1. Inleiding

We gebruiken de notaties en conventies uit de cursus. Dus we werken met het grondlichaam $\mathbb{C}$. Vectorruimten zijn $\mathbb{C}$-vectorruimten, algebras zijn $\mathbb{C}$-algebras etc. . . .

Indien A een algebra is dan hebben we een *representatie* van A gedefinieerd als een links A-moduul dat een eindig dimensionale $\mathbb{C}$-vectorruimte is.

Een *irreduciebele* representatie van A is een representatie die geen niet triviale deelrepresentaties bevat (de "triviale" deelrepresentaties zijn nul en zichzelf). Zulke representaties worden soms ook "simpel" genoemd.

De Jordan-Hölder stelling voor groepen heeft een analogon voor representaties (met hetzelfde bewijs).

Stelling 1.1. *Zij A een algebra en W een representatie van A. Dan bestaat er een reeks van deelrepresentaties van W*

$$0 = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n = W$$

zodat $S_i = W_i/W_{i-1}$ irreduciebel is voor alle i. De $(S_i)_i$ zijn uniek bepaald door W op permutatie en isomorfisme na.

Dus de irreduciebele representaties zijn in zekere zin de bouwstenen voor alle representaties. Net zoals het in groepentheorie belangrijk is om de simpele groepen te kennen, is het voor een algebra belangrijk om zijn irreduciebele representaties te kennen.

2. De irreduciebele representaties van $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, q geen eenheidswortel

Zij $U = U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. U is gedefinieerd door generatoren E, F, K en relaties

$$KEK^{-1} = q^2E \tag{2.1}$$

$$KFK^{-1} = q^{-2}F \tag{2.2}$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.3}$$

tezamen met de relaties die uitdrukken dat K^{-1} de inverse is van K.

Hieronder gaan we tijdelijk aannemen dat q geen eenheidwortel is. M.a.w. er bestaat geen $d > 0$ zodat $q^d = 1$.

Zij V een irreducieble representatie van U. Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ definieer

$$V_\lambda = \ker(V \xrightarrow{K-\lambda} V)$$

Met andere woorden: V_λ is de verzameling eigenvectoren met eigenwaarde λ voor de actie van K op V. Omdat K minstens 1 eigenvector moet hebben bestaat er dus een λ zodat $V_\lambda \neq 0$. Merk op dat in dat geval $\lambda \neq 0$ aangezien λ een eigenwaarde is van een omkeerbare lineaire transformatie.

Lemma 2.1. *Zij $v \in V_\lambda$. Dan geldt*

$$Ev \in V_{q^2\lambda}$$
$$Fv \in V_{q^{-2}\lambda}$$

Bewijs. Er geldt

$$(K - q^2\lambda)E = KE - q^2\lambda E = q^2 EK - q^2\lambda = q^2 E(K - \lambda)$$

Als we dit toepassen op v bekomen we de bewering voor Ev. De bewering voor Fv is analoog. □

Dus indien $0 \neq v \in V_\lambda$ dan zijn de van nul verschillende $(E^n v)_n$ eigenvectoren van K met eigenwaarden $q^{2n}\lambda$. Omdat $\lambda \neq 0$ en q geen eenheidswortel is zijn deze eigenwaarden alle verschillend. Aangezien eigenvectoren die behoren bij verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn vinden we dat de van nul verschillende $(E^n v)_n$ lineair onafhankelijk moeten zijn. Omdat V eindigdimensionaal is betekent dit dat slechts eindig veel $(E^n v)_n$ van nul kunnen verschillen. Met andere woorden er bestaat een n zodat

$$\begin{aligned} E^{n+1}v &= 0 \\ E^n v &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Stel

$$\begin{aligned} w &= E^n v \\ \mu &= q^{2n}\lambda \end{aligned}$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} Kw &= \mu w \\ Ew &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Er volgt nu

$$F^m w \in V_{q^{-2m}\mu}$$

Met dezelfde redenering vinden we dat er een m bestaat zodat

$$\begin{aligned} F^{m+1}w &= 0 \\ F^m w &\neq 0 \end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Er geldt voor* $u \geq 1$

$$EF^u w \subset \mathbb{C}F^{u-1}w$$

Bewijs. We gebruiken inductie op u. Onderstel $u \geq 1$. Gebruikmakende van (2.3) hebben we

$$\begin{aligned} EF^u w &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{u-1}w + FEF^{u-1}w \\ &= \frac{q^{-2(u-1)}\mu - q^{2(u-1)}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} F^{u-1}w + FEF^{u-1}w \end{aligned}$$

Omdat $Ew = 0$ zien we dat het lemma waar is voor $u = 1$. Voor $u > 1$ gebruiken we dat per inductie $EF^{u-1}w \subset \mathbb{C}F^{u-2}w$ en dus $FEF^{u-1}w \subset \mathbb{C}F^{u-1}w$. □

Beschouw nu

$$0 \neq W = \bigoplus_{u=0}^{m} \mathbb{C}F^u w \subset V$$

W is stabiel onder de actie van zowel K (de $F^u w$ zijn eigenvectoren voor K), E (zie het vorige lemma) en F (evident). Aangezien V irreducibel ondersteld was vinden we $W = V$.

