

# Problemas de Kolmogorov-Veloso

Valeria de Paiva  
(trabalho conjunto com Samuel G da Silva)



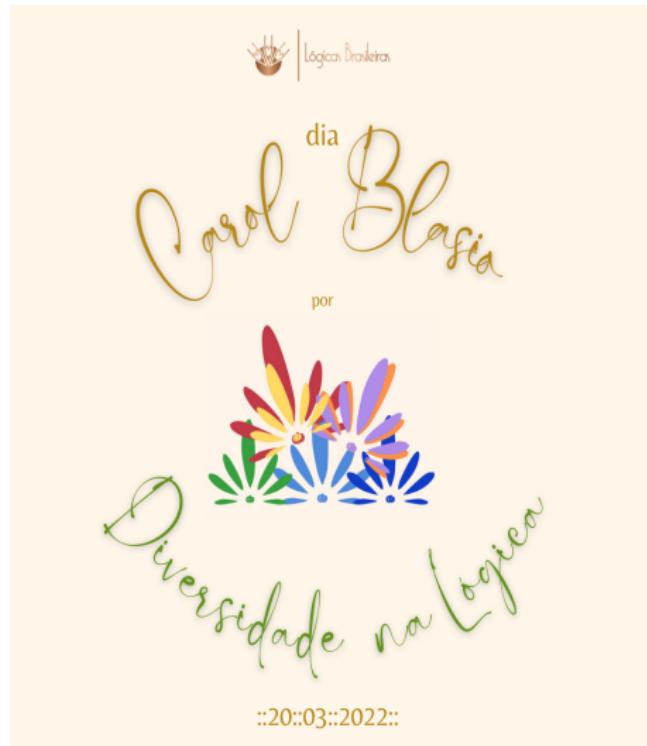
Obrigada pelo convite, Samuel!



Saudades de Carol!



# Dia Carol Blasio: Diversidade na Lógica



Mais uma "invenção" das Lógicas Brasileiras...

# Lógicas Brasileiras?

- Quem somos?



Gisele Secco, Elaine Pimentel e Valeria de Paiva

# Lógicas Brasileiras?

- Quem somos?



Gisele Secco, Elaine Pimentel e Valeria de Paiva

- Atuamos em varias frentes, veja

<https://logicasbrasileiras.wordpress.com/>

# Lógicas Brasileiras?

- Quem somos?



Gisele Secco, Elaine Pimentel e Valeria de Paiva

- Atuamos em varias frentes, veja  
<https://logicasbrasileiras.wordpress.com/>
- Por que Lógicas Brasileiras?

# Lógicas Brasileiras!

Algumas razões:

- Porque mulheres continuam sendo discriminadas em todas as áreas de CETEM.
- Porque o “teto de vidro” é transparente, mas letal: homens e mulheres não veem quanto a vida da mulheres é mais difícil da que as dos homens, em geral
- A maioria das pessoas acha que as coisas estão melhorando, que é preciso ‘dar tempo ao tempo’.
- As coisas não estão melhorando, em muitos sentidos.

# Alguns dados recentes



Thomson Reuters Foundation @TRF

...

♀ It could now take 135 years for the world to achieve total gender equality, according to [@wef](#).

This is up from 99 years in 2020, as COVID-19 and other crises set global progress back.

How did we get here? Here are 7 shocking facts you need to know on [#IWD22](#). #BreakTheBias



As coisas não estão melhorando!

(Dados do Global Gender Gap Report, World Economic Forum, mar 2021)

# Alguns dados recentes

**Thomson Reuters Foundation**  @TRF · Mar 8

 More women lost their jobs than men during the pandemic.

 The @WEF called this a "she-cession" as it reversed many gains that women had made in the workplace.

