1 De Drinfeld double voor een eindige groep

Dit is een lichtjes geexpandeerde en aangepaste versie van §9.4 in de cursus.

1.1 Voorbeeld

Zij G een eindige groep. We zullen nu expliciet de double van $\mathbb{C}G$ beschrijven. Voor de gemakkelijkheid noteren we de eenheid in G met 1.

Eerst beschrijven we de vermenigvuldiging op $D(\mathbb{C}G)$. Zij $\langle -, - \rangle$ de evaluatie afbeelding $(\mathbb{C}G)^* \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$. Zoals gebruikelijk kunnen we $(\mathbb{C}G)^*$ identificeren als vectorruimte met de functies $G \to \mathbb{C}$. Definieer $\delta_g \in (\mathbb{C}G)^*$ via $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$. Er geldt

$$\langle \delta_h, g \rangle = \delta_{h,g}$$

Du $(\delta_h)_{h\in H}$ en $(g)_{g\in G}$ zijn duale basissen.

We bepalen nu de Hopf-algebra structuur op $(\mathbb{C}G)^*$. We weten dat $\Delta\delta_g$ voldoet aan

$$\delta_g(pq) = \sum_{\delta_g} (\delta_g)_{(1)}(p)(\delta_g)_{(2)}(q) \tag{1.1}$$

Als we $\Delta\delta_g$ uitschrijven als $\sum_{p,q} \lambda_{p,q}\delta_p \otimes \delta_q$ met $\lambda_{p,q} \in \mathbb{C}$ dan vinden we via (1.1):

$$\Delta\delta_g = \sum_p \delta_p \otimes \delta_{p^{-1}g}$$

De coeenheid bepalen we via (8.19). Dit levert $\epsilon(\delta_g) = \delta_g(1) = \delta_{g,1}$. Voor de antipode gebruiken we de definitie van de antipode op $(\mathbb{C}G)^*$. Dit levert $(S\delta_g)(h) = \delta_g(Sh) = \delta_{g,h^{-1}}$. Oftewel $S\delta_g = \delta_{g^{-1}}$.

Nu bepalen we de vermenigvuldiging op $D(\mathbb{C}G)$. Volgens (9.37)-(9.39) moeten we enkel het produkt $(1 \otimes g)(\delta_h \otimes 1)$ uitrekenen voor $g, h \in G$. Om dit te doen zouden we de expliciete formule (9.36) kunnen gebruiken. Het is echter iets gemakkelijker om de (impliciete) formule (9.40) te gebruiken. Dit levert voor $a = \delta_h$, $b = g$:

$$\sum_{p\in G} \delta_p(g)(1 \otimes g)(\delta_{p^{-1}h} \otimes 1) = \sum_{p\in G} \delta_{p^{-1}h}(g)\delta_p \otimes g$$

wat vereenvoudigt tot

$$(1 \otimes g)(\delta_{g^{-1}h} \otimes 1) = \delta_{hg^{-1}} \otimes g$$

Als we tenslotte $z = g^{-1}h$ nemen dan verkrijgen we:

$$(1 \otimes g)(\delta_z \otimes 1) = \delta_{gzg^{-1}} \otimes g$$

De "$\otimes$"-symbolen zijn in deze context een beetje redundant, dus we zullen ze nu weglaten om de notatie wat minder pompeus te maken. We hebben nu het volgende bewezen: $D(\mathbb{C}G)$ heeft als basis $(\delta_h g)_{h,g\in G}$ en het produkt van twee basiselementen wordt gegeven door

$$(\delta_h g) \times (\delta_{h'} g') = \delta_h \delta_{gh'g^{-1}} gg' = \delta_{h,gh'g^{-1}}(\delta_h gg') \tag{1.2}$$

Het is ook zinnig om te definieren voor $h, g \in G$

$$\begin{aligned} \delta_h &\overset{\text{def}}{=} \delta_h \otimes 1 = \delta_h 1 \\ g &\overset{\text{def}}{=} 1_{(\mathbb{C}G)^*} \otimes g = \sum_h \delta_h g \end{aligned}$$

Vanwege (9.39) hebben we

$$\delta_h \times g = (\delta_h \otimes 1)(1_{(\mathbb{C}G)^*} \otimes g) = \delta_h \otimes g = \delta_h g$$

zodat dit consistent is met onze eerdere notaties. $(\delta_h)_h$ vormt een basis voor $(\mathbb{C}G)^{*,\mathrm{coop}} \subset D(\mathbb{C}G)$ en $(g)_{g\in G}$ vormt een basis voor $\mathbb{C}G \subset D(\mathbb{C}G)$.

