \to H^1(P^{r-1} \times P^{s-1}) \approx H^1(P^{r-1}) \otimes H^1(P^{s-1})$ sabemos $h^*(w) = \lambda_1\ w_1 \otimes 1 + \lambda_2\ 1 \otimes w_2$ e queremos mostrar que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Porém $\bar{\emptyset}_1^*(w_1 \otimes 1) = w_1$ e $\bar{\emptyset}_2^*(1 \otimes w_2) = w_2$

$$\bar{\emptyset}_1^*(1 \otimes w_1) = 0 \qquad \bar{\emptyset}_2^*(w_2 \otimes 1) = 0$$

Logo segue que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

TEOREMA 3: Se existe uma função contínua não singular , ímpar-ímpar

$$f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$$

Então os coeficientes binominais $\binom{m}{i}$ são números pares $\forall\, m-r < i < s$.

DEM: Vamos como antes considerar os anéis de cohomologia módulo 2. Identificamos $H^*(P^{r-1} \times P^{s-1}) \cong H^*(P^{r-1}) \otimes H^*(P^{s-1})$. A função

$f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ induz $h: P^{r-1} \times P^{s-1} \to P^{m-1}$ da maneira canônica e induzido por h temos o homomorfismo de anéis;

$$h^*: H^*(P^{m-1}) \to H^*(P^{r-1}) \otimes H^*(P^{s-1})$$

de $w^m = 0$, $w \in H^1(P^{m-1})$ resulta:

$$0 = h^*(w^m) = (h^*w)^m \overset{\text{TEO. anterior}}{=} (w_1 \otimes 1 + 1 \otimes w_2)^m \Rightarrow \text{(binômio de Newton)}.$$

$$(*)\ 0 = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (w_1 \otimes 1)^{m-1} \otimes (1 \otimes w_2)^i = 0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} w_1^{m-i} \otimes w_2^i$$ onde os coeficientes Binomiais se consideram módulo 2.

(pois por ex. $(w_1 \otimes 1)^2 = (w_1 \otimes 1)(w_1 \otimes 1) = w_1^2 \otimes 1$ e se $(1 \otimes w_2)^2 = (1 \otimes w_2)(1 \otimes w_2) = 1 \otimes w_2^2$ então $(w_1^2 \otimes 1)(1 \otimes w_2^2) = w_1^2 \otimes w_2^2)$.

Além disso sabemos que $w_1^r = o$ e $w_2^s = 0$.
Então se

$m-i \leq r-1$ e $i \leq s-1$ temos $w_1^{m-i} \otimes w_2^i \neq 0$ e portanto

(*) se verifica se e só se $\binom{m}{i}$ é par para todo i tal que:

$-i \leq r-m-1$ e $i \leq s-1$ ou seja $m-r+1 \leq i \leq s-1$ ou seja
$i \geq m-r+1$ $\qquad$ $m-r \leq i \leq s$

OBS: Se $m<r$ o coef. binomial $\binom{m}{i}$ com i negativo se define como zero e para $i=0$ se tem $\binom{m}{o} = 1$.
Analogamente se $s>m$ para $i=m$ se tem $\binom{m}{m} = 1$. Nestes casos (*) não se verifica e por consequência não existe f.

<u>COROLÁRIO 1</u>: O fibrado $k\xi$ sobre P^n tem r-seções só se os coeficientes binomiais $\binom{k}{i}$ são números pares para todo $k-n \leq i < r$.

<u>DEM</u>: Se $k\xi$ tem r-seções então existe $h: R^{n+1} \times R^r \to R^k$(TEO) h não singular ímpar-linear.

Logo por TEO os coeficientes binomiais $\binom{m}{i}$ são números pares para todo $m-r < i < s$.

<u>COROLÁRIO 2</u>: Se k é tal que $2^{\emptyset(n)} > k > 1$ então o número máximo de seções de $k\xi$ sobre P^n tem como cota superior $2^{\emptyset(n)} - (n+1)$. Isto é se $k\xi$ tem r-seções Então $r \leq 2^{\emptyset(n)} - (n+1)$.

