

Cursusnota's knopentheorie

Michel Van den Bergh

11 februari 2025

Inhoudsopgave

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Algemeenheden over knopentheorie | 3 |
| 1.1 | De Reidemeister moves | 3 |
| 1.2 | De klaverbladknoop is niet triviaal | 8 |
| 1.3 | Windingsgetallen | 9 |
| 1.4 | Invarianten | 13 |
| 2 | De Jones polynoom | 13 |
| 2.1 | Constructie | 13 |
| 2.2 | Achiraliteit | 19 |
| 2.3 | Produkten van knopen | 20 |
| 2.4 | Mutaties | 22 |
| 3 | Vlechten | 25 |
| 3.1 | Inleiding | 25 |
| 3.2 | Formele definities | 26 |
| 3.3 | Vlecht diagrammen | 28 |
| 3.4 | Reidemeister moves op vlecht diagrammen | 29 |
| 3.5 | Presentatie van een groep door middel van generatoren en relaties | 33 |
| 3.6 | Presentatie van de vlechtgroep door generatoren en relaties | 35 |
| 3.7 | De lage vlechtgroepen | 40 |
| 3.8 | Elke link is de sluiting van een vlecht | 42 |
| 3.9 | De stelling van Markov | 45 |
| 3.10 | Nieuwe methode om linkinvarianten te construeren | 46 |
| 4 | Acties van B_n op verzamelingen | 47 |
| 4.1 | Groepacties | 47 |
| 4.2 | De (verzamelingstheoretische) Yang-Baxter vergelijking | 47 |
| 4.3 | Acties van B_n | 51 |
| 4.4 | Een uitgewerkt voorbeeld | 52 |
| 5 | Vectorruimten en tensorprodukt | 55 |
| 5.1 | Constructie en hoofdeigenschap | 55 |
| 5.2 | Het eenheidselement | 57 |
| 5.3 | Commutativiteit | 58 |
| 5.4 | Associativiteit | 58 |
| 5.5 | Een basis voor $U \otimes V$ | 59 |
| 6 | Representaties en karakters | 63 |

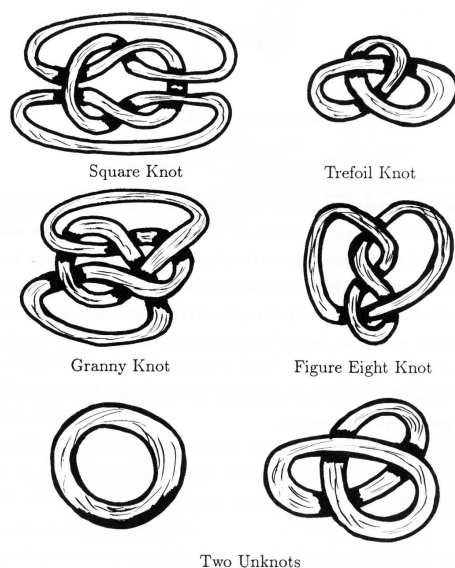
| | | |
|-----------|---|------------|
| 7 | Een representatie van de vlechtgroep B_n | 64 |
| 7.1 | De Yang-Baxter vergelijking | 64 |
| 7.2 | Verband met verzamelingstheoretische oplossingen | 66 |
| 7.3 | Een representatie van B_n | 67 |
| 7.4 | Constructie van linkinvarianten door middel van oplossingen van de YB-vergelijking | 68 |
| 7.5 | Een concrete oplossing van de Yang-Baxter vergelijking | 70 |
| 7.6 | De constructie van een linkinvariant | 70 |
| 7.7 | De definiërende eigenschappen van Y | 72 |
| 7.8 | Het verband met de Jones polynoom | 75 |
| 7.9 | De HOMFLY polynoom | 77 |
| 8 | Bialgebras en Hopf algebras | 80 |
| 8.1 | Motivatie | 80 |
| 8.2 | Algebras | 81 |
| 8.3 | Coalgebras | 83 |
| 8.4 | Zijn er verschillen tussen algebras en coalgebras? | 85 |
| 8.5 | Dualiteit | 89 |
| 8.6 | Toepassing op algebras en coalgebras | 90 |
| 8.7 | De Sweedler notatie | 92 |
| 8.8 | Bialgebras | 93 |
| 8.9 | Braided bialgebras | 97 |
| 8.10 | Hopf-algebras | 103 |
| 9 | De Drinfeld quantum double | 111 |
| 9.1 | Bicrossed products van groepen | 111 |
| 9.2 | Bicrossed products van bialgebras | 113 |
| 9.3 | Hopf-bilineaire vormen | 118 |
| 9.4 | Voorbeeld | 125 |
| 10 | De quantumgroep $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ | 128 |
| 10.1 | Beschrijving van een ring door generatoren en relaties | 128 |
| 10.2 | Lie algebras | 129 |
| 10.3 | Omhullenden van Lie algebras | 130 |
| 10.4 | Quantum groepen | 133 |
| 10.5 | Een eenvoudige Hopf algebra | 134 |
| 10.6 | Een Hopf bilineaire vorm | 135 |
| 10.7 | De Drinfeld double van U^+ | 137 |
| 10.8 | Constructie van oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking . | 140 |
| 10.9 | Een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking | 146 |

| | |
|---|------------|
| 11 Vassiliev invarianten | 147 |
| 11.1 Inleiding | 147 |
| 11.2 Singuliere knopen en Vassiliev invarianten | 148 |
| 11.3 Algebraïsche structuur | 152 |
| 11.4 Koorddiagrammen | 155 |
| 12 Alternatieve aanpak | 165 |

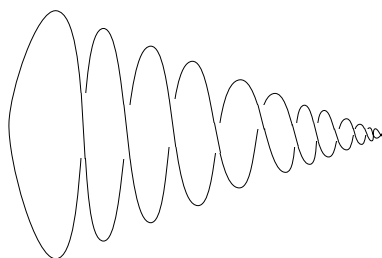
1 Algemeenheden over knopentheorie

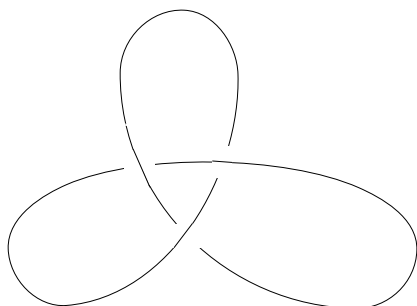
1.1 De Reidemeister moves

Het intuïtieve beeld van een knoop is duidelijk. We kunnen er aan denken als een knoop in een gesloten stuk touw. Hier zijn enige voorbeelden.

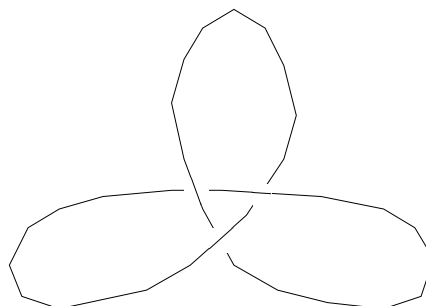


Als we een knoop formeel willen definiëren dan geeft dit enige problemen omdat we configuraties zoals de volgende willen vermijden.





Figuur 1.1: We tekenen



Figuur 1.2: We denken

Er zijn verschillende oplossingen voor dit probleem. De eenvoudigste is dat we enkel knopen toelaten die opgebouwd zijn uit een eindig aantal lijnstukken.

Definitie 1.1.1. Onderstel dat X een deel is in \mathbb{R}^n . Een *polygonale kromme* in X is de unie van een eindig aantal lijnstukken $\bigcup_{i=1}^n [a_i, a_{i+1}]$ in X . We zeggen dat C geen *zelfsnijdingen* heeft als

1. De punten $(a_i)_i$ zijn verschillend, behalve eventueel $a_1 = a_{n+1}$.
2. $[a_i, a_{i+1}] \cap [a_j, a_{j+1}] = \emptyset$ indien $i \neq j$.

Indien geldt $a_{n+1} = a_1$ dan zeggen we dat de polygonale krommen *gesloten* is.

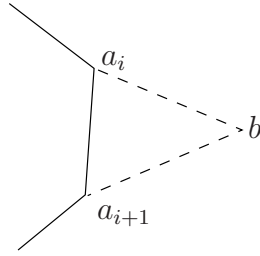
Merk op dat de punten a_1, \dots, a_{n+1} de polygonale kromme bepalen, maar niet omgekeerd. Waarom?

Definitie 1.1.2. Een *knoop* is een gesloten polygonale kromme zonder zelfsnijdingen in \mathbb{R}^3 . Een *link* is de unie van een eindig aantal paarsgewijze disjuncte knopen.

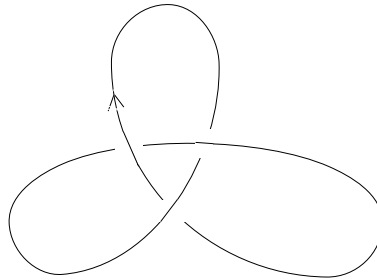
Knopen die uit rechte lijnstukken bestaan zijn echter niet zo mooi. Daarom zullen we blijven de knopen tekenen met mooie ronde vormen. We beschouwen deze dan als zijnde opgebouwd uit een hele hoop kleine lijnstukjes.

In knopentheorie beschouwen we knopen enkel op “vervorming” na. Dit formeel definiëren is weer niet zo eenvoudig.

Definitie 1.1.3. Onderstel dat K een knoop is bepaald door de punten a_1, \dots, a_n . Een Δ -transformatie van K bestaat uit het vervangen van K door een nieuwe knoop(!) K' bepaald door $a_1, \dots, a_i, b, a_{i+1}, \dots, a_n$ waarbij geen van de lijnstukken $[a_j, a_{j+1}]$ het inwendige van de driehoek (a_i, b, a_{i+1}) snijdt (opm: met het inwendige van een driehoek bedoelen we de punten die niet op de zijden liggen; dit is dus niet het topologische inwendige).



Figuur 1.3: Een Δ -transformatie



Figuur 1.4: Een georiënteerde klaverbladknoop

Δ -transformaties op links worden analoog gedefiniëerd.

Definitie 1.1.4. Twee links K en L zijn *equivalent* (\sim) als we van K naar L kunnen gaan door een reeks van Δ -transformaties en hun inversen. Een knoop is *triviaal* als hij equivalent is met een driehoek. Een link is *triviaal* als hij equivalent is met de link die bestaat uit een unie van driehoeken met disjunct inwendige.

Tenslotte definiëren we een *georiënteerde link* op dezelfde manier als een link behalve dat we het begrip lijnstuk vervangen door georiënteerd lijnstuk (dwz een lijnstuk dat een expliciet beginpunt heeft). Vanzelfsprekend moet het eindpunt van een lijnstuk samenvallen met het beginpunt van zijn opvolger. Merk op dat een knoop precies twee mogelijke oriëntaties heeft terwijl dit voor een link gelijk is aan 2^n waarbij n het aantal samenhangingscomponenten is. Een oriëntatie op een knoop of een link geven we aan door één of meerdere pijlen. We kunnen het begrip Δ -transformatie op een evidente manier uitbreiden tot georiënteerde knopen en links.

Links zijn in feite ruimtelijke figuren en het beschrijven van een ruimtelijk figuur is moeilijk. Daarom beschrijven we een link altijd door middel van zijn orthogonale projectie op het $x - y$ -vlak. Dit is in feite wat we tot nu toe gedaan hebben in onze figuren.

De projectie D van een link L bestaat duidelijk uit een eindig aantal gesloten polygonale krommen in \mathbb{R}^2 . We zeggen dat de projectie *regulier* is als de enige zelfsnijdingen in D van de vorm \times zijn, dwz paren van lijnstukken die elkaar snijden in inwendige punten (opm: met het inwendige van een lijnstuk bedoelen we de punten die niet op de uiteinden liggen; dit is dus niet het topologische inwendige).

Indien de projectie niet regulier is dan is het gemakkelijk in te zien dat we L binnen zijn equivalentieklasse kunnen wijzigen zodat de projectie wel regulier wordt.

Zelfs indien de projectie regulier is dan is het duidelijk dat D te weinig informatie bevat om L te kunnen reconstrueren. Daarom zullen we aan D voor elke zelfsnijding de informatie toevoegen welk lijnstuk bovenaan ligt. Dit doen we grafisch door een zelfsnijding te tekenen als \times of \times .

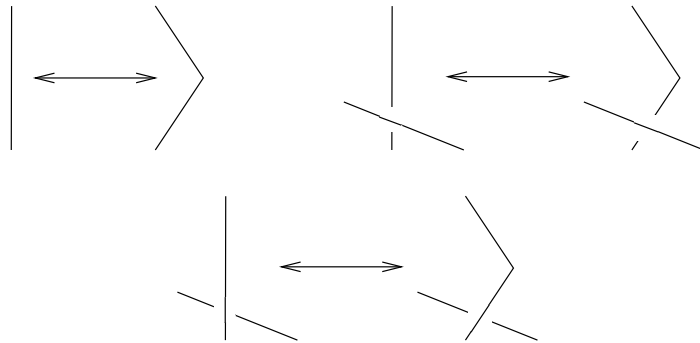
Definitie 1.1.5. Een diagram bestaat uit de volgende gegevens.

- (a) Een eindige unie van gesloten polygonale krommen in \mathbb{R}^2 met enkel zelfsnijdingen van de vorm \times .
- (b) Voor elke zelfsnijding informatie welk lijnstuk bovenaan ligt.

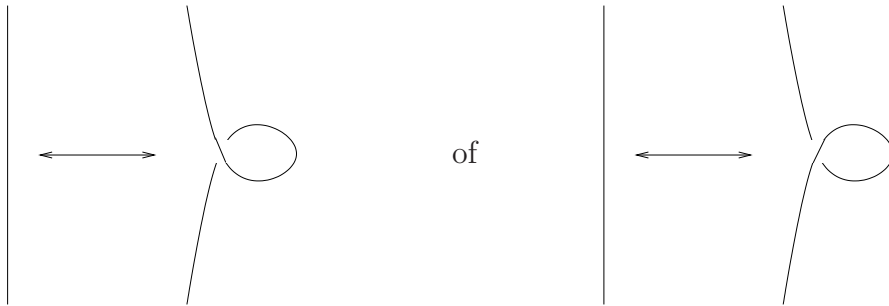
Als L een link is en D een diagram dan zeggen we dat D bij L hoort als er een link $L' \sim L$ bestaat zodat D de projectie van L' is. Men kan aantonen dat de equivalentieklasse van een link bepaald wordt door het geven van een bijbehorend diagram. Intuïtief is dit duidelijk en het is ook niet moeilijk te bewijzen, maar het vraagt nogal veel schrijfwerk. In het vervolg zullen we nog veel van dergelijke beweringen tegenkomen.

Welke diagrammen komen nu overeen met equivalente links? We zullen een aantal transformaties op diagrammen definiëren waarvan het evident is dat ze de equivalentieklasse van de bijbehorende link niet wijzigen. Dit zijn de zogenaamde *Reidemeister moves*. In figuur 1.5 worden de meest triviale van dergelijke transformaties aangegeven (Reidemeister moves van “type 0”). Deze transformaties laten ons toe om een diagram naar hartelust te vervormen zonder zijn combinatorische structuur te verstoren.

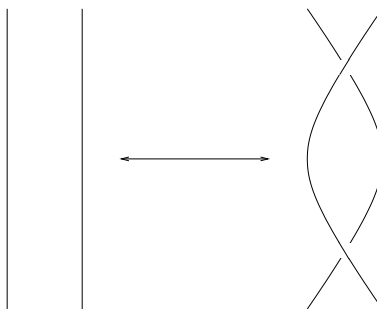
Omdat de Reidemeister moves van type 0 zo triviaal zijn, zullen we ze van nu af aan niet meer expliciet vermelden. Als voorbeelden van iets minder triviale transformaties geven we in figuren 1.6, 1.7, 1.8 de klassieke Reidemeister moves aan. We zullen nu zeggen dat twee diagrammen equivalent zijn als we van het ene naar het andere kunnen gaan via de transformaties aangegeven in figuren 1.5, 1.6, 1.7, 1.8.



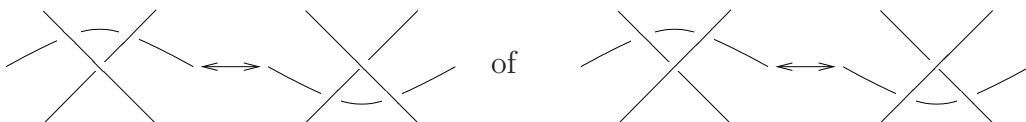
Figuur 1.5: De “type 0” Reidemeister moves



Figuur 1.6: Een type I Reidemeister move



Figuur 1.7: Een type II Reidemeister move



Figuur 1.8: Een type III Reidemeister move

Stelling 1.1.6. (*Reidemeister*) *Zij L , L' twee links met bijbehorende diagrammen D , D' . Dan zijn L en L' equivalent als en slechts als D en D' equivalent zijn.*

Het is duidelijk dat als D en D' equivalent zijn dat dan hetzelfde geldt voor L en L' . Om het omgekeerde te bewijzen moeten we aantonen dat de projectie van een Δ -transformatie op een link kan geschreven worden als een compositie van Reidemeister moves. Dit is niet zo moeilijk maar wel omslachtig.

Opmerking 1.1.7. Er bestaan ook Reidemeister moves voor georiënteerde knopen. Per definitie worden deze verkregen door de segmenten in de ongeoriënteerde Reidemeister moves een willekeurige oriëntatie te geven. Er is dan een voor de hand liggend analogon van Stelling 1.1.6 voor georiënteerde diagrammen en links. Men kan de georiënteerde versie van Stelling 1.1.6 afleiden uit de ongeoriënteerde.

Het lijkt er nu op dat het met Stelling 1.1.6 eenvoudig is om te beslissen of twee knopen (of links) equivalent zijn. We nemen de corresponderende diagrammen en voeren alle mogelijke opeenvolgende Reidemeister moves uit. In 2011 vonden Coward en Lackenby een expliciete berekenbare bovengrens voor het aantal Reidemeister moves dat je nodig hebt om van een diagram naar een equivalent diagram te gaan. Jammer genoeg is deze grens zo gigantisch hoog dat hij enkel theoretische waarde heeft. Dus met deze methode kan je wel aantonen dat twee knopen dezelfde zijn, maar in de praktijk kan je nooit zeker zijn dat ze verschillend zijn.

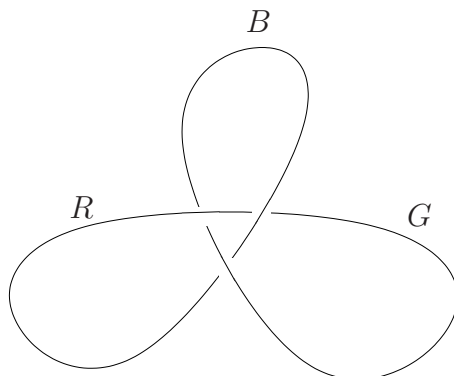
Zo is het bijvoorbeeld geweten dat de klaverblad knoop niet equivalent is met zijn spiegelbeeld (we zullen dit later aantonen) maar hiervoor is geen bewijs gekend in termen van Reidemeister moves.

1.2 De klaverbladknoop is niet triviaal

Tot nu toe hebben we in feite van nog geen enkele knoop aangetoond dat hij niet triviaal is. In dit hoofdstukje zullen we aantonen dat dit geldt voor de klaverbladknoop. Later zullen we dit nog eens bewijzen door middel van de Jones polynoom, maar het is leuk om een volledig elementair bewijs te hebben.

Definitie 1.2.1. Een *kleuring* van een diagram is het toekennen van een kleur aan elk van de bogen in het diagram.

We zullen nooit meer dan drie kleuren nodig hebben en we noemen die dan ook R(ood), G(roen), B(lauw). In figuur 1.9 geven we een kleuring van de klaverbladknoop.



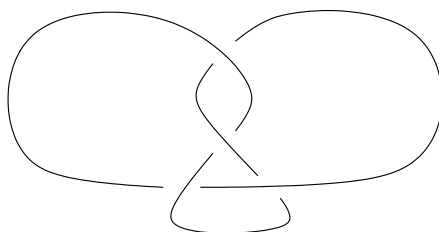
Figuur 1.9: Een (drie)kleuring van de klaverbladknoop

Definitie 1.2.2. Een *driekleuring* van een diagram is het toekennen van kleuren aan de bogen zodat elke kruising hetzij één hetzij drie aangrenzende kleuren heeft.

Een driekleuring is *niet triviaal* indien er tenminste twee kleuren gebruikt worden.

Een triviale knoop heeft duidelijk geen niet triviale driekleuring terwijl figuur 1.9 een driekleuring aangeeft van een klaverbladknoop. Als we nu kunnen aantonen dat het bezitten van een niet triviale driekleuring behouden blijft onder Reidemeister moves dan zijn we klaar. Figuren 1.10,1.11 geven de situatie voor type I en II moves. Toon nu zelf aan (om het bewijs te beëindigen) dat het bezitten van een niet triviale driekleuring invariant is onder type III moves.

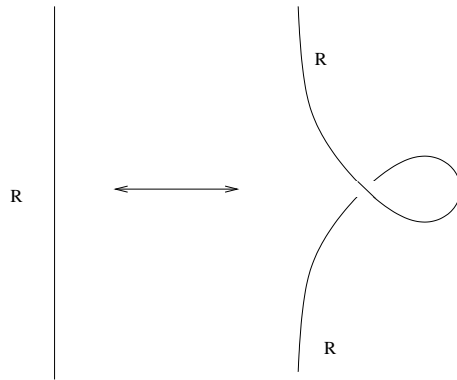
Opmerking 1.2.3. Deze methode werkt helaas niet voor de figuur acht knoop



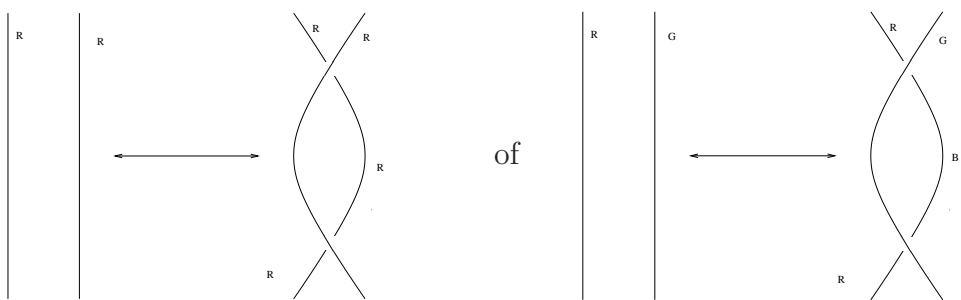
want deze heeft geen niet triviale driekleuringen. We zullen echter zien dat we de “kleuringsmethode” kunnen veralgemenen tot meerdere kleuren en dit geeft dan weer een eenvoudig bewijs dat de figuur acht knoop niet triviaal is.

1.3 Windingsgetallen

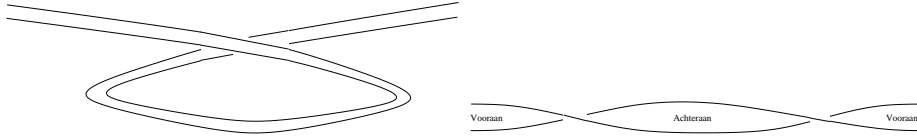
Als we knopen maken in linten in plaats van in touwen dan blijkt een type I move een vreemde eigenschap te hebben die niet gedeeld wordt door type II



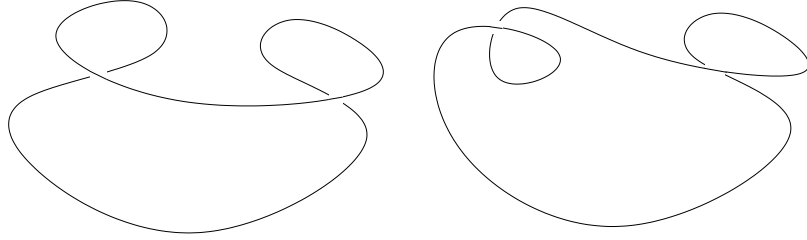
Figuur 1.10: Een driekleuring onder een Type I move



Figuur 1.11: Een driekleuring onder een type II move

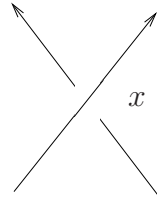


Figuur 1.12: Het gedrag van een lint onder een type I move

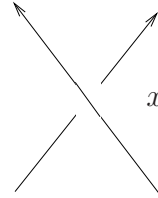


Figuur 1.13:

Figuur 1.14:



Figuur 1.15: $\epsilon(x) = +1$



Figuur 1.16: $\epsilon(x) = -1$

en type III moves. Dit wordt duidelijk als we figuur 1.12 bekijken. Een type I move laat het lint kronkelen. Als we daarentegen diagram 1.13 bekijken dan zien we dat na uitstrekken de kronkelingen mekaar opheffen. Dit kunnen we ook verklaren doordat we van diagram 1.13 een cirkel kunnen maken met een enkele type II move.

Oefening 1.3.1. Toon aan dat je het diagram 1.14 kan omzetten in een cirkel door middel van type II en type III moves.

Om meer inzicht te krijgen in type I moves voeren we het windingsgetal van een (georiënteerd) diagram in:

$$w(D) = \sum_x \epsilon(x)$$

waarby x loopt over de kruisingen in D en $\epsilon(x)$ wordt berekend zoals in de figuren 1.15, 1.16.

Stelling 1.3.2. (a) *Het windingsgetal van een diagram is invariant onder type II en type III moves.*

(b) Onder een type I move verandert het windingsgetal met ± 1 .

(c) Als D het diagram van een knoop voorstelt dan hangt $w(D)$ niet af van de oriëntatie van D .

Bewijs. (a) en (b) zijn directe verificeringen. Voor (c) merken we op dat als x een snijpunt is in een diagram en we keren de oriëntatie om dan zullen de twee takken die in x snijden gezamenlijk van oriëntatie veranderen. Dus $\epsilon(x)$ blijft invariant. \square

Voorbeeld 1.3.3. Voor de klaverbladknoop in figuur 1.4 geldt $w(D) = -3$.

Oefening 1.3.4. Toon aan dat als een diagram een oneven aantal snijpunten heeft dat we dan minstens één type I move nodig hebben om er een disjuncte unie van cirkels van te maken (indien mogelijk).

Zij nu D een georiënteerd diagram en zij $C_1 \neq C_2$ twee subdiagrammen die met knopen overeenkomen (D is dus het diagram van een link met minstens twee componenten). Dan definiëren we het linkingsgetal van C_1, C_2 als

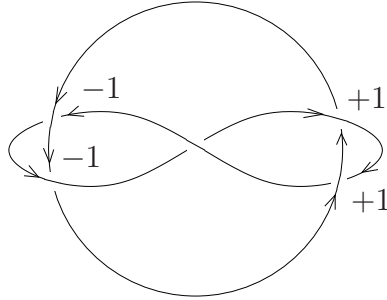
$$w(C_1, C_2) = \frac{1}{2} \sum_{x \in C_1 \cap C_2} \epsilon(x)$$

Stelling 1.3.5. $w(C_1, C_2)$ verandert niet onder Reidemeister moves.

Bewijs. Dit is weer een directe verificatie. Merk op dat hier geen probleem is met type I moves omdat het snijpunt dat optreedt in zo'n type I move niet in $C_1 \cap C_2$ kan liggen. \square

Dus als D het diagram van een link is en we vinden C_1, C_2 zodat $w(C_1, C_2) \neq 0$ dan weten we zeker dat de link niet triviaal is. Dit criterium is echter verre van voldoende, zoals geïllustreerd wordt door de Whitehead link (figuur 1.17) waarbij de twee componenten linkingsgetal nul hebben. Hoe bewijzen we dat de Whitehead link niet triviaal is? We gebruiken de notie van een driekleuring. De situatie is echter wel iets anders dan voor knopen. Merk op dat een diagram met twee elkaar niet snijdende deeldiagrammen een niet triviale driekleuring heeft (waarom?). Om te bewijzen dat een diagram met twee componenten niet equivalent is met een disjuncte unie van twee diagrammen van knopen volstaat het dus aan te tonen dat het diagram *geen* niet triviale driekleuring heeft.

Oefening 1.3.6. Toon aan dat de Whitehead link heeft geen niet triviale driekleuring heeft.



Figuur 1.17: De Whitehead link

1.4 Invarianten

Zij L, L' links met diagrammen D, D' . Hoe bewijzen we $L \not\sim L'$? We hebben reeds vermeld dat het uitvoeren van alle mogelijke sequenties Reidemeister moves niet werkt. We volgen daarom een andere strategie. We zoeken afbeeldingen

$$\phi : \{\text{links}\} \rightarrow S \quad (1.1)$$

waarbij S een verzameling is zodat ϕ constant is op equivalentieklassen van links. We zullen zo'n afbeelding construeren vertrekkend van een afbeelding

$$\phi : \{\text{diagrammen}\} \rightarrow S \quad (1.2)$$

die invariant is onder Reidemeister moves, via

$$\phi(L) = \phi(\text{diagram}(L))$$

We zullen zowel naar (1.2) als naar (1.1) refereren als een *linkinvariant*. Uiteraard bestaat er van dit alles een georiënteerde versie.

Voorbeeld 1.4.1. Neem $S = \mathbb{Z}$ en definiëer

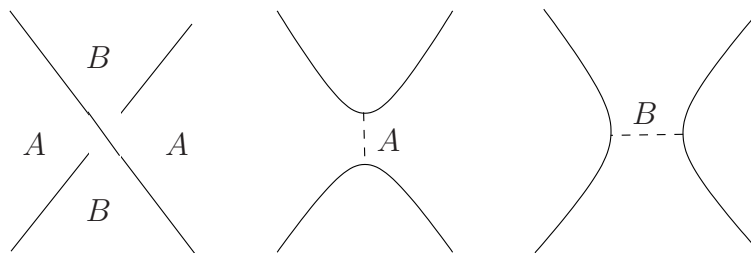
$$\phi(D) = \#\{\text{driekleuringen van } D\}$$

We hebben reeds aangetoond dat het hebben van een niet triviale driekleuring invariant is onder Reidemeister moves. Men toont op dezelfde manier aan dat ϕ ook een invariant is. Indien L de triviale knoop is en L' is de klaverbladknoop dan hebben we $\phi(L) = 3$, $\phi(L') = 9$. Dus $L \not\sim L'$.

2 De Jones polynoom

2.1 Constructie

We zullen hier de versie van Kauffman geven van de constructie van de Jones polynoom. Deze is geïnspireerd door de statistische mechanica. In deze disci-



Figuur 2.1: De twee splitsingen van een kruising

plene bestudeert men systemen die uit zeer vele individuele deeltjes bestaan. Om globale eigenschappen van zo een systeem te bekomen is het dikwijls nodig om bepaalde sommaties uit te voeren over alle mogelijke toestanden van het systeem.

We beginnen met het invoeren van de *bracketpolynoom* van een diagram. Hierbij beschouwen we de snijpunten als deeltjes en een “toestand” als één van de twee mogelijke splitsingen (zie figuur 2.1). De letters A en B die op deze figuur voorkomen worden hieronder toegelicht.

Als D nu een diagram is met n zelfsnijdingen dan kunnen we aan elk van deze zelfsnijdingen een splitsing toekennen. Dit geeft ons in totaal 2^n -mogelijke “toestanden”. De bracketpolynoom is een som over al deze toestanden.

Laten we eerst een individuele toestand σ bekijken. Als we alle splitsingen uitvoeren houden we uiteindelijk een diagram over dat bestaat uit een aantal disjuncte gesloten, zichzelf niet snijdende krommen (“Jordan krommen”). We noteren met $\|\sigma\|$ het aantal dergelijke krommen verminderd met één. Verder noteren we nog met $a(\sigma)$ en $b(\sigma)$ het aantal A -splitsingen en het aantal B -splitsingen

We definiëren

$$\langle \sigma \rangle = A^{a(\sigma)} B^{b(\sigma)} d^{\|\sigma\|}$$

waarbij we A , B en d voorlopig als onafhankelijke variabelen beschouwen. De bracketpolynoom van D definiëren we als:

$$\langle D \rangle = \sum_{\sigma} \langle \sigma \rangle$$

waarbij σ over alle toestanden van D loopt.

Voorbeeld 2.1.1. De bracketpolynoom van de klaverbladknoop in figuur 1.4 wordt gegeven door

$$B^3 d^1 + 3AB^2 d^0 + 3A^2 B d^1 + A^3 d^2$$

De bracketpolynoom zoals we hem gedefiniëerd hebben is niet invariant onder equivalentie van diagrammen. Hij kan dus ook niet gebruikt worden om een invariant van links te definiëren.

We zullen nu proberen om de variabelen zo te kiezen dat $\langle D \rangle$ invariant wordt onder Reidemeister moves. Eerst tonen we aan dat $\langle D \rangle$ aan een zogenaamde *skeinrelatie* voldoet.

Stelling 2.1.2.

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{B} \rangle + B \langle \text{C} \rangle \quad (2.1)$$

Opmerking 2.1.3. De betekenis van deze formule is dat we elk klein diagram beschouwen als deel van een groter diagram, zodat we dus drie diagrammen hebben die identiek zijn behalve op de plaatsen aangegeven door de kleine diagrammen.

Bewijs. Uit het feit dat een zelfsnijding op twee manieren gesplitst kan worden volgt dat de toestanden van een diagram D in bijectieve correspondentie zijn met de unie van de toestanden van twee diagrammen D' , D'' die uit D verkregen worden door A of B splitsingen uit te voeren in een gegeven zelfsnijding van D . Uit de definitie van $\langle D \rangle$ volgt dan $\langle D \rangle = A\langle D' \rangle + B\langle D'' \rangle$. \square

Hier zijn nog twee eenvoudige rekenregels voor de bracketpolynoom.

$$\langle \bigcirc \rangle = 1 \quad (2.2)$$

$$\langle \bigcirc \cup D \rangle = d\langle D \rangle \quad (2.3)$$

Opmerking 2.1.4. We hadden de formules (2.1)(2.2)(2.3) als definitie kunnen nemen van de bracketpolynoom. Dan hadden we echter nog wel moeten aantonen dat de waarde van $\langle D \rangle$ niet afhangt van de volgorde waarop de zelfsnijdingen splitsen (dit is eenvoudig).

Nu rekenen we uit hoe de bracketpolynoom varieert onder de Reidemeister

moves.

$$\begin{aligned}
\langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + B \langle \text{split} \rangle \\
&= AB \langle \text{circle} \rangle + A^2 \langle \text{X} \rangle + B^2 \langle \text{X} \rangle + AB \langle \rangle \langle \rangle \\
&= (ABd + A^2 + B^2) \langle \text{X} \rangle + AB \langle \rangle \langle \rangle
\end{aligned}$$

Dus opdat de bracketpolynoom invariant zou zijn onder type II moves moeten we opleggen

$$\begin{aligned}
AB &= 1 \\
ABd + A^2 + B^2 &= 0
\end{aligned}$$

De oplossingen voor dit systeem zijn

$$\begin{aligned}
B &= A^{-1} \\
d &= -(A^2 + A^{-2})
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nu beschouwen we type III moves onder de veronderstelling dat A, B, d voldoen aan (2.4).

$$\begin{aligned}
\langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle \\
&\stackrel{II}{=} A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle \\
\langle \text{crossing} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle \\
&\stackrel{II}{=} A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle
\end{aligned}$$

De berekening voor $\langle \text{crossing} \rangle$ is analoog.

Bekijken we tenslotte de situatie voor type I moves.

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \bigcirc \\ | \end{array} \right\rangle + B \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle \\
&= (Ad + B) \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle \\
&= (-A(A^2 + A^{-2}) + A^{-1}) \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle \\
&= -A^3 \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

Een gelijkaardige berekening leert.

$$\left\langle \begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle = -A^{-3} \left\langle \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right\rangle$$

Het blijkt dus dat de bracketpolynoom jammer genoeg geen invariant voor links definiëert. Hij is namelijk niet invariant onder type I moves. We gaan dit probleem oplossen door $\langle - \rangle$ met een geschikte factor te vermenigvuldigen die afhangt van het windingsgetal. Hiervoor moeten we iets nauwkeuriger nagaan hoe dat windingsgetal zich gedraagt onder type I moves (we weten reeds dat het windingsgetal invariant is onder type II en III moves).

Omdat we voor de definitie van het windingsgetal een oriëntatie nodig hebben voeren we die nu in. De bracketpolynoom blijft echter onafhankelijk van deze oriëntatie.

$$\begin{aligned}
w \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ | \end{array} \right) + 1 \\
w \left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} | \\ \uparrow \\ | \end{array} \right) + 1 \\
w \left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} | \\ \uparrow \\ | \end{array} \right) - 1 \\
w \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} \right) &= w \left(\begin{array}{c} | \\ \downarrow \\ | \end{array} \right) - 1
\end{aligned}$$

We kunnen nu besluiten dat de *Jones polynoom*, gedefiniëerd door

$$X(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$$

invariant is onder alle Reidemeister moves.

Als L een georiënteerde link is met bijbehorend diagram D dan definiëren we nu $X(L) = X(D)$. Merk op dat als K een knoop is dan hangt $X(K)$ niet af van de oriëntatie op K omdat $w(K)$ ook niet van de oriëntatie afhangt.

We zullen nu een voorbeeld berekenen.

$$\left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle = A \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Diagram 3} \right\rangle &= (-A^{-3}) \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle \\ &= (-A^{-3})^2 \left\langle \text{Diagram 5} \right\rangle \\ &= A^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Diagram 2} \right\rangle &= A \left\langle \text{Diagram 6} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \text{Diagram 4} \right\rangle \\ &= A(-A^3) \left\langle \text{Diagram 5} \right\rangle + A^{-1}(-A^{-3}) \left\langle \text{Diagram 5} \right\rangle \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Diagram 1} \right\rangle &= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1} \cdot A^{-6} \\ &= -A^5 - A^{-3} + A^{-7} \end{aligned}$$

Voor de Jones polynoom vinden we dan:

$$\begin{aligned} X \left(\text{Diagram 1} \right) &= (-A^3)^{-3} (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) \\ &= -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} \end{aligned}$$

Oefening 2.1.5. Bewijs de volgende alternatieve skeinrelatie voor de Jones polynoom.

$$A^4 X \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - A^{-4} X \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right) + (A^2 - A^{-2}) X \left(\begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \right) = 0$$

2.2 Achiraliteit

Het *spiegelbeeld* van een link is de reflectie ten opzichte van een vlak in \mathbb{R}^3 . Het is weer duidelijk dat het spiegelbeeld op equivalentie na uniek bepaald is.