De coalgebrastructuur op $D(\mathbb{C}G)$ is eenvoudig uit te werken omdat deze samenvalt met de standaard coalgebrastructuur op $(\mathbb{C}G)^{*\mathrm{coop}} \otimes \mathbb{C}G$. Tenslotte tonen we nog met enig werk aan dat $S(\delta_h g) = g^{-1}\delta_{h^{-1}}$.

Indien A een algebra is en $\rho : G \to \mathrm{Aut}(A)$ is een groepshomomorfisme dan definiëren we het *crossed product* $A * G$ van A met G als de verzameling formele sommen $\sum_g a_g g$ met $a_g \in A$, $g \in G$ en $a_g \neq 0$ voor ten hoogste een eindig aantal g. $A * G$ is een algebra met de volgende bewerkingen

$$\begin{aligned} \sum_g a_g g + \sum_g b_g g &= \sum_g (a_g + b_g) g \\ \left(\sum_p a_p p\right)\left(\sum_q b_q q\right) &= \sum_g \left(\sum_{pq=g} a_p p(b_q)\right) g \end{aligned}$$

waarbij we zoals gebruikelijk $g(a)$ schrijven voor $\rho(g)(a)$ voor $g \in G$, $a \in A$.

Het volgt uit de beschrijving van de algebra structuur op $D(\mathbb{C}G)$ dat

$$D(\mathbb{C}G) \cong (\mathbb{C}G)^* * G$$

als algebras.

Uit Stelling 9.3.6 volgt dat $D(\mathbb{C}G)$ braided is met braiding (universele R-matrix) gegeven door

$$P = \sum_{g\in G} (1 \otimes g) \otimes (\delta_g \otimes 1) = \sum_{g\in G} g \otimes \delta_g \in D(\mathbb{C}G) \otimes D(\mathbb{C}G)$$

We hebben gezien in Stelling 8.9.7 dat zo'n braiding aanleiding geeft tot oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking. We zullen dit nu precies uitwerken. We moeten allereerst een representatie V van $D(\mathbb{C}G)$ vastleggen. Voor de beschrijving van de representaties van $D(\mathbb{C}G)$ hebben we enkel de algebra structuur nodig op $D(\mathbb{C}G)$ die, zoals bovenvermeld, gegeven wordt door een crossed product. De classificatie van alle representaties van $D(\mathbb{C}G)$ is een leuk probleem op zich maar we zullen ons beperken tot de constructie van één enkele representatie.

Lemma 1.1. *Stel $V = \mathbb{C}G$. Dan heeft V de struktuur van een $D(\mathbb{C}G)$ representatie met*

$$\begin{aligned} g \cdot \sum_p \alpha_p p &= \sum_p \alpha_p g p g^{-1} \\ \delta_h \cdot \sum_p \alpha_p p &= \alpha_h h \end{aligned} \tag{1.3}$$

Bewijs. Het volgt uit (1.3) dat we noodzakelijk moeten hebben

$$\delta_h g \cdot \sum_p \alpha_p p = \alpha_{g^{-1}hg} h \tag{1.4}$$

Men verifieert nu dat dit compatiebel is met (1.2). Dit toont aan dat (1.4) inderdaad de structuur van een representatie definieert op $D(\mathbb{C}G)$. □

De volgende stap is het berekenen van $c_{V,V}$. We vinden voor $p, q \in G$

$$\begin{aligned} c_{V,V}(p \otimes q) &= (\tau_{V,V} \circ \rho(P))(p \otimes q) \\ &= \tau_{V,V}\left(\sum_g g \otimes \delta_g\right) \cdot (p \otimes q) \\ &= \tau_{V,V}\left(\sum_g gpg^{-1} \otimes \delta_{g,q} g\right) \\ &= \tau_{V,V}(qpq^{-1} \otimes q) \\ &= q \otimes qpq^{-1} \end{aligned}$$