<u>DEM</u>: (1) Teremos o valor máximo possível para r ao considerar o valor máximo possível para k pois se $k\xi$ tem r seções então $(k+1)\xi$ tem pelo menos r seções porque $(k+1) = k\xi \oplus \xi$ e todas as r seções de $k\xi$ são seções de $(k+1)\xi$ se consideremos a identidade na 2ª coordenada.

(2) Temos o seguinte fato [Ver Hussemoler pg. 99].

$k\xi \simeq \eta \oplus$ trivial isto é se $k\xi$ é um fibrado sobre P^n,

então $k\xi$ tem uma decomposição $k\xi \simeq \eta \oplus$ trivial, onde η tem dimensão $= n$.

(3) $2^{\phi(n)}\xi$ é trivial $\rightarrow$ $2^{\phi(n)}\xi$ tem $2^{\phi(n)}$ seções LI's. Se $k=2^{\phi(n)}-1$ é o valor máximo de k, seja $N = \phi(n)$. Então é suficiente demonstrar que $(2^N-1)\xi_n$ não tem (2^N-n) seções, ou seja que o máximo de seções de $(2^N-1)\xi_n$ é $2^N-(n+1)$.

(4) Porém isto segue do TEO passado ao tomar $i=2^N-n-1$ já que i teria que ser $2^N-n-1 \leq i \leq 2^N-n$. Temos

$$\begin{pmatrix} 2^N-1 \\ 2^N-n-1 \end{pmatrix} \equiv 1 \bmod 2 \text{ pois } \binom{M}{n} \text{ é um coeficiente ímpar}$$

ou = à 1 mod 2 se a expansão diádica (na base 2) de n só tiver 1's onde a expansão diádica de M os tiver. Porém no nosso caso $M=2^N-1$ logo M só tem 1's na sua expansão diádica e qualquer que seja m<M , só terá 1's onde M os tiver. Portanto

$$\binom{M}{n} = \begin{pmatrix} 2^N-1 \\ 2^N-n-1 \end{pmatrix} \equiv 1 \bmod 2$$

e portanto $(2^N-1)\xi$ não tem 2^N-n seções.

TEOREMA 4: (DUALIDADE)

O fibrado $k\xi_n$ tem r-seções $\leftrightarrow$ o fibrado $(2^{\phi(n)}-r)\bar{\xi}_n$ tiver $(2^{\phi(n)}-k)$ seções onde $n < k < 2^{\phi(n)}$.

DEM: ($\rightarrow$) supondo que $k\xi$ tem r-seções, sabemos por | | que $k\xi \simeq r \oplus \nu$ onde ν é um fibrado de (k-r) planos sobre P^n.

Multiplicamos tensorialmente ambos os lados desta equivalência por ξ

$k\xi \otimes \xi \simeq r \otimes \xi \oplus \nu \otimes \xi$

$k1 \simeq r \otimes \xi \oplus \nu \otimes \xi$ se $\nu \otimes \xi = \bar{\nu}$ e somamos $(2^{\phi(n)}-r)\xi$ aos 2 lados obtemos

$\cong r \otimes \xi \oplus \bar{\nu}$

$(2^{\phi(n)}-r)\xi \oplus k \simeq r \otimes \xi \oplus (2^{\phi(n)}-r)\xi \oplus \bar{\nu} \simeq r\xi \oplus (2^{\phi(n)}-r)\xi \oplus \bar{\nu}$

$\cong r \cancel{\xi} \oplus 2^{\phi(n)}\xi - \cancel{r}\xi \oplus \bar{\nu} \simeq (2^{\phi(n)})\xi \oplus \bar{\nu} \simeq 2^{\phi(n)}-k+k \oplus \bar{\nu}$

Agora precisamos do seguinte fato cuja demonstração também pode ser encontrada em Hussemoller pag |100|.