 It also means closing the global gender gap will now take an extra 36 years. [bit.ly/3tpmGNY](https://bit.ly/3tpmGNY)



**5% OF ALL WOMEN AROUND THE WORLD  
LOST THEIR JOBS DURING THE PANDEMIC,  
COMPARED TO 3.9% OF MEN**

THOMSON REUTERS FOUNDATION

Source: World Economic Forum

'It will take 145.5 years to attain gender parity in politics'. [...] We estimate that it will take another 267.6 years to close the Economic Participation and Opportunity gap.

## Alguns dados recentes: na universidade



Men attributed gender disparities to individual choice. When asked what holds women back from senior leadership positions, the most common response from men was women's desire to balance work and family. Women, in contrast, said the biggest barriers to advancement are systemic factors like stereotyping and exclusion from networks of communication and influence.

80% of responding men believe their workplace “empowers women to reach their full potential,” while just 36% of women agree. Only 35% of women believe their organization’s criteria for promotion is the same for both genders, while 84% of men say it is equitable.

Dados da Harvard Business School, 2020

# Alguns dados recentes: mais ação, menos enrolação

**Gender Pay Gap Bot**  
@PayGapApp

Employers, if you tweet about International Women's Day, I'll retweet your gender pay gap \*\* #IWD2022 🌟 #BreakTheBias

gender-pay-gap.service.gov.uk Joined March 2021

38 Following 43.5K Followers

Followed by On This Day She, joao, and 8 others you follow

No Reino Unido toda empresa com mais de 250 empregados tem que reportar as diferenças salariais!

# Alguns dados recentes: A patriarquia mata



Em 2020:

- o Brasil registrou um caso de feminicídio a cada 6 horas e meia.
- o Brasil apresentou um caso de estupro a cada oito minutos.
- A maioria das vítimas é do sexo feminino (86,9%) e tem no máximo 13 anos (60,6%).

Dados do Fórum Brasileiro de Segurança Pública (FBSP)

# Dia Carol Blasio: por Diversidade na Lógica



Celebrando a vida, o trabalho e a resistência das mulheres.  
Somos lógicas, filósofas, matemáticas, engenheiras, profissionais,  
professoras, divulgadoras, amigas, colegas, mães, irmãs e filhas.  
Apesar de toda dificuldade, a gente vai em frente.  
Nossas comunidades precisam da gente.

# Encontrando as melhores abstrações

- Muita gente na minha área de lógica acredita que esse é o nosso maior problema: encontrar as abstrações corretas, as mais apropriadas para o problema em discussão

# Encontrando as melhores abstrações

- Muita gente na minha área de lógica acredita que esse é o nosso maior problema: encontrar as abstrações corretas, as mais apropriadas para o problema em discussão
- Mas isso depende muito do tipo de abstrações das quais estamos falando, não?
- Abstrações do que? Abstrações para que? Abstrações aonde? e principalmente abstrações corretas para que finalidade, qual o objectivo?

# Encontrando as melhores abstrações

- Muita gente na minha área de lógica acredita que esse é o nosso maior problema: encontrar as abstrações corretas, as mais apropriadas para o problema em discussão
- Mas isso depende muito do tipo de abstrações das quais estamos falando, não?
- Abstrações do que? Abstrações para que? Abstrações aonde? e principalmente abstrações corretas para que finalidade, qual o objectivo?
- Mas se a pergunta for “como encontrar abstrações apropriadas para a **Matemática**” ?

# Encontrando as melhores abstrações

- Muita gente na minha área de lógica acredita que esse é o nosso maior problema: encontrar as abstrações corretas, as mais apropriadas para o problema em discussão
- Mas isso depende muito do tipo de abstrações das quais estamos falando, não?
- Abstrações do que? Abstrações para que? Abstrações aonde? e principalmente abstrações corretas para que finalidade, qual o objectivo?
- Mas se a pergunta for “como encontrar abstrações apropriadas para a **Matemática**” ?
- Aí a resposta fica mais fácil: Teoria de Categorias, a Correspondência Curry-Howard e lógica categórica.