Dus

$$R' : V \otimes V \to V \otimes V : p \otimes q \mapsto q \otimes qpq^{-1}$$

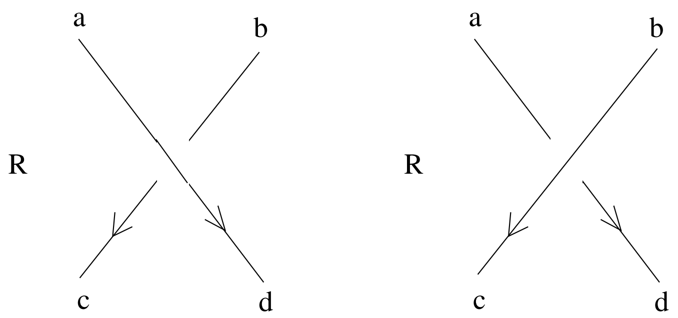
is een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking in $\mathrm{End}(V \otimes V)$. We zien dat de basis $(p \otimes q)_{p,q \in G}$ van $V \otimes V$ bewaart blijft onder R'. Dus deze oplossing is afkomstig van een verzamelingstheoretische oplossing in $\mathrm{Sym}(G^2)$ (via Stelling 7.2.2) gegeven door

$$\tilde{R}' : G \times G \to G \times G : (p, q) \mapsto (q, qpq^{-1})$$

In de praktijk zullen we echter eerder de inverse van $\tilde{R}'$ gebruiken. Deze wordt gegeven door

$$R : G \times G \to G \times G : (p, q) \mapsto (p^{-1}qp, p)$$

Schematisch



(1.5)

Ga als oefening direct na dat R een oplossing van de verzamelingstheoretische Yang-Baxter vergelijking is.

Lemma 1.2. *R voldoet aan de extra conditie* (4.2)*.*

Bewijs. We moeten de cardinaliteit berekenen van de verzameling

$$\{q \in G \mid R(p, q) = (p', q)\}$$

Met andere woorden we moeten het aantal oplossingen tellen van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} q &= p \\ p' &= p^{-1}qp \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat er een unieke oplossing is als en slechts als $p = p'$. Dit is precies wat we moesten aantonen. $\square$

Zoals uitgelegd in §4.4 kunnen we nu met R een georienteerde link invariant associeren volgens het volgende algoritme:

1. Zij D een diagram van een georienteerde link L.

2. Label elk boogje in D.

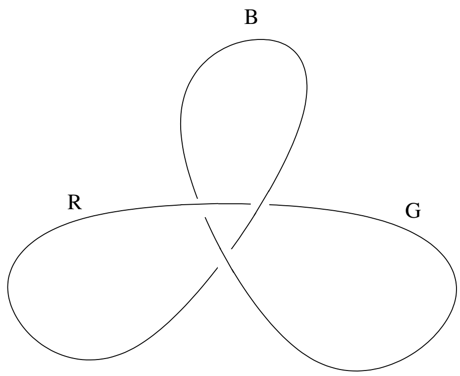
3. Elke zelfsnijding in D geeft aanleiding tot een vergelijking in G via (1.5).

4. $\phi_R(L)$ is het aantal oplossingen van deze vergelijkingen.

Dus indien L_{triv} de triviale knoop is dan vinden we

$$\phi_R(L_{\text{triv}}) = |G|$$

Een interessanter voorbeeld wordt gegeven door de klaverbladknoop.



We krijgen dan de vergelijkingen

$$z = xyx^{-1}$$
$$y = zxz^{-1}$$
$$x = yzy^{-1}$$

Als we z elimineren dan is dit equivalent met 1 enkele vergelijking

$$xyx = yxy$$

Dus indien L de klaverbladknoop is dan

$$\phi_R(L) = |\{\text{oplossingen van } xyx = yxy \text{ in } G\}|$$

Er is een alternatieve zienswijse. Definieer

$$G_L = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$$

Dan

$$\phi_R(L) = |\operatorname{Hom}_{\text{groepen}}(G_L, G)|$$

We kunnen G_L definieren voor een willekeurige georienteerde link. Inderdaad G_L is de groep voortgebracht door de boogjes in een diagram van L, onderworpen aan relaties voortkomende uit de zelfsnijdigen zoals gegeven in (1.5).

G_L is de zogenaamde *knopengroep* van L. Voor degenene die algebraische topologie gekregen hebben:

$$G_L = \pi_1(\mathbb{R}^3 - L)$$

De voorstelling met generatoren en relaties van G_L die we aangegeven hebben is de zogenaamde *Wirtinger presentatie*.