Reducción de ruido en imágenes: Difusión anisotrópica.

Victor Daniel Alvarado Estrella

27 de noviembre de 2019

1. Introducción.

El *ruido digital* es la variación aleatoria de brillo o color que se puede presentar en una imagen, reduciendo su calidad. Este puede deberse a diversos factores externos y puede manifestarse de distintas formas. Algunos tipos de ruidos son los siguientes:

- Ruido gaussiano.
- Ruido de sal y pimienta.
- Ruido de disparo.

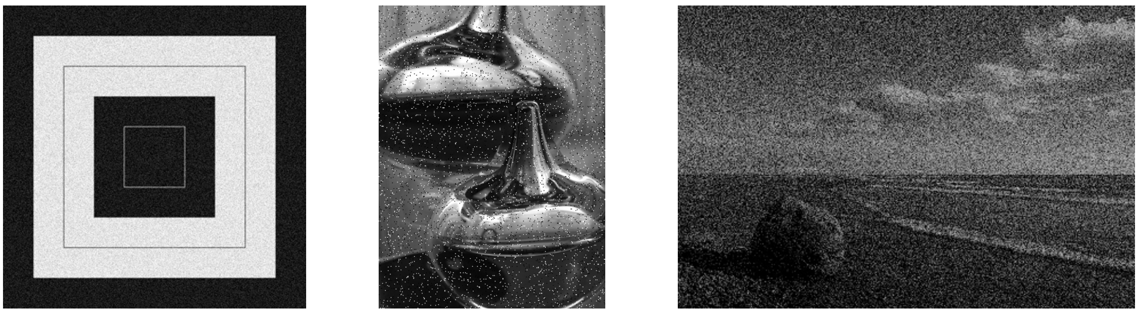

Figura 1: De izquierda a derecha: Ruido gaussiano, ruido de sal y pimienta, ruido de disparo.

Existe una gran variedad de algoritmos cuyo objetivo es reducir el ruido en una imagen. Algunos de estos métodos funcionan mejor que otros ante ciertos tipos de ruido. Entre estos algoritmos se encuentran:

- Desenfoque gaussiano.
- Filtro de mediana.
- Difusión anisotrópica.

El objetivo de este proyecto es presentar y explicar cómo funciona este último método, la difusión anisotrópica.

2. La ecuación de difusión y la isotropía.

La *difusión* es un proceso físico en el cual un grupo de partículas se mueve desde una región con alta concentración hacia una región con menor concentración.

Un ejemplo de difusión se da al verter colorante en agua, el cual rápidamente se diluye por todo el líquido hasta crear una mezcla casi homogénea. Otro ejemplo es el calor, el cual experimenta un proceso de difusión al esparcirse desde las zonas más calientes hacia las zonas más frías.

Figura 2: Difusión en un líquido.

La *ecuación de difusión* es un modelo que busca predecir el comportamiento de este fenómeno físico. La ecuación generalmente se escribe de la siguiente manera

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left[D(\phi,\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r},t) \right],$$

donde $\phi(\mathbf{r},t)$ es la densidad del material que se está difundiendo en el punto $\mathbf{r}$ y en el tiempo t, y $D(\phi,\mathbf{r})$ es la constante de difusión colectiva para la densidad ϕ en el punto $\mathbf{r}$.

Si D es constante, la ecuación de difusión se reduce a la ecuación de calor

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D \nabla^2 \phi(\mathbf{r},t).$$

Por otro lado, la *isotropía* es la propiedad de ser uniforme en todas las direcciones. En este sentido, la *anisotropía* es la propiedad de depender de la dirección.

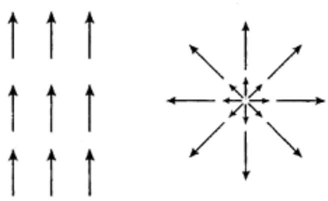

Figura 3: De izquierda a derecha: Anisotropía e isotropía.

3. Difusión anisotrópica.

La *difusión anisotrópica* es una técnica cuyo objetivo es reducir el ruido en una imagen sin remover partes significantes como bordes, líneas, entre otros detalles que son importantes para la interpretación de la imagen. Este método se basa en la ecuación de difusión y fue propuesto por Pietro Perona y Jitendra Malik en 1987.