Om het diagram D^* van het spiegelbeeld L^* te bepalen van een link L met diagram D vervangen we de L door een equivalente link waarvan de projectie op het $x - y$ -vlak gelijk is aan D . Dan zien we duidelijk dat D^* verkregen wordt uit D door alle \times te vervangen door \times .

Stelling 2.2.1. (a) $\langle D^* \rangle(A) = \langle D \rangle(A^{-1})$.

Kies nu een oriëntatie op D .

(b) $w(D^*) = -w(D)$.

(c) $X(D^*)(A) = X(D)(A^{-1})$.

Bewijs. (a) Als σ een toestand is van D dan kunnen we een toestand σ^* definiëren van D^* door alle A splitsingen in B splitsingen te veranderen. We hebben dan duidelijk $a(\sigma) = b(\sigma^*)$, $b(\sigma) = a(\sigma^*)$ en $\|\sigma\| = \|\sigma^*\|$. Uit de definitie van $\langle D \rangle$ volgt nu

$$\langle D^* \rangle(A, B, d) = \langle D \rangle(B, A, d)$$

en dus

$$\begin{aligned} \langle D^* \rangle(A) &= \langle D^* \rangle(A, A^{-1}, -A^2 - A^{-2}) \\ &= \langle D \rangle(A^{-1}, A, -A^2 - A^{-2}) \\ &= \langle D \rangle(A^{-1}) \end{aligned}$$

(b) Dit is duidelijk.

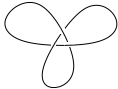
(c) Dit volgt uit (a) en (b). □

Definitie 2.2.2. Een link L is achiraal als $L \sim L^*$.

Stelling 2.2.3. *Als L achiraal is dan geldt $X(L)(A) = X(L)(A^{-1})$.*

Bewijs. Als L achiraal is dan hebben we

$$X(L)(A) = X(L^*)(A) = X(L)(A^{-1}) \quad \square$$

Gevolg 2.2.4.  *is niet achiraal.*

2.3 Produkten van knopen

Stelling 2.3.1. *Onderstel dat D de unie is van twee elkaar niet snijdende diagrammen D_1, D_2 . Dan geldt*

$$(a) \quad \langle D \rangle = d \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle.$$

$$(b) \quad w(D) = w(D_1) + w(D_2).$$

$$(c) \quad X(D) = dX(D_1)X(D_2).$$

Bewijs. (a) Een toestand σ van D wordt bepaald door het geven van een toestand σ_1 op D_1 en een toestand σ_2 op D_2 . Als we de splitsingen in deze toestanden effectief uitvoeren bekomen we diagrammen D', D'_1, D'_2 zodat $D' = D'_1 \cup D'_2$. Er volgt

$$\begin{aligned} \|\sigma\| &= \# \text{samenh. comp.}(D') - 1 \\ &= \# \text{samenh. comp.}(D'_1) + \# \text{samenh. comp.}(D'_2) - 1 \\ &= \|\sigma_1\| + \|\sigma_2\| + 1 \end{aligned}$$

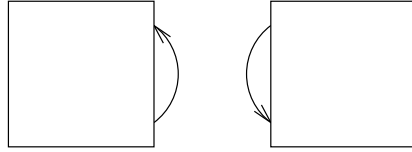
Dus we vinden

$$\begin{aligned} \langle D \rangle &= \sum_{\sigma} A^{a(\sigma)} B^{b(\sigma)} d^{\|\sigma\|} \\ &= \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} A^{a(\sigma_1)+a(\sigma_2)} B^{b(\sigma_1)+b(\sigma_2)} d^{\|\sigma_1\|+\|\sigma_2\|+1} \\ &= d \langle D_1 \rangle \langle D_2 \rangle \end{aligned}$$

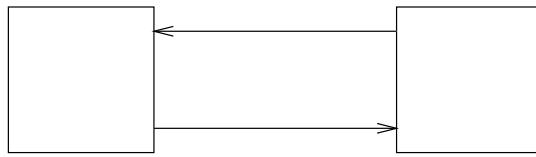
(b) Dit is weer eenvoudig.

(c) Dit volgt uit (a) en (b). \square

Een belangrijke operatie op knopen is het nemen van hun *produkt*. Zij K_1, K_2 (equivalentieklassen van) georiënteerde knopen met diagrammen van de vorm



Dan wordt het produkt $K_1 \# K_2$ gedefiniëerd als



Men kan het volgende aantonen.

Stelling 2.3.2. (a) Dit produkt is goed gedefiniëerd, in de zin dat het op equivalentie na enkel afhangt van de equivalentieklassen van K_1 en K_2 .

(b) Dit produkt is commutatief, associatief en de triviale knoop is het neutraal element.

Definiëer een georiënteerde knoop als zijnde priem als hij niet het produkt is van niet triviale knopen. Dan geldt bovendien:

(c) Elke georiënteerde knoop kan op een unieke manier geschreven worden als een produkt van priemknopen.

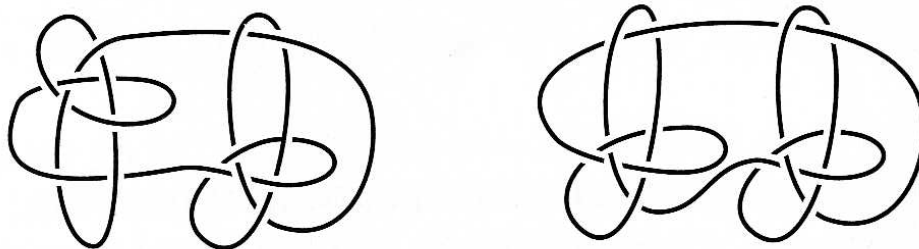
Deze stelling geeft dus aan dat we ons in de knopentheorie kunnen beperken tot de studie van priemknopen.

Stelling 2.3.3. (a) $\left\langle \begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right\rangle$

(b) $X \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right) = X \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right) X \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \end{array} \right)$

Bewijs. Dit wordt bewezen zoals Stelling 2.3.1. Nu geldt echter $\|\sigma\| = \|\sigma_1\| + \|\sigma_2\|$. \square

Oefening 2.3.4. Bewijs de vorige stelling door middel van Oefening 2.1.5.



Figuur 2.2: Twee verschillende produkten van een zelfde knoop

Stelling 2.3.3 geeft een potentiële methode om niet equivalente knopen te maken met dezelfde Jones polynoom. Als K een georiënteerde knoop is dan noteren we met \bar{K} de knoop die gelijk is aan K maar de omgekeerde oriëntatie heeft. Een knoop heet *inverteerbaar* als $K \sim \bar{K}$ (als georiënteerde knopen). Als we nu een niet inverteerbare knoop K_1 nemen en een willekeurige knoop K_2 is het best mogelijk dat $K = K_1 \# K_2$ niet equivalent is met $K' = \bar{K}_1 \# K_2$, zelfs indien we de oriëntatie vergeten. Uit stelling 2.3.3 volgt echter dat $X(K) = X(K')$.

In Figuur 2.2 zie je een toepassing van deze methode waarbij $K \# K$ en $\bar{K} \# K$ werden getekend voor een bepaalde knoop K . Men kan aantonen dat de twee verkregen knopen niet equivalent zijn.

2.4 Mutaties

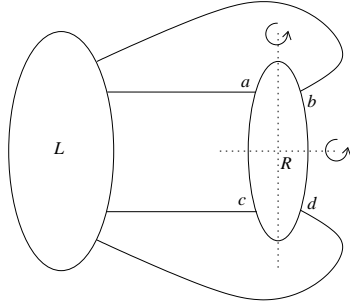
Zoals we reeds aangegeven hebben in de laatste sectie bestaan er niet equivalente knopen die toch dezelfde Jones polynoom hebben. De constructie die we toen aangegeven hebben om zulke knopen te maken is een bijzonder geval van de constructie van mutaties.

Zij K zoals in figuur 2.3. We kunnen twee nieuwe knopen (mutaties) maken door het gedeelte van de knoop dat met R werd aangegeven 180° graden te roteren om één van de aangegeven assen. Een derde mutatie kunnen we maken door R 180° rond zijn centrum te roteren (puntspiegeling). We krijgen dan de knopen K_1, K_2, K_3 .

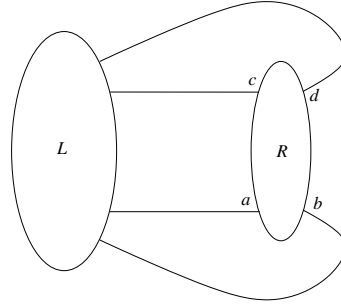
Oefening 2.4.1. Toon aan dat K_1, K_2, K_3 inderdaad knopen zijn.

Stelling 2.4.2. $X(K) = X(K_1) = X(K_2) = X(K_3)$.

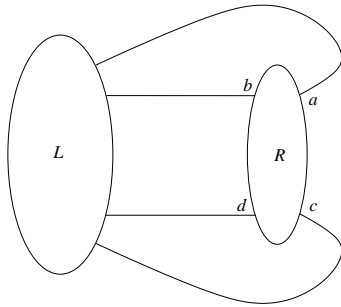
Bewijs. Het is duidelijk voldoende de analoge beweringen te bewijzen voor de bracketpolynomen. We zullen enkel bewijzen dat $\langle K \rangle = \langle K_2 \rangle$. Merk



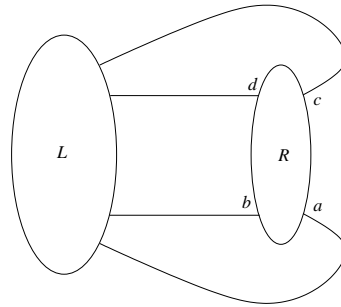
Figuur 2.3: K



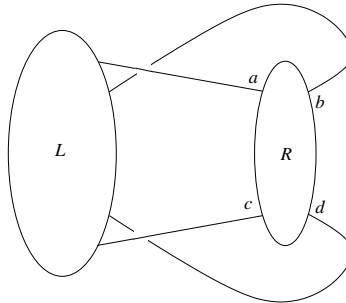
Figuur 2.4: K_1



Figuur 2.5: K_2



Figuur 2.6: K_3



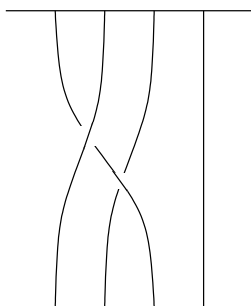
Figuur 2.7: K'_2

eerst op dat K_2 equivalent is met K'_2 (zie figuur 2.7). Verder is het een eenvoudige oefening om aan te tonen dat $w(K_2) = w(K'_2)$. Dus we hebben ook $\langle K_2 \rangle = \langle K'_2 \rangle$. We berekenen nu

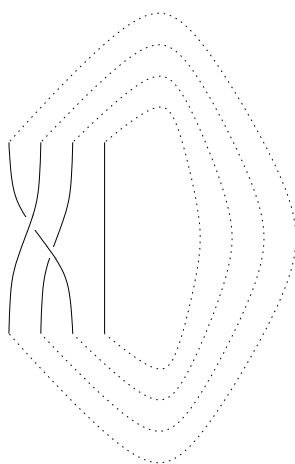
$$\langle K'_2 \rangle = \left\langle \text{diagram 1} \right\rangle + \left\langle \text{diagram 2} \right\rangle + A^{-2} \left\langle \text{diagram 3} \right\rangle + A^2 \left\langle \text{diagram 4} \right\rangle$$

Dus als we stellen $U = \text{diagram of a circle with two external legs on the right}$, $V = \text{diagram of a circle with two external legs on the left}$ dan vinden we uiteindelijk

$$\langle K'_2 \rangle = \langle K \rangle + d\langle U \rangle \langle V \rangle + A^{-2}\langle U \rangle \langle V \rangle + A^{-2}\langle U \rangle \langle V \rangle = \langle K \rangle \quad \square$$



Figuur 3.1: Een vlecht



Figuur 3.2: De sluiting van een vlecht

3 Vlechten

3.1 Inleiding

De wiskundige notie van een vlecht is een abstractie van de intuïtieve notie van een vlecht die we allemaal kennen. Zie figuur 3.1 voor een voorbeeld van een vlecht. Een vlecht bestaat uit een aantal strengen. Zoals links beschouwen we vlechten enkel op vervorming na. Het verband met links is dat we een vlecht kunnen *sluiten* en dit levert dan een link op (zie figuur 3.2). We zullen later aantonen dat elke link kan verkregen worden als sluiting van een vlecht.

Door vlechten achter elkaar te zetten bekomen we een bewerking die *samenstelling* heet. We zullen aantonen dat de verzameling

$$B_n = \{\text{vlechten met } n \text{ strengen}\} / \sim \quad (3.1)$$

uitgerust met de samenstelling een groep is, en wat meer is we kunnen de

structuur van deze groep volledig bepalen. Op deze manier wordt knopentheorie in feite herleid tot de studie van de *vlechtgroepen* B_n ,

3.2 Formele definities

Als $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ dan gebruiken we de notatie $x(b) = b_1$, $y(b) = b_2$, $z(b) = b_3$.

Definitie 3.2.1. Een *streng* is een polygonale kromme

$$S = \bigcup_{i=1}^n [a_i, a_{i+1}] \subset \mathbb{R}^3$$

met

- (a) $a_1 \in \mathbb{N} \times \{0\} \times \{0\}$.
- (b) $a_{n+1} \in \mathbb{N} \times \{1\} \times \{0\}$.
- (c) $y(a_1) < \dots < y(a_{n+1})$.

We noemen $s(S) = a_1$ het *startpunt* en $a_{n+1} = e(S)$ het *eindpunt*.

Definitie 3.2.2. Een *vlecht* b met n strengen is een unie

$$b = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$$

waarbij de $(S_i)_i$ disjuncte strengen zijn met

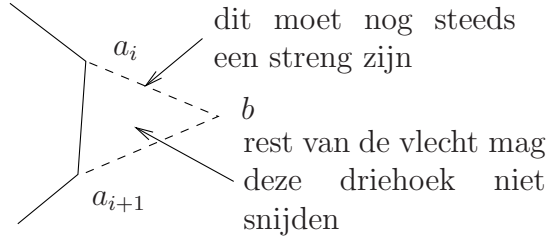
$$\begin{aligned} \{s(S_i) \mid i = 1, \dots, n\} &= \{(j, 0, 0) \mid j = 1, \dots, n\} \\ \{e(S_i) \mid i = 1, \dots, n\} &= \{(j, 1, 0) \mid j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Δ -*transformaties* op strengen en vlechten worden gedefinieerd zoals voor links. De formele definitie is nogal omslachtig dus we slagen die over en geven in plaats daarvan een figuur (figuur 3.3).

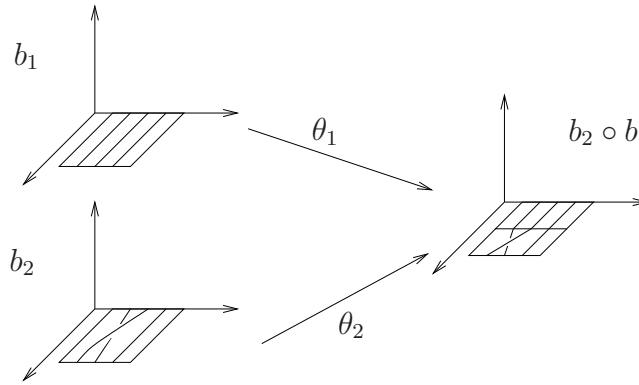
Definitie 3.2.3. Twee vlechten zijn equivalent als we van de ene naar de andere kunnen gaan door middel van Δ -transformaties en hun inversen.

Definitie 3.2.4. Een vlecht is *triviaal* als hij equivalent is met

$$\bigcup_{i=1}^n \{i\} \times [0, 1] \times \{0\}$$



Figuur 3.3: Een Δ -transformatie op vlechtten



Figuur 3.4: De samenstelling van vlechtten

Definitie 3.2.5. Zij b_1, b_2 vlechtten met n -strengen. Dan definiëren we $b_2 \circ b_1$ als $\theta_1(b_1) \cup \theta_2(b_2)$ waarbij $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineaire transformaties zijn die respectievelijk gegeven worden door $(x, y, z) \mapsto (x, y/2, z)$ en $(x, y, z) \mapsto (x, 1/2 + y/2, z)$

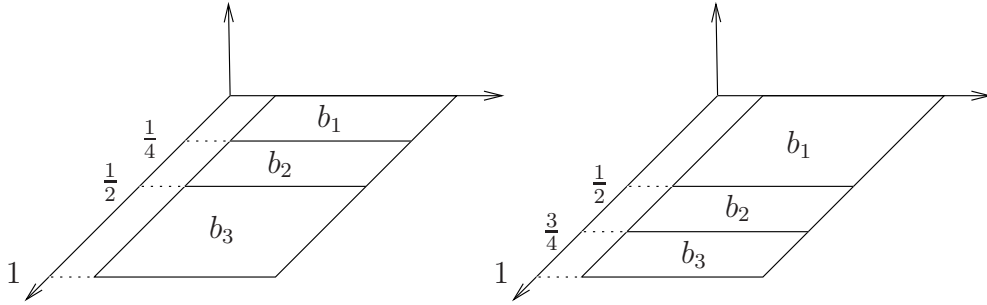
We illustreren deze definitie in figuur 3.4. Zij nu B_n zoals in (3.1). Op B_n definiëren we een produkt als volgt:

$$\bar{b}_2 \cdot \bar{b}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{b_2 \circ b_1}$$

Lemma 3.2.6. *Dit produkt is goed gedefiniëerd.*

Bewijs. As we een reeks Δ -transformaties en hun inversen uitvoeren op b_1 dan kunnen we een geschaalde versie van deze transformaties uitvoeren op $b_2 \circ b_1$. Hetzelfde geldt voor b_2 . Hieruit volgt dat als $b'_1 \sim b_1$, $b'_2 \sim b_2$ dan $b'_2 \circ b'_1 \sim b_2 \circ b_1$. Dit is precies wat we moesten bewijzen. \square

Verder is het vrij eenvoudig in te zien dat het produkt ook associatief is. In figuur 3.5 geven we respectievelijk $b_3 \circ (b_2 \circ b_1)$ en $(b_3 \circ b_2) \circ b_1$ aan voor vlechtten b_1, b_2, b_3 . Uit deze figuur blijkt duidelijk dat \circ *niet* associatief is. Dit is echter ook niet wat we moeten bewijzen! We moeten bewijzen



Figuur 3.5: Associativiteit van de samenstelling

dat $b_3 \circ (b_2 \circ b_1) \sim (b_3 \circ b_2) \circ b_1$. Dit is min of meer duidelijk aangezien we hoekpunten kunnen verplaatsen met Δ -transformaties en hun inversen. Dit uitschrijven zou weer omslachtig zijn.

3.3 Vlecht diagrammen

Vlecht diagrammen worden op dezelfde manier gedefiniëerd als diagrammen van links.

Definitie 3.3.1. Een *vlecht diagram* met n strengen bestaat uit de volgende informatie

(a) Een unie van n strengen bevat in het $x - y$ -vlak waarbij

(i) de verzameling beginpunten gelijk is aan;

$$\{1, \dots, n\} \times \{0\} \times \{0\}$$

(ii) de verzameling eindpunten gelijk is aan;

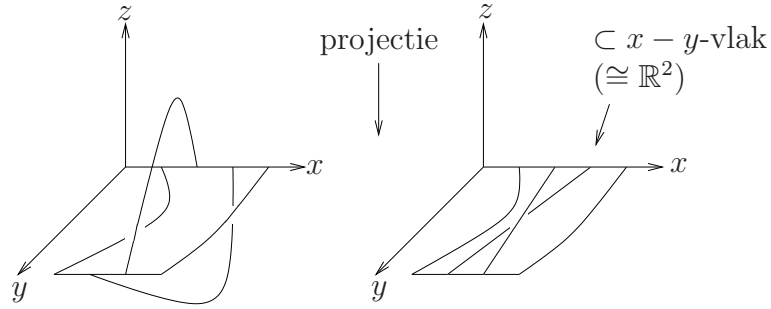
$$\{1, \dots, n\} \times \{1\} \times \{0\}$$

(iii) alle snijdingen tussen strengen van de vorm \times zijn.

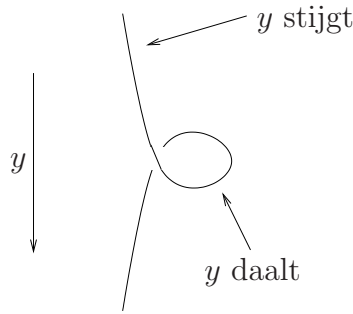
(b) Voor elke snijding van strengen, extra informatie welke streng bovenaan ligt (dmv \times of \times).

Zij $b \in \mathbb{R}^3$ een vlecht. We zeggen dat de projectie van b op het $x - y$ -vlak regulier is als het beeld enkel zelfsnijdingen van de vorm \times bevat. Het is weer duidelijk dat we de projectie regulier kunnen maken door b op equivalentie na een beetje te wijzigen.

Zoals voor links definiëren we: als b een vlecht is en d een vlecht diagram dan hoort d bij b als er een vlecht $b' \sim b$ met reguliere projectie bestaat zodat d de projectie van b' is. Men kan weer aantonen dat de equivalentieklasse van een vlecht bepaald wordt door het geven van een bijbehorend diagram.



Figuur 3.6: Het diagram van een vlecht



Figuur 3.7: Type I kan niet voor vlechten

3.4 Reidemeister moves op vlechtdiagrammen

Als we naar figuur 3.7 kijken dan zien we dat we een Type I move nooit op een vlechtdiagram kunnen uitvoeren omdat de y -coördinaat van een streng stijgend moet zijn. Daarom definiëren we Reidemeister moves op vlechtdiagrammen als (georiënteerde) Type 0,II,III moves waarbij de y -coördinaat van de strengen die er in betrokken zijn stijgend moet zijn.

Definitie 3.4.1. Als d, d' vlechtdiagrammen zijn dan zeggen we dat d equivalent is met d' als we van d naar d' kunnen gaan door middel van Reidemeister moves van Type 0,II,III.

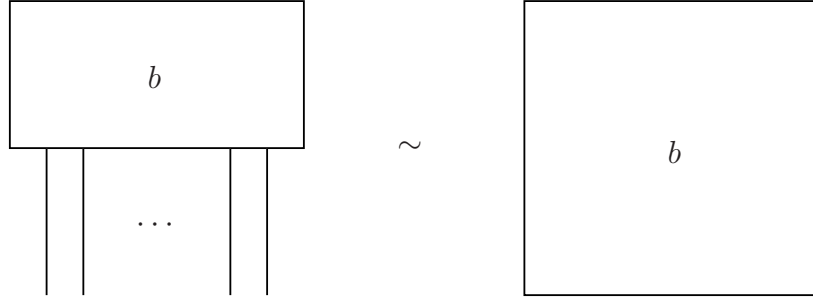
Analoog aan de situatie voor links hebben we nu:

Stelling 3.4.2. (Reidemeister) Als b, b' vlechten zijn en d, d' hun bijbehorende diagrammen zijn dan geldt

$$b \sim b' \Leftrightarrow d \sim d'$$

Een andere manier om dit te formuleren is als volgt: definiëer

$$B'_n = \{\text{vlechtdiagrammen met } n \text{ strengen}\} / \sim$$



Figuur 3.8: $1b = b$

De stelling zegt nu dat de afbeelding

$$\phi : B_n \rightarrow B'_n : \bar{b} \mapsto \overline{\text{diagram behorend bij } b}$$

een bijectie is.

Via deze ϕ kunnen we de multiplicatie op B_n transporteren naar B'_n .

$$\begin{aligned} \bar{d}_2 \cdot \bar{d}_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \phi(\phi^{-1}(\bar{d}_2) \cdot \phi^{-1}(\bar{d}_1)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \overline{d_2 \circ d_1} \end{aligned}$$

De operatie \circ op vlecht diagrammen wordt op een analoge manier gedefiniëerd als voor vlechten.

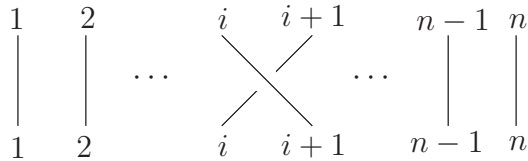
Hieronder zullen we nu een vaste n kiezen, en we zullen (B_n, \cdot) en (B'_n, \cdot) identificeren via de afbeelding ϕ . Met 1 noteren we equivalentieklasse van de triviale vlecht met n strengen.

Lemma 3.4.3. *Zij $\bar{b} \in B_n$. Dan geldt*

$$1b = b1 = b$$

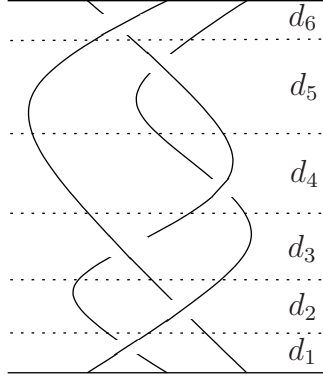
Bewijs. Uit figuur 3.8 halen we dat $1b = b$. Het bewijs dat $b1 = b$ is analoog (we gebruiken hier weer stilzwijgend dat je een vlecht diagram kan vervormen door Type 0 moves). \square

Nu definiëren we $\sigma_i \in B'_n$ als zijnde de equivalentieklasse van

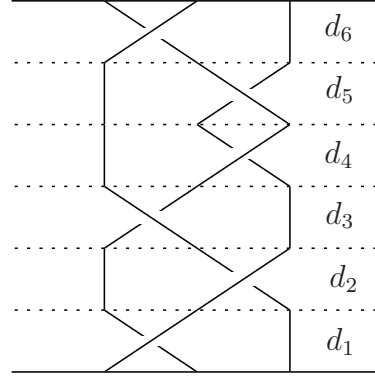




Figuur 3.9: $\sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1$

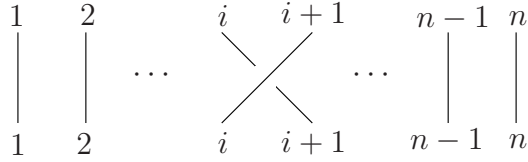


Figuur 3.10: “Schijfjes”



Figuur 3.11: $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$

en analoog σ_i^{-1} als de equivalentieklasse van:



Lemma 3.4.4. $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1$.

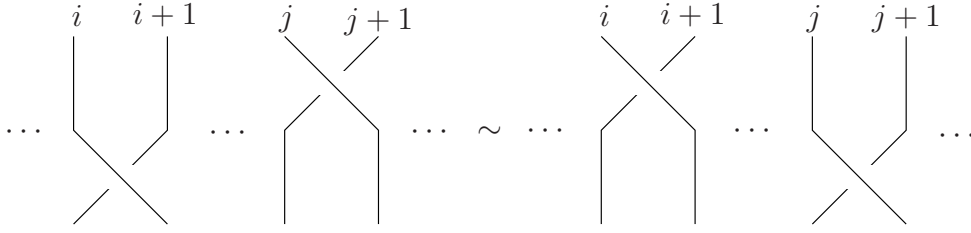
Bewijs. Figuur (3.9) geeft het bewijs aan voor $\sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1$. Het bewijs voor $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = 1$ is analoog. \square

Lemma 3.4.5. *Elk element van B_n is het produkt van $(\sigma_i)_i$, $(\sigma_i^{-1})_i$.*

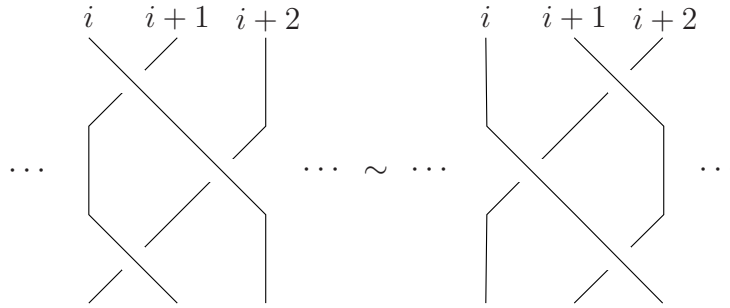
Bewijs. Zij d een vlechtdiagram met n strengen. We verdelen d in schijfjes (zie figuur 3.10) zodat er ten hoogste één snijpunt is in elk schijfje. Als dit niet onmiddellijk mogelijk is dan verplaatsen we de snijpunten een beetje door middel van Type 0 moves zodat het wel mogelijk wordt.

Nu kunnen we d vervormen als in figuur 3.11. Dit komt duidelijk met een produkt van σ_i 's en σ_i^{-1} 's overeen. \square

Gevolg 3.4.6. (B_n, \cdot) is een groep.



Figuur 3.12: $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$
voor $|j - i| \geq 2$



Figuur 3.13: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

Bewijs. (a) \cdot is associatief.

(b) 1 is het eenheidselement.

(c) De elementen σ_i, σ_i^{-1} hebben een inverse vanwege lemma 3.4.4. Er volgt dan uit lemma 3.4.5 dat elk element een inverse heeft. \square

We vragen ons nu af wat de relaties zijn tussen de $(\sigma_i)_i$. Het volgende lemma geeft daar reeds een gedeeltelijk antwoord op.

Lemma 3.4.7. *Er geldt.*

(a) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ als $|j - i| \geq 2$.

(b) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ (dit is de befaamde vlechtrelatie).

Bewijs.

(a) Zie figuur 3.12.

(b) Zie figuur 3.13. \square

3.5 Presentatie van een groep door middel van generatoren en relaties

(Ter informatie)

Een voor de hand liggende vraag die men kan stellen na lemma 3.4.7 is of de aldaar aangegeven relaties de “enige” relaties zijn tussen de $(\sigma_i)_i$. Om dit precies te maken hebben we het concept nodig van de presentatie van een groep door middel van generatoren en relaties. We geven nu snel aan hoe men dit kan doen.

Onze basisgegevens zijn een stel symbolen x_1, \dots, x_t en een stel “relaties” $w_1 = w'_1, \dots, w_s = w'_s$ waarbij de $(w_i)_i, (w'_i)_i$ woorden in de symbolen $(x_i)_i$ en $(x_i^{-1})_i$ zijn.

Probleem 3.5.1. (Vaag) Construeer een groep voortgebracht door $(x_i)_i$ zodat de enige relaties tussen deze generatoren kunnen afgeleid worden uit de relaties $(w_i = w'_i)_i$ en de groepsaxioma's.

We geven nu één van de mogelijke constructies aan van zo'n groep. Definieer

$$\mathcal{W} = \{\text{woorden in } (x_i^{\pm 1})_i\}$$

waarbij we het lege woord met “1” noteren. Als $w, w' \in \mathcal{W}$ dan staat ww' voor de concatenatiebewerking van w en w' . Merk op dat $1w = w1 = w$ en dus is 1 een neutraal element voor de concatenatie. \mathcal{W} is echter geen groep omdat niet alle element een inverse hebben (in feite heeft enkel 1 een inverse).

We gaan nu een equivalentierelatie \sim op \mathcal{W} definiëren die compatiebel is met concatenatie zodat \mathcal{W}/\sim wel een groep is.

Het idee is dat twee $w, w' \in \mathcal{W}$ equivalent zijn als ze gelijk zijn in alle groepen die aan de relaties $(w_i = w'_i)_i$ voldoen. Meer precies: beschouw “testdata” $\mathcal{G} = (G, y_1, \dots, y_t)$ waarbij G een groep is en y_1, \dots, y_t elementen van G zijn. Met zulke testdata definiëren we een afbeelding

$$(-)_{\mathcal{G}} : \mathcal{W} \rightarrow G : w \mapsto \begin{array}{l} \text{het element van } G \text{ dat} \\ \text{verkregen wordt door} \\ x_i \text{ te vervangen door} \\ y_i \text{ in } w \end{array}$$

Definitie 3.5.2. Zij $w, w' \in \mathcal{W}$. We stellen $w \sim w'$ als $w_{\mathcal{G}} = w'_{\mathcal{G}}$ voor alle testdata met de eigenschap $w_{1,\mathcal{G}} = w'_{1,\mathcal{G}}, \dots, w_{s,\mathcal{G}} = w'_{s,\mathcal{G}}$.

We definiëren nu

$$\langle x_1, \dots, x_t \mid w_1 = w'_1, \dots, w_s = w'_s \rangle = \mathcal{W}/\sim \quad (3.2)$$

met de bewerking

$$\bar{w} \cdot \bar{w}' = \overline{ww'} \quad (3.3)$$

Stelling 3.5.3. (a) (3.3) is goed gedefiniëerd.

(b) Zij $H = (3.2)$. Dan is (H, \cdot) een groep.

(c) H is voortgebracht door $(\bar{x}_i)_{i=1,\dots,t}$.

(d) Indien $w \in \mathcal{W}$ dan noteren we met \tilde{w} het woord dat uit w verkregen wordt door $(x_i)_i$ te vervangen door $(\bar{x}_i)_i$. In H gelden de relaties $\tilde{w}_1 = \tilde{w}'_1, \dots, \tilde{w}_s = \tilde{w}'_s$.

(e) Voor alle testdata $\mathcal{G} = (G, y_1, \dots, y_t)$ met $w_{1,\mathcal{G}} = w'_{1,\mathcal{G}}, \dots, w_{s,\mathcal{G}} = w'_{s,\mathcal{G}}$ bestaat er een uniek groepshomomorfisme $\theta : H \rightarrow G$ met $\theta(\bar{x}_i) = y_i$. Voor deze θ geldt $\theta(\bar{w}) = w_{\mathcal{G}}$.

Voorbeeld 3.5.4. Definiëer

$$H = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2 = 1, \tau^3 = 1, \sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1} \rangle$$

Vanwege Stelling 3.5.3.(d) gelden in H dus de relaties:

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{1}, \bar{\tau}^3 = \bar{1}, \bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\sigma}^{-1} = \bar{\tau}^{-1} \quad (3.4)$$

We observeren nu dat elk element in H gelijk is aan één van de volgende elementen

$$\bar{1}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}, \bar{\sigma}\bar{\tau}, \bar{\tau}^2, \bar{\sigma}\bar{\tau}^2 \quad (3.5)$$

Dit bewijs je door inductie op de lengte van een woord in $\bar{\sigma}^{\pm 1}, \bar{\tau}^{\pm 1}$. Voor een woord van lengte nul is het duidelijk in orde. Elk woord van lengte n is van de vorm $w\bar{\sigma}^{\pm 1}$ of $w\bar{\tau}^{\pm 1}$ waarbij w lengte $n - 1$ heeft. Om de inductiestap te volbrengen moeten we dus aantonen dat als we een element uit de lijst (3.5) nemen en het vermenigvuldigen met een element uit $\{\bar{\sigma}^{\pm 1}, \bar{\tau}^{\pm 1}\}$ dat we dan weer een element uit (3.5) bekomen. Dit is een eenvoudige verificatie door middel van (3.4).

De vraag is nu of dat de elementen in (3.5) allemaal verschillend zijn. Om dit te bewijzen nemen we $\mathcal{G} = (S_3, (12), (123))$. Omdat

$$(\sigma^2)_{\mathcal{G}} = (), \quad (\tau^3)_{\mathcal{G}} = (), \quad (\sigma\tau\sigma)_{\mathcal{G}} = (\tau^{-1})_{\mathcal{G}}$$

(“(”) is de identieke permutatie) volgt uit Stelling 3.5.3.(e) dat $(-)_{\mathcal{G}}$ een groepshomomorfisme $\theta : H \rightarrow S_3$ definiëert. De beelden onder θ van (3.5) zijn nu

$$(), (12), (123), (23), (132), (13) \quad (3.6)$$

Aangezien deze beelden alle verschillend zijn moesten de elementen in (3.5) ook verschillend zijn. We bekomen dus

$$H = \{\bar{1}, \bar{\sigma}, \bar{\tau}, \bar{\sigma}\bar{\tau}, \bar{\tau}^2, \bar{\sigma}\bar{\tau}^2\}$$

Uit bovenstaande redenering halen we nog wat extra informatie. We hebben in feite aangetoond dat θ injectief is. Aangezien $|H| = |S_3|$ is θ dus ook bijjectief. Er volgt $H \cong S_3$.

3.6 Presentatie van de vlechtgroep door generatoren en relaties

(Ter informatie, op het bestaan van de expliciete presentatie (3.8) na.)

Definiëer

$$C_n = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \mid (\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1})_i, (\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i)_{|j-i| \geq 2} \rangle \quad (3.7)$$

We gaan bewijzen dat de afbeelding $\theta : C_i \rightarrow B_i$ gedefiniëerd door $\theta(\bar{\tau}_i) = \sigma_i$ een isomorfisme is. We doen dit door middel van een tussenstap die bestaat uit het definiëren van Reidemeister moves op woorden. Zoals voorheen definiëren we

$$\mathcal{W} = \{\text{woorden in } \tau_i^{\pm 1}\}$$

Hieronder zijn α, β, γ willekeurige elementen van $\{\pm 1\}$.

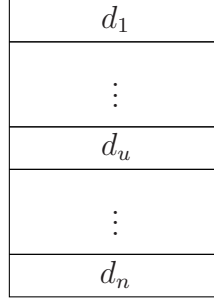
$$\begin{array}{ll} \textbf{Type 0 moves} & \tau_i^\alpha \tau_j^\beta \leftrightarrow \tau_j^\beta \tau_i^\alpha \quad |j-i| \geq 2 \\ \textbf{Type II moves} & \tau_i^\alpha \tau_i^{-\alpha} \leftrightarrow 1 \\ \textbf{Type III moves} & \tau_i^\alpha \tau_{i+1}^\beta \tau_i^\gamma \leftrightarrow \tau_{i+1}^\gamma \tau_i^\beta \tau_{i+1}^\alpha \quad (\alpha, \beta, \gamma) \neq \begin{matrix} (1, -1, 1) \\ (-1, 1, -1) \end{matrix} \end{array}$$

Deze transformaties zijn weer lokaal op te vatten. Ze laten ons bijvoorbeeld toe om $\tau_1 \tau_3^{-1} \tau_2$ te vervangen door $\tau_3^{-1} \tau_1 \tau_2$ maar *niet* om $\tau_1 \tau_2 \tau_3^{-1}$ te vervangen door $\tau_3^{-1} \tau_2 \tau_1$.