<u>FATO</u>: Seja ν e η dois fibrados vetoriais sobre X tais que $\mathrm{DIM}\nu = \mathrm{DIM}\eta > \mathrm{DIM}\ X$.
Então os dois fibrados são isomorfos se e só se $\eta \oplus k \simeq \nu \oplus k$
onde k é o fibrado vetorial trivial de k-planos, para qualquer $k \geq 0$.

Logo $(2^{\phi(n)}-r)\xi \oplus k \simeq 2^{\phi(n)} - k + k \oplus \bar{\nu} \to (2^{\phi(n)}-r)\xi \simeq (2^{\phi(n)}-k) \oplus \bar{\nu}$, Se pudermos "cancelar" o fibrado trivial k. Pela observação acima basta $2^{\phi(n)}-r \geq n+1$, o que temos pelo corolário passado $\left[r \leq 2^{\phi(n)}-(n+1)\right]$ então temos $(2^{\phi(n)}-r)\xi \simeq (2^{\phi(n)}-k) \oplus \bar{\nu}$ o que demonstra que $(2^{\phi(n)}-r)\xi$ tem $2^{\phi(n)}-k$ seções e empregando todos esses argumentos ao contrá se demonstra a recíproca.

COROLÁRIO 1: Existe uma transformação ímpar-linear não-singular

$$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{r} \to \mathbb{R}^{k} \text{ onde } n < k < 2^{\phi(n)}$$

$\Leftrightarrow$ Existe uma transformação ímpar-linear não-singular.

$$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{2^{\phi(n)}-k} \to \mathbb{R}^{2^{\phi(n)}-x}$$

DEM: Existe transformação ímpar-linear não-singular
$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{r} \to \mathbb{R}^{k}$

por TEO.

$\updownarrow$ se e somente se

O fibrado $k\xi$ tem r-seções sobre P^n.

$\updownarrow$

O fibrado $(2^{\phi(n)}-r)\xi$ tem $(2^{\phi(n)}-k)$ seções onde $n < k < 2^{\phi(n)}$.

$\updownarrow$

Existe transformação linear não-singular
$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{2^{\phi(n)}-k} \to \mathbb{R}^{2^{\phi(n)}-r}$.

Algumas Equivalências com Imersões de P^n

Consideremos o fibrado $\tau^n = \tau(P^n)$ o fibrado tangente à P^n.

Se $S^n \subset R^{n+1}$ é a esfera unitária se tem

$$E\ (\tau^n) = \{(x,v),(-x,-v) \mid x \perp v,\ x \in S^n,\ v \in R^{n+1}\}$$

Podemos supor que $E(\tau^n) \subset E((n+1)\xi)$

$$\Vert$$

$$\{(x;u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),\quad x \in P^n,\ u_i \in \mathbb{R}\}$$

$$(-x,\ -u_1,\ -u_2,\ \ldots,\ -u_n) \approx (x,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,u_n)$$

Seja Θ o fibrado de retas sobre P^n cujo espaço total é

$$E(\Theta) = \{(x,tx),\ (-x,-tx) \mid x \in S^n,\ t \in \mathbb{R}\}$$

PROPOSIÇÃO 3: O fibrado Θ é equivalente ao produto $P^n \times \mathbb{R}$ como mostra a função

$$((x,tx),(-x,-tx)) \to ((x,-x)t)$$

logo $\Theta \approx 1$.

PROPOSIÇÃO 4: É fácil ver que o fibrado $\tau^n \oplus \xi$ é equivalente a $(n+1)\xi$, portanto:

$$\tau^n \oplus 1 \approx (n+1)\xi$$

Existe o teorema de Hirsch fundamental na teoria de imersão de variedades que assegura que o recíproco da proposição 1 é verdadeiro.

TEOREMA 5: Teorema de Hirsch

$M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k} \leftrightarrow$ existe um fibrado ν^k de k-planos sobre M^n tal que:

$$\tau^n \oplus \nu^k \approx n \oplus k \text{ com } k > 0.$$

A condição $k > 0$ é necessária.