Podemos ver una imagen como una función que a cada punto (pixel) en el plano le asocia uno o más valores correspondientes al brillo y color. Por ejemplo, si es una imagen en escala de grises, la función toma un solo valor que representa la intensidad de luz. Si es una imagen a color con formato RGB (**R**ed, **B**lue, **G**reen), la función toma tres valores, cada uno representando la intensidad de un color. Por simplicidad, consideremos solamente imágenes en escala de grises. Las imágenes a color pueden tratarse por componente de manera independiente.

Al tratar de reducir el ruido en una imagen, la intensidad de luz sufre un proceso de difusión. El brillo se esparce desde las regiones con mayor intensidad hacia las regiones con menor intensidad. Además, este proceso es anisotrópico, pues depende de la configuración de la imagen y de la dirección en la que se encuentren estas regiones.

Formalmente, sea $I(\cdot, t) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una familia de imágenes en escala de grises. La difusión anisotrópica se define como

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (c(x, y, t)\nabla I),$$

donde $c(x, y, t)$ es el coeficiente de difusión. Este coeficiente controla el radio de difusión y usualmente se escoge como función del gradiente de la imagen para preservar bordes. Perona y Malik propusieron dos funciones para los coeficientes de difusión:

$$c(\|\nabla I\|) = e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}$$

y

$$c(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}$$

donde K es una constante que controla la sensibilidad a los bordes. Observemos que ambos coeficientes asignan valores pequeños entre mayor sea $\|\nabla I\|$. De esta manera, el proceso de difusión es más lento en los bordes, preservándose así por más tiempo.

4. Implementación.

Buscamos resolver numéricamente la ecuación diferencial con la imagen a la cual queremos reducir el ruido como condición inicial. Para ello, necesitamos definir una partición del dominio Ω y del intervalo de tiempo de interés.

Afortunadamente, observemos que la misma imagen nos da una discretización parcial de Ω. Además, la difusión anisotrópica no depende explícitamente de la ubicación de cada pixel. Por lo cual, solo tenemos que definir la distancia entre pixeles adyacentes. Así pues, sean Δx y Δy la distancia entre pixeles consecutivos que se encuentran sobre un mismo eje, horizontal y vertical, respectivamente.

De igual manera, sea Δt la diferencia entre dos instantes de tiempo consecutivos.

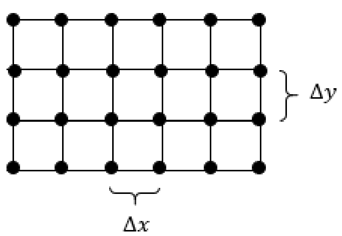

Figura 4: Discretización.

Denotemos por $I_{i,j}^{(k)}$ al valor de la imagen en difusión en la posición (x_j, y_i) y en el tiempo t_k, donde (x_j, y_i, t_k) corresponde a un elemento de la partición. Una vez definida la partición, podemos resolver la ecuación diferencial.

Podemos aproximar la derivada $\frac{\partial I}{\partial t}$ hasta orden $O(\Delta t)$ por medio de la expresión

$$\frac{I^{(k+1)} - I^{(k)}}{\Delta t}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación obtenemos que

$$\frac{I^{(k+1)} - I^{(k)}}{\Delta t} = \nabla \cdot \left(c^{(k)} \nabla I^{(k)} \right),$$

de donde

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} + \Delta t \left[\nabla \cdot \left(c^{(k)} \nabla I^{(k)} \right) \right].$$

Esto nos define un método iterativo en el que cada paso genera una nueva imagen a partir de la anterior.