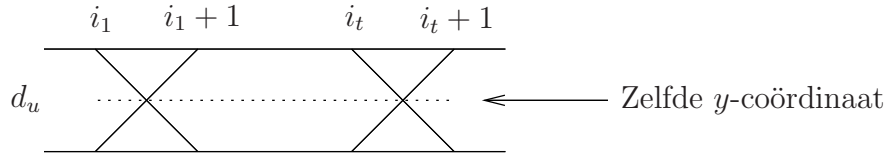
Definitie 3.6.1. $w, w' \in \mathcal{W}$ zijn Reidemeister equivalent (\cong) als er een weg van w naar w' bestaat door middel van Reidemeister moves.

De voldoende stap is het associëren van een woord in $\tau_i^{\pm 1}$ aan een vlecht diagram. We hebben dit reeds gedaan op equivalentie na (zie figuren 3.10, 3.11). Nu willen we echter een beetje nauwkeuriger zijn.

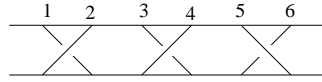
Zij dus d een vlecht diagram. We snijden d weer in schijfjes zodat elk schijfje bestaat uit een reeks kruisingen die elk dezelfde y -coördinaat hebben (zie figuren 3.14, 3.15). Met een \times in figuur 3.10 bedoelen we natuurlijk een \times of een \times . We definiëren $\mu_t = 1$ als we in het eerste geval zijn en $\mu_t = -1$ als we in het tweede geval zijn.



Figuur 3.14: “Schijfjes”

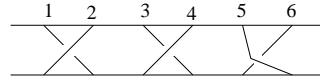


Figuur 3.15:



Figuur 3.16: $\tau_1^{-1}\tau_3^{-1}\tau_5$

→



Figuur 3.17: $\tau_5\tau_1^{-1}\tau_3^{-1}$

Met een schijfje d_u als in figuur 3.15 associëren we het woord $w_u = \tau_{i_1}^{\mu_1} \cdots \tau_{i_t}^{\mu_t}$ en voor d als in figuur 3.14 definiëren we $\epsilon(d) = w_n \cdots w_1$. Dit definieert dus een afbeelding

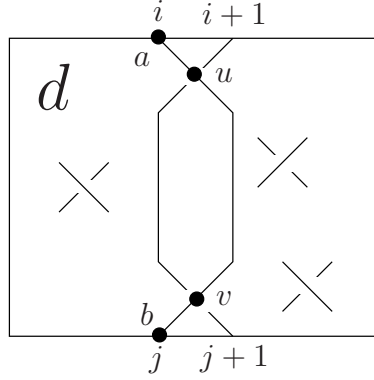
$$\epsilon : \{\text{vlechtdiagrammen met } n \text{ strengen}\} \rightarrow \mathcal{W}$$

Nu vragen we ons af hoe $\epsilon(d)$ verandert onder Reidemeister moves op d .

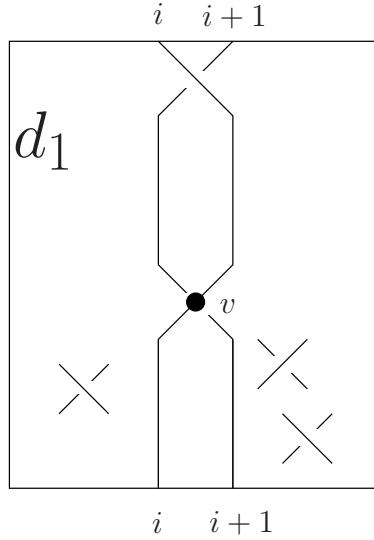
Type 0 moves. Type 0 moves laten snijpunten van plaats veranderen. Door een hele reeks gevallen af te lopen vindt men dat een Type 0 move op d overeenkomt met een reeks Type 0 moves op $\epsilon(d)$. Zie bijvoorbeeld figuren 3.16, 3.17.

Type II moves. In feite zijn er vier verschillende type II moves. Deze zijn alle gelijkaardig. We zullen slechts het geval bekijken aangegeven door figuur 3.18. De eerste opmerking is dat het aantal strengen dat links van het punt a de figuur binnenkomt gelijk moet zijn aan het aantal strengen dat links van het punt b de figuur buiten gaat. Daaruit volgt onmiddellijk dat $i = j$.

Als we nogmaals de figuur 3.18 bekijken dan lijkt het zeker geloofwaardig dat een Type II move op d aanleiding geeft op een Type II move op $\epsilon(d)$. Er is echter een probleem omdat er kruisingen tussen strengen kunnen zijn



Figuur 3.18: De situatie vóór een Type II move

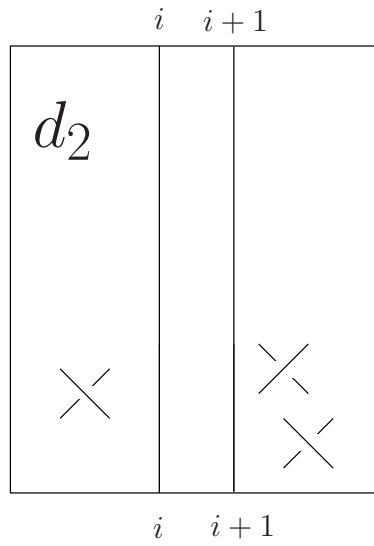


Figuur 3.19: De situatie na het uitvoeren van Type 0 moves

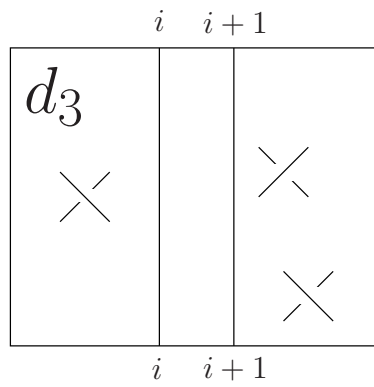
waarvan de y coördinaat ligt tussen de punten aangeduid door u en v . Hierdoor zullen τ_i en τ_i^{-1} niet naast elkaar liggen in $\epsilon(d)$ en we kunnen dus ook geen corresponderende Type II move uitvoeren in $\epsilon(d)$.

De oplossing is dat we Type 0 moves gebruiken om de extra kruisingen onder het punt v te werken zoals aangegeven in de figuur 3.19. Als we dit gedaan hebben dan staan τ_i en τ_i^{-1} wél naast elkaar in $\epsilon(d_1)$. Dus we kunnen nu onze Type II move gelijktijdig uitvoeren in d_1 en $\epsilon(d_1)$. Dit geeft ons figuur 3.20. Tenslotte kunnen we nu weer Type 0 moves uitvoeren om de extra kruisingen terug op dezelfde plaats te krijgen als in figuur 3.18. Dit geeft ons figuur 3.21.

Conclusie: het uitvoeren van een Type II move op d komt overeen met



Figuur 3.20: De situatie na het uitvoeren van een Type II move



Figuur 3.21: De eindsituatie

het uitvoeren van een combinatie van een Type II move tezamen met een reeks Type 0 moves op $\epsilon(d)$.

Type III moves. Hier bekomen we op dezelfde manier dat het uitvoeren van een Type III move op d overeenkomt met het uitvoeren van een combinatie van een Type III move tezamen met een reeks Type 0 moves op $\epsilon(d)$.

Besluit. De afbeelding

$$\bar{\epsilon} : B_n \rightarrow \mathcal{W}/\simeq : \bar{d} \mapsto \overline{\epsilon(d)}$$

is wel gedefiniëerd,

Beschouw nu de volgende “driehoek” van afbeeldingen:

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\bar{\epsilon}} & \mathcal{W}/\simeq \\ & \searrow \theta & \swarrow \beta \\ & C_n(= \mathcal{W}/\sim) & \end{array}$$

waarbij $\beta(\bar{w}) = \bar{w}$. Om te controleren of β goed gedefiniëerd is moeten we nagaan of de volgende relaties gelden in C_n voor $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, +1\}^3$.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i^\alpha \bar{\tau}_j^\beta &= \bar{\tau}_j^\beta \bar{\tau}_i^\alpha & |j - i| \geq 2 \\ \bar{\tau}_i^\alpha \bar{\tau}_i^\alpha &= 1 \\ \bar{\tau}_i^\alpha \bar{\tau}_{i+1}^\beta \bar{\tau}_i^\gamma &= \bar{\tau}_{i+1}^\gamma \bar{\tau}_i^\beta \bar{\tau}_{i+1}^\alpha & (\alpha, \beta, \gamma) \neq \begin{pmatrix} 1, -1, 1 \\ -1, 1, -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Het is een eenvoudige maar enigszins tijdrovende verificatie dat al deze relaties volgen uit de definiërende relaties van C_n (zie (3.7)) en de groepsaxioma's.

Lemma 3.6.2. (a) $\theta\beta\bar{\epsilon} = \text{Id}_{B_n}$.

(b) $\beta\bar{\epsilon}\theta = \text{Id}_{C_n}$.

(c) $\bar{\epsilon}\theta\beta = \text{Id}_{\mathcal{W}/\simeq}$.

Bewijs. We bewijzen slechts (a). De andere eigenschappen zijn analoog. Zij u een willekeurig element van B_n . Dus $u = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \sigma_{i_t}^{\epsilon_t}$ voor zekere $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$. Definiëer $w = \tau_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \tau_{i_t}^{\epsilon_t}$. Dan berekenen we $\theta\beta\bar{\epsilon}(u) = \theta\beta(\bar{w}) = \theta(w) = u$ \square

Gevolg 3.6.3. θ is een isomorfisme en β is een bijectie (met andere woorden de relaties \sim en \simeq vallen samen).

In het vervolg zullen we nu B_n en C_n indentificeren en schrijven

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})_i, (\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i)_{|j-i| \geq 2} \rangle \quad (3.8)$$

Dit is een licht “abuus der notatie” omdat de generatoren van B_n gegeven worden door $(\sigma_i)_i$ en die van de rechterzijde van (3.8) door $(\bar{\sigma}_i)_i$. We zullen echter deze twee verzamelingen generatoren identificeren behalve wanneer dit tot verwarring aanleiding kan geven.

3.7 De lage vlechtgroepen

Het is duidelijk dat B_1 slechts 1 element bevat. B_1 is dus de triviale groep.

Voor B_2 hebben

$$B_2 = \langle \sigma_1 \mid \rangle$$

(geen relaties). Dus

$$B_2 = \{\sigma_1^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Tenslotte beschouwen we

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$

Stelling 3.7.1. *Definiëer*

$$G = \langle u, v \mid u^2 = v^3 \rangle$$

Er is een uniek isomorfisme $\phi : G \rightarrow B_3$ met de eigenschap.

$$\phi(u) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

$$\phi(v) = \sigma_1\sigma_2$$

Bewijs. Definiëer

$$u' = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

$$v' = \sigma_1\sigma_2$$

We hebben

$$\begin{aligned} (u')^2 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ &= (v')^3 \end{aligned}$$

Volgens Stelling 3.5.3(e) is er een uniek groepshomomorfisme met de eigenschap $\phi(u) = u'$, $\phi(v) = v'$. We moeten enkel nog bewijzen dat ϕ een isomorfisme is. Dit kunnen we doen door een expliciet inverse $\theta : B_3 \rightarrow G$ te definiëren via

$$\theta(\sigma_1) = v^{-1}u$$

$$\theta(\sigma_2) = uv^{-1}$$

Zoals voor ϕ verifiëert men dat het groepshomomorfisme θ bestaat en dat het een tweezijdig inverse is van ϕ . Dit laatste moet men enkel controleren op de generatoren σ_1, σ_2 van B_2 en u, v van G . \square

Het is nu duidelijk dat $z = u^2 (= v^3)$ een element is van het centrum van G . We hebben immers

$$\begin{aligned} uz &= u \cdot u^2 = u^2 \cdot u = zu \\ vz &= v \cdot v^3 = v^3 \cdot v = zv \end{aligned}$$

Definiëer nu

$$\begin{aligned} \bar{G} &= G / \{z^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \langle u, v \mid u^2 = 1, v^3 = 1 \rangle \end{aligned}$$

\bar{G} blijkt een groep te zijn die in andere gebieden van de wiskunde (onder andere de getaltheorie) heel frequent opduikt.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) &= \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1\} \\ \mathrm{PSl}_2(\mathbb{Z}) &= \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Stelling 3.7.2. *Er is een isomorfisme*

$$\mu : \bar{G} \rightarrow \mathrm{PSl}_2(\mathbb{Z})$$

met de eigenschap

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \\ \mu(v) &= \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

We geven geen bewijs van deze stelling. Dat μ bestaat volgt op de gebruikelijke manier uit Stelling 3.5.3(e).

Naarmate n stijgt worden de groepen steeds gecompliceerder. Hun structuur is nog steeds niet volledig doorgrond. We bespreken nog twee eigenschappen.

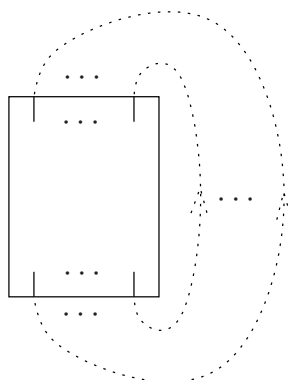
1. Er is een groepshomomorfisme

$$B_n \rightarrow S_n : \sigma_i \mapsto (i, i+1)$$

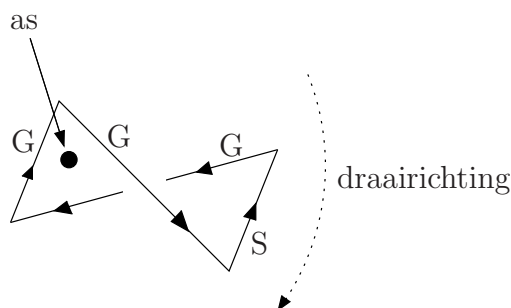
waarbij S_n de groep van permutaties van $\{1, \dots, n\}$ is.

2. Het centrum van B_n is een cyclische groep gegenereerd door

$$(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$$



Figuur 3.22: De sluiting van een vlecht (met oriëntatie).



Figuur 3.23: De keuze van een as en een draairichting

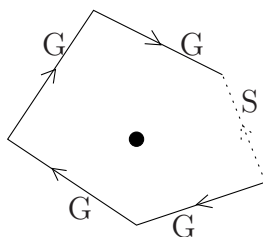
3.8 Elke link is de sluiting van een vlecht

In dit hoofdstukje bewijzen we de volgende stelling.

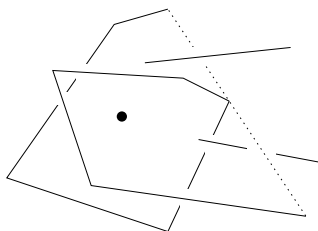
Stelling 3.8.1. *(Alexander) Elke georiënteerde link is de sluiting van een vlecht (zie figuur 3.22).*

Bewijs. Er bestaan verschillende bewijzen voor deze stelling. We geven een bewijs dat het voordeel heeft dat het heel gemakkelijk leidt tot een expliciete constructie.

Als we een diagram hebben van een georiënteerde link dan beginnen we met het kiezen van een as en een draairichting zoals in figuur 3.23. Onze georiënteerde link is nu per definitie opgebouwd uit georiënteerde lijnstukjes. Sommige van die lijnstukjes zullen op de correcte manier georiënteerd zijn ten opzichte van de as en de draairichting, terwijl andere dat niet zullen zijn. Het is zelfs mogelijk dat sommige lijnstukjes in het verlengde van de as liggen. Dit geval sluiten we echter uit door de as een beetje te verplaatsen.



Figuur 3.24: Vervanging van slechte lijnstukken door goede



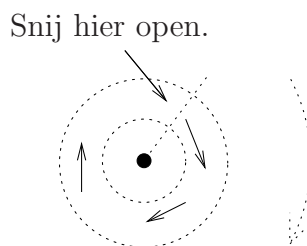
Figuur 3.25: Een meer gecompliceerde situatie

In figuur 3.23 hebben we de correct georiënteerde lijnstukjes met “G” aangegeven en de niet correct georiënteerde met “S”. Het idee is nu dat we die slecht georiënteerde lijnstukjes gaan vervangen zoals in figuur 3.24. Door deze verandering mogen we natuurlijk niet de equivalentieklasse van de link wijzigen. Daarom vervangen we elk slecht lijnstuk door meerdere (indien nodig) “deellijnstukjes” zodat elk deellijnstukje slechts één enkel ander lijnstuk snijdt. Daarna gebruiken we volgende strategie:

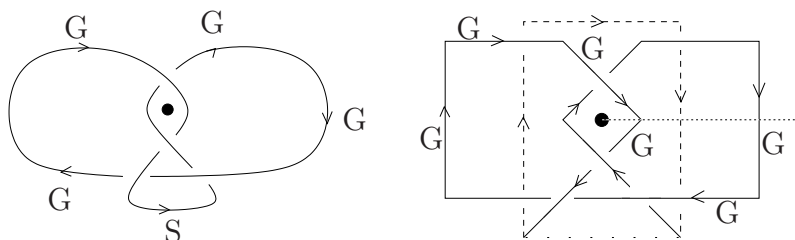
- (a) Als het deellijnstukje een ander lijnstuk snijdt met een onderkruising dan voegen we de nieuwe lijnstukken toe met onderkruisingen.
- (b) Als het deellijnstukje een ander lijnstuk snijdt met een overkruising dan voegen we de nieuwe lijnstukken toe met overkruisingen.
- (c) Als het deellijnstukje geen ander lijnstuk snijdt dan doen we zoals in (a) (dit is een willekeurige keuze).

Als we voor een slecht georiënteerd lijnstuk een dergelijke vervanging uitvoeren voor alle deellijnstukjes dan verminderd het aantal slechte lijnstukken met één (zie figuur 3.25). Dus als we dit herhalen zijn uiteindelijk alle slechte lijnstukken verdwenen. We verkrijgen dan een linkdiagram zoals in figuur 3.26. We snijden dit linkdiagram nu open zoals aangegeven. Dit levert ons een gesloten vlecht. \square

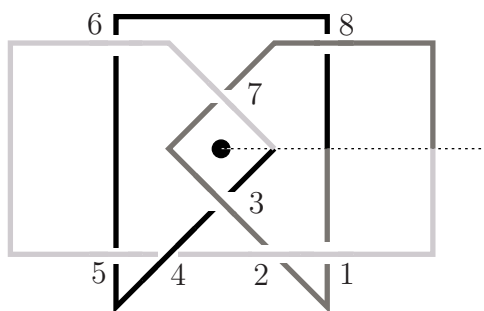
We zullen dit algoritme nu toepassen op een concreet voorbeeld. Onderstel dat we een diagram van de figuur acht knoop hebben zoals aangegeven



Figuur 3.26: Het resultaat van ons algoritme



Figuur 3.27: De figuur acht knoop. Figuur 3.28: Toepassing van het algoritme.



Figuur 3.29: Vervolg van het algoritme.

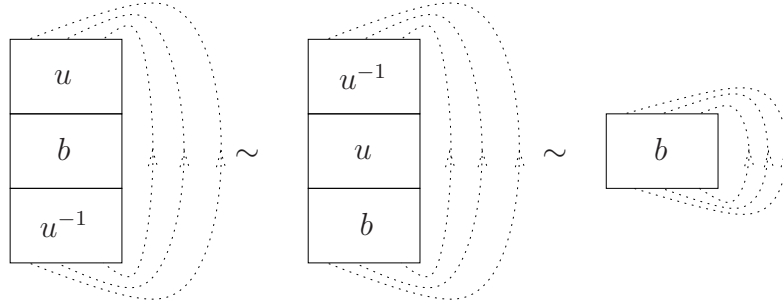


Figuur 3.30: Resultaat van het algoritme.

in figuur 3.27. Zoals aangegeven in figuur 3.28 vervangen we het slecht georiënteerde lijnstuk door een goed georiënteerd. Merk op dat we dit opzettelijk op een onhandige manier gedaan hebben.

In figuur 3.29 hebben we nu de resulterende strengen aangegeven. Tenslotte geeft dit ons een vlecht zoals aangegeven in figuur 3.30. In de groep B_3 wordt deze vlecht beschreven als $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$ wat vereenvoudigt tot $\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$. We hebben dus uiteindelijk aangetoond:

$$\text{“figuur acht knoop”} = \text{sluiting}(\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1})$$



Figuur 3.31: De sluiting is invariant onder conjugatie.

3.9 De stelling van Markov

Nu we weten dat elke link de sluiting van een vlecht is, is de volgende voor de hand liggende vraag wanneer twee vlechten equivalente sluitingen hebben. Een eerste geval wordt gegeven door het volgende lemma.

Lemma 3.9.1. *Zij $b, u \in B_n$. Dan geldt $\text{sluiting}(u^{-1}bu) \sim \text{sluiting}(b)$.*

Bewijs. Dit volgt uit figuur 3.31. □

Er zijn echter andere manieren waarop twee vlechten dezelfde link kunnen geven. Als voorbeeld bekijken we de sluitingen van σ_1 en σ_1^{-1} in $B_2 \cong \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \text{sluiting}(\sigma_1) &= \text{diagram of } \sigma_1 \text{ closure} \sim \text{circle} \\ \text{sluiting}(\sigma_1^{-1}) &= \text{diagram of } \sigma_1^{-1} \text{ closure} \sim \text{circle} \end{aligned}$$

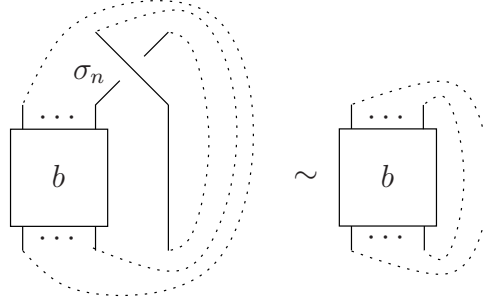
Dus σ_1 en σ_1^{-1} hebben dezelfde sluiting. Ze zijn echter niet geconjugeerd in $B_2 \cong \mathbb{Z}$ aangezien \mathbb{Z} een abelse groep is en σ_1 een generator.

We kunnen dit voorbeeld veralgemenen. Zij $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$ de afbeelding die $\sigma_i \in B_n$ stuurt naar $\sigma_i \in B_{n+1}$. Meetkundig wordt i gegeven door

$$\boxed{b} \mapsto \boxed{b} \begin{array}{c} n+1 \\ | \\ n+1 \end{array}$$

We hebben nu het volgende lemma:

Lemma 3.9.2. *Zij $b \in B_n$. Dan geldt $\text{sluiting}(b) \sim \text{sluiting}(i(b)\sigma_n^{\pm 1})$.*



Figuur 3.32: Een “Markov” move

Bewijs. Zie figuur 3.32. □

We hebben nu de volgende stelling:

Stelling 3.9.3. (Markov) Zij $b \in B_n$, $b' \in B_m$. Dan geldt

$$\text{sluiting}(b) \sim \text{sluiting}(b')$$

als en slechts als b kan uit b' verkregen worden door een opeenvolging van één van de volgende operaties.

- (a) Conjugatie in een zekere B_t .
- (b) $c \in B_t$ vervangen door $i(c)\sigma_t^{\pm 1}$ of het omgekeerde.

We geven geen bewijs van deze stelling omdat het nogal gecompliceerd is.

3.10 Nieuwe methode om linkinvarianten te construeren

We zoeken functies

$$\phi : \coprod_n B_n \rightarrow S$$

waarbij S een verzameling is, die aan de volgende voorwaarden voldoet

$$\forall u, b \in B_n : \phi(u^{-1}bu) = \phi(b) \tag{3.9}$$

$$\forall b \in B_n : \phi(i(b)\sigma_n^{\pm 1}) = \phi(b) \tag{3.10}$$

De stelling van Markov impliceert dat dit een (georiënteerde) linkinvariant definiëert via

$$\phi(\text{sluiting}(b)) = \phi(b)$$

De bedoeling is nu (ruwweg) om zulke ϕ te realizeren via acties van B_n op andere objecten. We zullen eerst het geval beschouwen waarop B_n werkt op een verzameling.

4 Acties van B_n op verzamelingen

4.1 Groepacties

Indien W een verzameling is dan noteren we met $\text{Sym}(W)$ de permutaties van W . Een actie van een groep G op W is een groepshomomorfisme

$$\rho : G \rightarrow \text{Sym}(W)$$

Indien $g \in G$, $w \in W$ dan noteren we

$$gw = \rho(g)(w) \tag{4.1}$$

We kunnen een actie ook definiëren met de corresponderende afbeelding

$$G \times W \rightarrow W : (g, w) \mapsto gw$$

De corresponderende ρ (gedefinieerd door (4.1)) is een groepshomomorfisme indien

$$\begin{aligned} g(hw) &= (gh)w \\ ew &= w \end{aligned}$$

waarbij e het eenheidselement is van G .

Zij $g \in G$. We definiëren

$$W^g \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W \mid gw = w\}$$

Onderstel nu $|W| < \infty$.

Lemma 4.1.1. *De functie*

$$G \rightarrow \mathbb{N} : g \mapsto |W^g|$$

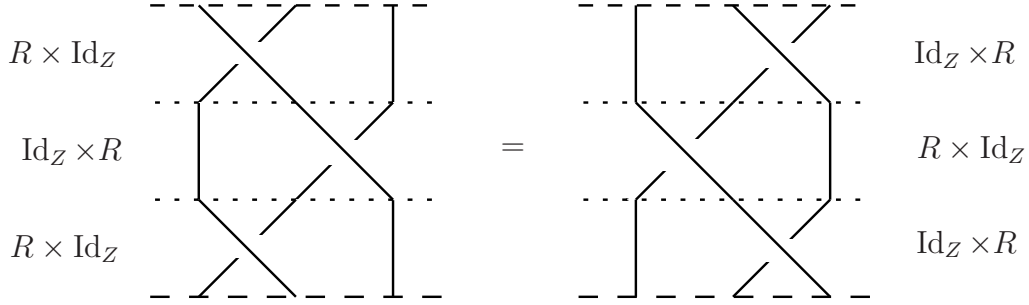
is constant op conjugatieklassen.

Bewijs. $W^{ugu^{-1}} \rightarrow W^g : w \mapsto u^{-1}w$ is een bijectie (oefening) en dus $|W^{ugu^{-1}}| = |W^g|$. \square

4.2 De (verzamelingstheoretische) Yang-Baxter vergelijking

Hieronder is Z een eindige verzameling. We noteren met Z^n het n -voudige cartesisch product $Z \times \cdots \times Z$.

Indien R een element is van $\text{Sym}(Z^2)$ dan zijn $R \times \text{Id}_Z$ en $\text{Id}_Z \times R$ elementen van $\text{Sym}(Z^3)$.



Figuur 4.1: De verzamelingstheoretische Yang-Baxter vergelijking

Definitie 4.2.1. R voldoet aan de verzamelingstheoretische Yang-Baxter vergelijking indien

$$(R \times \text{Id}_Z) \circ (\text{Id}_Z \times R) \circ (R \times \text{Id}_Z) = (\text{Id}_Z \times R) \circ (R \times \text{Id}_Z) \circ (\text{Id}_Z \times R)$$

Om deze vergelijking te onthouden kunnen we het volgende memotechnisch middel gebruiken. Schrijf R als \times en Id_Z als $|$. Dan verkrijgen we figuur 4.1. De Yang-Baxter vergelijking blijkt dus overeen te komen met een Type III Reidemeister move.

We bespreken nu enige oplossingen van de YB-vergelijking. Allereerst is er natuurlijk de triviale oplossing

$$\tau : Z^2 \rightarrow Z^2 : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$$

Een ander oplossing volgt uit het concept van een driekleuring dat we eerder hebben ingevoerd.

Stelling 4.2.2. $Z = \{R, G, B\}$. *Definiëer*

$$R : Z^2 \rightarrow Z^2$$

als

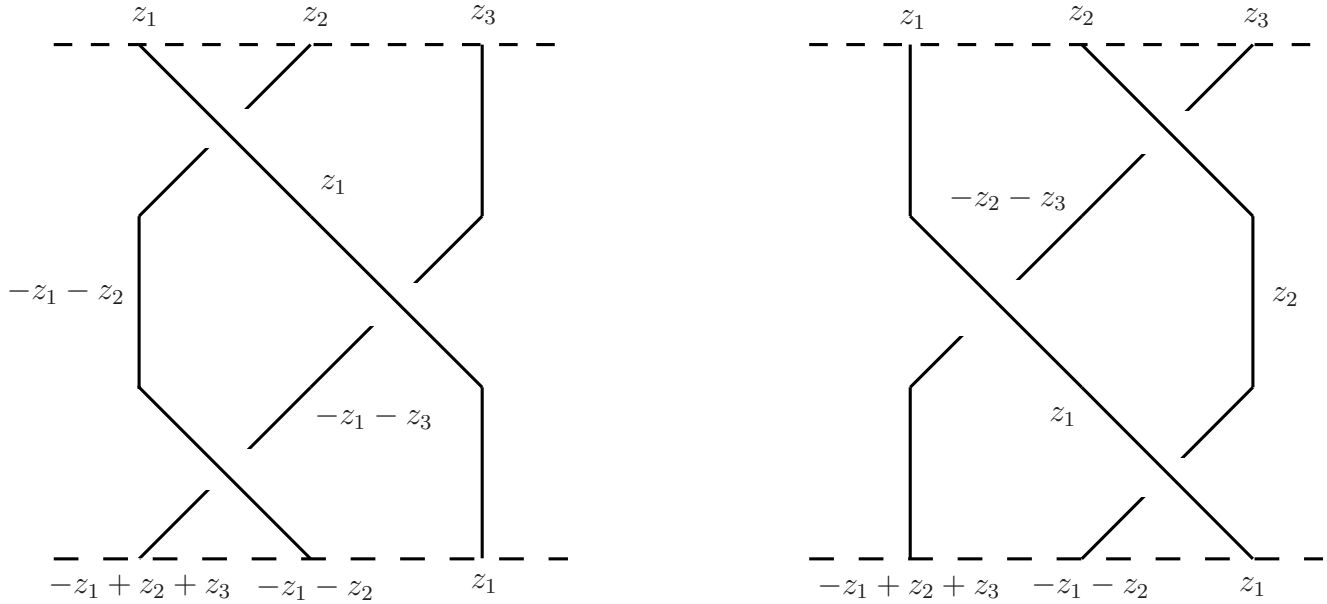
$$R(z_1, z_2) = (z'_1, z'_2) \iff \begin{array}{c} z_1 z_2 \\ \times \\ z'_1 z'_2 \end{array} \text{ is een driekleuring, d.w.z.}$$

$$1. z_1 = z'_2.$$

$$2. |\{z_1, z_2, z'_1, z'_2\}| = 1 \text{ of } 3$$

Het bewijs van deze stelling is eenvoudig maar nogal veel werk. Er bestaat echter een slimmere aanpak. De truuk bestaat er in om onze kleuren meer wiskundige namen te geven.

$$Z = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$



Figuur 4.2: De “driekleuringsoplossing” van de YB-vergelijking

Dan hebben we dat

$$\begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ & \diagdown \quad \diagup \\ & z'_1 \quad z'_2 \end{array}$$

een driekleuring is als en slechts als (oefening)

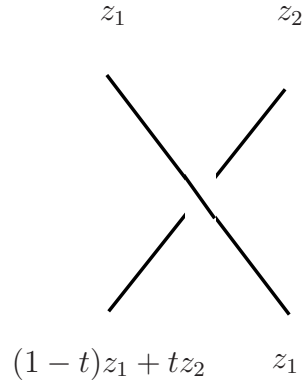
1. $z_1 = z'_2$.
2. $z_1 + z_2 + z'_1 = \bar{0}$.

Het bewijs van Stelling volgt nu uit de berekening in figuur 4.2. Dit bewijs van Stelling 4.2.2 toont ons onmiddellijk de weg naar mogelijke veralgemeeningen.

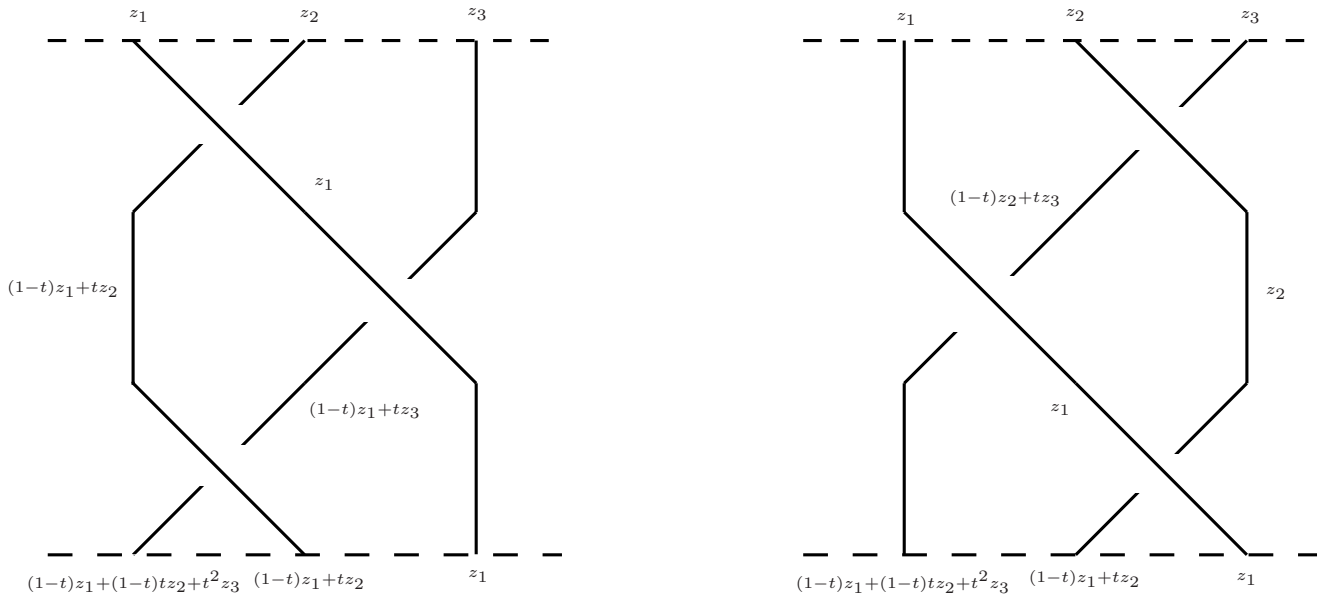
Stelling 4.2.3. *Kies $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ en $t \in \mathbb{Z}$, $\text{ggd}(t, n) = 1$. We identificeren t met zijn congruentieklasse in $Z = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Een oplossing van de verzamelingstheoretische Yang-Baxter vergelijking wordt gegeven door*

$$(z_1, z_2) \mapsto ((1-t)z_1 + tz_2, z_1)$$

(zie Figuur 4.3).



Figuur 4.3: Een “meerkleurenoplossing” van de YB-vergelijking



Figuur 4.4: Nagaan van de YB-vergelijking

Bewijs. Dit is weer een berekening zoals in Figuur 4.4. □

Merk op dat het geval $(t, n) = (2, 3)$ overeenkomt met driekleuringen.

4.3 Acties van B_n

Hieronder is Z een eindige verzameling. Voor $R \in \text{Sym}(Z^2)$ een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking definiëren we

$$R_i = \underbrace{\text{Id}_Z \times \cdots \times \text{Id}_Z}_{i-1} \times R \times \underbrace{\text{Id}_Z \times \cdots \times \text{Id}_Z}_{n-i-1} : Z^n \rightarrow Z^n$$

Stelling 4.3.1. *De afbeelding*

$$\rho_R : B_n \rightarrow \text{Sym}(Z^n) : \sigma_i \mapsto R_i$$

definieert een actie van B_n op Z^n .

Bewijs. Dit is volkomen analoog aan het bewijs van Stelling 7.3.1 hieronder. \square

Met behulp van deze actie definiëren we nu een functie

$$\phi_R : \coprod_n B_n \rightarrow \mathbb{N} : (b \in B_n) \mapsto |(Z^n)^b|$$

die constant is op conjugatieklassen.

Stelling 4.3.2. *Onderstel dat voor alle $z_1, z'_1 \in Z$ we hebben*

$$\#\{z_2 \in Z \mid R(z_1, z_2) = (z'_1, z_2)\} = \begin{cases} 1 & z_1 = z'_1 \\ 0 & z_1 \neq z'_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Dan is ϕ_R invariant onder de tweede Markov move en definieert dus een (georiënteerde) linkinvariant via

$$\phi_R(\text{sluiting}(b)) = \phi_R(b)$$

Bewijs. Onderstel dat (4.2) waar is en zij $b \in B_n$. Hoe ziet een element van $(Z^{n+1})^{i(b)\sigma_n}$ eruit (zie Figuur 4.5)? Uit (4.2) volgt het dat z_{n+1} bestaat als en slechts als $z_n = z'_n$ en in dat geval is z_{n+1} uniek. Dit betekent dat de afbeelding

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \mapsto (z_1, \dots, z_n)$$

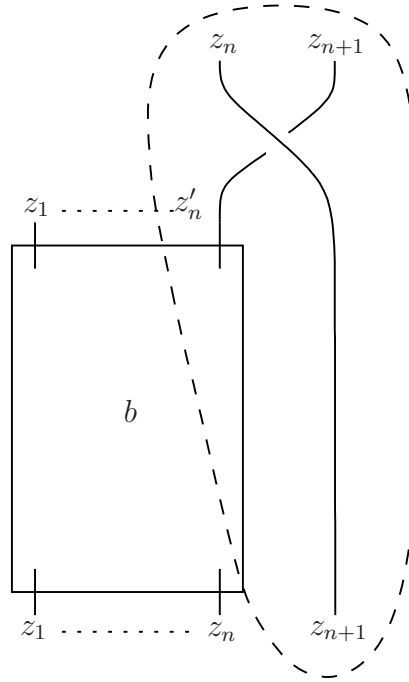
een bijectie definieert tussen $(Z^{n+1})^{i(b)\sigma_n}$ en $(Z^n)^b$ en dus

$$\phi_R(i(b)\sigma_n) = \phi_R(b)$$

Het bewijs voor

$$\phi_R(i(b)\sigma_n^{-1}) = \phi_R(b)$$

We moeten enkel opmerken dat (4.2) equivalent is met de bewering die verkregen wordt door in (4.2) R te vervangen door R^{-1} . \square



Figuur 4.5: Een element van $(Z^{n+1})^{i(b)\sigma_n}$

Voorbeeld 4.3.3. (4.2) is voldaan voor de oplossing van de YB-vergelijking gegeven in Figuur 4.3. Dit volgt uit het feit het stelsel (met z_2 als onbekende)

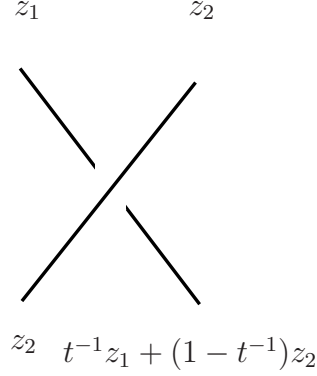
$$\begin{aligned} (1-t)z_1 + tz_2 &= z'_1 \\ z_1 &= z_2 \end{aligned}$$

een oplossing heeft als en slechts als $z'_1 = z_1$. Vanwege de tweede vergelijking $z_1 = z_2$ is de oplossing uiteraard uniek indien ze bestaat.