## Abstrações nessa fala



- Andrei Kolmogorov. On the interpretation of intuitionistic logic (1932). Selected Works of A.N. Kolmogorov, Volume 1, Mathematics and Mechanics, ed. V. M. Tikhomirov, English translation Volosov, 1991.
- Por causa desse artigo falamos de BHK, o K vem dessa interpretação diferente, que fala de problemas em vez de fórmulas lógicas.

## a ficha do Blass (1995)



*A category used by de Paiva to model linear logic also occurs in Vojtas's analysis of cardinal characteristics of the continuum. Its morphisms have been used in describing reductions between search problems in complexity theory.*

Uma categoria usada por de Paiva para modelar Lógica Linear também ocorre na análise das características cardinais do contínuo de Vojtas. Seus morfismos são usados para descrever reduções entre problemas de busca na teoria de complexidade.

(Questions and answers—a category arising in linear logic, complexity theory, and set theory. Advances in linear logic)

## a ficha do Blass (1995)

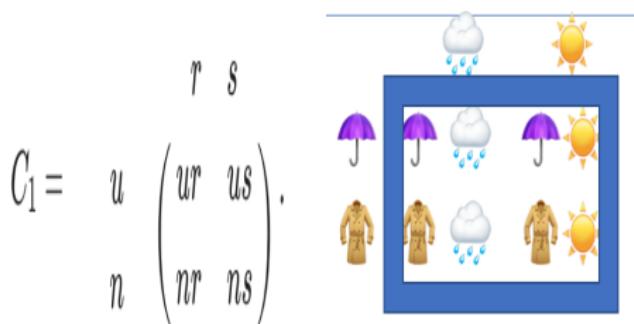
- Blass chamou essa categoria de  $\mathcal{PV}$

## a ficha do Blass (1995)

- Blass chamou essa categoria de  $\mathcal{PV}$
- os objects de  $\mathcal{PV}$  são relações binaárias entre conjuntos quaisquer; são triplas  $\mathbf{A} = (A^-, A^+, A)$ , onde  $A^-$  e  $A^+$  são conjuntos e  $A \subseteq A^- \times A^+$  é uma relação entre  $A^-$  e  $A^+$ .

## a ficha do Blass (1995)

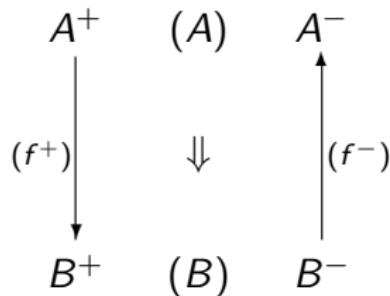
- Blass chamou essa categoria de  $\mathcal{PV}$
- os objects de  $\mathcal{PV}$  são relações binaárias entre conjuntos quaisquer; são triplas  $\mathbf{A} = (A^-, A^+, A)$ , onde  $A^-$  e  $A^+$  são conjuntos e  $A \subseteq A^- \times A^+$  é uma relação entre  $A^-$  e  $A^+$ .
- Vocês podem preferir um exemplo com desenhinhos:



mas eles ficam meio complicados rapidamente

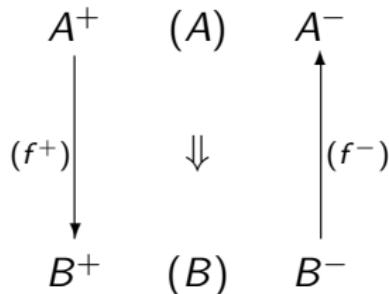
## a ficha do Blass (1995)

- Um morfismo de  $\mathbf{A}$  para  $\mathbf{B} = (B^-, B^+, B)$  é um par de funções  $f^- : B^- \rightarrow A^-$  e  $f^+ : A^+ \rightarrow B^+$  tais que, para todo  $b \in B^-$  e todo  $a \in A^+$ ,  $A(f^-(b), a) \Rightarrow B(b, f^+(a))$