Se não vejamos:

DEF.: Dizemos que a variedade M^n é paralelizável $\Leftrightarrow$ $\tau(M^n) \approx n$ fibrado produto.

Por exemplo: Se $M^3 = S^3$ $\tau(S^3) \approx 3$ e claramente $S^3 \not\subseteq R^3$

Nesta seção utilizaremos o caso especial $M^n = P^n$ para obter equivalências com a condição $P^n \subseteq R^{n+k}$.

TEOREMÃO: Consideremos os seguintes fibrados sobre P^n: o fibrado tangente τ^n, um fibrado ν^k de K-planos $(k>0)$ e o fibrado de Hopf ξ.

As seguintes proposições são equivalentes:

(1) $P^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$

(2) $\tau^n \oplus \nu^k \simeq n+k$

(3) $(\tau^n \oplus 1) \oplus \nu^k \simeq (n+1)\xi \oplus \nu^k \simeq n+k+1$

(4) $(n+1) \oplus \bar{\nu}^k \simeq (n+k+1)\xi$ onde $\bar{\nu}^k = \nu^k \otimes \xi$

(5) O fibrado $(n+k+1)\xi$ sobre P^n tem $(n+1)$-seções

(6) Existe uma transformação linear-ímpar não-singular

$$R^{n+1} \times S^n \to R^{n+k+1}$$

(7) O fibrado $(2^{\phi(n)}-n-1)\xi$ sobre P^n tem $(2^{\phi(n)}-n-k-1)$ seções $(n > 8!)$.

(8) Existe uma transformação ímpar-linear não-singular.

$$R^{n+1} \times R\, 2^{\phi(n)}-n-k-1 \to R\, 2^{\phi(n)}-n-1$$

DEM: Claramente, este teorema é um resumo das últimas observações que fizemos.

Senão vejamos: $1 \leftrightarrow 2$ TEO. de Hirsch.

$2 \leftrightarrow 3$ usa que $\tau^n \oplus 1 = (n+1)\xi$ e o fato de que podemos "cancelar" um fibrado trivial, acima da dimensão n do espaço base. (fato na dem. do TEO 4).

$3 \leftrightarrow 4$ multiplica tensorialmente a eq. 3 por ξ: $(n+1)\xi \oplus \nu^k = (n+k+1) \rightarrow$

$$(n+1)\,\xi \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\otimes} \xi \oplus \nu^k \otimes \xi = (n+k+1)$$

$$(n+1) \oplus \bar{\nu}^k = (n+k+1)\,\xi$$

e usa prop. 2

$\xi \otimes \xi \cong 1$.

$4 \leftrightarrow 5$ se $(n+1) \oplus \bar{\nu}^k \simeq (n+k+1)\xi$ o fibrado $(n+k+1)$ sobre P^n tem $n+1$ seções TEO [1. cap. 6].

$5 \leftrightarrow 6$ Existe transf. ímpar-linear não-singular $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ TEO. 1 cap. 7.

$5 \leftrightarrow 7$ TEO de dualidade e $n>8$ para

$2^{\phi(n)} - n - 1 > n$

$2^{\phi(n)} > 2n+1$.

E finalmente

$7 \leftrightarrow 8$ TEO 1 cap. 7 de novo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J.F. Adams. On the non-existence of elementos of Hopf invariant one. Ann. of Math. 72 (1960), 20-104.

[2] J.F. Adams. Vector fields on spheres. Ann. of Math. 75, (1962), 603-632.

[3] J.F. Adams, P.D. Lax and R.S. Phillips. On matrices whose real linear combinations are nonsingular and Correction to "On matrices whose...", Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 318-322 and 17 (1966), 945-947.

[4] J. Adem. The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 38 (1952), 720-726.

[5] J. Adem. Some immersions associated with bilinear maps. Bol. Soc. Mat. Mexicana 13 (1968), 95-104.