4.4 Een uitgewerkt voorbeeld

In deze sectie is R de oplossing van de Yang-Baxter vergelijking die overeenkomt met Figuur 4.3. Voor het gebruik hieronder merken we op dat R^{-1} gegeven wordt door Figuur 4.6.

We gaan ϕ_R uitrekenen voor de figuur acht knoop. Voor de eenvoudigheid zullen we onderstellen dat $n = p$ een oneven priemgetal is. In het bijzonder is dan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ een lichaam. D.w.z. elk van nul verschillend element heeft een inverse. We zullen meestal elementen van $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ beschrijven door middel van een corresponderend geheel getal (met andere woorden: we laten meestal overlijningen weg).



Figuur 4.6: De “inverse” van Figuur 4.3

Uiteraard zal het resultaat van onze berekening afhangen van de keuze van (t, p) maar we laten deze voorlopig vrij.

We hebben ϕ_R ingevoerd via vlechten. Dit om het belang van de Yang-Baxter vergelijking goed te laten uitkomen. Voor de berekeningen is dit echter onhandig omdat we dan een link eerst als een sluiting van een vlecht moeten schrijven en dit is niet altijd helemaal triviaal. Gelukkig is het zo dat we ϕ_R van een link ook rechtstreeks kunnen uitrekenen (op dezelfde manier dat we het aantal driekleuringen rechtstreeks kunnen tellen). Alhoewel het niet moeilijk is laten we het bewijs van dit feit achterwege. We zullen het feit echter gebruiken in onderstaande berekeningen.

Om ϕ_R te berekenen van de figuur acht knoop berekenen bekijken we Figuur 4.7. Hierbij hebben we

$$\begin{aligned}
 w &= (1 - t)x + ty \\
 u &= (1 - t)y + tx \\
 y' &= (1 - t^{-1})w + t^{-1}u = (3 - t - t^{-1})x + (t + t^{-1} - 2)y
 \end{aligned}$$

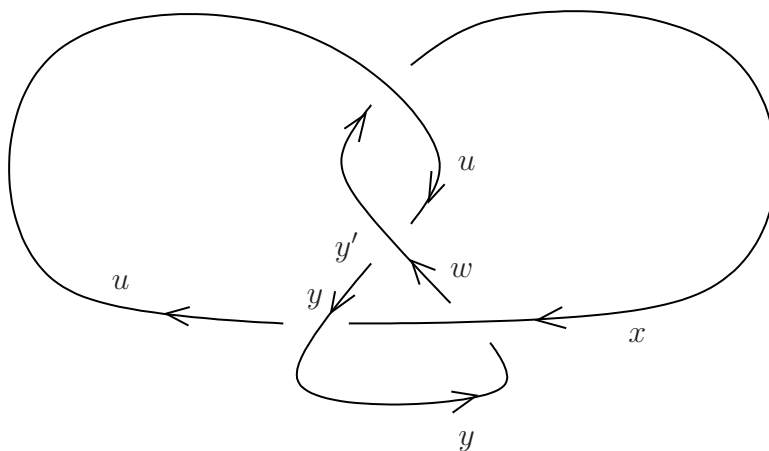
Uit $y = y'$ halen we

$$(3 - t - t^{-1})x = (3 - t - t^{-1})y$$

Indien $3 - t - t^{-1} \neq 0$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dan volgt $x = y$ en dus

$$\phi_R \left(\text{link} \right) = p = \phi_R \left(\text{circle} \right)$$

wat niet interressant is.



Figuur 4.7: ϕ_R van de figuur acht knoop

We zijn dus geïnteresseerd in paren (t, p) waarbij

$$3 - t - t^{-1} = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

Dit is equivalent met

$$\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \quad \text{in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad (4.3)$$

($\bar{2} \neq \bar{0}$ want p is oneven).

Met andere woorden we moeten p zodanig kiezen dat 5 een kwadraat is modulo p . Dan hebben we voor geschikte t (een oplossing van (4.3)) dat

$$\phi_R \left(\text{figuur acht knoop} \right) = p^2$$

en dus volgt het dat de figuur acht knoop niet triviaal is. Merk op dat $t = \bar{0}$ nooit een oplossing van de t -vergelijking is.

Om ons te amuseren bekijken we lage p .

| p | Is 5 een kwadraat modulo p ? |
|-----|--------------------------------|
| 3 | <i>Neen</i> |
| 5 | $5 \cong 0^2 \text{ mod } 5$ |
| 7 | <i>Neen</i> |
| 11 | $5 \cong 4^2 \text{ mod } 11$ |
| 13 | <i>Neen</i> |
| 17 | <i>Neen</i> |
| 19 | $5 \cong 9^2 \text{ mod } 19$ |

Hieruit kunnen we het volgende regeltje raden

$$5 \text{ is een kwadraat modulo } p \iff p = 5 \text{ of } p \cong 1, 5 \pmod{5}$$

Dit is inderdaat correct en kan bewezen worden met de zogenaamde “kwadratisch reciprociteitswet”.

Het kleinste “goede paar” is dus

$$(t, p) = (4, 5)$$

Opmerking 4.4.1. Merk op dat in bovenstaande berekening op natuurlijke manier het (Laurent) polynoom $-t^{-1} + 3 - t$ verscheen. Dit blijkt het *Alexander polynoom* van de figuur acht knoop te zijn. Dit is geen toeval. Het Alexander polynoom was een der eerste knopeninvarianten. Hij werd in 1927 door Alexander ontdekt.

5 Vectorruimten en tensorprodukt

In dit hoofdstukje zijn U, V, W, U', V', W' vectorruimten over \mathbb{C} die niet noodzakelijk eindigdimensionaal hoeven te zijn. We voeren enige standaard notaties in:

$$\begin{aligned}\text{Hom}(U, V) &= \{\text{lineaire afbeeldingen } U \rightarrow V\} \\ \text{End}(U) &= \text{Hom}(U, U) \\ \text{Aut}(U) &= \{\text{omkeerbare elementen in } \text{End}(U)\} \\ \text{Hom}^{(2)}(U, V; W) &= \{\text{bilineaire afbeeldingen } U \times V \rightarrow W\}\end{aligned}$$

5.1 Constructie en hoofdeigenschap

We gaan nu het zogenaamde tensorprodukt $U \otimes V$ definiëren. De constructie van het tensorprodukt is redelijk abstract maar de eigenschappen zijn echter eenvoudig te begrijpen. Het tensorprodukt is één van die begrippen in de wiskunde dat gebruikt wordt door middel van zijn eigenschappen en niet door middel van zijn constructie.

Beginnen we dus met de constructie. Zij H de vectorruimte met basis $U \times V$. Merk op dat de kardinaliteit van $U \times V$ groter of gelijk is aan die van het continuüm. Dus H is een *enorm groot object*. We gaan echter enkel een quotiënt van H gebruiken. Zij $J \subset H$ de deelvectorruimte van H

voortgebracht door de volgende elementen.

$$\begin{aligned}(u + u', v) - (u, v) - (u', v) \\ (u, v + v') - (u, v) - (u, v') \\ (\lambda u, v) - \lambda(u, v) \\ (u, \lambda v) - \lambda(u, v)\end{aligned}$$

voor alle $u, u' \in U$, $v, v' \in V$, $\lambda \in k$.

We definiëren het tensorprodukt $U \otimes V$ van U en V als H/J . Als $u \in U$, $v \in V$ dan noteren we (u, v) met $u \otimes v$. Het symbool $u \otimes v$ heeft de volgende eigenschappen.

$$\begin{aligned}(u + u') \otimes v &= u \otimes v + u' \otimes v \\ u \otimes (v + v') &= u \otimes v + u \otimes v' \\ (\lambda u) \otimes v &= \lambda(u \otimes v) \\ u \otimes (\lambda v) &= \lambda(u \otimes v)\end{aligned}$$

Een meer compacte formulering van deze eigenschappen is zeggen dat de afbeelding

$$\phi_{U,V} : U \times V \rightarrow U \otimes V$$

bilineair is.

Opmerking 5.1.1. Niet alle elementen van $U \otimes V$ zijn van de vorm $u \otimes v$. Elementen van $U \otimes V$ van de vorm $u \otimes v$ worden *ontbindbaar* genoemd. Toon aan dat elk element van $U \otimes V$ een eindige som is van ontbindbare elementen. Met andere woorden elke $w \in U \otimes V$ kan geschreven worden als

$$w = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_n \otimes v_n$$

met $(u_i)_i \in U$, $(v_i)_i \in V$.

Stelling 5.1.2. (*Hoofdeigenschap*)

- (a) $\phi_{U,V}(U \times V)$ brengt $U \otimes V$ voort.
(b) Voor alle $\theta \in \text{Hom}^{(2)}(U, V; W)$ geldt dat er een unieke $\mu \in \text{Hom}(U \otimes V, W)$ bestaat zodat

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\theta} & W \\ & \searrow \phi_{U,V} & \nearrow \exists! \mu \\ & U \otimes V & \end{array}$$

commutatief is.

Bewijs. (a) H wordt voortgebracht door de elementen $(u, v) \in U \times V$ (dit is zelfs een basis). Dus $U \otimes V = H/J$ wordt voortgebracht door de elementen $\overline{(u, v)} = u \otimes v$.

- (b) Vanwege (a) is de afbeelding μ uniek als ze bestaat. Het is dus voldoende om μ te construeren.

We definiëren eerst $\mu' : H \rightarrow W$ door de waarde van μ' op de elementen van de basis $U \times V$ vast te leggen: $\mu'((u, v)) = \theta(u, v)$. Uit het feit dat θ bilineair is volgt onmiddellijk dat μ' nul is op de voortbrengers van J en dus $\mu' \mid J = 0$. Met andere woorden er bestaat een lineaire afbeelding $\mu : H/J \rightarrow W$ zodat $\mu(\bar{h}) = \mu'(h)$.

Zij $u \in U$, $v \in V$. We berekenen $(\mu \circ \phi_{U,V})(u, v) = \mu(u \otimes v) = \mu'((u, v)) = \theta(u, v)$. μ heeft dus inderdaad de juiste eigenschap. \square

Informeel zullen we zeggen: “zij $\mu : U \otimes V \rightarrow W$ de afbeelding gedefinieerd door $\mu(u \otimes v) = \theta(u, v)$ ” waarbij het belangrijke aan de uitdrukking $\theta(u, v)$ is dat ze linear in u en v is.

We zullen nu een paar toepassingen geven van dit principe.

Toepassings 5.1.3. Zij $f \in \text{Hom}(U, V)$, $g \in \text{Hom}(U', V')$. Dan wordt $f \otimes g : U \otimes U' \rightarrow V \otimes V'$ gedefinieerd door

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$$

Dit is een correcte definitie aangezien $f(u) \otimes g(v)$ een uitdrukking is die linear is in u en v .

Oefening 5.1.4. Zij f, g zoals boven en $p \in \text{Hom}(V, W)$, $q \in \text{Hom}(V', W')$. Dan geldt $(p \otimes q)(f \otimes g) = (pf) \otimes (qg)$.

5.2 Het eenheidselement

\mathbb{C} is een vectorruimte over zichzelf. We vragen ons af wat $\mathbb{C} \otimes V$ is. Het antwoord hierop is eenvoudig. We hebben een lineaire afbeelding $\psi : V \rightarrow \mathbb{C} \otimes V : v \mapsto 1 \otimes v$ en een lineaire afbeelding $\phi : \mathbb{C} \otimes V \rightarrow V$ gedefinieerd door $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$. Deze twee afbeeldingen zijn mekaar inverse en dus $\mathbb{C} \otimes V \cong V$. Analoog bewijzen we $U \otimes \mathbb{C} \cong U$. Een speciaal geval is het isomorfisme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \mu$.

5.3 Commutativiteit

Zij $\tau_{U,V}$ de afbeelding $U \otimes V \rightarrow V \otimes U$ gedefinieerd door $\tau(u \otimes v) = v \otimes u$. Dan geldt duidelijk $\tau_{V,U} \circ \tau_{U,V} = \text{Id}_{U \otimes V}$, $\tau_{U,V} \circ \tau_{V,U} = \text{Id}_{V \otimes U}$. Dus $\tau_{U,V}$ is een isomorfisme. We besluiten dat het tensorprodukt van vectorruimten commutatief is.

5.4 Associativiteit

Stelling 5.4.1. *Er bestaat een uniek isomorfisme $\alpha : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$ met de eigenschap $\alpha(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$.*

Bewijs. Dit is een goede oefening op het gebruik van de eigenschappen van het tensorprodukt. Eerst merken we op dat de elementen $u \otimes (v \otimes w)$ de vectorruimte $U \otimes (V \otimes W)$ voortbrengen (oefening). Dus de afbeelding α is uniek als ze bestaat.

Kies $u \in U$ vast en definieer $\alpha_u : V \otimes W \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$ via $\alpha_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Dit is een goede definitie aangezien $(u \otimes v) \otimes w$ lineair is in v en w .

We beweren nu dat α_u lineair is in u . Dus voor $z \in V \otimes W$ moeten we aantonen dat $\alpha_{u+u'}(z) = \alpha_u(z) + \alpha_{u'}(z)$. Aangezien $V \otimes W$ voortgebracht wordt door elementen van de vorm $v \otimes w$ mogen we onderstellen $z = v \otimes w$ met $v \in V$ en $w \in W$. Als we nu de definitie van α_u gebruiken dan zien we dat we moeten aantonen: $((u + u') \otimes v) \otimes w = (u \otimes v) \otimes w + (u' \otimes v) \otimes w$. Dit volgt duidelijk uit de eigenschappen van het symbool “ \otimes ” en dus is onze bewering bewezen.

We definiëren nu $\alpha : U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$ via $\alpha(u \otimes z) = \alpha_u(z)$. Dit is goed gedefinieerd omdat $\alpha_u(z)$ lineair is in u en z . Uit de definitie van α volgt nu $\alpha((u \otimes (v \otimes w))) = \alpha_u(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$.

Dus α is goed gedefinieerd. Om aan te tonen dat α een isomorfisme is construeren we op dezelfde manier een lineaire afbeelding $\beta : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$ met de eigenschap $\beta((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$. Het feit dat α een isomorfisme is volgt uit $\alpha \circ \beta = \text{Id}_{(U \otimes V) \otimes W}$, $\beta \circ \alpha = \text{Id}_{U \otimes (V \otimes W)}$. \square

Uit deze stelling halen we dus dat de haakjes in het tensorprodukt eigenlijk overbodig zijn. Daarom zullen we $U \otimes (V \otimes W)$ en $(U \otimes V) \otimes W$ met elkaar indentificeren en beide noteren als $U \otimes V \otimes W$. De elementen $u \otimes (v \otimes w) \in U \otimes (V \otimes W)$ en $(u \otimes v) \otimes w \in (U \otimes V) \otimes W$ schrijven we beide als $u \otimes v \otimes w$. We gebruiken dezelfde conventie voor langere tensorprodukten $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Men bewijst ook de volgende uitbreiding van Stelling 5.1.2.

Stelling 5.4.2. *Onderstel dat*

$$\theta : V_1 \times \cdots \times V_n \rightarrow W$$

een multilineaire afbeelding is. Dan bestaat er een unieke lineaire afbeelding

$$\mu : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \rightarrow W$$

zodat $\mu(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \theta(v_1, \dots, v_n)$.

5.5 Een basis voor $U \otimes V$

Stelling 5.5.1. *Zij $(e^a)_{a \in A}$ een basis voor U en $(f^b)_{b \in B}$ een basis voor V . Dan is $(e^a \otimes f^b)_{(a,b) \in A \times B}$ een basis voor $U \otimes V$.*

Bewijs. Het is eenvoudig in te zien dat $U \otimes V$ is voortgebracht door $(e^a \otimes f^b)_{(a,b) \in A \times B}$. Het volstaat dus aan te tonen dat deze elementen lineair onafhankelijk zijn. Definieer de afbeeldingen

$$\begin{aligned} \alpha_a : U &\rightarrow \mathbb{C} : \sum_{a \in A} \lambda_a e^a \mapsto \lambda_a \\ \beta_b : V &\rightarrow \mathbb{C} : \sum_{b \in B} \mu_b f^b \mapsto \mu_b \end{aligned}$$

We definiëren γ_{ab} als de samenstelling

$$U \otimes V \xrightarrow{\alpha_a \otimes \beta_b} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \mu} \mathbb{C}$$

Met andere woorden $\gamma_{ab}(u \otimes v) = \alpha_a(u)\beta_b(v)$.

Onderstel nu dat er een lineaire combinatie is $\sum_{(a,b) \in A \times B} \theta_{ab} e^a \otimes f^b$ die gelijk aan nul is. Dan vinden we

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_{cd} \left(\sum_{ab} \theta_{ab} e^a \otimes f^b \right) \\ &= \sum_{ab} \theta_{ab} \alpha_c(e^a) \beta_d(f^b) \\ &= \sum_{ab} \theta_{ab} \delta_{ca} \delta_{db} \\ &= \theta_{cd} \quad \square \end{aligned}$$

Deze stelling leidt tot de zogenaamde “tensornotatie”. Zij $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_m$ vectorruimten en zij $(e_i^a)_a, (f_j^b)_b$ basissen voor U_i en V_j . Dan zijn

$e_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes e_n^{a_n}$ en $f_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes f_m^{a_m}$ basissen van $U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$, $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$. Een willekeurig element $u \in U_1 \otimes \cdots \otimes U_n$ kan dan geschreven worden als

$$u = \sum_{a_1, \dots, a_n} u_{a_1 \dots a_n} e_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes e_n^{a_n}$$

We zullen u_{a_1, \dots, a_n} de *tensorvoorstelling* van u noemen.

Interessanter wordt het wanneer we een lineaire afbeelding

$$f : U_1 \otimes \cdots \otimes U_n \rightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$$

beschouwen. Er bestaan dan $f_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n} \in \mathbb{C}$ zodat

$$f(e_1^{a_1} \otimes \cdots \otimes e_n^{a_n}) = \sum_{b_1 \dots b_m} f_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n} f_1^{b_1} \otimes \cdots \otimes f_m^{b_m}$$

We noemen nu $f_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}$ de tensorvoorstelling van f .

Het is gemakkelijk in te zien hoe deze tensornotatie zich gedraagt onder diverse standaardoperaties. De tensorvoorstelling $f(u)$ wordt bijvoorbeeld gegeven door

$$f(u)_{b_1 \dots b_m} = \sum_{a_1 \dots a_n} f_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n} u_{a_1 \dots a_n}$$

Meer algemeen, als we een lineaire transformatie

$$g : V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \rightarrow W_1 \otimes \cdots \otimes W_t$$

hebben dan geldt

$$(gf)_{c_1 \dots c_t}^{a_1 \dots a_n} = \sum_{b_1 \dots b_m} g_{c_1 \dots c_t}^{b_1 \dots b_m} f_{b_1 \dots b_m}^{a_1 \dots a_n}$$

Zij nu $\alpha : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding en kies in de “eerste V ” en de “tweede V ” dezelfde basis (we zullen dit in het vervolg stilzwijgend doen). Dan definiëren we het *spoor* van α als

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_a \alpha_a^a$$

Lemma 5.5.2. *Dit is goed gedefinieerd.*

Bewijs. Zij (e'^a) een andere basis van V . Dan bestaan er scalaren $(x_b^a)_{a,b}$ en $(y_a^b)_{a,b}$ zodat

$$\begin{aligned} e'^a &= \sum_b x_b^a e^b \\ e^b &= \sum_a y_a^b e'^a \end{aligned}$$

x en y voldoen aan

$$\begin{aligned}\sum_b x_b^a y_c^b &= \delta_c^a \\ \sum_a y_a^b x_c^a &= \delta_c^b\end{aligned}$$

Zij $\alpha_b^a, \alpha_b'^a$ de tensorvoorstellingen van α respectievelijk corresponderend met de basissen e^a, e'^a . Dan hebben we

$$\begin{aligned}\alpha(e'^a) &= \sum_b x_b^a \alpha(e^b) \\ &= \sum_{b,c} x_b^a \alpha_c^b e^c \\ &= \sum_{b,c,d} x_b^a \alpha_c^b y_d^c e'^d\end{aligned}$$

waaruit we halen

$$\alpha_d'^a = \sum_{b,c} x_b^a \alpha_c^b y_d^c$$

Dus

$$\begin{aligned}\sum_a \alpha_a'^a &= \sum_{a,b,c} x_b^a \alpha_c^b y_a^c \\ &= \sum_{b,c} \alpha_c^b \delta_b^c \\ &= \sum_b \alpha_b^b\end{aligned}$$

Dit beëindigt het bewijs. □

Oefening 5.5.3. Zij $\alpha : U \rightarrow U, \beta : V \rightarrow V$ lineaire afbeeldingen. Bewijs dat

$$\text{Tr}(\alpha \otimes \beta) = \text{Tr}(\alpha) \text{Tr}(\beta) \quad (5.1)$$

We zullen de notie van een partieelspoor nodig hebben. Onderstel $\alpha \in \text{Hom}(U \otimes V, U \otimes W)$. Dan definiëren we $\text{Tr}_1(\alpha)$ als de lineaire afbeelding $V \rightarrow W$ met tensor voorstelling $\sum_a \alpha_{ac}^{ab}$. Men toont weer aan dat dit onafhankelijk is van de keuze van basis.

Als β een lineaire afbeelding $U \otimes V \rightarrow W \otimes V$ is dan wordt $\text{Tr}_2(\beta) : U \rightarrow W$ analoog gedefinieerd.

Lemma 5.5.4. *Zij $\alpha \in \text{Hom}(U \otimes V, U \otimes V)$, $\beta \in \text{Hom}(V \otimes W, V \otimes W)$. Dan geldt*

$$\text{Tr}((\alpha \otimes \text{Id}_W)(\text{Id}_U \otimes \beta)) = \text{Tr}(\text{Tr}_1(\alpha) \text{Tr}_2(\beta)) \quad (5.2)$$

Bewijs. Kies basissen voor U, V, W . Als α_{cd}^{ab} , β_{gh}^{ef} de corresponderende tensorvoorstellingen van α , β zijn dan zijn de tensorvoorstellingen van $\alpha \otimes \text{Id}_W$ en $\text{Id}_U \otimes \beta$ gelijk aan $\alpha_{cd}^{ab} \delta_j^i$ en $\delta_l^k \beta_{gh}^{ef}$. Het linkerlid van (5.2) is gelijk aan

$$\sum_{abcdij} \alpha_{cd}^{ab} \delta_j^i \delta_a^c \beta_{bi}^{dj} = \sum_{bd} \left(\sum_a \alpha_{ad}^{ab} \right) \left(\sum_i \beta_{bi}^{di} \right) \quad (5.3)$$

De uitdrukking $\sum_a \alpha_{ad}^{ab}$ is per definitie de tensorvoorstelling van $\text{Tr}_1(\alpha)$ en $\sum_i \beta_{bi}^{di}$ is de tensorvoorstelling van $\text{Tr}_2(\beta)$. De rechterzijde van (5.3) is nu gelijk aan $\text{Tr}(\text{Tr}_1(\alpha) \text{Tr}_2(\beta))$. \square

6 Representaties en karakters

Hieronder is G een groep (niet noodzakelijk eindig).

Definitie 6.1. Een *representatie* van G is een koppel (V, ρ) met

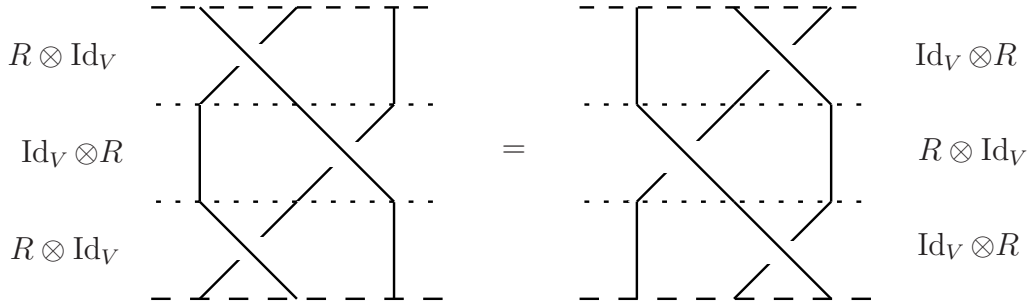
- (a) V een eindig dimensionale vectorruimte/ \mathbb{C} ;
- (b) $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ een groepshomomorfisme.

Als we definiëren $g \cdot v = \rho(g)(v)$ dan is $G \times V \rightarrow V : (g, v) \mapsto g \cdot v$ een actie van G op V door middel van lineaire transformaties. Omgekeerd definieert zo'n actie een representatie van G .

Voor een gegeven representatie (V, ρ) definiëren we het “karakter” $\chi = \chi_{\rho, V} : G \rightarrow \mathbb{C}$ van (V, ρ) via $\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g))$. Er geldt:

$$\begin{aligned}\chi(g^{-1}hg) &= \text{Tr}(\rho(g^{-1}hg)) \\ &= \text{Tr}(\rho(g)^{-1}\rho(h)\rho(g)) \\ &= \text{Tr}(\rho(h)) \\ &= \chi(h)\end{aligned}$$

Een karakter is dus constant op conjugatieklassen in G .



Figuur 7.1: De Yang-Baxter vergelijking

7 Een representatie van de vlechtgroep B_n

7.1 De Yang-Baxter vergelijking

Hieronder is V een vectorruimte met dimensie $m < \infty$. Zij $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$. Dan geldt $R \otimes \text{Id}_V \in \text{Aut}((V \otimes V) \otimes V) = \text{Aut}(V \otimes V \otimes V)$ en $\text{Id}_V \otimes R \in \text{Aut}(V \otimes (V \otimes V)) = \text{Aut}(V \otimes V \otimes V)$.

Definitie 7.1.1. R voldoet aan de *Yang-Baxter* vergelijking als

$$(R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V) = (\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R) \quad (7.1)$$

We kunnen hetzelfde memotechnisch middel gebruiken als in het verzamelingstheoretische geval (zie figuur 7.1).

Voorbeeld 7.1.2. (a) Zij $R = \tau_{V,V}$ (zie §5.3). Dan voldoet R aan de YB-vergelijking.

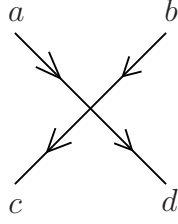
Onderstel nu dat R een willekeurige oplossing van de YB-vergelijking is.

- (b) Zij $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dan voldoet λR ook aan de YB-vergelijking.
- (c) Zij $\alpha \in \text{Aut}(V)$. Dan voldoet $(\alpha \otimes \alpha)R(\alpha^{-1} \otimes \alpha^{-1})$ ook aan de YB-vergelijking.
- (d) R^{-1} voldoet ook aan de YB-vergelijking.

We zullen nu de YB-vergelijking in tensorvorm uitschrijven. Hiervoor kiezen we een basis $(e^a)_{a=1,\dots,m}$ voor V en we definiëren voor $t \in \mathbb{N}$.

$$e^{a_1 \dots a_t} = e^{a_1} \otimes \dots \otimes e^{a_t}$$

We vinden nu het volgende.



Figuur 7.2: De voorstelling van R_{cd}^{ab}

$$\begin{aligned}
(R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V)e^{abc} &= \sum_{de} (R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R)R_{de}^{ab}e^{dec} \\
&= \sum_{defg} (R \otimes \text{Id}_V)R_{fg}^{ec}R_{de}^{ab}e^{dfg} \\
&= \sum_{defghi} R_{hi}^{df}R_{fg}^{ec}R_{de}^{ab}e^{hig}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

alsook

$$\begin{aligned}
(\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V \otimes R)e^{abc} &= \sum_{de} (\text{Id}_V \otimes R)(R \otimes \text{Id}_V)R_{de}^{bc}e^{ade} \\
&= \sum_{defg} (\text{Id}_V \otimes R)R_{fg}^{ad}R_{de}^{bc}e^{fge} \\
&= \sum_{defghi} R_{hi}^{ge}R_{fg}^{ad}R_{de}^{bc}e^{fhi}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

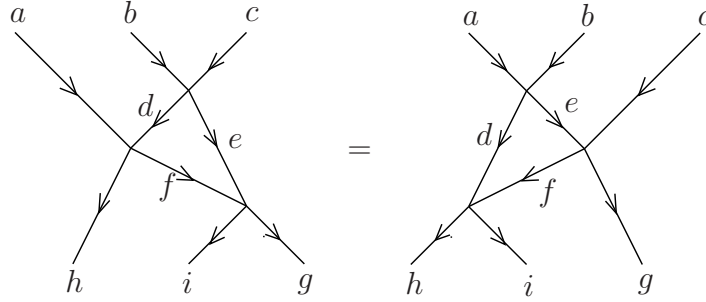
Om (7.2) en (7.3) beter met elkaar overeen te laten komen voeren we een substitutie van indices $[fhi] \mapsto [hig]$ uit op (7.3). Dit levert dan

$$(7.3) = \sum_{defghi} R_{ig}^{fe}R_{hf}^{ad}R_{de}^{bc}e^{hig} \tag{7.4}$$

waaruit we de volgende vergelijking halen

$$\sum_{def} R_{ig}^{fe}R_{hf}^{ad}R_{de}^{bc} = \sum_{def} R_{hi}^{df}R_{fg}^{ec}R_{de}^{ab} \tag{7.5}$$

De vergelijking (7.5) ziet er redelijk afschuwelijk uit maar ze wordt duidelijker als we R_{cd}^{ab} voorstellen zoals in figuur 7.2. We denken dus aan R_{cd}^{ab} als een reactie tussen twee deeltjes a, b die twee nieuwe deeltjes c, d oplevert. De vergelijking (7.5) wordt nu aangegeven in figuur 7.3.



Figuur 7.3: De matrixversie van de YB-vergelijking.

7.2 Verband met verzamelingstheoretische oplossingen

Hieronder zijn S, S', T, T' verzamelingen. We noteren met $\mathbb{C}S$ de vectorruimte met basis S . De elementen van $\mathbb{C}S$ zijn formele sommen

$$\sum_{s \in S} \alpha_s s$$

waarbij tenhoogste een eindig aantal coëfficiënten verschillend van nul zijn.

De constructie $S \mapsto \mathbb{C}S$ is compatiebel met allerlei natuurlijke constructies (in iets meer geavanceerde wiskundige termen is het een zogenaamde monoidale functor).

We geven iets meer detail. Indien $f : S \rightarrow S'$ een afbeelding is dan definiëren we

$$\mathbb{C}f : \mathbb{C}S \rightarrow \mathbb{C}S' : \sum_s \alpha_s s \mapsto \sum_s \alpha_s f(s) \quad (7.6)$$

De volgende observatie geeft het verband tussen fixpunten en sporen:

Stelling 7.2.1. *Onderstel dat S eindig is en zij $f : S \rightarrow S$ een afbeelding. Dan geldt*

$$\text{Tr}(\mathbb{C}f) = |\{s \in S \mid f(s) = s\}|$$

Bewijs. $\text{Tr}(\mathbb{C}f)$ telt het aantal enen op de diagonaal van de matrix voorstelling van $\mathbb{C}f$ met betrekking tot de basis S . Zo'n een op de diagonaal komt precies met een fixpunt van f overeen. Dit bewijst het gestelde. \square

Verder is er een isomorfisme

$$c_{S,T} : \mathbb{C}(S \times T) \rightarrow \mathbb{C}S \otimes \mathbb{C}T : \sum_{s,t} \alpha_{s,t}(s,t) \mapsto \sum_{s,t} \alpha_{s,t} s \otimes t \quad (7.7)$$

Men bewijst dat dit een isomorfisme is door expliciet de inverse op te schrijven.

De twee operaties (7.6) en (7.7) zijn compatiebel met elkaar in de zin dat het volgende diagram commutatief is voor afbeeldingen $f : S \rightarrow S'$, $g : T \rightarrow T'$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(S \times T) & \xrightarrow{c_{S,T}} & \mathbb{C}S \otimes \mathbb{C}T \\ \mathbb{C}(f \times g) \downarrow & & \downarrow \mathbb{C}f \otimes \mathbb{C}g \\ \mathbb{C}(S' \times T') & \xrightarrow{c_{S',T'}} & \mathbb{C}S' \otimes \mathbb{C}T' \end{array} \quad (7.8)$$

Stelling 7.2.2. *Zij R een oplossing van de verzamelingstheoretische Yang-Baxter vergelijking. Dan is $\tilde{R} = c \circ \mathbb{C}R \circ c^{-1}$ een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking.*

Bewijs. Dit volgt formeel uit (7.8) door middel van een aantal grote commutieve diagrammen. We laten daarom het bewijs weg. \square

7.3 Een representatie van B_n

Zij $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$ en definieer voor $i = 1, \dots, n-1$:

$$R_i = \underbrace{\text{Id}_V \otimes \dots \otimes \text{Id}_V}_{i-1 \text{ keer}} \otimes R \otimes \underbrace{\text{Id}_V \otimes \dots \otimes \text{Id}_V}_{n-i-1 \text{ keer}} \in \text{Aut}(V^{\otimes n})$$

Stelling 7.3.1. *Onderstel dat R een oplossing is van de YB-vergelijking. Dan definieert*

$$\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n}) : \sigma_i \mapsto R_i$$

een representatie van B_n op $V^{\otimes n}$.

Bewijs. Vanwege Stelling 3.5.3.(e) moeten we slechts nagaan dat de R_i voldoen aan de vergelijkingen van B_n . Met andere woorden we moeten nagaan dat

$$R_i R_j = R_j R_i \quad \text{voor } |i - j| \geq 2 \quad (7.9)$$

$$R_i R_{i+1} R_i = R_{i+1} R_i R_{i+1} \quad (7.10)$$

Dit is een directe verificatie. Als voorbeeld zullen we (7.9) bewijzen. Het is voldoende deze identiteit na te gaan op voortbrengers van $V^{\otimes n}$. Zulke voortbrengers worden gegeven door $v_1 \otimes \dots \otimes v_n$. Dus we berekenen:

$$\begin{aligned} R_i R_j (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) &= R_i (v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes R(v_j \otimes v_{j+1}) \otimes v_{j+2} \otimes \dots \otimes v_n) \\ &= v_1 \otimes \dots \otimes v_{i-1} \otimes R(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes v_{i+2} \otimes \dots \\ &\quad \otimes v_{j-1} \otimes R(v_j \otimes v_{j+1}) \otimes v_{j+2} \otimes \dots \otimes v_n \end{aligned} \quad (7.11)$$

waarbij we hebben aangenomen dat $i < j$ (het geval $i > j$ is analoog). Het is duidelijk dat $R_j R_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ precies hetzelfde resultaat geeft als (7.11). Dit bewijst (7.9). (7.10) is analoog. \square

7.4 Constructie van linkinvarianten door middel van oplossingen van de YB-vergelijking

Zij R een oplossing van de YB-vergelijking. In de vorige sectie hebben we een bijbehorende representatie $(\rho, V^{\otimes n})$ van B_n geconstrueerd. Dus $\chi_{\rho, V^{\otimes n}} : B_n \rightarrow \mathbb{C}$ is een functie die constant is op conjugatieklassen van B_n . Helaas definieert $\chi_{\rho, V^{\otimes n}}$ in het algemeen geen linkinvariant omdat niet aan (3.10) zal voldaan zijn. We kunnen echter de notie van karakter een beetje veralgemenen.

Lemma 7.4.1. *Zij G een groep en (ρ, V) een representatie van G . Als $a \in \text{End}(V)$ de eigenschap heeft dat $a\rho(g) = \rho(g)a$ voor alle $g \in G$ dan is de functie*

$$\chi_{a, \rho, V} : G \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \text{Tr}(a\rho(g))$$

constant op conjugatieklassen van G .

Bewijs. Oefening. \square

Zij nu $(\rho, V^{\otimes n})$ zoals boven.

Lemma 7.4.2. *Onderstel dat $\eta \in \text{Aut}(V)$ de eigenschap heeft*

$$(\eta \otimes \eta)R = R(\eta \otimes \eta) \quad (7.12)$$

Dan geldt voor alle $b \in B_n$: $\rho(b)\eta^{\otimes n} = \eta^{\otimes n}\rho(b)$.

Bewijs. Het is voldoende dit te bewijzen in het geval dat $b = \sigma_i$.

Dan geldt $\rho(\sigma_i) = R_i$ waarbij R_i is zoals in §7.3. We berekenen

$$\begin{aligned} R_i \eta^{\otimes n} &= (\text{Id}_V^{\otimes i-1} \otimes R \otimes \text{Id}_V^{\otimes n-i-1}) \eta^{\otimes n} \\ &= \eta^{\otimes i-1} \otimes R(\eta \otimes \eta) \otimes \eta^{\otimes n-i-1} \\ &= \eta^{\otimes i-1} \otimes (\eta \otimes \eta)R \otimes \eta^{\otimes n-i-1} \\ &= \eta^{\otimes n} R_i \quad \square \end{aligned}$$

We gaan nu proberen een linkinvariant te construeren van de vorm

$$Y(b) = \text{Tr}(\eta^{\otimes n} \rho(b))$$

voor een $\eta \in \text{Aut}(V)$ die voldoet aan (7.12).