## a ficha do Blass (1995)

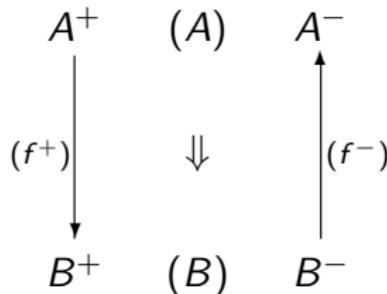
- Um morfismo de  $\mathbf{A}$  para  $\mathbf{B} = (B^-, B^+, B)$  é um par de funções  $f^- : B^- \rightarrow A^-$  e  $f^+ : A^+ \rightarrow B^+$  tais que, para todo  $b \in B^-$  e todo  $a \in A^+$ ,  $A(f^-(b), a) \Rightarrow B(b, f^+(a))$



- Pense num objecto  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{PV}$  como se fosse um **problema**. Elementos de  $A^-$  são instâncias do problema, questões específicas do mesmo tipo; elementos de  $A^+$  são soluções possíveis; e a relação  $A$  representa a corretude (ou não) da resposta:  $A(x, y)$  significa que  $y$  é uma resposta correta para a pergunta  $x$

## a ficha do Blass (1995)

- Um morfismo de  $\mathbf{A}$  para  $\mathbf{B} = (B^-, B^+, B)$  é um par de funções  $f^- : B^- \rightarrow A^-$  e  $f^+ : A^+ \rightarrow B^+$  tais que, para todo  $b \in B^-$  e todo  $a \in A^+$ ,  $A(f^-(b), a) \Rightarrow B(b, f^+(a))$



- Pense num objecto  $\mathbf{A}$  de  $\mathcal{PV}$  como se fosse um **problema**. Elementos de  $A^-$  são instâncias do problema, questões específicas do mesmo tipo; elementos de  $A^+$  são soluções possíveis; e a relação  $A$  representa a corretude (ou não) da resposta:  $A(x, y)$  significa que  $y$  é uma resposta correta para a pergunta  $x$
- Na construção Dialectica, usamos  $A = (U, X, \alpha)$  pois não é claro quando algum conjunto é de perguntas ou respostas

# Alguns objectos da construção Dialectica

1. O objecto  $(\mathbb{N}, \mathbb{N}, =)$  onde  $n$  é relacionado a  $m$  sse  $n = m$ .
2. O objecto  $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}, \alpha)$  onde  $f$  é  $\alpha$ -relacionado a  $n$  sse  $f(n) = n$ .
3. O objecto  $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \leq)$  onde  $r_1$  e  $r_2$  são relacionados sse  $r_1 \leq r_2$
4. Os objectos  $(2, 2, =)$  e  $(2, 2, \neq)$  com a igualdade e desigualdade usuais.

Uma coleção de resultados sobre Teoria de Conjuntos usando ideias da Dialectica, numa variante descrita por Samuel.

Samuel G. da Silva and Valeria de Paiva. "Dialectica categories, cardinalities of the continuum and combinatorics of ideals. Logic Journal of the IGPL, 25(4):585–603, 06 2017.

# Uma Teoria de Problemas



- O que não sabemos? o que é a incógnita?
- Quais são os dados?
- Qual é a condição que dados precisam satisfazer?

Veloso mencionou Kolmogorov como inspiração para a sua *Teoria de Problemas*, que apareceu em:

Aspectos de uma teoria geral de problemas, Paulo Veloso.  
Cadernos de Historia e Filosofia da Ciência, 7:21–42, 1984.

# Uma Teoria de Problemas



Um **problema de Kolmogorov** é uma tripla  $P = (I, S, \sigma)$ , onde  $I$  e  $S$  são conjuntos e  $\sigma \subseteq I \times S$  é uma relação. Dizemos que:

- $I$  é o conjunto de instâncias do problema  $P$ ;
- $S$  é o conjunto de soluções possíveis de instâncias do problema em  $I$ ; e
- $\sigma$  é a condição do problema, de tal forma que  $z\sigma s$  se “ $s$   $\sigma$ -resolve o problema  $z$ ”.