Podemos aproximar el gradiente

$$\nabla I^{(k)} = \left(\frac{\partial I^{(k)}}{\partial x}, \frac{\partial I^{(k)}}{\partial y} \right)$$

hasta orden $O(\Delta x^2)$ y $O(\Delta y^2)$ por medio de la expresión

$$\left(\frac{I_{i,j+1}^{(k)} - I_{i,j-1}^{(k)}}{2\Delta x}, \frac{I_{i+1,j}^{(k)} - I_{i-1,j}^{(k)}}{2\Delta y} \right).$$

Definamos $\left(X_{i,j}^{(k)}, Y_{i,j}^{(k)} \right)$ como el vector anterior. Posteriormente calculamos el coeficiente de difusión que vayamos a utilizar, el cual recordemos puede ser

$$c_{i,j}^{(k)} = \exp \left[-\frac{\left(X_{i,j}^{(k)} \right)^2 + \left(Y_{i,j}^{(k)} \right)^2}{K^2} \right]$$

o

$$c_{i,j}^{(k)} = \frac{1}{1 + \frac{\left(X_{i,j}^{(k)} \right)^2 + \left(Y_{i,j}^{(k)} \right)^2}{K^2}}.$$

Finalmente, podemos aproximar la divergencia

$$\nabla \cdot \left(c^{(k)} \nabla I^{(k)} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^{(k)} \frac{\partial I^{(k)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c^{(k)} \frac{\partial I^{(k)}}{\partial y} \right)$$

hasta orden $O(\Delta x^2)$ y $O(\Delta y^2)$ por medio de la expresión

$$\frac{c_{i,j+1}^{(k)} X_{i,j+1}^{(k)} - c_{i,j-1}^{(k)} X_{i,j-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \frac{c_{i+1,j}^{(k)} Y_{i+1,j}^{(k)} - c_{i-1,j}^{(k)} Y_{i-1,j}^{(k)}}{2\Delta y}.$$

Por lo tanto, la solución numérica a la ecuación está dada por

$$I_{i,j}^{(k+1)} = I_{i,j}^{(k)} + \Delta t \left[\frac{c_{i,j+1}^{(k)} X_{i,j+1}^{(k)} - c_{i,j-1}^{(k)} X_{i,j-1}^{(k)}}{2\Delta x} + \frac{c_{i+1,j}^{(k)} Y_{i+1,j}^{(k)} - c_{i-1,j}^{(k)} Y_{i-1,j}^{(k)}}{2\Delta y} \right].$$

5. Resultados.

En el archivo `AnisoDiff.cpp` se puede encontrar una implementación en C++ del algoritmo de difusión anisotrópica. Una vez que el programa ha sido compilado, puede ejecutarse de la siguiente manera

```
./AnisoDiff Entrada Salida n coef K dx dy dt
```

donde

- `Entrada` es el nombre de la imagen a la cual queremos reducir el ruido, por ejemplo, `Imagen.jpg`.
- `Salida` será el nombre de la imagen que resulta de aplicar difusión anisotrópica.
- `n` es el número de iteraciones que realizará el programa.
- `coef` indica el coeficiente de difusión que se utilizará

$$c(\|\nabla I\|) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}, & \texttt{coef = 1}, \\ \frac{1}{1+\left(\frac{\|\nabla I\|}{K}\right)^2}, & \texttt{coef = 0}. \end{cases}$$

- `K` es el valor de la constante que aparece en el coeficiente de difusión.
- `dx` es la distancia horizontal entre pixeles adyacentes.
- `dy` es la distancia vertical entre pixeles adyacentes.
- `dt` es el tamaño del paso entre una iteración y otra.

Los datos que se le proporciona al programa dependen en gran medida de la imagen. Un conjunto de valores puede funcionar en una imagen mientras que en otra no. La manera de determinar estos valores es principalmente por experimentación.

Se ejecutó el programa con 5 imágenes distintas. Los resultados junto con los valores utilizados se muestran a continuación.