Stelling 7.4.3. *Onderstel dat $R \in \text{Aut}(V \otimes V)$ aan de Yang-Baxter vergelijking voldoet en verder dat $\eta \in \text{Aut}(V)$ voldoet aan*

$$(\eta \otimes \eta)R = R(\eta \otimes \eta) \quad (7.13)$$

$$\text{Tr}_2((\text{Id}_V \otimes \eta)R^{\pm 1}) = \text{Id}_V \quad (7.14)$$

Dan definieert

$$Y : \coprod_n B_n \rightarrow \mathbb{C} : b \mapsto \text{Tr}(\rho(b)\eta^{\otimes n}) \quad (7.15)$$

een invariant van links via

$$Y(\text{sluiting}(b)) = Y(b)$$

Bewijs. Onderstel dat R aan de YB-vergelijking voldoet en verder dat R, η voldoen aan (7.13)(7.14).

Volgens de stelling van Markov moeten we aantonen dat Y voldoet aan (3.9),(3.10). Dat Y voldoet aan (3.9) volgt uit lemmas 7.4.1,7.4.2. We concentreren ons dus op (3.10).

Zij $b \in B_n$. Merk eerst op dat uit de definitie van i en ρ volgt $\rho(i(b)) = \rho(b) \otimes \text{Id}_V$. Het is immers voldoende dit aan te tonen op de generatoren σ_i waar het duidelijk is.

We moeten dus aantonen

$$\text{Tr}(\rho(b)\eta^{\otimes n}) = \text{Tr}((\rho(b) \otimes \text{Id}_V)R_n^{\pm 1}\eta^{\otimes(n+1)}) \quad (7.16)$$

Definieer nu $A = \rho(b)\eta^{\otimes n}$, $B = (\text{Id}_V \otimes \eta)R^{\pm 1}$.

Gebruikmakende van (7.13) berekenen we

$$\begin{aligned} (\rho(b) \otimes \text{Id}_V)R_n^{\pm 1}\eta^{\otimes(n+1)} &= (\rho(b) \otimes \text{Id}_V)\eta^{\otimes(n+1)}R_n^{\pm 1} \\ &= (\rho(b)\eta^{\otimes n} \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V^{\otimes(n-1)} \otimes ((\text{Id}_V \otimes \eta)R^{\pm 1})) \\ &= (A \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V^{\otimes n-1} \otimes B) \end{aligned}$$

Dus (7.16) verandert in

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}((A \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V^{\otimes n-1} \otimes B)) \quad (7.17)$$

We kunnen nu lemma 5.5.4 oproepen met $U = V^{\otimes n-1}$, $V = V$, $W = V$. Dit levert ons

$$\text{Tr}((A \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_V^{\otimes n-1} \otimes B)) = \text{Tr}(\text{Tr}_1(A) \text{Tr}_2(B)) = \text{Tr}(\text{Tr}_1(A)) \stackrel{\text{of}}{=} \text{Tr}(A) \quad (7.18)$$

Dit is hetgeen we moesten bewijzen. \square

7.5 Een concrete oplossing van de Yang-Baxter vergelijking

Nu geven we een concrete oplossing van de Yang-Baxter vergelijking (we noemen dit ook de *standaardoplossing*). Kies $q \in \mathbb{C}^*$.

$$Re^{ab} = \begin{cases} qe^{aa} & \text{als } a = b \\ e^{ba} & \text{als } a < b \\ e^{ba} + (q - q^{-1})e^{ab} & \text{als } a > b \end{cases} \quad (7.19)$$

Deze specifieke oplossing van de YB-vergelijking wordt geconstrueerd met de theorie van de quantumgroepen. Men kan direct verifiëren dat (7.19) inderdaad aan de YB-vergelijking voldoet. Omdat dit een beetje omslachtig is slaan we dit over. Om de berekening uit te voeren is het handig om voor een logische uitdrukking P het symbool $[P]$ te gebruiken dat gedefinieerd wordt als

$$[P] = \begin{cases} 1 & P \text{ is waar} \\ 0 & P \text{ is vals} \end{cases}$$

Dan geldt

$$Re^{ab} = qe^{aa}[a = b] + e^{ba}[a \neq b] + \beta e^{ab}[a > b]$$

met $\beta = q - q^{-1}$. Het gebruik van deze uitdrukking maakt de verificering van de YB-vergelijking iets eenvoudiger.

Een interessante observatie is dat voor $a < b$ de lineaire transformatie R de 4-dimensionale vectorruimte $\mathbb{C}e^{aa} + \mathbb{C}e^{ab} + \mathbb{C}e^{ba} + \mathbb{C}e^{bb}$ invariant laat. Met betrekking tot de basis $e^{aa}, e^{ab}, e^{ba}, e^{bb}$ heeft de restrictie van R de matrix

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

In feite laat R ook al de deelvectorruimten $\mathbb{C}e^{aa}$, $\mathbb{C}e^{ab} + \mathbb{C}e^{ba}$ invariant. Op de eerste van deze deelruimtes wordt R gegeven door de scalaire matrix q en op de tweede heeft R de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q - q^{-1} \end{pmatrix}$$

7.6 De constructie van een linkinvariant

We nemen R zoals in de vorige sectie. We gaan nu aantonen dat er een η bestaat die voldoet aan (7.13) en verder aan (7.14) *op een scalar na*. We laten

een scalair toe omdat dit de berekeningen vereenvoudigt. Achteraf zullen we de scalair wegwerken door η en R met een gepaste factor te vermenigvuldigen.

We definiëren $\eta(e^a) = q^{-2a}e^a$. De matrix van $\eta \otimes \eta$ beperkt tot de deelruimte $\mathbb{C}e^{aa} + \mathbb{C}e^{ab} + \mathbb{C}e^{ba} + \mathbb{C}e^{bb}$ is de diagonaal matrix

$$\begin{pmatrix} q^{-4a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-2(a+b)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2(a+b)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-4b} \end{pmatrix}$$

Deze matrix commuteert duidelijk met de matrix (7.20). Dit toont aan dat (7.13) voldaan is.

We beschouwen nu het eerste geval van (7.14). Definieer $B = (\text{Id}_V \otimes \eta)R$. We berekenen:

$$Be^{ab} = \begin{cases} q^{-2a+1}e^{aa} & \text{als } a = b \\ q^{-2a}e^{ba} & \text{als } a < b \\ q^{-2a}e^{ba} + q^{-2b}(q - q^{-1})e^{ab} & \text{als } a > b \end{cases}$$

Dus in de tensorvoorstelling van B zijn de enige van nul verschillende elementen:

$$\begin{aligned} B_{aa}^{aa} &= q^{-2a+1} \\ B_{ba}^{ab} &= q^{-2a} & \text{indien } a \neq b \\ B_{ab}^{ab} &= q^{-2b}(q - q^{-1}) & \text{indien } a > b \end{aligned}$$

Zij nu $C_c^a = \sum_b B_{cb}^{ab}$. C is de matrix van $\text{Tr}_2(B)$. Er geldt:

$$C_a^a = q^{-2a+1} + \sum_{b=1}^{a-1} q^{-2b}(q - q^{-1}) = q^{-1}$$

en $C_b^a = 0$ indien $a \neq b$. Dus C_b^a is de matrix van $q^{-1} \text{Id}_V$.

We herhalen nu deze berekening met $B = (\text{Id}_V \otimes \eta)R^{-1}$. Een snelle controle leert:

$$R^{-1}e^{ab} = \begin{cases} q^{-1}e^{aa} & \text{als } a = b \\ (q^{-1} - q)e^{ab} + e^{ba} & \text{als } a < b \\ e^{ba} & \text{als } a > b \end{cases}$$

Dus

$$Be^{ab} = \begin{cases} q^{-2a-1}e^{aa} & \text{als } a = b \\ q^{-2b}(q^{-1} - q)e^{ab} + q^{-2a}e^{ba} & \text{als } a < b \\ q^{-2a}e^{ba} & \text{als } a > b \end{cases}$$

Dus de enige van nul verschillende elementen in de tensorvoorstelling van B zijn:

$$\begin{aligned} B_{aa}^{aa} &= q^{-2a-1} \\ B_{ba}^{ab} &= q^{-2a} && \text{indien } a \neq b \\ B_{ab}^{ab} &= q^{-2b}(q^{-1} - q) && \text{indien } a < b \end{aligned}$$

Definieer als boven $C_c^a = \sum_b B_{cb}^{ab}$. Er geldt nu:

$$C_a^a = q^{-2a-1} + \sum_{b=a+1}^m q^{-2b}(q^{-1} - q) = q^{-2m-1}$$

en $C_b^a = 0$ als $a \neq b$. Samenvattend hebben we bewezen

$$\begin{aligned} \text{Tr}_2((\text{Id}_V \otimes \eta)R) &= q^{-1} \text{Id}_V \\ \text{Tr}_2((\text{Id}_V \otimes \eta)R^{-1}) &= q^{-2m-1} \text{Id}_V \end{aligned}$$

Als we nu definiëren $\bar{R} = q^{-m}R$, $\bar{\eta} = q^{m+1}\eta$ dan voldoet het koppel (\bar{q}, \bar{R}) duidelijk aan (7.13)(7.14). Dus als $\bar{\rho} : B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n})$ de representatie geassocieerd aan \bar{R} is dan definieert

$$Y(\text{sluiting}(b)) = Y(b) = \text{Tr}(\bar{\rho}(b)\bar{\eta}^{\otimes n}) \quad (7.21)$$

een linkinvariant.

7.7 De definiërende eigenschappen van Y

Zij Y de linkinvariant zoals die gedefinieerd werd in het vorige hoofdstukje. We zouden die graag in verband brengen met de Jones polynoom. De sleutel hiertoe is dat de R die door (7.19) gedefinieerd wordt aan nog een andere interessante vergelijking voldoet.

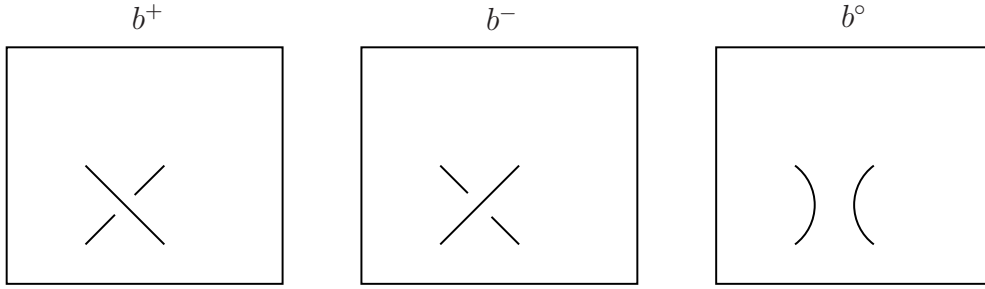
Stelling 7.7.1. *Zij R zoals in (7.19). Er geldt*

$$(R - q \text{Id}_{V \otimes V})(R + q^{-1} \text{Id}_{V \otimes V}) = 0 \quad (\text{De "Hecke" relatie}) \quad (7.22)$$

of equivalent

$$R - (q - q^{-1}) \text{Id}_{V \otimes V} - R^{-1} = 0$$

Bewijs. Het is duidelijk voldoende om dit te verifiëren op de invariante deelruimten van de vorm $\mathbb{C}e^{aa}$ en $\mathbb{C}e^{ab} + \mathbb{C}e^{ba}$ voor $a < b$ (deze brengen immers $V^{\otimes 2}$ voort). Dus we mogen R vervangen door één van de matrices (q) en $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix}$. Men verifieert onmiddellijk dat deze twee matrices aan de vergelijking (7.22) voldoen. \square



Figuur 7.4: Een skeinrelatie tussen vlechten

Gevolg 7.7.2. \bar{R} voldoet aan de vergelijking

$$q^m \bar{R} - q^{-m} \bar{R}^{-1} - (q - q^{-1}) \text{Id}_{V \otimes V} = 0 \quad (7.23)$$

Bewijs. Dit volgt uit de definitie van \bar{R} . \square

Gevolg 7.7.3. Zij $b^+, b^-, b^\circ \in B_n$ vlechten als in figuur 7.4. Dan geldt

$$q^m Y(b^+) - q^{-m} Y(b^-) - (q - q^{-1}) Y(b^\circ) = 0 \quad (7.24)$$

Bewijs. Er geldt $b^+ = b_1 \sigma_i b_2$, $b^- = b_1 \sigma_i^{-1} b_2$ en $b^\circ = b_1 b_2$ voor zekere i en zekere vlechten $b_1, b_2 \in B_n$. Als we $\bar{\rho}$ loslaten op b^+, b^-, b° en (7.23) gebruiken dan vinden we

$$q^m \bar{\rho}(b^+) - q^{-m} \bar{\rho}(b^-) - (q - q^{-1}) \bar{\rho}(b^\circ) = 0$$

Als we tenslotte op deze vergelijking $\text{Tr}(-\bar{\eta}^{\otimes n})$ loslaten dan vinden we (7.24). \square

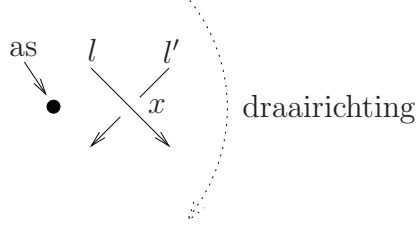
Nu kunnen we de volgende stelling bewijzen.

Stelling 7.7.4. De linkinvariant gedefinieert door (7.21) voldoet aan de volgende skeinrelatie.

$$q^m Y \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) - q^{-m} Y \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) - (q - q^{-1}) Y \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) = 0 \quad (7.25)$$

Verder geldt

$$Y \left(\bigcirc \right) = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \quad (7.26)$$



Figuur 7.5: De keuze van een as en een draairichting

Bewijs. We bewijzen eerst (7.26). Aangezien de cirkel de sluiting is van de een-streng vlecht hebben we

$$\begin{aligned}
 Y\left(\bigcirc\right) &= \text{Tr}(\rho_{\bar{R}}\bar{\eta}) \\
 &= \text{Tr}(\bar{\eta}) \\
 &= q^{-m+1} + \dots + q^{m-1} \\
 &= \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}
 \end{aligned}$$

Als D^+ het diagram van de sluiting van een vlechtdiagram b^+ is (als in figuur 3.22) en D^- , D° zijn de sluitingen van b^- en b° (zie figuur 7.4) dan volgt (7.25) uit (7.24).

In het algemeen zal een diagram D^+ niet onmiddellijk de sluiting van een vlechtdiagram zijn. Daarom gebruiken we de volgende kunstgreep.

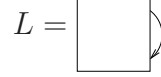
Zij D^+ een diagram dat een deeldiagram van de vorm \times_x bevat en zij D^- , D° de diagrammen die verkregen worden door \times_x te vervangen door \times en $\rangle \langle$.

We gaan nu het algoritme van Alexander (zie §3.8) toepassen op D^+ . We kiezen een as en een draairichting zodat de lijnstukjes l, l' die elkaar snijden in x goedgeoriënteerd zijn (zie figuur 7.5). Als we het algoritme van Alexander toepassen dan kunnen we de lijnstukjes l, l' ongemoeid laten. Dit geeft ons een linkdiagram D'^+ dat de sluiting van een vlechtdiagram b^+ is. Definieer b^- , b° als hierboven en definieer D'^- en D'° analoog aan D^- en D° maar dan vertrekkende van D'^+ . Zij $\alpha = +, -, \circ$. Dan is D'^α de sluiting van b^α . Verder kan D'^α uit D^α verkregen worden door precies de zelfde stappen uit te voeren als dewelke gebruikt werden om D'^+ uit D^+ te verkrijgen. Er volgt $D^\alpha \sim D'^\alpha = \text{sluiting}(b^\alpha)$. Als we dus (7.25) willen bewijzen dan mogen we D^α door D'^α vervangen. Na deze vervanging kunnen we het argument gebruiken dat gegeven werd in de eerste paragraaf van dit bewijs. \square

Hier volgt nog een eigenschap van Y . Zij L een georiënteerde link. Dan geldt

$$Y(L \cup \bigcirc) = Y(L) \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \quad (7.27)$$

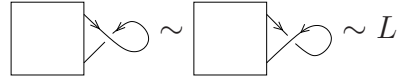
Bewijs. We selecteren een boogje in L . Dus L is van de vorm



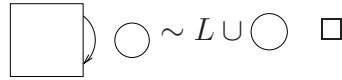
Uit (7.25) halen we de volgende relatie:

$$q^m Y \left(\text{square with loop} \right) - q^{-m} Y \left(\text{square with loop} \right) - (q - q^{-1}) Y \left(\text{square with loop} \cup \bigcirc \right) = 0$$

Het gestelde volgt nu uit het feit dat duidelijk



en



Gevolg 7.7.5. Zij L de triviale link bestaande uit t cirkels. Dan geldt

$$Y(L) = \left(\frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} \right)^t \quad (7.28)$$

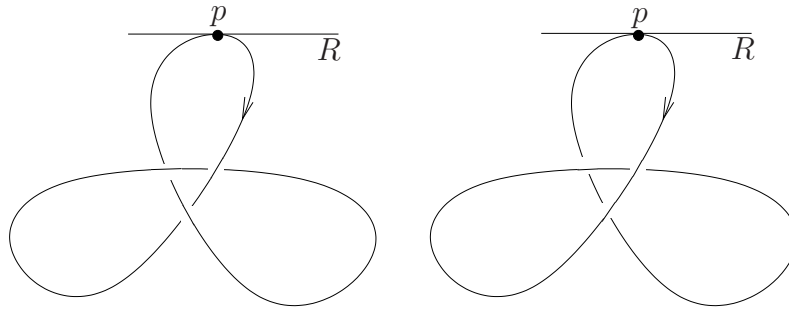
Bewijs. Dit bewijzen we per inductie op t gebruikmakende van (7.26) en (7.27). \square

7.8 Het verband met de Jones polynoom

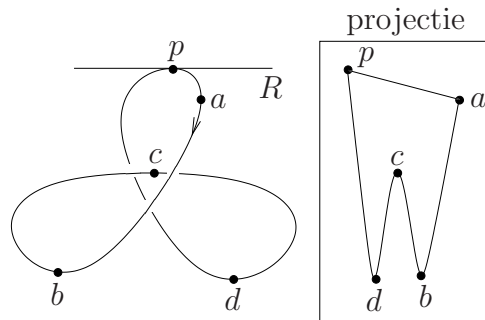
We gaan nu het verband onderzoeken tussen Y en de Jones polynoom. Eerst hebben we een eigenschap van links nodig.

Stelling 7.8.1. Zij D een (georiënteerd) linkdiagram. Dan kunnen we D veranderen in het diagram van een triviale link door een aantal overkruisingen in onderkruisingen te veranderen.

Bewijs. Zij $D_1 \subset D, \dots, D_t \subset D$ de knopen in D . D is de projectie van een link L waarbij L de unie is van knopen K_1, \dots, K_t met projectie D_1, \dots, D_t . We verschuiven nu de K_i in de richting van de z -as zodat alle K_i disjuncte



Figuur 7.6: Het veranderen van de zelfsnijdingen



Figuur 7.7: De projectie op het vlak loodrecht op R

intervallen van z -coördinaten krijgen. Het is nu dus voldoende om een individuele D_i te beschouwen. Anders gezegd: we mogen zonder verlies aan algemeenheid onderstellen dat D een knoop is.

Dus van nu af aan is D een knoop. We kiezen een paar (p, R) waarbij $p \in D$ niet in een zelfsnijding ligt en R een rechte is die D enkel in p snijdt (waarom bestaat zo'n koppel?). We gaan nu D doorlopen in de richting van de oriëntatie, startend in p . Als x een zelfsnijding is in D dan veranderen we x zodanig dat als we de eerste keer door x gaan dat we dan de bovenstreng in x gebruiken. We doen dit voor alle zelfsnijdingen. Als we deze verandering hebben doorgevoerd dan beweren nu dat D de projectie van een triviale knoop K is geworden. We contrueren K als baan van een punt in \mathbb{R}^3 waarvan de projectie D volgt en waarvan de z -coördinaat stijgt in p en vervolgens continue daalt.

We verklaren dit met een figuur (zie figuur 7.6). Om te zien dat we in figuur 7.6 inderdaad een triviale knoop verkregen hebben projecteren op het vlak dat loodrecht op R staat. Dit geeft dan figuur 7.7. \square

Nu kunnen we de volgende stelling bewijzen.

Stelling 7.8.2. *De eigenschappen (7.25) en (7.26) bepalen $Y(L)$ volledig.*

Bewijs. Zij D een diagram. Noteer met $z(D)$ het aantal zelsnijdingen in D en met $u(D)$ het minimaal aantal zelsnijdingen dat we moeten veranderen om van D het diagram van een triviale link te maken. We zullen inductie gebruiken op $(z(D), u(D))$. Als $z(D) = 0$ of $u(D) = 0$ duidelijk dan is $Y(D)$ uniek bepaald door (7.28) (het bewijs hiervan maakt enkel gebruik van (7.25) en (7.26)). Fixeer nu $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ en onderstel dat we reeds bewezen hebben dat $Y(D)$ uniek is voor diagrammen met $z(D) < s$ en voor diagrammen met $z(D) = s$ en $u(D) < t$.

Kies een zelsnijding x in D die in de verzameling zelsnijdingen ligt die het minimum $u(D)$ realiseert. Uit (7.25) blijkt dan dat we $Y(D)$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van $Y(D_1)$ en $Y(D_2)$ waarbij $z(D_1) = z(D)$, $u(D_1) = u(D) - 1$ en $z(D_2) = z(D) - 1$. $Y(D_1)$ en $Y(D_2)$ zijn uniek bepaald per inductie en dus is dit ook het geval voor $Y(D)$. \square

Gevolg 7.8.3. *Onderstel $m = 2$. Dan geldt*

$$Y(L)(q) = (q + q^{-1})X(L)(iq^{-1/2})$$

Bewijs. Uit Oefening 2.1.5 volgt dat $(q + q^{-1})X(L)(iq^{-1/2})$ voldoet aan (7.25). Als L een triviale link is met t componenten dan geldt

$$\begin{aligned} (q + q^{-1})X(L)(iq^{-1/2}) &= (q + q^{-1})(-A^2 - A^{-2})^{t-1} \big|_{A \rightarrow iq^{-1/2}} \\ &= (q + q^{-1})^t \end{aligned}$$

in overeenstemming met (7.28). \square

7.9 De HOMFLY polynoom

Tot nu toe hebben we de geschiedenis een beetje geweld aangedaan. De Jones polynoom zoals die door Jones werd ingevoerd was namelijk niet $X(L)$ maar wel $V(L)(t) = X(L)(t^{-1/4})$. V voldoet aan de skeinrelatie

$$t^{-1}V \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - tP \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \right) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) = 0$$

en verder geldt $V(\bigcirc) = 1$. Merk op dat $V(L)$ een Laurent polynoom is in $t^{1/2}$.

Kort nadat Jones zijn artikel gepubliceerd had bewezen een heleboel mensen gelijktijdig dat $V(L)(t)$ een speciaal geval is van een (Laurent) polynoom $P(L)(x, y)$ in twee variabelen die uniek bepaald wordt door de skeinrelatie

$$xP \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - x^{-1}P \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \right) - yP \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) = 0 \quad (7.29)$$

en $P(\bigcirc) = 1$. Deze nieuwe polynoom werd de HOMFLY polynoom genoemd naar de initialen van zes van zijn ontdekkers. Merk op dat het bestaan van P helemaal niet evident is.

Het verband tussen P en V wordt gegeven door

$$V(L)(t) = P(L)(t^{-1}, t^{1/2} - t^{-1/2})$$

We tonen op dezelfde manier aan als in Gevolg 7.8.3 dat de volgende identiteit geldt

$$Y(L) = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} P(L)(q^{-m}, q^{-1} - q)$$

Met een zekere dosis algebra kan men uit het bestaan van $Y(L)$ een bewijs halen voor het bestaan van $P(x, y)$. We gaan hier echter niet verder op in.

Oefening 7.9.1. Toon aan dat geldt

$$P(L \cup \bigcirc) = \frac{x - x^{-1}}{y} P(L)$$

Als voorbeeld berekenen we nu de HOMFLY-polynoom van de klaverbladknoop. Hiervoor is het handig om de skeinrelatie (7.29) te herschrijven als:

$$\begin{aligned} P \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) &= yx^{-1} P \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) + x^{-2} P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) \\ P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) &= -yx P \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) + x^2 P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

We berekenen nu

$$\begin{aligned} P \left(\begin{array}{c} \text{trefoil knot} \end{array} \right) &= yx^{-1} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) + x^{-2} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) \\ &= yx^{-1} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) + x^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) &= yx^{-1} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) + x^{-2} P \left(\begin{array}{c} \text{link with two components} \end{array} \right) \\ &= yx^{-1} + x^{-2}(x - x^{-1})y^{-1} \end{aligned}$$

Uiteindelijk vinden we

$$\begin{aligned} P \left(\text{figure-eight} \right) &= yx^{-1}(yx^{-1} + x^{-2}(x - x^{-1})y^{-1}) + x^{-2} \\ &= y^2x^{-2} + 2x^{-2} - x^{-4} \end{aligned}$$

Als controle voeren we substitutie $x = t^{-1}$, $y = t^{1/2} - t^{-1/2}$ uit. Dit levert

$$\begin{aligned} V \left(\text{figure-eight} \right) &= (t - 2 + t^{-1})t^2 + 2t^2 - t^4 \\ &= t^3 + t - t^4 \end{aligned}$$

Als we nu de substitutie $t = A^{-4}$ uitvoeren dan vinden we

$$X \left(\text{figure-eight} \right) = A^{-12} + A^{-4} - A^{-16}$$

in overeenstemming met onze berekening in §2.1.

8 Bialgebras en Hopf algebras

8.1 Motivatie

Zij G een groep. Als V, W representaties zijn van G dan bestaat er een natuurlijke manier om $V \otimes W$ en $\text{Hom}(V, W)$ representaties van G te maken. De actie van $g \in G$ op $V \otimes W$ definiëren we via $g \cdot (v \otimes w) = gv \otimes gw$. Dit is goed gedefinieerd aangezien $gv \otimes gw$ lineair in v en w is. De actie van $g \in G$ op $\text{Hom}(V, W)$ definiëren we als

$$(g \cdot f)(v) = gf(g^{-1}v)$$

voor $f \in \text{Hom}(V, W)$ en $v \in V$.

Om te illustreren dat dit niet helemaal evident is bekijken we representaties van \mathbb{C} -algebras. Wat is een algebra? Voor ons is het een een koppel (A, η) waarbij A een ring (met 1) is en $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$ een ringhomomorfisme (zodat $\eta(1) = 1$) is wiens beeld in het centrum $Z(A)$ van A ligt. Via η krijgt A de structuur van een \mathbb{C} -vectorruimte: voor $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A$ definiëren we $\lambda \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} \eta(\lambda)(a)$. Hetzelfde geldt voor A -modulen. In het vervolg zullen we η soms niet expliciet vermelden en gewoon spreken over “de algebra A ”.

Definitie 8.1.1. Zij A een algebra. Dan is een representatie van A een eindigdimensionaal A -moduul. Als V een representatie van A is dan definieert

$$A \rightarrow \text{End}(V) : a \rightarrow (v \mapsto av)$$

een ringhomomorfisme dat we soms met ρ of ρ_V zullen noteren.

Als V, W representaties zijn van een algebra A dan is er geen natuurlijke manier om op $V \otimes W$ en $\text{Hom}(V, W)$ de structuur van een A -representatie te zetten.

Een speciale algebra is de zogenaamde “groepalgebra” $\mathbb{C}G$ van een groep G . $\mathbb{C}G$ bestaat uit de formele sommen $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ waarbij $\alpha_g \in \mathbb{C}$ en waarbij slechts een eindig aantal α_g van nul verschillend zijn. De optelling en vermenigvuldiging worden als volgt gedefinieerd.

$$\begin{aligned} \sum_h \alpha_h h + \sum_g \beta_g g &= \sum_g (\alpha_g + \beta_g) g \\ \left(\sum_h \alpha_h h \right) \left(\sum_g \beta_g g \right) &= \sum_p \left(\sum_{gh=p} \alpha_h \beta_g \right) p \end{aligned}$$

Als V een representatie is van G dan kunnen we V een representatie van $\mathbb{C}G$ maken door te definiëren

$$\left(\sum_g \alpha_g g \right) \cdot v = \sum_g \alpha_g g \cdot v$$

Omgekeerd kunnen we elke representatie van $\mathbb{C}G$ als een representatie van G beschouwen via de inclusie $G \hookrightarrow \mathbb{C}G$. Hieruit volgt dat als V, W twee $\mathbb{C}G$ -representaties zijn dan bestaat er op $V \otimes W$ wel een natuurlijke structuur als $\mathbb{C}G$ -representatie.

Vraag 8.1.2. Wat heeft $\mathbb{C}G$ dat een algemene algebra niet heeft?

De theorie van de Hopf algebras probeert deze vraag te beantwoorden.

8.2 Algebras

Zij (A, η) een algebra als boven. Wat weten we?

- (1) A is een \mathbb{C} -vectorruimte (via de afbeelding $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$).
- (2) De vermenigvuldiging $\cdot : A \times A \rightarrow A$ is bilineair. Dus “ \cdot ” definieert op unieke manier een lineaire afbeelding

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

zodat $a \cdot b = m(a \otimes b)$.

Stelling 8.2.1. *De volgende diagrammen zijn commutatief.*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes \text{Id}_A} & A \otimes A \\ \text{Id}_A \otimes m \downarrow & & m \downarrow \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array} \quad (8.1)$$

$$(8.2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{C} \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_A} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{Id}_A \otimes \eta} & A \otimes \mathbb{C} \\ & \searrow \cong & m \downarrow & \swarrow \cong & \\ & & A & & \end{array}$$

waarbij in het laatste diagram de diagonale pijlen de isomorfismen zijn van §5.2.

Bewijs. Oefening. □

We vinden nu de volgende nieuwe definitie van een algebra die we van nu af aan zullen gebruiken.

Definitie 8.2.2. Een algebra is een triplet (A, m, η) waarbij

- (1) A een \mathbb{C} -vectorruimte is;

(2) $\eta : \mathbb{C} \rightarrow A$ en $m : A \otimes A \rightarrow A$ lineaire afbeeldingen zijn;

(3) De diagrammen (8.1)(8.2) commutatief zijn.

We noemen m het vermenigvuldigingshomomorfisme en η het eenheidshomomorfisme.

Als (A, m, η) een algebra is zoals in de vorige definitie dan definieert m een vermenigvuldiging op A via $ab = m(a \otimes b)$ en $\eta(1)$ is een eenheid voor deze vermenigvuldiging.

We definiëren m^{op} als de samenstelling

$$A \otimes A \xrightarrow{\tau_{A,A}} A \otimes A \xrightarrow{m} A$$

Een eenvoudige verificatie toont dan aan dat $A^{\text{op}} = (A, m^{\text{op}}, \eta)$ ook een algebra is. De vermenigvuldiging op A^{op} wordt gegeven door $a \cdot b = ba$.

Een homomorfisme van algebras $(A, m_A, \eta_A) \rightarrow (B, m_B, \eta_B)$ is een lineaire afbeelding $f : A \rightarrow B$ die de volgende diagrammen commutatief maakt.

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{m_A} & A \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ B \otimes B & \xrightarrow{m_B} & B \end{array} \quad (8.3)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\eta_A} & A \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\eta_B} & B \end{array} \quad (8.4)$$

Merk op dat \mathbb{C} zelf een algebra is. $m : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is van de vorm $m(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu$ en $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is de identiteit.

Als (A, m_A, η_A) en (B, m_B, η_B) twee algebras zijn dan bestaat er een natuurlijke manier om een algebrastructuur te zetten op $A \otimes B$. We definiëren het vermenigvuldigingshomomorfisme $m_{A \otimes B}$ op $A \otimes B$ als de samenstelling

$$(A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \xrightarrow{\text{Id}_A \otimes \tau_{A,B} \otimes \text{Id}_B} (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B$$

en het eenheidshomomorfisme definiëren we als de samenstelling:

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda \otimes 1} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \otimes B$$

De vermenigvuldiging op $A \otimes B$ wordt gegeven door

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

Indien V een A -representatie en W een B -representatie is dan $V \otimes W$ op natuurlijke wijze een $A \otimes B$ -representatie via

$$(a \otimes b)(v \otimes w) = av \otimes bw \quad (8.5)$$

8.3 Coalgebras

De definitie van een coalgebra is dezelfde als van een algebra, maar we keren alle pijlen om.

Definitie 8.3.1. Een \mathbb{C} -coalgebra is een triple (C, Δ, ϵ) waarbij

- (1) C een \mathbb{C} -vectorruimte is;
- (2) $\epsilon : C \rightarrow \mathbb{C}$ en $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ lineaire afbeeldingen zijn;
- (3) de volgende diagrammen commutatief zijn:

$$\begin{array}{ccc}
 C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{Id}_C} & C \otimes C \\
 \text{Id}_C \otimes \Delta \uparrow & & \Delta \uparrow \\
 C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C
 \end{array} \tag{8.6}$$

(coassociativiteit)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C} \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes \text{Id}_C} & C \otimes C & \xrightarrow{\text{Id}_C \otimes \epsilon} & C \otimes \mathbb{C} \\
 & \cong \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow \cong & \\
 & & C & &
 \end{array} \tag{8.7}$$

waarbij de diagonale pijlen weer de isomorfismen van §5.2 zijn.

We noemen Δ de covermenigvuldiging en ϵ de coeenheid.

Als $c \in C$ en $\Delta(c) = \sum_i c'_i \otimes c''_i$ dan laat (8.7) zich schrijven als

$$\begin{aligned}
 \sum_i \epsilon(c'_i) \otimes c''_i &= 1 \otimes c \\
 \sum_i c'_i \otimes \epsilon(c''_i) &= c \otimes 1
 \end{aligned}$$

Als we hierop de isomorfismen $\mathbb{C} \otimes C \rightarrow C : \lambda \otimes c \mapsto \lambda c$, $C \otimes \mathbb{C} \rightarrow C : c \otimes \lambda \mapsto \lambda c$ toepassen dan zien we dat de commutativiteit van (8.7) equivalent is met

$$\sum_i \epsilon(c'_i) c''_i = c \tag{8.8}$$

$$\sum_i c'_i \epsilon(c''_i) = c \tag{8.9}$$

voor alle $c \in C$. Het is op deze manier dat we axioma's voor de coeenheid zullen gebruiken.

Voorbeeld 8.3.2. Zij T een verzameling en definieer $\mathbb{C}T$ als de verzameling formele sommen $\sum_t \alpha_t t$ met $\alpha_t \in \mathbb{C}$ zodanig dat slechts een eindig aantal α_t verschillend van nul zijn. We beschouwen T als een deel van $\mathbb{C}T$ door $t \in T$ te identificeren met $1 \cdot t$. We definiëren

$$\begin{aligned}\epsilon : \mathbb{C}T &\rightarrow \mathbb{C} : \sum_t \alpha_t t \mapsto \sum_t \alpha_t \\ \Delta : \mathbb{C}T &\rightarrow \mathbb{C}T \otimes \mathbb{C}T : \sum_t \alpha_t t \mapsto \sum_t \alpha_t t \otimes t\end{aligned}$$

We bewijzen nu dat $(\mathbb{C}T, \Delta, \epsilon)$ een coalgebra is.

- (1) Eerst controleren we de commutativiteit van (8.6) (de coassociativiteit). Dus we verifiëren $(\Delta \otimes \text{Id}_C)\Delta = \Delta(\text{Id}_C \otimes \Delta)$. Het is voldoende dit te doen op elementen van T . Dus zij $t \in T$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \text{Id}_C)\Delta(t) &= (\Delta \otimes \text{Id}_C)(t \otimes t) = \Delta(t) \otimes t = t \otimes t \otimes t \\ (\text{Id}_C \otimes \Delta)\Delta(t) &= (\text{Id}_C \otimes \Delta)(t \otimes t) = t \otimes \Delta(t) = t \otimes t \otimes t\end{aligned}$$

- (2) Nu controleren we (8.8)(8.9). Omdat alles lineair is mogen we weer onderstellen dat $c = t \in T$. Maar dan komen (8.8)(8.9) gewoon neer op $1t = t = t1$.

Als (C, Δ, ϵ) een coalgebra is dan definiëren we Δ^{op} als de samenstelling:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{\tau_{C,C}} C \otimes C$$

Het is eenvoudig na te gaan dat $C^{\text{coop}} = (C, \Delta^{\text{op}}, \epsilon)$ ook een coalgebra is.

Een homomorfisme van coalgebras $(C, \Delta_C, \epsilon_C) \rightarrow (D, \Delta_D, \epsilon_D)$ is een lineaire afbeelding $f : C \rightarrow D$ die de volgende diagrammen commutatief maakt.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta_C} & C \otimes C \\ f \downarrow & & f \otimes f \downarrow \\ D & \xrightarrow{\Delta_D} & D \otimes D \end{array} \quad (8.10)$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\epsilon_C} & \mathbb{C} \\ f \downarrow & & \text{Id} \downarrow \\ D & \xrightarrow{\epsilon_D} & \mathbb{C} \end{array} \quad (8.11)$$

Net zoals in het geval van algebras geldt dat \mathbb{C} zelf een coalgebra is. In dit geval wordt $\Delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ gegeven door $\Delta(\lambda) = \lambda \otimes 1$ en $\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is de identiteit.

We kunnen ook het tensorproduct van coalgebras definiëren. Zij $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \epsilon_D)$. Dan definiëren we $\Delta_{C \otimes D}$ als de samenstelling:

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{\text{Id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \text{Id}_D} C \otimes D \otimes C \otimes D \quad (8.12)$$

en $\epsilon_{C \otimes D}$ als de samenstelling:

$$C \otimes D \xrightarrow{\epsilon_C \otimes \epsilon_D} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\lambda \otimes \mu \rightarrow \lambda \mu} \mathbb{C} \quad (8.13)$$

Men toont nu eenvoudig aan dat $(C \otimes D, \Delta_{C \otimes D}, \epsilon_{C \otimes D})$ weer een coalgebra is.

8.4 Zijn er verschillen tussen algebras en coalgebras?

We vragen ons af of de theorie van de coalgebras niet gewoon equivalent is met de theorie van de algebras. Het lijkt er immers op dan we de ene theorie uit de andere verkrijgen door gewoon alle pijlen om te keren. Dat dit niet het geval is zullen we met een voorbeeld aantonen. Eerst bewijzen we het volgende lemma.