Os problemas de Kolmogorov (1932) nos dão uma semântica alternativa e intuitiva para Lógica Proposicional Intuitionista, que é parte da interpretação BHK.

(Kolmogorov: We never assume that a problem is solvable!)

# Problemas de Kolmogorov

Os problemas de Kolmogorov são espacos ou objetos da construção Dialectica, na verdade objetos em  $\text{Dial}_2(\text{Sets})^{\text{op}}$ .

e o que acontece com os **morfismos**?

Um morfismo do objeto  $P' = (I', S', \sigma')$  para um objeto  $P = (I, S, \sigma)$  é um par de funções  $(f, F)$ , onde  $f : I \rightarrow I'$  e  $F : S' \rightarrow S$  são tais que

$$(\forall z \in I)(\forall t \in S')[f(z)\sigma't \Rightarrow z\sigma F(t)]$$

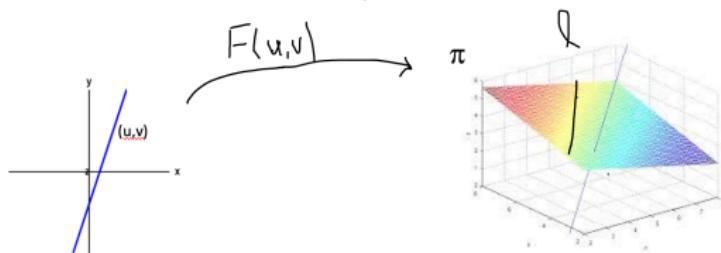
Pensando em  $P$  e  $P'$  como problemas de Kolmogorov, a existência de um morfismo dialectico de  $P'$  para  $P$  garante a **redução** do problema  $P$  ao problema  $P'$ .

Esse é pra mim o ponto importante do nosso artigo:

“Kolmogorov-Veloso Problems and Dialectica Categories” (de fev 2021!) A teoria de categorias não existia em 1932, quando Kolmogorov descobriu/inventou sua teoria de problemas.

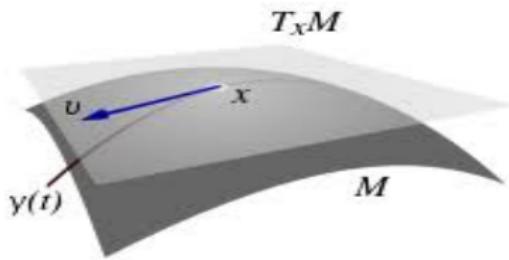
# K-Exemplo 1: Geometria Analítica

- Seja  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \pi$  um sistema de coordenadas para o plano  $\pi$ .  
Seja  $P = F(u, v)$  um ponto com coordenadas  $(u, v)$ .
- uma reta  $l$  de  $\pi$  é' uma equação da forma  $ax + by = c$ , ( $a, b$  reais,  $a \neq 0$  or  $b \neq 0$ ) e  $c$  em  $\{0, 1\}$ .  $E$  é a família de todas as equações dessa forma.  $\mathcal{L}$  denota a família de todas as retas do plano  $\pi$ .
- Chame de  $eq(l)$  a equação canônica que representa a reta  $l$ .
- Problema 1: Decidir “se um ponto dado  $(u, v)$  se encontra numa dada reta  $l$ ” é o problema  $(\mathcal{L}, \pi, \exists)$ .
- Problema 2: Decidir “se um par de números reais  $(u, v)$  satisfaz uma equação dada” é o problema  $(E, \mathbb{R}^2, \chi)$ , onde uma equação  $ax + by = c$  é  $\chi$ -relacionada ao par  $(u, v)$  de números reais se  $au + bv = c$ .