[6] J. Adem. On nonsingular bilinear maps. Parte del volumen The Steenrod algebra and its applications. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Vol. 168, 1970.

[7] J. Adem. On nonsingular bilinear maps II. Bol. Soc. Mat. Mexicana 16 (1971), 64-70.

[8] J. Adem. Construction of some normed maps. Bol. Soc. Mat. Mexicana. 20 (1975).

[9] J. Adem and S. Gitler. Non-immersion theorems for real projective spaces. Bol. Soc. Mat. Mexicana 9 (1964), 37-50.

[10] J. Adem. Algebra Linear, Campos Vectoriales e Immersiones - III$^{\underline{a}}$ Escola Latino Americana de Matemática - julho de 1976.

[11] J. Adem. On maximal sets of anticommuting matrices. Boletim de la Soceidad Matemática Mexicana - vol. 23 nº 2 1978.

[12] J. Adem. On the Hurwitz Problem over an arbitrary field. Boletim de la Sociedad Matemática Mexicana vol. 25 nº 1 1980.

[13] A.A. Albert. Quadratic forms permitting composition. Ann. of Math. 43 (1942), 161-177.

[14] M. Atiyah. K. theory. W.A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdan (1967).

[15] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 43 (1957) 933-935.

[16] R. Bott and J. Milnor. On the parallelizability of the spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 87-89.

[17] C.W. Curtis. The four and eight square problem and division algebras. In Studies in Modern Algebra. M.A.A. Studies in Mathematics, A.A. Albert, editor, Vol. 2 (1963), 100-125.

[18] L.E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. Ann. of Math. 20 (1919), 155-171.

[19] J. Dieudonné. A problem of Hurwitz and Newman, Duke Math. j. 20 (1953), 381-389.

[20] S. Eilenberg and N. Steerond. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, 1952.

[21] M. Ginsburg. Some immersions of projective space in Euclidean space. Topology 2 (1963), 69-71.

[22] S. Gitler. The projectile Stiefel manifolds II. Applications. Topilogy 7 (1968), 47-53. (Corrections) Topology 8 (1969), 93.

[23] S. Gitler. Immersions and embeddings of manifolds. Proc. Symp. in Pure Math. 22, Amer. Math. Soc. (1971), 87-96.

[24] S. Gitler and K.Y. Lam. The generalized vector field problem and bilinear maps. Bol. Soc. Mat. Mexicana 14 (1969), 65-69.

[25] V. Guillemin. Differential Topology - Prentice-Hall (1974).

[26] A. Haefliger and M.W. Hirsch. Immersions in the stable range. Ann. of Math. 75 (1962) 231-241.

[27] D. Handel. Vector bundles over real projective spaces, Doctoral dissertation. University of Chicago, 1965.

[28] M.W. Hirsh. Immersions of manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242-276.

[29] F. Hirzebruch. Topological Methods in Algebraic Geommetry. Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[30] A. Hurwitz. "Über die Komposition der quadratische Formen von beliebig vielen Variabeln. Nachr. K. Gesellsch. Gottingen M. Ph. Kl. (1898), 309-316.

[31] A. Hurwitz. Über die Komposition der quadratische Formen. Math. Ann. 88 (1923), 1-25.

[32] D. Husemoller. Fibre Bundles. McGraw-Hill Book Co., 1966.

[33] N. Jacobson. Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo, 7 (1958), Ser. 11, 55-80.

[34] I.M. James. On the immersion problem for real projective spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 231-238.

[35] I.M. James. The space of bundle maps. Topology 2 (1963), 45-49.

[36] I.M. James. The Topology of Stiefel Manifolds, London Math. Soc. Lecture Note Series 24, Cambridge University Press, 1976.

[37] I.M. James. Embeddings of Real Projective Spaces Research, Notes - 1958.

[38] M.A. Kervaire. Non-parallelizability of yhe n-sphere for $n > 7$. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958), 280-283.