Lemma 8.4.1. *Zij U, V vectorruimten en $U' \subset U$, $V' \subset V$ deelvectorruimten. Noteer de inclusieafbeeldingen $U' \rightarrow U$ en $V' \rightarrow V$ met α , β . Dan definieert $\alpha \otimes \beta$ een injectieve afbeelding $U' \otimes V' \rightarrow U \otimes V$.*

Bewijs. Kies basissen voor $(e_i)_{i \in I}$, $(f_j)_{j \in J}$ voor U, V zodat er deelverzamelingen zijn $(e_i)_{i \in I'}$, $(f_j)_{j \in J'}$ die basissen van U' en V' zijn. Dan zijn $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ en $(e_i \otimes f_j)_{(i,j) \in I' \times J'}$ basissen van respectievelijk $U \otimes V$ en $U' \otimes V'$. Uit het feit dat $(\alpha \otimes \beta)(e_i \otimes f_j) = e_i \otimes f_j$ volgt dat $\alpha \otimes \beta$ een basis van $U' \otimes V'$ stuurt naar een deel van een basis van $U \otimes V$. Dus $\alpha \otimes \beta$ is injectief. \square

In het volgende zullen we $U' \otimes V'$ met een deel van $U \otimes V$ identificeren. Het vorige lemma zegt dat dit geoorloofd is.

Zij nu C een coalgebra en $D \subset C$ een deelvectorruimte van C . Als geldt $\Delta(D) \subset D \otimes D$ dan zullen we D een deelcoalgebra van C noemen. Het is duidelijk dat als D een deelcoalgebra is van C dan definieert $(D, \Delta|_D, \epsilon|_D)$ een coalgebrastructuur op D . Dit is de unieke coalgebrastructuur met de eigenschap dat de inclusieafbeelding $D \rightarrow C$ een homomorfisme van coalgebras is.

We hebben nog een ander lemma nodig.

Lemma 8.4.2. *Onderstel dat U, V een vectorruimten zijn en zij $(f_j)_{j \in J}$ een basis van V . Onderstel dat $(a_j)_{j \in J}$, $(b_j)_{j \in J}$ elementen van U zijn zodat*

$$\sum_j a_j \otimes f_j = \sum_j b_j \otimes f_j \quad (\text{in } U \otimes V)$$

Dan geldt $a_j = b_j$ voor alle j .

Bewijs. Door het verschil van het linker- en het rechterlid te nemen mogen we aannemen dat $b_j = 0$. Zij $(e_i)_{i \in I}$ een basis van U en schrijf $a_j = \sum_{i \in I} \lambda_{ij} e_i$ met $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Dan vinden we $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j = 0$. Omdat $e_i \otimes f_j$ een basis is van $U \otimes V$ impliceert dit dat $\lambda_{ij} = 0$ en dus $a_j = 0$. \square

Stelling 8.4.3. *Zij C een coalgebra en m een element van C . Dan bestaat er een eindigdimensionale deelcoalgebra D van C die m bevat.*

Oefening 8.4.4. Kijk dit na voor $C = \mathbb{C}T$.

Bewijs van de stelling. Kies een basis $(u_i)_{i \in I}$ voor C . Uit de eigenschappen van het symbool “ \otimes ” volgt dat Δm kan geschreven worden als

$$\Delta m = \sum_{i \in I} m_i \otimes u_i$$

waarbij slechts een eindig aantal m_i verschillend van nul zijn. Zij E de deelvectorruimte van C voortgebracht door de m_i . Er geldt dus $\dim E < \infty$. Verder leiden we uit (8.9) af dat $m \in E$.

Er geldt

$$\begin{aligned} \Delta m_i &= \sum_j m_{ij} \otimes u_j \\ \Delta u_i &= \sum_{j,k} \alpha_{ijk} u_j \otimes u_k \end{aligned}$$

waarbij $m_{ij} \in C$, $\alpha_{ijk} \in \mathbb{C}$ en waarbij ten hoogste een eindig aantal m_{ij}, α_{ijk} verschillend van nul zijn.

We berekenen nu

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id}_C) \Delta m &= \sum_{ij} m_{ij} \otimes u_j \otimes u_i \\ &= \sum_{k,j} m_{kj} \otimes u_j \otimes u_k \\ (\text{Id}_C \otimes \Delta) \Delta m &= \sum_{ijk} \alpha_{ijk} m_i \otimes u_j \otimes u_k \end{aligned}$$

Uit lemma 8.4.2 leiden we af

$$m_{kj} = \sum_i \alpha_{ijk} m_i \in E$$

en dus $\Delta(E) \subset E \otimes C$. We zijn dus halverwege!

Kies nu een basis $(v_i)_{i=1,\dots,u}$ voor E . Dan geldt

$$\Delta(v_j) = \sum_i v_i \otimes c_{ij}$$

met $c_{ij} \in C$. Zij nu D de vectorruimte voortgebracht door de c_{ij} . We halen uit (8.8) dat $E \subset D$. Verder berekenen we:

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id}_C)\Delta v_k &= \sum_{ij} v_i \otimes c_{ij} \otimes c_{jk} \\ (\text{Id}_C \otimes \Delta)\Delta v_k &= \sum_i v_i \otimes \Delta c_{ik} \end{aligned}$$

waaruit we met behulp van lemma 8.4.2 halen

$$\Delta c_{ik} = \sum_j c_{ij} \otimes c_{jk}$$

Er geldt dus $\Delta(D) \subset D \otimes D$ en dus zijn we klaar. \square

Laat ons deze stelling nu herformuleren. Een element $m \in C$ bepaalt een lineaire afbeelding $f : \mathbb{C} \rightarrow C : \lambda \mapsto \lambda m$ en omgekeerd bepaalt zo'n lineaire afbeelding een element $m = f(1) \in C$.

De stelling zegt nu dat voor elke lineaire afbeelding $f : \mathbb{C} \rightarrow C$ er een ontbinding bestaat als in het volgende diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow g \quad \swarrow h & \\ & D & \end{array}$$

waarbij D een eindigdimensionale coalgebra is en h een injectieve afbeelding van coalgebras is.

Om nu de corresponderende stelling voor algebras te vinden moeten we alle pijlen omkeren.

Zij A dus een algebra. We moeten voor elke lineaire afbeelding $A \rightarrow \mathbb{C}$ een ontbinding vinden

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xleftarrow{f} & A \\ & \swarrow g \quad \searrow h & \\ & B & \end{array}$$

waarbij B een eindigdimensionale algebra is en h een surjectief algebrahomomorfisme.

Onderstel dat zo een ontbinding bestaat en zij $I = \ker h$. Aangezien $A/I \cong B$ volgt hieruit dat $\dim A/I < \infty$. Met andere woorden de *codimensie* van I is eindig en dus is $f = gh$ nul op een ideaal van eindige codimensie in A .

Omgekeerd als $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ nul is op een ideaal van eindige codimensie dan kunnen we f ontbinden als $A \rightarrow A/I \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{C}$ waarbij de eerste pijl de quotientafbeelding is en \bar{f} gedefinieerd wordt via $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$.

Uiteindelijk vragen we ons dus het volgende af:

Vraag 8.4.5. Is elke lineaire afbeelding $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ nul op een ideaal van eindige codimensie?

Het antwoord hierop is neen en we geven hiervan nu een voorbeeld.

Voorbeeld 8.4.6. Zij $A = \mathbb{C}[t]$. Dit is een hoofdideaal ring en de van nul verschillende idealen zijn dus van de vorm $(p(t))$ waarbij $p(t) \neq 0$.

Een voor de hand liggende basis van A is $\{1, t, t^2, \dots\}$. Zij nu $I = (p(t))$ waarbij $p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i$. Modulo I geldt dus voor alle $u \geq 0$:

$$\overline{t^{n+u}} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \overline{t^{i+u}} = 0$$

Met andere woorden we kunnen $\overline{t^m}$ voor $m \geq n$ uitdrukken in termen van lagere $\overline{t^i}$. Dit toont aan dat A/I is voortgebracht door $\{\overline{1}, \overline{t}, \dots, \overline{t^{n-1}}\}$ (in feite is dit zelfs een basis) en dus is A/I eindigdimensionaal. Er volgt dus dat elk van nul verschillend ideaal in $\mathbb{C}[t]$ eindige codimensie heeft.

Welke lineaire afbeeldingen $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ zijn nu nul op $I = (p(t))$? Zo een lineaire afbeelding f wordt uniek bepaald door de waarden $f_n = f(t^n)$. Verder is het duidelijk dat f zal nul zijn op $(p(t))$ als $f(t^u p(t)) = 0$ voor alle $u \geq 0$. Dit laatste is equivalent met

$$f_{n+u} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i f_{i+u} = 0 \tag{8.14}$$

Dus samenvattend hebben we aangetoond dat $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ nul is op een ideaal van eindige codimensie als en slechts als de rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voldoet aan een lineaire recursie als in (8.14) voldoet. Blijft nu nog te bewijzen dat er rijen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestaan die aan *geen enkele* recursie betrekking voldoen (lineair of niet). Dit is een bekend feit uit de logica dat in essentie volgt uit een cardinaliteitsargument.

8.5 Dualiteit

We gaan nu iets nader in op de dualiteit tussen algebras en coalgebras. Hiervoor hebben we het begrip dualiteit van vectorruimten nodig. In dit hoofdstukje zijn dus U, V, W vectorruimten. We definiëren de duale vectorruimte van U als $U^* = \text{Hom}(U, \mathbb{C})$.

Als $U = \mathbb{C}$ dan hebben we afbeeldingen $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C} : \phi \mapsto \phi(1)$ en $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^* : \lambda \mapsto (a \mapsto \lambda a)$ die mekaars inverse zijn. Dus $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^*$. In het vervolg zullen we \mathbb{C} en \mathbb{C}^* met elkaar identificeren.

Als

$$f : U \rightarrow V$$

een lineaire afbeelding is dan definiëren we de duale afbeelding van f als

$$f^* : V^* \rightarrow U^* : \phi \mapsto \phi \circ f$$

Dit definieert een lineaire afbeelding:

$$(-)^* : \text{Hom}(U, V) \rightarrow \text{Hom}(V^*, U^*)$$

In geval van een samenstelling van lineaire afbeeldingen

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

toont men eenvoudig aan dat $(gf)^* = f^*g^*$.

Er bestaan natuurlijke afbeeldingen

$$\theta_{U,V} : U^* \otimes V^* \rightarrow (U \otimes V)^*$$

gedefinieerd als

$$\theta_{U,V}(\phi \otimes \psi)(u \otimes v) = \phi(u)\psi(v)$$

waarbij $\phi \in U^*, \psi \in V^*, u \in U, v \in V$.

Als $f : U \rightarrow U', g : V \rightarrow V'$ lineaire afbeeldingen zijn dan toont men eenvoudig aan dat het volgende diagram commutatief is.

$$\begin{array}{ccc} U^* \otimes V^* & \longrightarrow & (U \otimes V)^* \\ f^* \otimes g^* \uparrow & & (f \otimes g)^* \uparrow \\ U'^* \otimes V'^* & \longrightarrow & (U' \otimes V')^* \end{array} \quad (8.15)$$

Een ander diagram dat commutatief is, is het volgende.

$$\begin{array}{ccc} U^* \otimes V^* \otimes W^* & \xrightarrow{\theta_{U,V} \otimes \text{Id}_{W^*}} & (U \otimes V)^* \otimes W^* \\ \text{Id}_{U^*} \otimes \theta_{V,W} \downarrow & & \downarrow \theta_{U \otimes V, W} \\ U^* \otimes (V \otimes W)^* & \xrightarrow{\theta_{U,V \otimes W}} & (U \otimes V \otimes W)^* \end{array} \quad (8.16)$$

Als voorbeeld zullen we dit bewijzen. Zij $\alpha \in U^*$, $\beta \in V^*$, $\gamma \in W^*$ en $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$. Dan geldt

$$\begin{aligned}\theta_{U \otimes V, W}((\theta_{U, V} \otimes \text{Id}_W)(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma))(u \otimes v \otimes w) &= \theta_{U \otimes V, W}(\theta_{U, V}(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma)(u \otimes v \otimes w) \\ &= (\theta_{U, V}(\alpha \otimes \beta))(u \otimes v) \gamma(w) \\ &= \alpha(u) \beta(v) \gamma(w)\end{aligned}$$

Indien we $\theta_{U, V \otimes W}(\text{Id}_U \otimes \theta_{V, W}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma))(u \otimes v \otimes w)$ uitrekenen dan bekomen we hetzelfde resultaat.

Een andere veelgebruikte lineaire afbeelding is

$$\mu_U : U \rightarrow U^{**}$$

die gedefinieerd wordt als $\mu_U(u)(\phi) = \phi(u)$ waarbij $u \in U$, $\phi(u) \in \mathbb{C}$.

Hieronder onderstellen we nu dat onze vectorruimten U, V, W eindigdimensionaal zijn. Zij $(e_i)_{i=1, \dots, m}$, $(f_j)_{j=1, \dots, n}$ basissen van U en V . Definieer $e_j^* \in U^*$ via $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. Dan is het eenvoudig in te zien dat $(e_j^*)_{j=1, \dots, m}$ een basis is voor U^* . Dit is de zogenaamde duale basis van $(e_i)_i$.

Gevolg 8.5.1. *Als $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$ dan zijn $\theta_{U, V}$ en μ_U isomorfismen.*

Bewijs. Er geldt $\theta_{U, V}(e_i^* \otimes f_j^*) = (e_i \otimes f_j)^*$ en $\mu_U(e_i) = e_i^{**}$. Dus $\theta_{U, V}$ en μ_U sturen een basis naar een basis en zijn bijgevolg isomorfismen. \square

8.6 Toepassing op algebras en coalgebras

Zij (C, Δ, ϵ) een coalgebra. We zullen een algebrastructuur zetten op C^* . We definiëren $\eta : \mathbb{C} \rightarrow C^*$ als ϵ^* waarbij we \mathbb{C} en C^* met elkaar identificeren zoals boven. Dus

$$\eta(\lambda)(c) = \lambda \epsilon(c) \quad (8.17)$$

$m : C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$ definiëren we als de samenstelling

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\theta_{C, C}} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

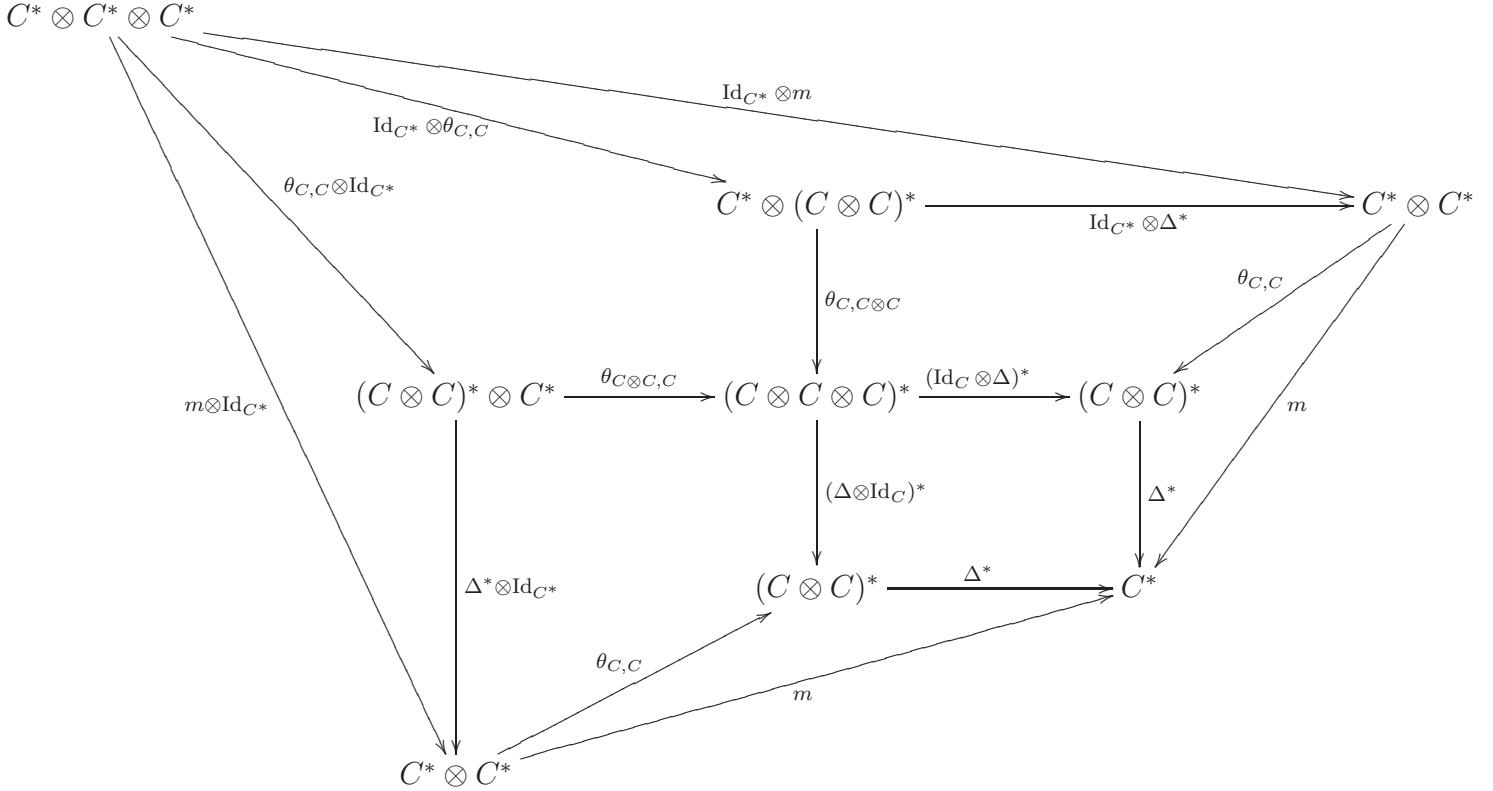
Dus als $f, g \in C^*$ en $c \in C$ dan geldt

$$(fg)(c) = \sum_i f(c'_i) g(c''_i) \quad (8.18)$$

waarbij $\Delta c = \sum_i c'_i \otimes c''_i$.

Stelling 8.6.1. *(C^*, m, η) is een algebra.*

Bewijs. We zullen als voorbeeld de associativiteit van de vermenigvuldiging bewijzen. Deze volgt uit het volgende diagram als we gebruiken dat alle kleine deeldiagrammen commutatief zijn vanwege (8.15)(8.16) en de identiteit $(fg)^* = g^*f^*$.



□

Voorbeeld 8.6.2. Zij $C = \mathbb{C}T$ de coalgebra zoals boven. Wat is nu de algebrastructuur op C^* ? Een element van C^* is een lineaire afbeelding $C \rightarrow \mathbb{C}$. Een dergelijke lineaire afbeelding wordt uniek bepaald door zijn restrictie tot T . Omgekeerd als we een afbeelding hebben $T \rightarrow \mathbb{C}$ dan kunnen we deze op een unieke manier uitbreiden tot een lineaire afbeelding $C \rightarrow \mathbb{C}$. Dus we zullen C^* identificeren met de verzameling afbeeldingen $T \rightarrow \mathbb{C}$.

Wat is nu $\eta = \epsilon^* : \mathbb{C} \rightarrow C^*$? Bij definitie geldt er $\epsilon^*(\lambda)(t) = \lambda\epsilon(t) = \lambda$. Met andere woorden $\epsilon^*(\lambda)$ is de constante afbeelding λ .

Wat is het product fg van twee afbeeldingen $f, g : T \rightarrow \mathbb{C}$? Uit (8.18) halen we $(fg)(t) = f(t)g(t)$ voor $t \in T$. Dus fg is het puntsgewijze product van f en g !

Nu gaan we de omgekeerde constructie proberen. Dus we gaan vertrekken met een algebra (A, m, η) en we gaan proberen een coalgebra structuur te zetten op A^* . Hiervoor definiëren we $\epsilon : A^* \rightarrow \mathbb{C}$ als η^* waarbij we zoals gewoonlijk \mathbb{C}^* met \mathbb{C} identificeren via de afbeelding $\phi \mapsto \phi(1)$. Dus

$$\epsilon(f) = (f \circ \eta)(1) = f(1) \quad (8.19)$$

Met Δ is er echter een probleem. We zouden Δ willen definiëren als de samenstelling

$$A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\theta_{A,A}^{-1}} A^* \otimes A^*$$

maar dit gaat uiteraard enkel als $\theta_{A,A}$ omkeerbaar is. Dit laatste geldt als A eindigdimensionaal is. Er geldt nu

Stelling 8.6.3. *Onderstel dat $\dim A < \infty$. Indien we Δ en ϵ definiëren zoals boven dan is (A^*, Δ, ϵ) een coalgebra.*

Men bewijst deze stelling zoals de analoge stelling voor coalgebras.

Onderstel $\dim A < \infty$ en $f \in A^*$. Onderstel $\Delta f = \sum_i f'_i \otimes f''_i$. Als we de identiteit $(\theta_{A,A} \Delta)(f) = m^*(f)$ evalueren op $a \otimes b$ dan vinden we

$$f(ab) = \sum_i f'_i(a) f''_i(b) \quad (8.20)$$

Deze formule is dual aan (8.18).

We kunnen dus dit hoofdstukje besluiten door te stellen dat de theorieën van eindigdimensionale algebras en coalgebras equivalent zijn met elkaar maar dat dit niet meer zo is in de oneindigdimensionale situatie.

8.7 De Sweedler notatie

Het werken met diagrammen is niet altijd eenvoudig (denk aan ons bewijs van de associativiteit van de vermenigvuldiging in C^*). Daarom voeren we nu een notationeel stuk gereedschap in dat het werken met coalgebras vergemakkelijkt. Zij C een coalgebra en c in C . Dan geldt

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^n c'_i \otimes c''_i \quad (8.21)$$

voor zekere n , met $c'_i, c''_i \in C$. Vanzelfsprekend is de keuze van n, c'_i, c''_i niet uniek. Daarom zullen we in het vervolg schrijven

$$\Delta(c) = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

Dus $\sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ staat hier voor een willekeurige uitdrukking $\sum_{i=1}^n c_i \otimes c'_i$ die gelijk is aan $\Delta(c)$.

Op een analoge manier zullen we schrijven

$$(\text{Id}_C \otimes \Delta)\Delta c = (\Delta \otimes \text{Id}_C)\Delta c = \sum_c c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

We veralgemenen dit nog verder als volgt. Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan schrijven we

$$\Delta_{i_{n-2}, n-2} \cdots \Delta_{i_1, 1} \Delta c = \sum_c c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \quad (8.22)$$

waarbij $0 \leq i_j \leq j$ en $\Delta_{i_j, j}$ staat voor

$$\text{Id}_C^{\otimes i_j} \otimes \Delta \otimes \text{Id}_C^{\otimes j-i_j}$$

Het is een plezierige oefening om aan te tonen dat all $(n-1)!$ uitdrukkingen van de vorm (8.22) aan mekaar gelijk zijn vanwege de coassociativiteit.

Voorbeeld 8.7.1. We zullen nu aantonen dat de vermenigvuldiging in C^* associatief is door gebruik te maken van de Sweedlernotatie. Een herformulering van (8.18) is

$$(fg)(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

We berekenen nu voor $f, g, h \in C^*$ en $c \in C$.

$$\begin{aligned} (f(gh))(c) &= \sum_c f(c_{(1)})(gh)(c_{(2)}) \\ &= \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} ((fg)h)(c) &= \sum_c (fg)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\ &= \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \end{aligned}$$

Er geldt dus inderdaad $(fg)h = f(gh)$.

8.8 Bialgebras

Onderstel dat H een vectorruimte is die zowel met een algebra structuur (H, m, η) als met een coalgebra structuur (H, Δ, ϵ) is uitgerust. We geven $H \otimes H$ de algebra en coalgebrastructuur die in §8.2 en §8.3 gedefinieerd werden.

Stelling 8.8.1. *De volgende twee beweringen zijn equivalent.*

- (1) *De afbeeldingen m en η zijn homomorfismen van coalgebras.*
- (2) *De afbeeldingen Δ en ϵ zijn homomorfismen van algebras.*

Bewijs. Het bewijs bestaat uit het neerschrijven van de commutatieve diagrammen die deze twee beweringen weergeven

m is een homomorfisme van coalgebras (eerste diagram).

$$(8.23) \quad \begin{array}{ccccc} & & \Delta_{H \otimes H} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H \otimes H & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\text{Id}_H \otimes \tau_{H,H} \otimes \text{Id}_H} & H \otimes H \otimes H \otimes H \\ m \downarrow & & & & \downarrow m \otimes m \\ H & \xrightarrow{\Delta} & & & H \otimes H \end{array}$$

m is een homomorfisme van coalgebras (tweede diagram).

$$(8.24) \quad \begin{array}{ccccc} & & \epsilon_{H \otimes H} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H \otimes H & \xrightarrow{\epsilon \otimes \epsilon} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \mu} & \mathbb{C} \\ m \downarrow & & & & \downarrow \text{Id} \\ H & \xrightarrow{\epsilon} & & & \mathbb{C} \end{array}$$

η is een homomorfisme van coalgebras (eerste diagram).

$$(8.25) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \\ \eta \downarrow & \lambda \mapsto \lambda \otimes 1 & \downarrow \eta \otimes \eta \\ H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H \end{array}$$

η is een homomorfisme van coalgebras (tweede diagram).

$$(8.26) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\epsilon_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C} \\ \eta \downarrow & \text{Id} & \downarrow \text{Id} \\ H & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{C} \end{array}$$

Δ is een homomorfisme van algebras (eerste diagram).

$$(8.27) \quad \begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{m} & H \\ \Delta \otimes \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\ H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{\text{Id}_H \otimes \tau_{H,H} \otimes \text{Id}_H} H \otimes H \otimes H \otimes H \xrightarrow{m \otimes m} & H \otimes H \\ & \searrow m_{H \otimes H} & \nearrow \end{array}$$

Δ is een homomorfisme van algebras (tweede diagram).

$$(8.28) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\eta} & H \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \Delta \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda \otimes 1} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & H \otimes H \\ & \searrow \eta_{H \otimes H} & \nearrow \end{array}$$

ϵ is een homomorfisme van algebras (eerste diagram).

$$(8.29) \quad \begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{m} & H \\ \epsilon \otimes \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow[\Delta_{\mathbb{C}}]{\lambda \otimes \mu \mapsto \lambda \mu} & \mathbb{C} \end{array}$$

ϵ is een homomorfisme van algebras (tweede diagram).

$$(8.30) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\eta} & H \\ \text{Id} \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\eta_{\mathbb{C}}]{\text{Id}} & \mathbb{C} \end{array}$$

We zien nu duidelijk dat de commutativiteit van de volgende diagrammen equivalent is:

$$(8.23) \Leftrightarrow (8.27)$$

$$(8.24) \Leftrightarrow (8.29)$$

$$(8.25) \Leftrightarrow (8.28)$$

$$(8.26) \Leftrightarrow (8.30)$$

Dit beëindigt het bewijs. □

Definitie 8.8.2. Een *bialgebra* is een quintuple $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ waarbij (H, m, η) een algebra en (H, Δ, ϵ) een coalgebra is die voldoen aan de equivalente condities van Stelling 8.8.1. Een homomorfisme van bialgebras $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon) \rightarrow (H', m', \eta', \Delta', \epsilon')$ is een lineaire afbeelding $H \rightarrow H'$ die een zowel een afbeelding van algebras als een afbeelding van coalgebras is.

De commutatieve diagrammen (8.23)-(8.26) die equivalent zijn met de bialgebra-eigenschap laten zich als volgt in formules vertalen:

$$\sum_{hh'} (hh')_{(1)} \otimes (hh')_{(2)} = \sum_h \sum_{h'} h_{(1)} h'_{(1)} \otimes h_{(2)} h'_{(2)} \quad (8.31)$$

$$\epsilon(hh') = \epsilon(h)\epsilon(h') \quad (8.32)$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad (8.33)$$

$$\epsilon(1) = 1 \quad (8.34)$$

Uit een bialgebra $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ kunnen we diverse nieuwe bialgebras maken:

$$\begin{aligned} H^{\text{op}} &= (H, m^{\text{op}}, \eta, \Delta, \epsilon) \\ H^{\text{coop}} &= (H, m, \eta, \Delta^{\text{op}}, \epsilon) \\ H^{\text{op,coop}} &= (H, m^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \epsilon) \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.8.3. We gaan nu het Voorbeeld 8.3.2 uitbreiden. We onderstellen nu dat T uitgerust is met een bewerking $\cdot : T \times T \rightarrow T$ die associatief is en een eenheidselement e heeft (T zou bijvoorbeeld een groep kunnen zijn, maar dit is niet noodzakelijk). We zetten op $\mathbb{C}T$ een vermenigvuldiging zoals we dat voor groeपालgebras gedaan hebben (zie 8.1). Voor deze vermenigvuldiging is $e = 1 \cdot e$ het eenheidselement. We verkrijgen dus een algebra structuur $(\mathbb{C}T, m, \eta)$ op $\mathbb{C}T$, naast de coalgebras structuur $(\mathbb{C}T, \Delta, \epsilon)$ die we reeds gedefinieerd hadden.

We beweren nu dat $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ een bialgebra is. Om dit aan te tonen moeten we een van de equivalente condities van Stelling 8.8.1 nakijken. Zoals aangegeven in het bewijs van Stelling 8.8.1 komt dit neer op het nagaan van de commutativiteit van 4 diagrammen. Omdat dit een beetje omslachtig is zullen we enkel de commutativiteit van (8.23) verifiëren. Aangezien de elementen $s \otimes t$ met $s, t \in T$ voortbrengers van $\mathbb{C}T \otimes \mathbb{C}T$ zijn is het voldoende de commutativiteit enkel op deze elementen na te gaan. We doen dit via het volgende diagram:

$$\begin{array}{ccccc} s \otimes t & \xrightarrow{\Delta \otimes \Delta} & s \otimes s \otimes t \otimes t & \xrightarrow{\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id}} & s \otimes t \otimes s \otimes t \\ m \downarrow & & & & \downarrow m \otimes m \\ st & \xrightarrow{\Delta} & & & st \otimes st \end{array}$$

Oefening 8.8.4. Zij H, H' bialgebras. Toon aan dat de algebra- en coalgebra structuur op $H \otimes H'$ die werden ingevoerd in §8.2, §8.3 van $H \otimes H'$ een bialgebra maken.

Onderstel nu dat H een bialgebra is en zij V, W twee H -representaties. Zoals we aangegeven hebben in (8.5) is $V \otimes W$ op natuurlijke manier een $H \otimes H$ -moduul. Via de algebra map $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ wordt $V \otimes W$ dan ook een H -representatie. Dus voor $h \in H, u \in V \otimes W$

$$h \cdot u = \Delta(h)u \quad (8.35)$$

Of gebruikmakende van de Sweedler conventie ($v \in V, w \in W$):

$$h(v \otimes w) = \sum_h h_{(1)}v \otimes h_{(2)}w$$

Dus als we van het tensorproduct van twee representaties terug een representatie willen maken dan hebben we een bialgebrastructuur nodig.

Als H een eindigdimensionale bialgebra is dan is H^* zowel een algebra een coalgebra (vanwege §8.6). Men toont gemakkelijk aan dat het volgende waar is:

Stelling 8.8.5. *Als H een eindigdimensionale bialgebra is dan is H^* ook een bialgebra.*

Dit is weer min of meer duidelijk aangezien $(-)^*$ de relevante commutatieve diagrammen bewaart.

8.9 Braided bialgebras

We voeren nu het concept van een braided bialgebra in. We zullen achteraf dit concept gebruiken om oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking te genereren.

Definitie 8.9.1. Zij $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ een bialgebra. We zeggen dat H *quasi-cocommutatief* is als er een omkeerbaar element $P \in H \otimes H$ bestaat zodat voor alle $h \in H$ de volgende identiteit geldt in $H \otimes H$

$$\Delta^{\text{op}}(h) = P\Delta(h)P^{-1} \quad (8.36)$$

Zo'n P noemen we een *universele R-matrix*.

Een speciaal geval ontstaat wanneer $\Delta^{\text{op}} = \Delta$. In dat geval zeggen we dat H *cocommutatief* is. Voor een cocommutatieve bialgebra kunnen we $P = 1 \otimes 1$ nemen.

Hieronder schrijven we $P = \sum_i P'_i \otimes P''_i$. (8.36) kunnen we dan herschrijven als

$$\sum_{h,i} h_{(2)} P'_i \otimes h_{(1)} P''_i = \sum_{i,h} P'_i h_{(1)} \otimes P''_i h_{(2)} \quad (8.37)$$

De betekenis van (8.36) wordt gegeven door het volgende lemma.

Lemma 8.9.2. *Onderstel dat H quasi-cocommutatief is met universele R -matrix P en dat V, W twee H -representaties zijn. Dan definieert $c_{V,W} : \tau_{V,W} \circ \rho(P)$ een isomorfisme tussen de representaties $V \otimes W$ en $W \otimes V$ waarbij $\rho(P) = \rho_{V \otimes W}(P)$ is zoals in Definitie 8.1.1*

Bewijs. $\rho(P)$ en $\tau_{V,W}$ zijn beide inverteerbare lineaire afbeeldingen. Hetzelfde geldt dus ook voor de samenstelling $\tau_{V,W} \circ \rho(P)$. Het volstaat dus aan te tonen dat $\tau_{V,W} \circ \rho(P)$ compatibel is met de H -actie. Dus we moeten bewijzen voor $h \in H, v \in V, w \in W$:

$$((\tau_{V,W} \circ \rho(P))(h \cdot (v \otimes w))) = h \cdot (\tau_{V,W} \circ \rho(P))(v \otimes w)$$

We berekenen

$$\begin{aligned} (\tau_{V,W} \circ \rho(P))(h \cdot (v \otimes w)) &= \sum_h (\tau_{V,W} \circ \rho(P))(h_{(1)} v \otimes h_{(2)} w) \\ &= \sum_{h,i} \tau_{V,W}(P'_i h_{(1)} v \otimes P''_i h_{(2)} w) \\ &= \sum_{h,i} P''_i h_{(2)} w \otimes P'_i h_{(1)} v \\ &= \left(\sum_{h,i} P''_i h_{(2)} \otimes P'_i h_{(1)} \right) (w \otimes v) \end{aligned}$$

Anderzijds

$$\begin{aligned} h \cdot (\tau_{V,W} \circ \rho(P))(v \otimes w) &= \sum_i h \cdot (P''_i w \otimes P'_i v) \\ &= \sum_{h,i} h_{(1)} P''_i w \otimes h_{(2)} P'_i v \\ &= \left(\sum_{h,i} h_{(1)} P''_i \otimes h_{(2)} P'_i \right) (w \otimes v) \end{aligned}$$

Het volstaat dus om aan te tonen

$$\sum_{h,i} P_i'' h_{(2)} \otimes P_i' h_{(1)} = \sum_{h,i} h_{(1)} P_i'' \otimes h_{(2)} P_i'$$

Dit volgt uit het toepassen van $\tau_{H,H}$ op (8.37). \square

We tonen nu aan dat $c_{U,V}$ zich op de correcte manier gedraagt met betrekking tot homomorfismen tussen representaties.