## K-Exemplo 2: Planos tangentes

- $M$  é variedade diferencial bi-dimensional  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ .  $x$  é um ponto em  $M$ , existe um plano tangente  $T_x(M)$  centrado em  $x$ .
- A reta  $l$  através de  $x$  é a *reta normal* do plano  $\pi$  (em  $x$ ) se  $l$  é perpendicular a todas as retas de  $\pi$  que passam por  $x$ .
- $\mathcal{L}$  = família de todas as retas de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{P}$  = família de todos os planos de  $\mathbb{R}^3$



- Problema 1: Encontrar as retas normais através de cada ponto da superfície  $= (M, \mathcal{L}, \sigma)$ , onde  $x \sigma l$  significa “ $l$  é a reta normal de  $M$  através de  $x$ ” para cada ponto  $x \in M$  e toda reta  $l \in \mathcal{L}$ ,
- Problema 2: Encontrar planos ortogonais  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \xi)$ , onde  $\pi \xi \rho$  significa “ $\pi$  e  $\rho$  são planos ortogonais”

## K-Exemplo 2: Planos tangentes

Reducir o problema 1 ao problema 2:

- um morfismo de  $(M, \mathcal{L}, \sigma)$  para  $(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \xi)$  é dado pelo par de funções  $(f, F)$ , onde  $f : M \rightarrow \mathcal{P}$  é dada por  $f(x) = T_x(M)$  para todo  $x \in M$ .
- $F : M \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{L}$  é  $F(x, \rho) = \varphi(T_x(M), \rho, x)$ , onde  $\varphi : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{L}$  é dada por  $\varphi(\pi, \rho, x) =$  a reta / contida no plano  $t(x, \rho)$  (onde  $t(x, \rho)$  é  $\rho$  mesmo se  $x \in \rho$  ou é o único plano paralelo a  $\rho$  que passa por  $x$ ) que é perpendicular a reta interseção de  $\pi$  e  $t(x, \rho)$  através  $x$ , se  $\pi$  e  $\rho$  são planos ortogonais;  
 $F(x, \rho)$  é a reta normal de  $T_x(M)$  através  $x$  sempre que  $\rho$  seja um plano ortogonal a  $f(x) = T_x(M)$ .
- o morfismo  $(f, F)$  precisa ser capaz de se referir a  $x$ , então uma redução nesse caso é um morfismo do primeiro tipo de Dialectica categoria, em vez do segundo tipo que introduzimos.

# Conclusões

- A conexão categórica entre modelos dialecticos, problemas de Kolmogorov, problemas do Veloso e problemas do Blass mostra que o uso de categorias nos permite ligar áreas extremamente diferentes de matematica usando métods muito simples.
- Os teoremas do paper são sobre o Axioma da Escolha (AC): como versões diferentes de escolhas vão nos levar a classes diferentes de problemas. Enquanto os problemas de Kolmogorov e Blass não requerem AC, problemas de Veloso precisam do axioma da escolha AC.
- Para mim, a surpresa de começando com modelos de Lógica Linear, ir parar numa noção abstrata de problema que é aplicável a Teoria dos Números, Análise, Geometria, Programação Functional, modelagem de Multi-agentes em IA, e muitas outras coisas.

# Matematica e suas surpresas



*It often happens that there are similarities between the solutions to problems. Sometimes, these similarities point to more general phenomena that simultaneously explain several different pieces of mathematics. These more general phenomena can be very difficult to discover, but when they are discovered, they have a very important simplifying and organizing role, and can lead to the solutions of further problems, or raise new and fascinating questions. T. Gowers*

Freqüentemente, há semelhanças entre as soluções de problemas. Às vezes, essas semelhanças apontam para fenômenos mais gerais que explicam simultaneamente várias peartes diferentes da matemática. Esses fenômenos mais gerais podem ser muito difíceis de descobrir, mas quando são descobertos, têm um papel muito importante na simplificação e organização de conteúdos e podem levar à solução de outros problemas ou levantar questões novas e fascinantes.

Obrigada!