Ejemplo 1.

```
./AnisoDiff Input1.jpg Output1.jpg 2 1 50 0.7 0.7 0.25
```

Figura 5: Antes (izquierda) y después (derecha)

Ejemplo 2.

```
./AnisoDiff Input2.jpg Output2.jpg 3 1 50 0.7 0.7 0.25
```

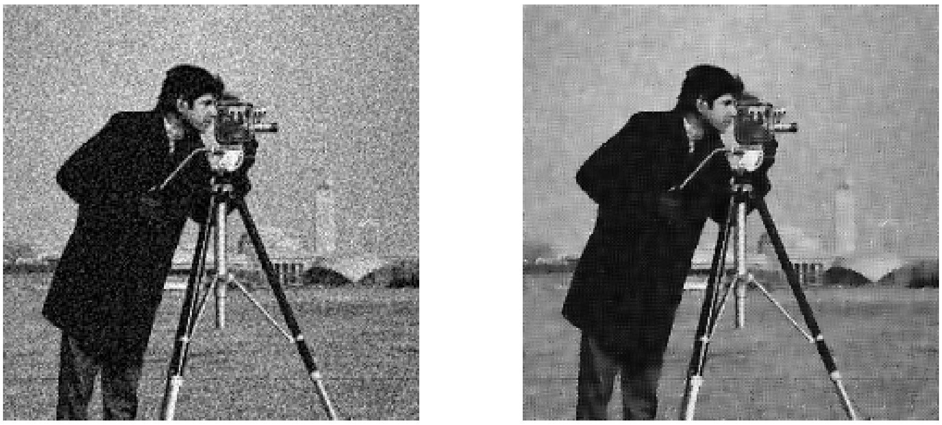

Figura 6: Antes (izquierda) y después (derecha)

Ejemplo 3.

```
./AnisoDiff Input3.jpg Output3.jpg 2 0 50 0.7 0.7 0.25
```

Figura 7: Antes (izquierda) y después (derecha)

Ejemplo 4.

```
./AnisoDiff Input4.jpg Output4.jpg 2 1 50 0.7 0.7 0.25
```

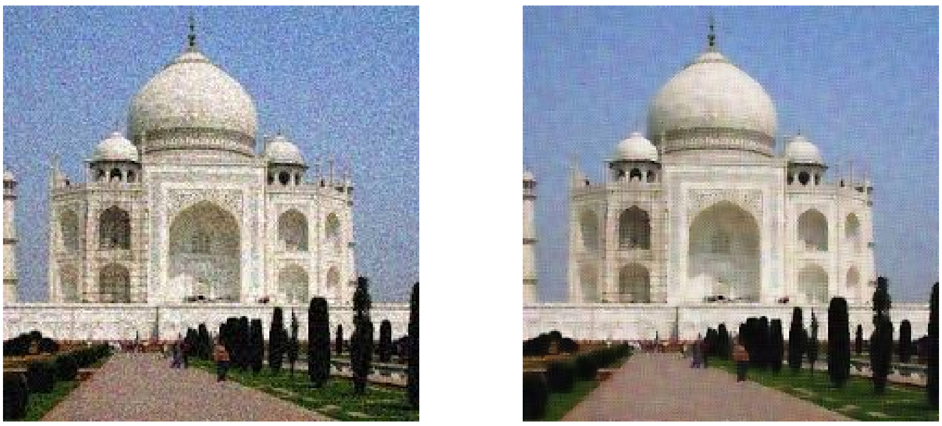

Figura 8: Antes (izquierda) y después (derecha)

Ejemplo 5.
```
./AnisoDiff Input5.jpg Output5.jpg 3 0 50 0.7 0.7 0.25
```

Figura 9: Antes (izquierda) y después (derecha)

6. Conclusión

De los ejemplos de prueba anteriores, podemos reconocer que la difusión anisotrópica es un buen método para reducir el ruido en una imagen conservando algunos detalles importantes como los bordes. Además, desde el punto de vista conceptual, es fácil de comprender como funciona el algoritmo.

Referencias

[1] Wikipedia, "Image noise." http://en.wikipedia.org/wiki/Image_noise, Septiembre 2019.

[2] Wikipedia, "Diffusion." http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion, Septiembre 2019.

[3] Wikipedia, "Diffusion equation." http://en.wikipedia.org/wiki/Diffusion_equation, Septiembre 2019.

[4] Wikipedia, "Isotropy." http://en.wikipedia.org/wiki/Isotropy, Septiembre 2019.

[5] Wikipedia, "Anisotropic diffusion." http://en.wikipedia.org/wiki/Anisotropic_diffusion, Septiembre 2019.