Stelling 8.9.3. *Zij H een quasi-cocommutatieve bialgebra en veronderstel dat U, U', V, V' representaties van H zijn. Als $f : U \rightarrow U'$, $g : V \rightarrow V'$ homomorfismen van H -modulen zijn dan is het volgende diagram commutatief:*

$$\begin{array}{ccc} U \otimes V & \xrightarrow{f \otimes g} & U' \otimes V' \\ c_{U,V} \downarrow & & \downarrow c_{U',V'} \\ V \otimes U & \xrightarrow{g \otimes f} & V' \otimes U' \end{array}$$

Bewijs. We berekenen

$$c_{U',V'}(f \otimes g)(u \otimes v) = \sum_i P_i'' g(v) \otimes P_i' f(u) \quad (8.38)$$

alsook

$$(g \otimes f)c_{U,V}(u \otimes v) = \sum_i g(P_i'' v) \otimes f(P_i' u) \quad (8.39)$$

Aangezien f en g , H -lineair zijn volgt er dat (8.38)=(8.39). \square

Als $c_{V,W}$ een goed analogon is van $\tau_{V,W}$ dan zouden we verwachten dat het volgende diagram commutatief is.

$$(8.40) \quad \begin{array}{ccc} & U \otimes W \otimes V & \\ \text{Id}_U \otimes c_{V,W} \nearrow & & \searrow c_{U,W} \otimes \text{Id}_V \\ U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes U \otimes V \end{array}$$

Laat ons onderzoeken wanneer dit diagram commutatief zal zijn. Voor $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$ moet gelden

$$(c_{U,W} \otimes \text{Id}_V)(\text{Id}_U \otimes c_{V,W})(u \otimes v \otimes w) = c_{U \otimes V, W}(u \otimes v \otimes w) \quad (8.41)$$

We berekenen

$$\begin{aligned}
\text{LZ (8.41)} &= (c_{U,W} \otimes \text{Id}_V) \left(\sum_i u \otimes P_i'' w \otimes P_i' v \right) \\
&= \sum_{i,j} P_j'' P_i'' w \otimes P_j' u \otimes P_i' v \\
&= \left(\sum_j P_j'' \otimes P_j' \otimes 1 \right) \left(\sum_i P_i'' \otimes 1 \otimes P_i' \right) (w \otimes u \otimes v)
\end{aligned}$$

alsook

$$\begin{aligned}
\text{RZ (8.41)} &= \tau_{U \otimes V, W} \sum_i (P_i' \otimes P_i'')(u \otimes v \otimes w) \\
&= \tau_{U \otimes V, W} \sum_i \Delta P_i'(u \otimes v) \otimes P_i'' w \\
&= \sum_i P_i'' w \otimes \Delta P_i'(u \otimes v) \\
&= \left(\sum_i P_i'' \otimes \Delta P_i' \right) (w \otimes u \otimes v)
\end{aligned}$$

(8.41) zal dus gelden indien de volgende identiteit geldt in $H \otimes H \otimes H$.

$$\left(\sum_j P_j'' \otimes P_j' \otimes 1 \right) \left(\sum_i P_i'' \otimes 1 \otimes P_i' \right) = \sum_i P_i'' \otimes \Delta P_i' \quad (8.42)$$

Om dit in een verteerbare vorm te gieten passen we het volgende isomorfisme toe

$$H \otimes H \otimes H \rightarrow H \otimes H \otimes H : h_1 \otimes h_2 \otimes h_3 \mapsto h_2 \otimes h_3 \otimes h_1$$

(8.42) wordt dan equivalent met

$$\left(\sum_j P_j' \otimes 1 \otimes P_j'' \right) \left(\sum_i 1 \otimes P_i' \otimes P_i'' \right) = \sum_i \Delta P_i' \otimes P_i'' \quad (8.43)$$

Voor de eenvoudigheid voeren we de volgende notaties in:

$$\begin{aligned}
P_{12} &= \sum_i P_i' \otimes P_i'' \otimes 1 \\
P_{13} &= \sum_i P_i' \otimes 1 \otimes P_i'' \\
P_{23} &= \sum_i 1 \otimes P_i' \otimes P_i''
\end{aligned}$$

Uiteindelijk laat (8.43) zich herschrijven als

$$(\Delta \otimes \text{Id}_H)P = P_{13}P_{23}$$

Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 8.9.4. Zij H een quasi-cocommutatieve bialgebra met universele R -matrix P . Dan zeggen we dat H *braided* is als de volgende eigenschappen gelden

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{Id}_H)(P) &= P_{13}P_{23} \\ (\text{Id}_H \otimes \Delta)(P) &= P_{13}P_{12} \end{aligned} \tag{8.44}$$

Stelling 8.9.5. *Onderstel dat H een braided bialgebra is met universele R -matrix P . Zij U, V, W representaties van H . Dan zijn de volgende diagrammen commutatief.*

$$(8.45) \quad \begin{array}{ccc} & U \otimes W \otimes V & \\ \text{Id}_U \otimes c_{V,W} \nearrow & & \searrow c_{U,W} \otimes \text{Id}_V \\ U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes U \otimes V \end{array}$$

$$(8.46) \quad \begin{array}{ccc} U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U,V \otimes W}} & V \otimes W \otimes U \\ & \searrow c_{U,V} \otimes \text{Id}_W & \nearrow \text{Id}_V \otimes c_{U,W} \\ & V \otimes U \otimes W & \end{array}$$

Bewijs. De commutativiteit van (8.45) hebben we reeds aangetoond. (8.46) is analoog. \square

Gevolg 8.9.6. *(De hexagon identiteit). Zij H, P, U, V, W zoals boven. Dan is het volgende diagram commutatief.*

$$(8.47) \quad \begin{array}{ccccc} & & U \otimes V \otimes W & & \\ & \swarrow c_{U,V} \otimes \text{Id}_W & & \searrow \text{Id}_U \otimes c_{V,W} & \\ V \otimes U \otimes W & & & & U \otimes W \otimes V \\ \text{Id}_V \otimes c_{U,W} \downarrow & & & & \downarrow c_{U,W} \otimes \text{Id}_V \\ V \otimes W \otimes U & & & & W \otimes U \otimes V \\ & \searrow c_{V,W} \otimes \text{Id}_U & & \swarrow \text{Id}_W \otimes c_{U,V} & \\ & W \otimes V \otimes U & & & \end{array}$$

Bewijs. Door gebruik te maken van de commutativiteit van (8.46) kunnen we (8.47) vervangen door het volgende diagram

$$\begin{array}{ccc}
U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{\text{Id}_U \otimes c_{V,W}} & U \otimes W \otimes V \\
c_{U,V \otimes W} \downarrow & & \downarrow c_{U,W \otimes V} \\
V \otimes W \otimes U & \xrightarrow{c_{V,W} \otimes \text{Id}_U} & W \otimes V \otimes U
\end{array} \quad (8.48)$$

Definieer $T = V \otimes W$, $T' = W \otimes V$, $f = c_{V,W} : T \rightarrow T'$. Dan verandert (8.48) in

$$\begin{array}{ccc}
U \otimes T & \xrightarrow{\text{Id}_U \otimes f} & U \otimes T' \\
c_{U,T} \downarrow & & \downarrow c_{U,T'} \\
T \otimes U & \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_U} & T' \otimes U
\end{array} \quad (8.49)$$

De commutativiteit van (8.49) volgt uit Stelling 8.9.3. \square

We tonen nu aan hoe een braided bialgebra leidt tot oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking.

Stelling 8.9.7. *Zij H een braided bialgebra en V een representatie van H . Definieer $R = c_{V,V}$. Dan is R een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking.*

Bewijs. Als we het commutatieve diagram (8.47) opschrijven met $U = V = W$ dan bekommen we

$$\begin{array}{ccccc}
& & V \otimes V \otimes V & & \\
& \swarrow R_{12} & & \searrow R_{23} & \\
V \otimes V \otimes V & & & & V \otimes V \otimes V \\
\downarrow R_{23} & & & & \downarrow R_{12} \\
V \otimes V \otimes V & & & & V \otimes V \otimes V \\
& \searrow R_{12} & & \swarrow R_{23} & \\
& & V \otimes V \otimes V & &
\end{array}$$

De commutativiteit van dit diagram is precies de Yang-Baxter vergelijking. \square

Dus om oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking te vinden kunnen we zoeken naar braided bialgebras. Een zeer algemene methode om braided bialgebras te construeren werd gevonden door Drinfeld. Om dit uit te leggen moeten we eerst nog een extra concept invoeren.

8.10 Hopf-algebras

Een bialgebra structuur laat ons toe om van $V \otimes W$ terug een representatie te maken. Indien we echter van $\text{Hom}(V, W)$ een representatie willen maken dan hebben we een extra structuur nodig.

Definitie 8.10.1. Zij $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon)$. Een *antipode* S op H is een endomorfisme van H met de eigenschap dat de volgende diagrammen commutatief zijn

$$(8.50) \quad \begin{array}{ccc} & H \otimes H & \xrightarrow{\text{Id}_H \otimes S} H \otimes H \\ & \Delta \nearrow & \searrow m \\ H & & H \\ & \epsilon \searrow & \nearrow \eta \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

$$(8.51) \quad \begin{array}{ccc} & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes \text{Id}_H} H \otimes H \\ & \Delta \nearrow & \searrow m \\ H & & H \\ & \epsilon \searrow & \nearrow \eta \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Een *Hopf-algebra* is een bialgebra met een antipode. Een homomorfisme van Hopf-algebras A, B met antipodes S_A, S_B is een homomorfisme van bialgebras $\phi : A \rightarrow B$ zodat $\phi S_A = S_B \phi$.

De condities voor een antipode kunnen in Sweedler notatie geschreven worden als

$$\sum_h h_{(1)} S(h_{(2)}) = \epsilon(h) 1 = \sum_h S(h_{(1)}) h_{(2)} \quad (8.52)$$

Voorbeeld 8.10.2. We specialiseren het voorbeeld 8.8.3 nog verder. We gaan nu onderstellen dat $G = T$ een groep is. We definiëren

$$S : H \rightarrow H : \sum_g \alpha_g g \mapsto \sum_g \alpha_g g^{-1}$$

en beweren we dat de diagrammen (8.50)(8.51) commutatief zijn.

Het is weer voldoende om dit te bewijzen voor $g \in G$. Dit geeft de volgende diagrammen.

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\Delta} & g \otimes g \\ \eta \epsilon \downarrow & \text{Id}_H \otimes S \downarrow & \eta \epsilon \downarrow \\ 1 & \xleftarrow{m} & g \otimes g^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\Delta} & g \otimes g \\ \eta \epsilon \downarrow & S \otimes \text{Id}_H \downarrow & \eta \epsilon \downarrow \\ 1 & \xleftarrow{m} & g^{-1} \otimes g \end{array}$$

Dit bewijst onze bewering.

Oefening 8.10.3. Zij H, H' bialgebras met antipodes S, S' . Toon aan dat $S \otimes S'$ een antipode is op $H \otimes H'$. Dus het tensorproduct van Hopf algebras is een Hopf algebra.

We zullen nu enkele eigenschappen van de antipode bewijzen. Eerst geven we een alternatieve definitie.

Onderstel dat (A, m, η) een algebra is en (C, Δ, ϵ) een coalgebra is. Dan definiëren we het *convolutieproduct* op $\text{Hom}(C, A)$ als volgt:

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

Of in Sweedler notatie:

$$(f * g)(x) = \sum_x f(x_{(1)})g(x_{(2)})$$

Stelling 8.10.4. *De vectorruimte $\text{Hom}(C, A)$ uitgerust met de vermenigvuldiging $*$ is een algebra (in de traditionele zin) met eenheidselement $\eta\epsilon$.*

Bewijs. Eerst tonen we aan dat $*$ associatief is. We berekenen

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(c) &= \sum_c (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\ &= \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \end{aligned} \tag{8.53}$$

en

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \sum_c f(c_{(1)})(g * h)(c_{(2)}) \\ &= \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \end{aligned} \tag{8.54}$$

(8.53) is dus duidelijk gelijk aan (8.54) en onze bewering is bewezen.

We moeten nog bewijzen dat $\eta\epsilon$ een eenheidselement is. We bereken

$$\begin{aligned} (\eta\epsilon * f)(c) &= \sum_c \eta(\epsilon(c_{(1)}))f(c_{(2)}) \\ &= \sum_c \epsilon(c_{(1)})f(c_{(2)}) \\ &= f\left(\sum_c \epsilon(c_{(1)})(c_{(2)})\right) \\ &= f(c) \end{aligned}$$

De tweede regel volgt uit het feit dat voor $\lambda \in k$, $y \in A$ we hebben $\eta(\lambda)y = \lambda y$ vanwege (8.2). De derde regel volgt uit het feit dat f een lineaire afbeelding $C \rightarrow A$ is.

De berekening voor $(f * \eta\epsilon)(c)$ is analoog. \square

Lemma 8.10.5. *Een lineaire afbeelding $S : H \rightarrow H$ is een antipode als en slechts als S een tweezijdige inverse is van Id_H voor het convolutieproduct.*

Bewijs. \Rightarrow Onderstel dat S een antipode is. Dan berekenen we

$$\begin{aligned} (\text{Id}_H * S)(x) &= \sum_x x_{(1)} S(x_{(2)}) \\ &= \eta\epsilon(x) \end{aligned}$$

De berekening voor $(S * \text{Id}_H)(x)$ is analoog.

\Leftarrow Onderstel nu dat S een tweezijdig inverse is van Id_H . Als we $\text{Id}_H * S = \eta\epsilon$ evalueren op $x \in H$ vinden we

$$\sum_x x_{(1)} S(x_{(2)}) = \eta\epsilon(x)$$

wat de eerste conditie is voor een antipode. De andere conditie is analoog. \square

Gevolg 8.10.6. *Als een bialgebra H een antipode S heeft dan is S uniek!*

Bewijs. Dit volgt uit het standaard feit dat een inverse van een element voor een associatieve bewerking met eenheid uniek is als het bestaat. Toon dit aan als oefening. \square

Stelling 8.10.7. *Zij $(H, m, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ een Hopf-algebra. Dan gelden de volgende identiteiten.*

$$\forall x, y \in H : S(xy) = S(y)S(x) \quad (8.55)$$

$$S(1) = 1 \quad (8.56)$$

$$\forall x : \sum_{S(x)} S(x)_{(1)} \otimes S(x)_{(2)} = \sum_x S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}) \quad (8.57)$$

$$\epsilon \circ S = \epsilon \quad (8.58)$$

Bewijs. Eerst bewijzen we (8.55). Definieer de afbeeldingen

$$\begin{aligned} \nu : H \otimes H &\rightarrow H : x \otimes y \mapsto S(y)S(x) \\ \rho : H \otimes H &\rightarrow H : x \otimes y \mapsto S(xy) \end{aligned}$$

We moeten aantonen dat $\nu = \rho$.

$H \otimes H$ is een coalgebra en H is een algebra. Om verwarring te vermijden zullen de notatie $(-)_H \otimes H$ gebruiken als we naar $H \otimes H$ verwijzen.

Dus het convolutieprodukt maakt van $\text{Hom}(H \otimes H, H)$ een algebra. Een bijzonder element van deze algebra is het vermengivuldigingshomomorfisme $m : H \otimes H \rightarrow H$.

Het is voldoende aan te tonen dat

$$\rho * m = \eta \epsilon_{H \otimes H} \quad (8.59)$$

$$m * \nu = \eta \epsilon_{H \otimes H} \quad (8.60)$$

(vermenigvuldig de eerst van deze vergelijkingen met ν en substitueer de tweede).

We berekenen eerst $\rho * m$.

$$\begin{aligned} (\rho * m)(x \otimes y) &= \sum_{x \otimes y} \rho((x \otimes y)_{(1)}) m((x \otimes y)_{(2)}) \\ &= \sum_{x, y} \rho(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) m(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\ &= \sum_{x, y} S(x_{(1)} y_{(1)}) x_{(2)} y_{(2)} \\ &= \sum_{xy} S((xy)_{(1)}) (xy)_{(2)} \\ &= \eta \epsilon(xy) \\ &= \eta \epsilon_{H \otimes H}(x \otimes y) \end{aligned}$$

In de tweede regel hebben we gebruikt

$$\begin{aligned} \Delta_{H \otimes H}(x \otimes y) &= (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) \quad (\text{volgens (8.12)}) \\ &= (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(\Delta(x) \otimes \Delta(y)) \\ &= (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})\left(\left(\sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) \otimes \left(\sum_y y_{(1)} \otimes y_{(2)}\right)\right) \\ &= \sum_{x, y} (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes y_{(1)} \otimes y_{(2)}) \\ &= \sum_{x, y} x_{(1)} \otimes y_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes y_{(2)} \end{aligned}$$

Aangezien bij conventie ook geldt

$$\Delta_{H \otimes H}(x \otimes y) = \sum_{x \otimes y} (x \otimes y)_{(1)} \otimes (x \otimes y)_{(2)}$$

mogen we dus $(x \otimes y)_{(i)}$ door $x_{(i)} \otimes y_{(i)}$ vervangen voor $i = 1, 2$.

In de laatste regel hebben we gebruikt dat voor de coeenheid op $H \otimes H$ geldt

$$\begin{aligned}\epsilon_{H \otimes H}(x \otimes y) &= \epsilon(x)\epsilon(y) && \text{(volgens (8.13))} \\ &= \epsilon(xy) && \text{(want } H \text{ is een bialgebra)}\end{aligned}$$

Nu berekenen we $m * \nu$.

$$\begin{aligned}(m * \nu)(x \otimes y) &= \sum_{x \otimes y} m((x \otimes y)_{(1)})\nu((x \otimes y)_{(2)}) \\ &= \sum_{x, y} m(x_{(1)} \otimes y_{(1)})\nu(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\ &= \sum_{x, y} x_{(1)}y_{(1)}S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\ &= \sum_x x_{(1)}\left(\sum_y y_{(1)}S(y_{(2)})\right)S(x_{(2)}) \\ &= \sum_x x_{(1)}\epsilon(y)S(x_{(2)}) \\ &= \sum_x x_{(1)}S(x_{(2)})\epsilon(y) \\ &= \epsilon(x)\epsilon(y)1 \\ &= \eta\epsilon_{H \otimes H}(x \otimes y)\end{aligned}$$

Dit beëindigt het bewijs van (8.55).

Toepassen van $(\text{Id}_H * S)(x) = \eta\epsilon(x)$ met $x = 1$ levert $S(1) = 1$ wat (8.56) bewijst.

Nu bewijzen we (8.57). We definiëren lineaire afbeeldingen $\rho, \nu : H \rightarrow H \otimes H$ via

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \Delta(S(x)) \\ \nu(x) &= \sum_x S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)})\end{aligned}$$

We willen aantonen dat $\rho = \nu$. Dit zal volgen uit $\rho * \Delta = \Delta * \nu = \eta_{H \otimes H}\epsilon$ in $\text{Hom}(H, H \otimes H)$.

We berekenen eerst

$$\begin{aligned}
(\rho * \Delta)(x) &= \sum_x \Delta(S(x_{(1)}))\Delta(x_{(2)}) \\
&= \Delta\left(\sum S(x_{(1)})x_{(2)}\right) \\
&= \Delta(\eta\epsilon(x)) \\
&= \Delta(\epsilon(x)1) \\
&= \epsilon(x)1 \otimes 1 \\
&= \eta_{H \otimes H}\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Nu berekenen we

$$\begin{aligned}
(\Delta * \nu)(x) &= \sum_x \Delta(x_{(1)})\nu(x_{(2)}) \\
&= \sum_x (x_{(1)} \otimes x_{(2)})(S(x_{(4)}) \otimes S(x_{(3)})) \\
&= \sum_x x_{(1)}S(x_{(4)}) \otimes x_{(2)}S(x_{(3)}) \\
&= \sum_x x_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes \epsilon(x_{(2)})1 \\
&= \sum_x x_{(1)}\epsilon(x_{(2)})S(x_{(3)}) \otimes 1 \\
&= \sum_x x_{(1)}S(x_{(2)}) \otimes 1 \\
&= \epsilon(x)1 \otimes 1 \\
&= \eta_{H \otimes H}\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Dit beëindigt het bewijs van (8.57).

Als we ϵ toepassen op de identiteit

$$\sum x_{(1)}S(x_{(2)}) = \eta\epsilon(x)$$

vinden we

$$\sum_x \epsilon(x_{(1)})\epsilon S(x_{(2)}) = \epsilon\eta\epsilon(x) = \epsilon(x)$$

We hebben ook

$$\begin{aligned}
\sum_x \epsilon(x_{(1)})\epsilon S(x_{(2)}) &= \sum_x \epsilon S(\epsilon(x_{(1)})x_{(2)}) \\
&= \epsilon S\left(\sum_x \epsilon(x_{(1)})x_{(2)}\right) \\
&= \epsilon S(x)
\end{aligned}$$

Dit bewijst (8.58). □

Onderstel dat H een Hopf algebra is en veronderstel dat V, W representaties zijn van H . Definieer voor $h \in H$, $f \in \text{Hom}(V, W)$, $v \in V$

$$(h \cdot f)(v) = \sum_h h_{(1)} f(S(h_{(2)})v)$$

Stelling 8.10.8. “ \cdot ” definieert de structuur van een H -representatie op $\text{Hom}(V, W)$.

Bewijs. $\text{Hom}(V, W)$ is duidelijk eindigdimensionaal. Dus we moeten enkel aantonen dat “ \cdot ” een H -moduulstructuur definieert. Dit komt neer op het bewijzen van de uitwendige associativiteit:

$$(hh') \cdot f = h \cdot (h' \cdot f) \tag{8.61}$$

en $1 \cdot f = f$. Deze laatste gelijkheid is triviaal, dus we concentreren ons op (8.61). We berekenen voor $v \in V$

$$\begin{aligned} ((hh') \cdot f)(v) &= \sum_{hh'} (hh')_{(1)} f(S((hh')_{(2)})v) \\ &= \sum_{h, h'} h_{(1)} h'_{(1)} f(S(h_{(2)} h'_{(2)})v) \\ &= \sum_{h, h'} h_{(1)} h'_{(1)} f(S(h'_{(2)})S(h_{(2)})v) \quad (\text{vanwege (8.55)}) \end{aligned}$$

Voor het rechterlid van (8.61) vinden we

$$\begin{aligned} (h \cdot (h' \cdot f))(v) &= \sum_h h_{(1)} (h' \cdot f)(S(h_{(2)})v) \\ &= \sum_{h, h'} h_{(1)} h'_{(1)} f(S(h'_{(2)})S(h_{(2)})v) \end{aligned}$$

Dit bewijst het gestelde. □

Zij H een Hopf-algebra is met antipode S . Voor veel berekeningen is het noodzakelijk dat S een omkeerbare lineaire afbeelding $H \rightarrow H$ is. We zeggen in dat geval dat H een omkeerbare antipode heeft. Men kan de volgende stelling bewijzen.

Stelling 8.10.9. *Zij H een eindigdimensionale Hopf-algebra met antipode S . Dan bestaat er een $n > 0$ zodat $S^n = \text{Id}_H$. In het bijzonder is S omkeerbaar.*

Als H een omkeerbare antipode heeft dan kunnen we uit H weer diverse nieuwe Hopf-algebras maken:

$$H^{\text{op}} = (H, m^{\text{op}}, \eta, \Delta, \epsilon, S^{-1}) \quad (8.62)$$

$$H^{\text{coop}} = (H, m, \eta, \Delta^{\text{op}}, \epsilon, S^{-1}) \quad (8.63)$$

Het feit dat $H^{\text{op}}, H^{\text{coop}}$ aan het axioma (8.52) voldoet volgt uit de eigenschappen

$$S^{-1}(xy) = S^{-1}(y)S^{-1}(x) \quad (8.64)$$

$$S^{-1}(1) = 1 \quad (8.65)$$

Leidt deze zelf af uit (8.55),(8.56).

Merk dat S een isomorfisme geeft tussen H^{op} en H^{coop} .

We kunnen ook altijd de volgende Hopf-algebra maken:

$$H^{\text{op,coop}} = (H, m^{\text{op}}, \eta, \Delta^{\text{op}}, \epsilon, S)$$

S definieert een bialgebra-homomorfisme $H \rightarrow H^{\text{op,coop}}$. Dus in het geval dat S omkeerbaar is zijn deze twee Hopf-algebras isomorf.

Het feit dat H^{op} en H^{coop} Hopf-algebras zijn impliceert (gebruikmakende van (8.57),(8.58)) dat

$$\sum_{S^{-1}(x)} S^{-1}(x)_{(1)} \otimes S^{-1}(x)_{(2)} = \sum_x S^{-1}(x_{(2)}) \otimes S^{-1}(x_{(1)}) \quad (8.66)$$

en ook

$$\epsilon \circ S^{-1} = \epsilon \quad (8.67)$$

Je kan dit uiteraard ook direct aantonen.

Met heeft ook het volgende analogon van Stelling 8.8.5.

Stelling 8.10.10. *Als H een eindigdimensionale Hopf algebra is, dan is H^* ook een Hopf algebra als we de antipode S_{H^*} van H^* definiëren als $(S_H)^*$.*

9 De Drinfeld quantum double

In de vorige hoofdstukken hebben we gezien dat braided bialgebras kunnen gebruikt worden om oplossingen van de Yank-Baxter vergelijking te genereren. Het probleem is hoe we voldoende van dergelijke bialgebras kunnen vinden. Als antwoord hierop heeft Drinfeld in 1986 een ingenieuze constructie gevonden die uit een eindigdimensionale Hopf algebra een nieuwe braided Hopf algebra maakt, de zogenaamde double. We zullen een veralgemening van deze constructie eerst bespreken in het geval van groepen.

9.1 Bicrossed products van groepen

Onderstel dat G een groep is met twee deelgroepen H, K zodat de afbeelding

$$H \times K \mapsto G : (h, k) \mapsto hk$$

een bijectie is. Met andere woorden voor elke $g \in G$ bestaan er unieke $h \in H$, $k \in K$ zodat $g = hk$.

We vragen ons nu af welke extra informatie we nodig hebben om G uit H en K te reconstrueren. Dit probleem blijkt een vrij elegant antwoord te hebben.

Als $h \in H$, $k \in K$ dan bestaan er unieke elementen $k \rightarrow h \in H$, $k \leftarrow h \in K$ zodat $kh = (k \rightarrow h)(k \leftarrow h)$. Het is de bedoeling dat we de pijltjes \rightarrow en \leftarrow lezen als acties. Dat dit een goede interpretatie is volgt uit de berekeningen hieronder.

Laat ons de associativiteitscondities uitwerken. Zij dus $h, h' \in H$, $k, k' \in K$. Eerst hebben we $k(hh') = (kh)h'$. Dit levert

$$(k \rightarrow hh')(k \leftarrow hh') = (k \rightarrow h)(k \leftarrow h)h' = (k \rightarrow h)((k \leftarrow h) \rightarrow h')((k \leftarrow h) \leftarrow h')$$

waaruit we halen:

$$k \leftarrow hh' = (k \leftarrow h) \leftarrow h' \tag{9.1}$$

$$k \rightarrow hh' = (k \rightarrow h)((k \leftarrow h) \rightarrow h') \tag{9.2}$$

Een andere associativiteitsconditie wordt gegeven door $(kk')h = k(k'h)$. Uitwerken levert

$$(kk' \rightarrow h)(kk' \leftarrow h') = k(k' \rightarrow h)(k' \leftarrow h) = (k \rightarrow (k' \rightarrow h))(k \leftarrow (k' \rightarrow h))(k' \leftarrow h)$$

wat de volgende gelijkheden geeft:

$$kk' \rightarrow h = k \rightarrow (k' \rightarrow h) \tag{9.3}$$

$$kk' \leftarrow h = (k \leftarrow (k' \rightarrow h))(k' \leftarrow h) \tag{9.4}$$

Zij 1 het eenheidselement van zowel H , K als G . Als we uitwerken $k1 = 1k$ en $1h = h1$ dan vinden we

$$k \rightarrow 1 = 1 \quad (9.5)$$

$$k \leftarrow 1 = k \quad (9.6)$$

$$1 \rightarrow h = h \quad (9.7)$$

$$1 \leftarrow h = 1 \quad (9.8)$$

De identiteiten (9.1)(9.6) geven aan dat \leftarrow een rechtsactie van H op K is. De identiteiten (9.3)(9.7) geven aan dat \rightarrow een linksactie van K op H is. Tenslotte geven (9.2)(9.4) aan in hoeverre de acties \rightarrow en \leftarrow de groeps wetten op H en K respecteren. Indien bijvoorbeeld de actie van H op K triviaal is (dwz $k \leftarrow h = k$) dan geeft (9.2) aan dat \rightarrow de groeps wet op H respecteert.

We zullen nu van de voorgaande berekeningen een definitie maken.

Definitie 9.1.1. Een koppel van groepen (H, K) wordt “matched” genoemd als we de volgende extra data geven

1. Een linksactie van K op H (als verzameling):

$$K \times H \rightarrow H : (k, h) \mapsto k \rightarrow h$$

2. Een rechtsactie van H op K (als verzameling):

$$K \times H \rightarrow K : (k, h) \mapsto k \leftarrow h$$

en als deze data bovendien nog aan de volgende axioma's voldoen (voor $h, h' \in H$, $k, k' \in K$).

$$k \rightarrow hh' = (k \rightarrow h)((k \leftarrow h) \rightarrow h') \quad (9.9)$$

$$kk' \leftarrow h = (k \leftarrow (k' \rightarrow h))(k' \leftarrow h) \quad (9.10)$$

$$k \rightarrow 1 = 1 \quad (9.11)$$

$$1 \leftarrow h = 1 \quad (9.12)$$

We hebben nu de volgende stelling

Stelling 9.1.2. *Onderstel dat (H, K) een matched koppel van groepen is. Dan definieert*

$$(h, k) \cdot (h', k') = (h(k \rightarrow h'), (k \leftarrow h')k')$$

een groepstructuur op $H \times K$ zodat $H \times \{1\}$ en $\{1\} \times K$ deelgroepen zijn isomorf met H en K respectievelijk en zodat elk element van $H \times K$ op een uniek manier geschreven kan worden als een produkt van elementen van $H \times \{1\}$ en $\{1\} \times K$.

We noteren $H \bowtie K$ voor $H \times K$ met bovenstaande groepstructuur.

Bewijs. Dit is een eenvoudige, zij het enigszins omslachtige oefening. \square

Gevolg 9.1.3. *Onderstel G, H, K zijn zoals in het begin van deze sectie. Dan geldt $G \cong H \bowtie K$.*

Bewijs. Hiervoor volstaat het om bovenstaande berekeningen te herhalen. \square

9.2 Bicrossed products van bialgebras

Onderstel dat (H, K) een matched paar van groepen is. We vragen ons af we de bialgebra $\mathbb{C}(H \bowtie K)$ kunnen construeren uit $\mathbb{C}H$ en $\mathbb{C}K$. Om deze vraag te beantwoorden moeten we eerst de actie van een groep op een verzameling vertalen in termen van bialgebras. Onderstel dat een groep G werkt op een verzameling X . Deze actie wordt gegeven door een afbeelding:

$$G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto g \rightarrow x$$

Als we deze afbeelding lineariseren bekommen we een afbeelding:

$$\alpha : \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}X \quad (9.13)$$

Die op een basiselement $(g, x) \in G \times X$ van $\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}X$ de waarde $g \rightarrow x$ aanneemt.

Wat kunnen we zeggen over (9.13)?

Lemma 9.2.1. *1. De afbeelding α is een homomorfisme van coalgebras.*

2. De samenstelling van α met de standaard bilineaire afbeelding $\mathbb{C}G \times \mathbb{C}X \rightarrow \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}X$ definieert een $\mathbb{C}G$ -moduul structuur op $\mathbb{C}X$.

Bewijs. 1. We moeten bewijzen dat

$$(\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta = \Delta \circ \alpha \quad (9.14)$$

$$\epsilon \circ \alpha = \epsilon \quad (9.15)$$

Zoals gewoonlijk is het voldoende dit te verifiëren op basiselementen $g \otimes x \in G \times X$. Voor (9.14) berekenen we $(\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta(g \otimes x) = (\alpha \otimes \alpha)(g \otimes x \otimes g \otimes x) = (g \rightarrow x) \otimes (g \rightarrow x)$ en $(\Delta \circ \alpha)(g \otimes x) = \Delta(g \rightarrow x) = (g \rightarrow x) \otimes (g \rightarrow x)$. Voor (9.15) berekenen we $(\epsilon \circ \alpha)(g \otimes x) = \epsilon(g \rightarrow x) = 1$ en $\epsilon(g \otimes x) = \epsilon(g)\epsilon(x) = 1$.

2. Als $u, v \in \mathbb{C}G$, $f \in \mathbb{C}X$ dan moeten we bewijzen dat

$$\begin{aligned}\alpha(u, \alpha(v, f)) &= \alpha(uv, f) \\ \alpha(1, f) &= f\end{aligned}$$

Zonder verlies aan algemeenheid mogen we weer onderstellen dat $(u, v) = (g, h) \in G \times G$ en $f = x \in X$. Dan volgt het gestelde uit het feit dat \rightarrow een actie van G op X is. \square

Dit leidt tot de volgende definitie:

Definitie 9.2.2. Zij H een bialgebra en C een coalgebra. We zeggen dat C een (links) H -moduul-coalgebra is als indien er een coalgebrahomomorfisme gegeven word

$$\alpha : H \otimes C \rightarrow C$$

dat een links H -moduulstructuur op C induceert.

Een rechts H -moduul-coalgebra wordt analoog gedefinieerd via een coalgebrahomomorfisme

$$\beta : C \otimes H \rightarrow C$$

dat een rechts H -moduulstructuur op C induceert.

In het vervolg zullen we $\alpha(h \otimes c)$ noteren als $h \rightarrow c$ en $\beta(c \otimes h)$ met $c \leftarrow h$. Onderstel dat we een lineaire afbeelding

$$\alpha : H \otimes C \rightarrow C$$

hebben. Dan zal deze op C een links H -moduul coalgebra structuur induceren als en slechts als aan de volgende voorwaarden voldaan is voor $h, h' \in H$, $c \in C$.

$$h \rightarrow (h' \rightarrow c) = hh' \rightarrow c \tag{9.16}$$

$$1 \rightarrow c = c \quad (C \text{ is een } H\text{-moduul}) \tag{9.17}$$

$$\Delta(h \rightarrow c) = \sum_{c, h} (h_{(1)} \rightarrow c_{(1)}) \otimes (h_{(2)} \rightarrow c_{(2)}) \tag{9.18}$$

$$\epsilon(h \rightarrow c) = \epsilon(h)\epsilon(c) \quad (\alpha \text{ is een hom. van coalgebras}) \tag{9.19}$$

Er is uiteraard een analoge bewering voor rechts H -moduul coalgebras.

Definitie 9.2.3. Een koppel bialgebras (A, B) zodat A een links B moduul-coalgebra is en B een rechts A -moduul-coalgebra is wordt matched genoemd

als de volgende condities voldaan zijn voor $a, a' \in A$, $b, b' \in B$:

$$b \rightarrow aa' = \sum_{b,a} (b_{(1)} \rightarrow a_{(1)})((b_{(2)} \leftarrow a_{(2)}) \rightarrow a') \quad (9.20)$$

$$b \rightarrow 1 = \epsilon(b)1 \quad (9.21)$$

$$bb' \leftarrow a = \sum_{a,b'} (b \leftarrow (b'_{(1)} \rightarrow a_{(1)}))(b'_{(2)} \leftarrow a_{(2)}) \quad (9.22)$$

$$1 \leftarrow a = \epsilon(a)1 \quad (9.23)$$

$$\sum_{a,b} (b_{(1)} \leftarrow a_{(1)}) \otimes (b_{(2)} \rightarrow a_{(2)}) = \sum_{a,b} (b_{(2)} \leftarrow a_{(2)}) \otimes (b_{(1)} \rightarrow a_{(1)}) \quad (9.24)$$

Toon als oefening aan dat deze condities voldaan zijn voor $(A, B) = (\mathbb{C}H, \mathbb{C}K)$ in geval dat H, K een matched paar van groepen is. Merk op dat (9.24) automatisch voldaan is in het geval dat A, B cocommutatief zijn.

Hieronder onderstellen we dat (A, B) een matched paar van bialgebras is.

Lemma 9.2.4. *Dan definieert de volgende formule*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = \sum_{a',b} a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)})b' \quad (9.25)$$

een associatief produkt op $A \otimes B$.

Bewijs. Eerst berekenen we $((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'')$:

$$\begin{aligned} & ((a \otimes b)(a' \otimes b'))(a'' \otimes b'') \\ &= \sum_{a',b} (a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)})b')(a'' \otimes b'') \\ &= \sum_{a',b,b',a''} a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)})((b_{(2)} \rightarrow a'_{(2)})b'_{(1)} \rightarrow a''_{(1)}) \otimes ((b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)})b'_{(2)} \leftarrow a''_{(2)})b'' \\ &= \sum_{a',b,b',a''} a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)})((b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)}) \rightarrow (b'_{(1)} \rightarrow a''_{(1)})) \\ & \quad \otimes ((b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)}) \leftarrow (b'_{(2)} \rightarrow a''_{(2)}))(b'_{(3)} \leftarrow a''_{(3)})b'' \end{aligned}$$

In de tweede regel hebben we (9.18) gebruikt.

$$\begin{aligned}
& \text{Nu berekenen we } (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')): \\
& (a \otimes b)((a' \otimes b')(a'' \otimes b'')) \\
&= \sum_{b', a''} (a \otimes b)(a'(b'_{(1)} \rightarrow a''_{(1)}) \otimes (b'_{(2)} \leftarrow a''_{(2)})b'') \\
&= \sum_{a, a'', b, b'} a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}(b'_{(1)} \rightarrow a''_{(1)})) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)}(b'_{(2)} \rightarrow a''_{(2)}))(b'_{(3)} \leftarrow a''_{(3)})b'' \\
&= a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)})((b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)}) \rightarrow (b'_{(1)} \rightarrow a''_{(1)})) \\
&\quad \otimes ((b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)}) \leftarrow (b'_{(2)} \rightarrow a''_{(2)}))(b'_{(3)} \rightarrow a''_{(3)})b'' \quad \square
\end{aligned}$$

We noteren met $A \bowtie B$ de vectorruimte $A \otimes B$ met de vermenigvuldiging (9.25).

Lemma 9.2.5. $1 \otimes 1$ is een eenheid voor $A \bowtie B$.

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(1 \otimes 1)(a \otimes b) &= 1(1 \rightarrow a_{(1)}) \otimes (1 \leftarrow a_{(2)})b \\
&= \sum_a a_{(1)} \otimes \epsilon(a_{(2)})b \\
&= \sum_a a_{(1)}\epsilon(a_{(2)}) \otimes b \\
&= a \otimes b
\end{aligned}$$

De berekening voor $(a \otimes b)(1 \otimes 1)$ is analoog. \square

We zetten op $A \bowtie B$ dezelfde coalgebrastructuur als op $A \otimes B$.

We vragen ons nu af wanneer $A \bowtie B$ een bialgebra zal zijn. Hiervoor moet gelden

$$\Delta((a \otimes b)(a' \otimes b')) = \Delta(a \otimes b)\Delta(a' \otimes b') \quad (9.26)$$

$$\epsilon((a \otimes b)(a' \otimes b')) = \epsilon(a \otimes b)\epsilon(a' \otimes b') \quad (9.27)$$

We berekenen eerst de linkerzijde van (9.26). Dit levert

$$\begin{aligned}
\text{LZ (9.26)} &= \sum_{a', b} \Delta(a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)})b') \\
&= \sum_{a, a', b, b'} a_{(1)}(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes (b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)})b'_{(1)} \otimes a_{(2)}(b_{(2)} \rightarrow a'_{(2)}) \otimes (b_{(4)} \leftarrow a'_{(4)})b'_{(2)} \\
&= \sum_{a, a', b, b'} a_{(1)}(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes \\
&\quad \left(\sum_{b_{(2)}, a'_{(2)}} ((b_{(2)})_{(2)} \leftarrow (a'_{(2)})_{(2)})b'_{(1)} \otimes a_{(2)}((b_{(2)})_{(1)} \rightarrow (a'_{(2)})_{(1)}) \right) \otimes (b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)})b'_{(2)}
\end{aligned}$$

In de tweede lijn hebben we weer (9.18) gebruikt en de analoge bewering voor rechts moduul coalgebras.

In de derde lijn hebben we oa gebruikt:

$$\begin{aligned}\sum_b b_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes b_{(3)} \otimes b_{(4)} &= \sum_b b_{(1)} \otimes \Delta b_{(2)} \otimes b_{(3)} \\ &= \sum_b \sum_{b_{(2)}} b_{(1)} \otimes (b_{(2)})_{(1)} \otimes (b_{(2)})_{(2)} \otimes b_{(3)}\end{aligned}$$

Wat volgt uit de coassociativiteit.