Definieer nu voor $u = 0, \dots, m$

$$w_u = F^u w$$

Vanwege het vorige lemma bestaat er een $\sigma_u \in \mathbb{C}$ voor $u = 1, \dots, m$ zodat

$$E w_u = \sigma_u w_{u-1}$$

Indien we nogmaals (2.3) gebruiken vinden we

$$(EF - FE) w_u = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} w_u \tag{2.6}$$

wat voor $u \neq 0, m$ geeft

$$\sigma_{u+1} - \sigma_u = \frac{q^{-2u}\mu - q^{2u}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{2.7}$$

Indien we (2.6) uitwerken voor $u = 0$ en $u = m$ vinden we gewoon (2.7) terug, op voorwaarde dat we opleggen $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{m+1} = 0$. Omdat σ_0 en σ_{m+1} nog geen waarde gekregen hebben kunnen we dit vrij stellen.

Uit (2.7) tezamen met $\sigma_0 = 0$ halen we voor $u = 1, \dots, m+1$

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \frac{\mu - \mu^{-1}}{q - q^{-1}} + \frac{q^{-2}\mu - q^{2}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} + \cdots + \frac{q^{-2(u-1)}\mu - q^{2(u-1)}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} \\
&= \frac{\dfrac{1 - q^{-2u}}{1 - q^{-2}}\mu - \dfrac{1 - q^{2u}}{1 - q^{2}}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} \\
&= \frac{\dfrac{q^{-u}}{q^{-1}} \cdot \dfrac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}}\mu - \dfrac{q^u}{q} \cdot \dfrac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} \\
&= \frac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{q^{-u+1}\mu - q^{u-1}\mu^{-1}}{q - q^{-1}} \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

waarbij we de sommeringsformule voor meetkundige reeksen gebruikt hebben

$$1 + a + \cdots + a^{u-1} = \frac{1 - a^u}{1 - a}$$

Indien we nu de bijkomende voorwaarde $\sigma_{m+1} = 0$ opleggen dan bekomen we

$$q^{-m}\mu - q^m\mu^{-1} = 0$$

oftewel

$$\mu = \pm q^m \tag{2.9}$$

Terug substitueren in (2.8) geeft

$$\sigma_u = \pm \frac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{q^{m-u+1} - q^{-(m-u+1)}}{q - q^{-1}} \tag{2.10}$$

We hebben nu een volledige beschrijving van de irreduciebele representaties van U. Laat ons even samenvattten: zij $\epsilon \in \{+, -\}$ en $m \in \mathbb{N}$. Zij W_m^ϵ de vectorruimte

$$\bigoplus_{u=0}^{m} \mathbb{C} w_u$$

We definieren acties van K, E, F op W_m^ϵ als volgt

$$\begin{aligned}
Kw_u &= \epsilon q^{m-2u} w_u \\
Fw_u &= w_{u+1} \qquad u = 0, \ldots, m-1 \\
Fw_m &= 0 \\
Ew_u &= \sigma_u w_{u-1} \qquad u = 1, \ldots, m \\
Ew_0 &= 0
\end{aligned}$$

met σ_u zoals in (2.10)

Stelling 2.3. *De W_m^ϵ zijn irreduciebele U-representaties en verder is elke irreduciebele U-representatie van de vorm W_m^ϵ voor zekere ϵ, m.*

Bewijs. We hebben reeds aangetoond dat elke irreduciebele representatie van de aangegeven vorm is. We moeten nog even aantonen dat de W_m^ϵ inderdaad de verwachte eigenschappen hebben.

Allereerst tonen we aan dat de W_m^ϵ representaties van U zijn. Hiervoor moeten we nagaan dat de relaties van U gelden. Voor (2.1) toegepast of w_u, $u > 0$ geeft dit

$$\begin{aligned}
KEK^{-1} \cdot w_u &= q^{-m+2u} \sigma_u q^{m-2(u-1)} w_{u-1} \\
&= q^2 \sigma_u w_{u-1} \\
&= q^2 E w_u
\end{aligned}$$

In het geval $u = 0$ zijn beide leden nul dus dit geval is ook ok. De relatie (2.2) is volledig analoog. Blijft de relatie (2.3), We berekenen voor $u \neq 0, m$.

$$(EF - FE) \cdot w_u = (\sigma_{u+1} - \sigma_u) w_u$$

en deze formule blijft geldig voor $u = 0, m$ met de conventie $\sigma_0 = 0$, $\sigma_{m+1} = 0$. Vanwege (2.7) geldt (met $\mu = \epsilon q^m$)

$$\sigma_{u+1} - \sigma_u = \epsilon \frac{q^{m-2u} - q^{-m+2u}}{q - q^{-1}}$$

Aangezien ook geldt (voor alle u)

$$\frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot w_u = \epsilon \frac{q^{m-2u} - q^{-m+2u}}{q - q^{-1}} w_u \tag{2.11}$$

blijkt dus dat (2.3) geldt.