[39] M.A. Kervaire and J.W. Milnor. Groups of homotopy spheres, I, Ann. of Math. 77 (1963), 504-537.

[40] K.Y. Lam. Non-singular bilinear forms and vector bundles over P^n. Doctoral dissertation, Princeton University, 1966.

[41] K.Y. Lam. On bilinear and skew-linear maps that are nonsingular. Quart. J. Math. Oxford (2), 19 (1968), 281-288.

[42] J.Y. Lam. Sectioning vector bundles over real projective spaces. Quart. J. Math. Oxford (2), 23 (1972), 97-106.

[43] K.Y. Lam. Comunicación directa del autor (1976). Trabajo no publicado.

[44] S. Lefschetz. Introduction to topology. Princeton University Press, 1949.

[45] D.E. Littlewood. Note on the anticommuting matrices of Eddington, J. London Math. Soc. 9 (1934), 41-50.

[46] C.C. MacDuffee. The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Co. 1946.

[47] R.J. Milgram. Immersing projective spaces. Ann of Math. 85 (1967), 473-482.

[48] R.J. Milgram and P. Zvengrowski. Skew linearity of r-fields on spheres, Topology 4 (1976), 325-335.

[49] J. Milnor. Lectures on characteristic classes (mimeographed), Princeton University, 1958.

[50] J. Milnor. Der Ring der Vektorraumbundel eines topologischen Raumes. (Notas escritas por P. Dombrowski) Bonn 1959.

[51] M.H.A. Newman, Note on an algebraic theorem of Eddington, J. London Math. Soc. 7 (1932), 93-99.

[52] J. Radon. Lineare Scharen orthogonalen Matrizen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1 (1922), 1-14.

[53] B.J. Sanderson. A non-immersion theorem for real projective spaces. Topology 2 (1963), 209-211.

[54] B.J. Sanderson. Immersions and embeddings of projective spaces. Proc. London Math. Soc. (3), 14 (1964), 135-153.

[55] R.D. Schafer. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process. Amer. J. Math. 76 (1954), 435-446.

[56] R.D. Schafer. An introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press, New York - London, 1966.

[57] D.B. Shapiro. Spaces of Similarities - The Hurwitz Problem. Journal of Algebra, 46, 148-170 (1977).

[58] N.E. Steerond. The topology of fiber bundles. Princeton Math. Series 14, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1951.

[59] O. Taussky. Sums of squares. Amer. Math. Monthly 77, 8 (1970), 805-830.

[60] O. Taussky. (1, 2, 4, 8) - Sums of squares and Hadamard matrices. Proc. Symp. on Combinatories. A.M.S. (1971), 229-233.

[61] F. Van der Blij. History of the octaves. Simon Stevin, 34 (1960/61), 106-125.

[62] B.L. Van der Waerden. Algebra. Springer-Verlag. Berlin - Göttingen-Heidelberg, 1959.

[63] P. Zvengrowski. Canonical vector fields on spheres. Comment. Math. Helv. 43 (1968), 341-347.

[64] P. Zvengrowski. A 3-Fold Vector Product in R^8 - 1965.

[65] P. Zvengrowski. Vector Fields and Vector Products - Chap. 4 Vector Products, Thesis, Univ. of Chicago (1965).

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da PUC/RJ, e aprovada pela Comissão Julgadora, formada pelos seguintes professores:

PROF. ALWYN DUANE RANDALL (ORIENTADOR)
DEPTº DE MATEMÁTICA - PUC/RJ

PROF. JOÃO BOSCO PITOMBEIRA
DEPTº DE MATEMÁTICA - PUC/RJ

PROF. PAULO AUGUSTO S. VELOSO
DEPTº DE INFORMÁTICA - PUC/RJ

Visto e permitido a impressão

Rio de Janeiro, 17.09.84

PROF. NELSON V. DE CASTRO FARIA
Coordenador dos Programas de Pós-Graduação
CENTRO TÉCNICO CIENTÍFICO