We tonen nu aan dat W_m^ϵ irreducibel is. We beweren dat het voldoende is om aan te tonen dat voor elke $0 \neq v \in W_m^\epsilon$ er geldt dat

$$Uv \overset{\text{def}}{=} \{uv \mid u \in U\} = W_m^\epsilon \tag{2.12}$$

Inderdaad: onderstel dat $0 \neq V \subsetneq W_m^\epsilon$ een niet triviale deelrepresentatie is. Kies $0 \neq v \in V$. Dan

$$Uv \subset V \subset W_m^\epsilon$$

en uit (2.12) volgt $V = W_m^\epsilon$.

We tonen nu (2.12) aan. Schrijf

$$v = \sum_{i=0}^{a} \alpha_i w_i$$

met $\alpha_a \neq 0$. Na vermenigvuldigen met E^a zien we dat $w_0 \in Uv$ (we maken gebruik van het feit dat $\sigma_u \neq 0$ voor $u > 0$). Vermenigvuldigen met F^u, $u = 0, \ldots, m$ levert dat $w_u \in Uv$. Aangezien $(w_u)_u$ een basis is van W_m^ϵ zijn we klaar. □

We hebben nog de volgende stelling die wat moeilijker om te bewijzen is.

Stelling 2.4. *Als V een U-representatie is dan geldt*

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{t} W_{m_i}^{\epsilon_i}$$

voor zekere (m_i), $(\epsilon_i)_i$.

Merk op

$$\dim W_m^\epsilon = m + 1$$

Voorbeeld 2.5. Onderstel $m = 0$. In dat geval

$$W_0^\pm = \mathbb{C}w_0$$

met

$$\begin{aligned} Ew_0 &= Fw_0 = 0 \\ Kw_0 &= \pm w_0 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.6. Onderstel nu $m = 1$, $\epsilon = +$. Dan

$$W_0^+ = \mathbb{C}w_0 \oplus \mathbb{C}w_1$$

$$\sigma_1 = \frac{q - q^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{q^{1-1+1} - q^{-(1-1+1)}}{q - q^{-1}} = 1$$

We gaan dan na dat de matrices van K, E, F werkend op de basis w_0,w_1 gegeven worden door

$$\begin{aligned} K &: \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \\ E &: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ F &: \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.7. Onderstel tenslotte $m = 2$, $\epsilon = +$. In dit geval

$$W_2^+ = \mathbb{C}w_0 \oplus \mathbb{C}w_1 \oplus \mathbb{C}w_2$$

$$\sigma_1 = \frac{q - q^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = q + q^{-1}$$

$$\sigma_2 = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{q - q^{-1}}{q - q^{-1}} = q + q^{-1}$$

en K, E, F worden gegeven door matrices

$$K : \begin{pmatrix} q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} \end{pmatrix}$$

$$E : (q + q^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Het feit dat $\sigma_1 = \sigma_2$ is geen toeval. We hebben immers in het algemeen

$$\sigma_u = \sigma_{m+1-u}$$

3. De irreducibele representaties van $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, q een eenheidswortel

Onderstel nu $q^d = 1$ voor zekere $d > 0$ en $q^e \neq 1$ voor $1 \leq e < d$ met de gebruikelijke extra hypothese dan d oneven is. De voorgaande analyse gaat min of meer ongewijzigd[1] door voor

$$\bar{U} = U/(E^d, F^d, K^d - 1)$$

We geven het resultaat zonder bewijs

Stelling 3.1. *De W_m^+ voor $0 \leq m < d$ zijn irreducibele $\bar{U}$-representaties en verder is elke irreducibele $\bar{U}$-representatie van de vorm W_m^+ voor zekere $0 \leq m < d$.*

[1]Met twee uitzonderingen. (1) Het bestaan van v en w in (2.4)(2.5) volgt nu uit $E^d = 0$, $F^d = 0$ in plaats van het argument steunende op de lineaire onafhankelijkheid van eigenvectoren. (2) Het feit dat $K^d = 1$ en d oneven impliceert $\mu = +q^m$ in (2.9).