De rechterzijde van (9.26) levert

$$\begin{aligned}\text{RZ (9.26)} &= \sum_{a,a',b,b'} (a_{(1)} \otimes b_{(1)})(a'_{(1)} \otimes b'_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})(a'_{(2)} \otimes b'_{(2)}) \\ &= \sum_{a,a',b,b'} a_{(1)}(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(2)})b'_{(1)} \otimes a_{(2)}(b_{(3)} \rightarrow a'_{(3)}) \otimes (b_{(4)} \leftarrow a'_{(4)})b'_{(2)} \\ &= \sum_{a,a',b,b'} a_{(1)}(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)}) \otimes \\ &\quad \left(\sum_{b_{(2)},a'_{(2)}} ((b_{(2)})_{(1)} \leftarrow (a'_{(2)})_{(1)})b'_{(1)} \otimes a_{(2)}((b_{(2)})_{(2)} \rightarrow (a'_{(2)})_{(2)}) \right) \otimes (b_{(3)} \leftarrow a'_{(3)})b'_{(2)}\end{aligned}$$

Dus (9.26) zal gelden als de volgende gelijkheid geldt voor alle $c, c' \in A$, $d, d' \in B$:

$$\sum_{d,c'} (d_{(1)} \leftarrow c'_{(1)})d' \otimes c(d_{(2)} \rightarrow c'_{(2)}) = \sum_{d,c'} (d_{(2)} \leftarrow c'_{(2)})d' \otimes c(d_{(1)} \rightarrow c'_{(1)})$$

Vanwege (9.24) hebben we

$$\sum_{d,c'} (d_{(1)} \leftarrow c'_{(1)}) \otimes (d_{(2)} \rightarrow c'_{(2)}) = \sum_{d,c'} (d_{(2)} \leftarrow c'_{(2)}) \otimes (d_{(1)} \rightarrow c'_{(1)})$$

Als we hierop nu de lineaire transformatie

$$B \otimes A \rightarrow B \otimes A$$

toepassen gedefinieerd door $b \otimes a \mapsto bd' \otimes ca$ toepassen dan verkrijgen we precies wat we willen.

Laat ons tenslotte nog (9.27) verifiëren. Dit komt neer op

$$\sum_{b,a'} \epsilon(a)\epsilon(b_{(1)} \rightarrow a'_{(1)})\epsilon(b_{(2)} \leftarrow a'_{(1)})\epsilon(b') = \epsilon(a)\epsilon(b)\epsilon(a')\epsilon(b')$$

wat volgt uit (9.19) tezamen met

$$\sum_b \epsilon(b_{(1)})\epsilon(b_{(2)}) = \epsilon\left(\sum_b b_{(1)}\epsilon(b_{(2)})\right) = \epsilon(b)$$

en de analoge redenering voor $\epsilon(a')$.

Samenvattend hebben we de volgende stelling bewezen:

Stelling 9.2.6. *$A \bowtie B$ met de algebra en coalgebra structuur zoals we die boven gedefinieerd hebben is een bialgebra.*

Met nog iets meer werk kan men aantonen dat als A, B Hopf-algebras zijn dat dan $A \bowtie B$ in feite ook een Hopf-algebra is met antipode

$$S(a \otimes b) = \sum_{a,b} (S(b_{(2)}) \rightarrow S(a_{(2)})) \otimes (S(b_{(1)}) \leftarrow S(a_{(1)}))$$

9.3 Hopf-bilineaire vormen

Hieronder zijn $(A, m_A, \eta_A, \Delta_A, \epsilon_A, S_A)$ en $(B, m_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B, S_B)$ twee vaste Hopf-algebras met *omkeerbare* antipodes. Een bilineaire afbeelding $\langle -, - \rangle : A \times B \rightarrow \mathbb{C}$ wordt een *Hopf-bilineaire* afbeelding genoemd als aan de volgende axioma's voldaan is voor alle $a, a' \in A, b, b' \in B$

$$\langle 1, b \rangle = \epsilon_B(b) \tag{9.28}$$

$$\langle a, 1 \rangle = \epsilon_A(a) \tag{9.29}$$

$$\langle a, bb' \rangle = \sum_a \langle a_{(1)}, b \rangle \langle a_{(2)}, b' \rangle \tag{9.30}$$

$$\langle aa', b \rangle = \sum_b \langle a, b_{(1)} \rangle \langle a', b_{(2)} \rangle \tag{9.31}$$

Het archetype van zo'n Hopf-bilineaire afbeelding is de evaluatieafbeelding tussen een eindigdimensionale Hopf-algebra en zijn duale. Als H een eindigdimensionale Hopf algebra is dan wordt de evaluatieafbeelding gedefinieerd als $\langle h, \phi \rangle = \phi(h)$. Het volgt uit (8.17)(8.18)(8.19)(8.20) dat $\langle -, - \rangle$ een Hopf-bilineaire afbeelding is.

Indien we de bilineaire form $\langle -, - \rangle$ uitbreiden tot een bilineaire vorm $A \otimes A \times B \otimes B \rightarrow \mathbb{C}$ via $\langle a \otimes b, c \otimes d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle$ dan kunnen (9.30) en (9.31) herschreven worden als

$$\langle a, bb' \rangle = \langle \Delta a, b \otimes b' \rangle \tag{9.32}$$

$$\langle aa', b \rangle = \langle a \otimes a', \Delta b \rangle \tag{9.33}$$

In de literatuur wordt dikwijls nog een extra vereiste opgelegd aan een Hopf-bilineaire vorm. Deze extra eigenschap volgt echter uit de andere axioma's zoals we in het volgende lemma aantonen.

Lemma 9.3.1. *Zij $\langle -, - \rangle$ een Hopf-bilineaire afbeelding tussen Hopf-algebras A, B . Dan geldt*

$$\langle S_A a, b \rangle = \langle a, S_B b \rangle$$

Bewijs. Beschouw de volgende afbeeldingen

$$\begin{aligned}\alpha : A &\rightarrow B^* : a \mapsto (b \mapsto \langle S_A a, b \rangle) \\ \beta : A &\rightarrow B^* : a \mapsto (b \mapsto \langle a, S_B b \rangle) \\ \gamma : A &\rightarrow B^* : a \mapsto (b \mapsto \langle a, b \rangle)\end{aligned}$$

We moeten aantonen dat $\alpha = \beta$. We werken in de algebra $\text{Hom}(A, B^*)$ uitgerust met het gebruikelijke convolutie produkt $*$ en we tonen aan dat $\alpha * \gamma = \eta_{B^*} \epsilon_A = \gamma * \beta$. Zoals in het bewijs van (8.55) is dit voldoende.

Eerst berekenen we

$$\begin{aligned}(\eta_{B^*} \epsilon_A)(a)(b) &= (\eta_{B^*}(\epsilon_A(a)))(b) \\ &= \epsilon_A(a) \epsilon_B(b) \quad (\text{zie (8.17)})\end{aligned}$$

Nu berekenen we

$$\begin{aligned}(\alpha * \gamma)(a)(b) &= \sum_a (\alpha(a_{(1)}) \gamma(a_{(2)}))(b) \\ &= \sum_{a,b} \alpha(a_{(1)})(b_{(1)}) \gamma(a_{(2)})(b_{(2)}) \quad (\text{zie (8.18)}) \\ &= \sum_{a,b} \langle S_A a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \langle a_{(2)}, b_{(2)} \rangle \\ &= \sum_a \langle S a_{(1)} a_{(2)}, b \rangle \\ &= \langle \epsilon_A(a) 1, b \rangle \\ &= \epsilon_A(a) \epsilon_B(b)\end{aligned}$$

en verder

$$\begin{aligned}
(\gamma * \beta)(a)(b) &= \sum_a (\gamma(a_{(1)})\beta(a_{(2)})(b)) \\
&= \sum_{a,b} \gamma(a_{(1)})(b_{(1)})\beta(a_{(2)})(b_{(2)}) \\
&= \sum_{a,b} \langle a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \langle a_{(2)}, S_B b_{(2)} \rangle \\
&= \sum_b \langle a, b_{(1)} S_B b_{(2)} \rangle \\
&= \langle a, 1_{\epsilon_B}(b) \rangle \\
&= \epsilon_A(a) \epsilon_B(b)
\end{aligned}$$

Dit beëindigt het bewijs. \square

We onderstellen hieronder dat $\langle -, - \rangle$ een Hopf-bilineaire afbeelding is tussen de Hopf-algebras A, B . We gaan aantonen dat (A^{coop}, B) een matched paar van bialgebras is. Eerst en vooral moeten we de geschikte acties definiëren:

$$\begin{aligned}
\alpha : B \otimes A^{\text{coop}} &\rightarrow A^{\text{coop}} \\
\beta : B \otimes A^{\text{coop}} &\rightarrow B
\end{aligned}$$

die van A^{coop} een links B -moduul coalgebra maken en van B een rechts A^{coop} -moduul coalgebra. Zoals voorheen zullen we deze acties ook met \rightarrow en \leftarrow noteren.

Om deze acties te definiëren hebben we de antipodes van A en B nodig. Als we hieronder S schrijven dan bedoelen we de antipodes van A en B en *nooit* van A^{coop} . Herinner je dat we de volgende relatie hebben voor $a \in A$ (zie (8.63)):

$$S_A(a) = S_{A^{\text{coop}}}^{-1}(a)$$

De formules voor \rightarrow en \leftarrow zijn niet evident. We geven ze hieronder:

$$\begin{aligned}
b \rightarrow a &= \sum_a \langle a_{(3)} S^{-1}(a_{(1)}), b \rangle a_{(2)} \\
b \leftarrow a &= \sum_b \langle a, S^{-1}(b_{(3)}) b_{(1)} \rangle b_{(2)}
\end{aligned}$$

Met een enigszins omslachtige verificatie toont men aan dat met deze formules A^{coop} en B matched bialgebras zijn. In totaal moeten we 13 axioma's verifiëren:

1. (9.16)-(9.19);
2. De 4 axioma's voor rechts comoduul algebras die analoog zijn aan (9.16)-(9.19);
3. (9.20)-(9.24).

Als voorbeeld zullen we (9.18) nagaan. We moeten dus bewijzen:

$$\Delta_{A^{\text{coop}}}(b \rightarrow a) = \sum_{a,b} (b_{(1)} \rightarrow a_{(2)}) \otimes (b_{(2)} \rightarrow a_{(1)}) \quad (9.34)$$

waarbij we uiteraard gebruikt hebben dat

$$\Delta_{A^{\text{coop}}}(a) = \sum_a a_{(2)} \otimes a_{(1)}$$

De linkerzijde van (9.34) is gelijk aan

$$\sum_a \langle a_{(4)} S^{-1}(a_{(1)}), b \rangle a_{(3)} \otimes a_{(2)} \quad (9.35)$$

De rechterzijde van (9.34) is gelijk aan

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \langle a_{(4)} S^{-1} a_{(2)}, b_{(1)} \rangle a_{(3)} \otimes b_{(2)} &\rightarrow a_{(1)} \\ &= \sum_{a,b} \langle a_{(6)} S^{-1} a_{(4)}, b_{(1)} \rangle a_{(5)} \otimes \langle a_{(3)} S^{-1} a_{(1)}, b_{(2)} \rangle a_{(2)} \\ &= \sum_{a,b} \langle a_{(6)}, b_{(1)} \rangle \langle S^{-1} a_{(4)}, b_{(2)} \rangle \langle a_{(3)}, b_{(3)} \rangle \langle S^{-1} a_{(1)}, b_{(4)} \rangle (a_{(5)} \otimes a_{(2)}) \\ &= \sum_a \langle a_{(6)} S^{-1} a_{(4)} a_{(3)} S^{-1} a_{(1)}, b \rangle (a_{(5)} \otimes a_{(2)}) \\ &= \sum_a \langle a_{(5)} \epsilon(a_{(3)}) S^{-1} a_{(1)}, b \rangle (a_{(4)} \otimes a_{(2)}) \\ &= \sum_a \langle a_{(5)} S^{-1} a_{(1)}, b \rangle (a_{(4)} \otimes a_{(2)} \epsilon(a_{(3)})) \\ &= \sum_a \langle a_{(4)} S^{-1} a_{(1)}, b \rangle (a_{(3)} \otimes a_{(2)}) \end{aligned}$$

Dit komt overeen met (9.35).

Definitie 9.3.2. Zij $\langle -, - \rangle$ als in de vorige stelling. Dan wordt de Drinfeld double van A, B gedefinieerd als $A^{\text{coop}} \bowtie B$.

Voor de praktijk is het nuttig als we de vermenigvuldiging op $D(A, B)$ op een directe manier geven.

Stelling 9.3.3. *De vermenigvuldiging op $D(A, B)$ wordt gegeven door*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = \sum_{b, a'} \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(3)} \rangle \langle a'_{(3)}, b_{(1)} \rangle aa'_{(2)} \otimes b_{(2)}b' \quad (9.36)$$

Bewijs. Dit is een directe berekening:

$$\begin{aligned} (a \otimes b)(a' \otimes b') &= \sum_{a', b} a(b_{(1)} \rightarrow a'_{(2)}) \otimes (b_{(2)} \leftarrow a'_{(1)})b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(3)} \langle a'_{(4)}, S^{-1}a'_{(2)}, b_{(1)} \rangle \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(4)}b_{(2)} \rangle b_{(3)}b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(3)} \langle a'_{(4)}, b_{(1)} \rangle \langle S^{-1}a'_{(2)}, b_{(2)} \rangle \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(5)}b_{(3)} \rangle b_{(4)}b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(3)} \langle a'_{(4)}, b_{(1)} \rangle \langle S^{-1}a'_{(3)}, b_{(2)} \rangle \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(5)} \rangle \langle a'_{(2)}, b_{(3)} \rangle b_{(4)}b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(4)} \langle a'_{(5)}, b_{(1)} \rangle \langle S^{-1}a'_{(3)}a'_{(2)}, b_{(2)} \rangle \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(4)} \rangle b_{(3)}b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(3)} \langle a'_{(4)}, b_{(1)} \rangle \epsilon(a'_{(2)})\epsilon(b_{(2)}) \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(4)} \rangle b_{(3)}b' \\ &= \sum_{a', b} aa'_{(2)} \langle a'_{(3)}, b_{(1)} \rangle \otimes \langle a'_{(1)}, S^{-1}b_{(3)} \rangle b_{(2)}b' \quad \square \end{aligned}$$

Er is nog een andere karakterisatie van $D(A, B)$.

Stelling 9.3.4. *In $D(A, B)$ gelden de volgende identiteiten voor $a, a' \in A$, $b, b' \in A$.*

$$(a \otimes 1)(a' \otimes 1) = aa' \otimes 1 \quad (9.37)$$

$$(1 \otimes b)(1 \otimes b') = 1 \otimes bb' \quad (9.38)$$

$$(a \otimes 1)(1 \otimes b) = a \otimes b \quad (9.39)$$

$$\sum_{a, b} \langle a_{(1)}, b_{(2)} \rangle (1 \otimes b_{(1)})(a_{(2)} \otimes 1) = \sum_{a, b} \langle a_{(2)}, b_{(1)} \rangle a_{(1)} \otimes b_{(2)} \quad (9.40)$$

Omgekeerd is de vermenigvuldiging in $D(A, B)$ de enige associatieve (bilineaire) bewerking op $A \otimes B$ die voldoet aan (9.37)-(9.40).

Bewijs. Dat (9.37)-(9.40) geldt in $D(A, B)$ is een directe verificatie. Laat ons daarom de omgekeerde richting bewijzen. Vanwege de associativiteit is het voldoende om te bewijzen dat geldt

$$(1 \otimes b)(a \otimes 1) = \sum_{a,b} \langle a_{(1)}, S^{-1}b_{(3)} \rangle \langle a_{(3)}, b_{(1)} \rangle a_{(2)} \otimes b_{(2)}$$

Dit doen we als volgt:

$$\begin{aligned} (1 \otimes b)(a \otimes 1) &= \sum_{a,b} (1 \otimes b_{(1)} \epsilon(b_{(2)}))(a_{(2)} \langle a_{(1)}, 1 \rangle \otimes 1) \\ &= \sum_{a,b} (1 \otimes b_{(1)})(a_{(2)} \langle a_{(1)}, S^{-1}b_{(3)}b_{(2)} \rangle \otimes 1) \\ &= \sum_{a,b} (1 \otimes b_{(1)})(a_{(3)} \langle a_{(1)}, S^{-1}b_{(3)} \rangle \langle a_{(2)}, b_{(2)} \rangle \otimes 1) \\ &= \sum_{a,b} a_{(2)} \otimes b_{(2)} \langle a_{(1)}, S^{-1}b_{(3)} \rangle \langle a_{(3)}, b_{(1)} \rangle \quad \square \end{aligned}$$

Als V, W eindigdimensionale vectorruimten zijn en $\langle -, - \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ een bilineaire vorm is dan zeggen we dat $\langle -, - \rangle$ *niet gedegeneerd* is indien $\langle a, y \rangle = 0$ voor alle a impliceert $y = 0$ en $\langle x, b \rangle = 0$ voor alle b impliceert $x = 0$.

Met behulp van eenvoudige lineaire algebra toont men aan dat indien $\langle -, - \rangle$ niet gedegeneerd is dan $\dim V = \dim W$ en verder dat indien $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ een basis is van V dan bestaat er een basis $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ van W met de eigenschap dat $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{ij}$. We noemen $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ en $(w_i)_{i=1,\dots,n}$ *duale basissen*.

Zij W eindigdimensionaal en $V = W^*$ en zij $\langle \phi, w \rangle = \phi(w)$. Dan is het duidelijk dat $\langle -, - \rangle = \phi(w)$ niet gedegeneerd is. Dit is het standaard voorbeeld van een niet gedegeneerde bilineaire vorm. In feite is dit speciale geval equivalent met het algemene omdat we het volgende commutatieve diagram hebben

$$\begin{array}{ccccc} W^* & \times & W & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & \mathbb{C} \\ \uparrow \theta & & \parallel & & \parallel \\ V & \times & W & \xrightarrow{\langle -, - \rangle} & \mathbb{C} \end{array} \quad (9.41)$$

waarbij $\theta(v)(w) = \langle v, w \rangle$. Uit het feit dat $\langle -, - \rangle$ niet gedegeneerd is volgt eenvoudig dat θ een isomorfisme is.

Nu onderstellen we dat A, B eindig-dimensionale Hopf algebras zijn en $\langle -, - \rangle$ is een niet gedegeneerde Hopf-bilineaire vorm tussen A en B . Vanwege Stelling 8.10.9 weten we dat de antipodes van A en B omkeerbaar zijn.

De briljante “observering” van Drinfeld is nu dat $D(A, B)$ in deze context altijd braided is.

Een speciaal geval van deze situatie (dat in feite equivalent is met het algemene geval) doet zich voor wanneer we vertrekken van een eindig-dimensionale Hopf-algebra H en we stellen $A = H^*$, $B = H$ en voor $\langle -, - \rangle$ nemen we de evaluatieparing. In dit geval schrijven we $D(H) = D(A, B)$.

Om de universele R -matrix te kunnen beschrijven kiezen we een basis $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ in A en we noteren de duale basis in B met $(b_i)_{i=1, \dots, n}$.

We zullen dikwijls het volgende resultaat uit lineaire algebra gebruiken:

Lemma 9.3.5. 1. Zij $a \in A$. Dan geldt $a = \sum a_i \langle a, b_i \rangle$.

2. Zij $b \in B$. Dan geldt $b = \sum b_i \langle a_i, b \rangle$.

Dit volgt als we a en b als lineaire combinatie schrijven van de basissen $(a_i)_i$ en $(b_i)_i$.

We definiëren

$$P = \sum 1 \otimes b_i \otimes a_i \otimes 1 \quad (9.42)$$

Men toont eenvoudig aan dat P niet afhangt van de gekozen basis $(a_i)_i$.

Stelling 9.3.6. (9.42) definieert een braiding op $D(A, B)$.

Bewijs. Zoals gewoonlijk is dit weer een omslachtige verificatie die helemaal geen idee geeft waarom zoiets waar zou moeten zijn. Dit is echter eigen aan de theorie van de Hopf algebras en we moeten daar dus mee leven.

We moeten dus de volgende dingen aantonen:

1. P is omkeerbaar in $D(A, B) \otimes D(A, B)$.
2. $(\Delta \otimes \text{Id}_{D(A, B)})(P) = P_{13}P_{23}$.
3. $(\text{Id}_{D(A, B)} \otimes \Delta)(P) = P_{13}P_{12}$.
4. $\Delta^{\text{op}}(a)P = P\Delta(a)$.

Dit zijn berekeningen in $D(A, B)^{\otimes 2}$ en $D(A, B)^{\otimes 3}$ en om die tot een goed einde te brengen hebben we een truukje nodig.

Beschouw bijvoorbeeld $D(A, B)^{\otimes 2}$. Als vectorruimten hebben we

$$D(A, B) \otimes D(A, B) = A \otimes B \otimes A \otimes B$$

We definiëren een bilineaire afbeelding

$$\langle -, - \rangle : (A \otimes B \otimes A \otimes B) \times (B \otimes A \otimes B \otimes A) \rightarrow \mathbb{C}$$

via $\langle a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2, b_3 \otimes a_3 \otimes b_4 \otimes a_4 \rangle = \langle a_1, b_3 \rangle \langle a_3, b_1 \rangle \langle a_2, b_4 \rangle \langle a_4, b_2 \rangle$

Sublemma. Zij $\alpha \in D(A, B) \otimes D(A, B)$. Als $\langle \alpha, b \otimes a \otimes b' \otimes a' \rangle = 0$ voor alle $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ dan geldt $\alpha = 0$.

Bewijs. Dit volgt als we α uitschrijven in de basis $a_i \otimes b_j \otimes a_k \otimes b_l$ en als we dan $b = b_{i'}$, $a = a_{j'}$, $b' = b_{k'}$, $a' = a_{l'}$ nemen met i', j', k', l' willekeurig. \square

We gaan nu voort met het bewijs van onze stelling. We zullen enkel 1. bewijzen. De andere delen zijn min of meer gelijkaardig.

We beweren dat de inverse van P in $D(A, B) \otimes D(A, B)$ gegeven wordt door

$$\bar{P} = \sum_i 1 \otimes b_i \otimes S a_i \otimes 1$$

Laat ons als voorbeeld bewijzen dat $P\bar{P} = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$. We moeten dus bewijzen dat voor alle $a, a' \in A$, $b, b' \in B^*$:

$$\langle P\bar{P}, b \otimes a \otimes b' \otimes a' \rangle = \langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, b \otimes a \otimes b' \otimes a' \rangle \quad (9.43)$$

De rechterzijde van (9.43) is eenvoudig $\epsilon(b)\epsilon(a)\epsilon(b')\epsilon(a')$ dus we concentreren ons op de linkerzijde. Hiervoor gebruiken we

$$P\bar{P} = \sum_{i,j} 1 \otimes b_i b_j \otimes a_i S a_j \otimes 1$$

en dus

$$\begin{aligned} \text{LZ (9.43)} &= \sum_{i,j,a,b'} \epsilon(b) \langle a_{(1)}, b_i \rangle \langle a_{(2)}, b_j \rangle \langle a_i, b'_{(1)} \rangle \langle S a_j, b'_{(2)} \rangle \epsilon(a') \\ &= \sum_{i,j,a,b'} \langle a_{(1)}, b_i \langle a_i, b'_{(1)} \rangle \rangle \langle a_{(2)}, b_j \langle a_j, S b'_{(2)} \rangle \rangle \epsilon(b) \epsilon(a') \\ &= \sum_{a,b'} \langle a_{(1)}, b'_{(1)} \rangle \langle a_{(2)}, S b'_{(2)} \rangle \epsilon(b) \epsilon(a') \\ &= \sum_{b'} \langle a, b'_{(1)} S b'_{(2)} \rangle \epsilon(b) \epsilon(a') \\ &= \epsilon(a) \epsilon(b') \epsilon(b) \epsilon(a') \end{aligned}$$

hetgeen we moesten uitkomen. \square

9.4 Voorbeeld

Zij G een eindige groep. We zullen nu expliciet de double van $\mathbb{C}G$ beschrijven. Voor de gemakkelijheid noteren we de eenheid in G met 1.

Eerst beschrijven we de vermenigvuldiging op $D(\mathbb{C}G)$. Zij $\langle -, - \rangle$ de evaluatie afbeelding $(\mathbb{C}G)^* \times \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$. Zoals gebruikelijk kunnen we $(\mathbb{C}G)^*$ identificeren als vectorruimte met de functies $G \rightarrow \mathbb{C}$. Definieer $\delta_g \in (\mathbb{C}G)^*$ via $\delta_g(h) = \delta_{g,h}$. De elementen $(\delta_g)_g$ vormen de duale basis voor de basis $(g)_{g \in G}$.

We bepalen nu de Hopf-algebra structuur op $(\mathbb{C}G)^*$. We weten dat $\Delta\delta_g$ voldoet aan

$$\delta_g(pq) = \sum_{\delta_g} (\delta_g)_{(1)}(p)(\delta_g)_{(2)}(q) \quad (9.44)$$

Als we $\Delta\delta_g$ uitschrijven als $\sum_{p,q} \lambda_{p,q} \delta_p \otimes \delta_q$ met $\lambda_{p,q} \in \mathbb{C}$ dan vinden we via (9.44):

$$\Delta\delta_g = \sum_p \delta_p \otimes \delta_{p^{-1}g}$$

De coeenheid bepalen we via (8.19). Dit levert $\epsilon(\delta_g) = \delta_g(1) = \delta_{g,1}$. Voor de antipode gebruiken we de definitie van de antipode op $\mathbb{C}G^*$. Dit levert $(S\delta_g)(h) = \delta_g(Sh) = \delta_{g,h^{-1}}$. Oftewel $S\delta_g = \delta_{g^{-1}}$.

Nu bepalen we de vermenigvuldiging op $D(\mathbb{C}G)$. Volgens (9.37)-(9.39) moeten we enkel het produkt $(1 \otimes g)(\delta_h \otimes 1)$ uitrekenen voor $g, h \in G$. Om dit te doen zouden we de expliciete formule (9.36) kunnen gebruiken. Het is echter iets gemakkelijker om de (impliciete) formule (9.40) te gebruiken. Dit levert voor $a = \delta_h$, $b = g$:

$$\sum_{p \in G} \delta_p(g)(1 \otimes g)(\delta_{p^{-1}h} \otimes 1) = \sum_{p \in G} \delta_{p^{-1}h}(g) \delta_p \otimes g$$

wat vereenvoudigt tot

$$(1 \otimes g)(\delta_{g^{-1}h} \otimes 1) = \delta_{hg^{-1}} \otimes g$$

Als we tenslotte $z = g^{-1}h$ nemen dan verkrijgen we:

$$(1 \otimes g)(\delta_z \otimes 1) = \delta_{gzg^{-1}} \otimes g$$

De “ \otimes ”-symbolen zijn in deze context een beetje redundant, dus we zullen ze nu weglaten om de notatie wat minder pompeus te maken. We hebben nu het volgende bewezen: $D(\mathbb{C}G)$ heeft als basis $(\delta_h g)_{h,g \in G}$ en het produkt van twee basiselementen wordt gegeven door

$$\delta_h g \delta_{h'} g' = \delta_h \delta_{gh'g^{-1}} g g' = \delta_h \delta_{h,gh'g^{-1}} g g'$$

De coalgebrastructuur op $D(\mathbb{C}G)$ is eenvoudig uit te werken omdat deze samenvalt met de standaard coalgebrastructuur op $(\mathbb{C}G)^{\text{coop}} \otimes \mathbb{C}G$. Tenslotte tonen we nog met enig werk aan dat $S(\delta_h g) = g^{-1} \delta_{h^{-1}}$.

Uit de algemene theorie volgt dat $D(\mathbb{C}G)$ braided is met universele R -matrix gegeven door

$$\sum_{g \in G} g \otimes \delta_g$$

10 De quantumgroep $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

10.1 Beschrijving van een ring door generatoren en relaties

We zullen nu aangeven hoe men een ring beschrijft door middel van generatoren en relaties. Dit is gelijkaardig aan de behandeling voor groepen maar iets eenvoudiger.

Zij x_1, \dots, x_n een aantal variabelen. We definiëren de vrije algebra $F = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ als volgt: F is een vectorruimte met basis de woorden in x_1, \dots, x_n waarbij we zoals gebruikelijk het lege woord toelaten en dit met 1 noteren. De vermenigvuldiging op basis elementen wordt gegeven door concatenatie van woorden.

Voorbeeld 10.1.1. De vrije algebra in 1 variabele x is isomorf met $\mathbb{C}[x]$. De vrije algebra in twee variabelen x, y is echter veel groter dan $\mathbb{C}[x, y]$. Immers in $\mathbb{C}\langle x, y \rangle$ zijn de elementen xy en yx niet aan mekaar gelijk.

F voldoet aan een zogenaamde “universele eigenschap”.

Lemma 10.1.2. *Onderstel dat S een willekeurige algebra is en kies elementen $s_1, \dots, s_n \in S$. Dan bestaat er een uniek homomorfisme van algebras $\phi : F \rightarrow S$ zodat $\phi(x_i) = s_i$.*

Bewijs. Dit is duidelijk. □

Indien de afbeelding ϕ in bovenstaand voorbeeld surjectief is dan zeggen we dat S wordt voortgebracht door s_1, \dots, s_n . Dit is equivalent met zeggen dat elk element in S een lineaire combinatie is van produkten van de $(s_i)_i$.

Zij nu $(r_i)_{i \in I}$ elementen van F (dus $(r_i)_{i \in I}$ zijn lineaire combinaties van woorden in de variabelen x_1, \dots, x_n). Zoals gebruikelijk noteren we met $((r_i)_{i \in I})$ het *tweezijdige* ideaal van F voortgebracht door $(r_i)_i$. Met andere woorden $((r_i)_i)$ is dus het kleinste tweezijdig ideaal in F dat r_i bevat $\forall i \in I$. Of meer concreet bestaat $((r_i)_i)$ uit eindige sommen van elementen van F die van de vorm $ar_i b$ zijn. Merk op dat dezelfde r_i meerdere keren kan voorkomen in zo’n som als a en b variëren.

Voorbeeld 10.1.3. De ring $R = \mathbb{C}\langle x, y \rangle / (yx - xy)$ is isomorf met $\mathbb{C}[x, y]$. Eerst merken we op dat in R geldt $a\bar{y}\bar{x}b = a\bar{x}\bar{y}b$. Dus elk woord w in \bar{x}, \bar{y} kan geschreven worden als $\bar{x}^u \bar{y}^v$ waarbij u het aantal \bar{x} ’en is en v het aantal \bar{y} ’s in w is.

Definieer $\phi : \mathbb{C}\langle x, y \rangle \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ via $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$. Dan geldt $\phi(yx - xy) = 0$ en dus is $\phi \mid (yx - xy) = 0$ (dit volgt bijvoorbeeld uit

bovenstaande “concrete” beschrijving van $(yx - xy)$). Met andere woorden ϕ definieert een afbeelding $\bar{\phi} : \mathbb{C}\langle x, y \rangle / (yx - xy) \rightarrow \mathbb{C}[x, y]$ die \bar{x} naar x en \bar{y} naar y stuurt. We beweren dat dit een isomorfisme is. Om dit aan te tonen moeten we bewijzen dat ϕ zowel injectief als surjectief is. De surjectiviteit is duidelijk dus we concentreren ons op de injectiviteit. Onderstel dat $p \in \mathbb{C}\langle x, y \rangle / (yx - xy)$ zodanig is dat $\phi(p) = 0$. Vanwege de opmerking in de eerste paragraaf kunnen we p schrijven als $\sum \lambda_{a,b} \bar{x}^a \bar{y}^b$ met $\lambda_{a,b} \in k$. Als we nu ϕ toepassen dan vinden we dat $\sum \lambda_{a,b} x^a y^b = 0$ in $\mathbb{C}[x, y]$. Aangezien de monomen $x^a y^b$ per definitie onafhankelijk zijn in $\mathbb{C}[x, y]$ volgt hier dus uit dat $\lambda_{a,b} = 0$ en dus $p = 0$.

Vanaf nu zullen we de elementen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ in $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / (r_1, \dots, r_m)$ meestal ook met x_1, \dots, x_n noteren. We zullen de ring $R = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / (r_1, \dots, r_m)$ beschrijven als: “Zij R de ring met generatoren x_1, \dots, x_n en relaties

$$\begin{aligned} r_1 &= 0 \\ &\vdots \\ r_m &= 0'' \end{aligned}$$

Iets algemener zullen we ook ringen beschouwen met relaties

$$\begin{aligned} r_1 &= r'_1 \\ &\vdots \\ r_m &= r'_m \end{aligned}$$

waarmee we dan bedoelen $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_n \rangle / (r_1 - r'_1, \dots, r_m - r'_m)$

10.2 Lie algebras

In de wiskunde hebben we dikwijls “mooie” deelgroepen nodig van

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$$

Zo’n veel voorkomende deelgroep is de volgende:

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

Om dergelijke groepen te bestuderen bekijkt men de raakruimte in de oorsprong. We geven nu aan hoe we dit op een eenvoudige algebraïsche manier kunnen doen.

We bekijken oplossingen van de vergelijking $\det A = 1$ met coëfficiënten in $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$. Dergelijke oplossingen vormen natuurlijk ook een groep (de identiteit $\det(AB) = \det A \det B$ geldt immers over een willekeurige commutatieve ring).

We bekijken meer bepaald oplossingen van de vorm $I + P\epsilon$ waarbij I de eenheidsmatrix is. We kunnen hieraan dus denken als punten van SL_n die “oneindig dicht” bij I liggen.

Men verifieert eenvoudig dat $\det(I + P\epsilon) = 1 + \mathrm{Tr}(P)\epsilon$ en bijgevolg $\mathrm{Tr}(P) = 0$. We definiëren nu

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{P \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(P) = 0\}$$

Het belang van $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ zit ’m in het feit dat het een vectorruimte is. Een vectorruimte is veel eenvoudiger te begrijpen dan een groep.

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ heeft nog een extra structuur. Definieer $[A, B] = AB - BA$ voor $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Het is duidelijk dat $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ gesloten is onder $[-, -]$. Dit is natuurlijk triviaal om te verifiëren maar het heeft nog een diepere reden. Om dit in te zien bekijken we oplossingen van $\det A = 1$ met coëfficiënten in de ring $E = \mathbb{C}[\delta, \epsilon]/(\delta^2, \epsilon^2)$. Twee speciale oplossingen zijn van de vorm $I + P\delta$ en $I + Q\epsilon$ met $P, Q \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Omdat oplossingen in E ook een groep vormen moet het volgend element voldoen aan $\det(A) = 1$:

$$(1 + P\delta)(1 + Q\epsilon)(1 - P\delta)(1 - Q\epsilon) = 1 + (PQ - QP)\delta\epsilon$$

Omdat $(\delta\epsilon)^2 = 0$ volgt hieruit dat $PQ - QP \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

We zullen een deelvectorruimte $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ die gesloten is onder $[-, -]$ een Lie algebra noemen. Dit is niet equivalent met de traditionele definitie maar het is voldoende voor onze doelstellingen.

We kunnen een analoog procedé toepassen voor de orthogonale groep

$$O_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^t = I\}$$

De geassocieerde Lie algebra is dan

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \{P \in M_n(\mathbb{C}) \mid P^t = -P\}$$

10.3 Omhullenden van Lie algebras

Zij \mathfrak{g} een Lie algebra zoals we die in het vorige hoofdstukje gedefinieerd hebben. Kies een basis x_1, \dots, x_n voor \mathfrak{g} . Dan geldt $[x_i, x_j] = \sum_k \lambda_{ijk} x_k$ voor zekere $\lambda_{ijk} \in k$. We definiëren nu

$$U\mathfrak{g} = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle / ((X_i X_j - X_j X_i - \sum \lambda_{ijk} X_k)_{i,j})$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $U\mathfrak{g}$ onafhankelijk is (op isomorfisme na) van de keuze van basis. Doordat er nogal veel indices zijn is het nogal omslachtig.

Opmerking 10.3.1. Uit het feit dat $[x, x] = 0$ en $[x, y] = -[y, x]$ volgt dat $\lambda_{iik} = 0$ en $\lambda_{ijk} = -\lambda_{jik}$. Hieruit volgt dat we evengoed de volgende definities kunnen gebruiken:

$$U\mathfrak{g} = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle / ((X_i X_j - X_j X_i - \sum \lambda_{ijk} X_k)_{j>i})$$

of

$$U\mathfrak{g} = \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle / ((X_i X_j - X_j X_i - \sum \lambda_{ijk} X_k)_{j<i})$$

Voorbeeld 10.3.2. Onderstel

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix} \subset M_2(\mathbb{C})$$

Als basis kiezen we

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We vinden $[x, y] = 0$ en dus

$$U\mathfrak{g} = \mathbb{C}\langle X, Y \rangle / (YX - XY) = \mathbb{C}[X, Y]$$

Voorbeeld 10.3.3. Nu onderstellen we dat

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$$

en als basis kiezen we

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De Lie haak $[-, -]$ wordt gegeven door

| $[-, -]$ | e | h | f |
|----------|------|-------|-------|
| e | 0 | $-2e$ | h |
| h | $2e$ | 0 | $-2f$ |
| f | $-h$ | $2f$ | 0 |

Dus $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ is de algebra met generatoren E, H, F en relaties

$$HE - EH = 2E$$

$$HF - FH = -2F$$

$$EF - FE = H$$

Stelling 10.3.4. *Zij \mathfrak{g} een Lie algebra. Op $U\mathfrak{g}$ is er een unieke Hopf algebra structuur die de eigenschap heeft*

$$\begin{aligned}\Delta X_i &= X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i \\ \epsilon X_i &= 0 \\ SX_i &= -X_i\end{aligned}$$

Bewijs. Voor elke Hopf-algebra structuur op $U = U\mathfrak{g}$ gelden per definitie de volgende eigenschappen:

- Δ is een algebramorfisme $U \rightarrow U \otimes U$.
- ϵ is een algebramorfisme $U \rightarrow \mathbb{C}$.

Verder volgt nog uit (8.55):

- S is een algebramorfisme $U \rightarrow U^{\text{op}}$

(herinner je dat de vermenigvuldiging in U^{op} gedefinieerd wordt door $a \cdot b = ba$).

Hieruit volgt dus dat Δ, ϵ, S uniek bepaald zijn door hun waarden op generatoren.

Om te bewijzen dat Δ, ϵ, S effectief bestaan als algebra homomorfismen moeten we aantonen dat ze nul zijn op de relaties in U . We zullen dit als voorbeeld aantonen voor Δ .

Om het in meer preciese termen uit te drukken. Vanwege Lemma 10.1.2 hebben we een unieke afbeelding

$$\tilde{\Delta} : \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle \rightarrow U \otimes U$$

gedefinieerd door $\tilde{\Delta}(X_i) = X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i$ en om aan te tonen dat $\tilde{\Delta}$ ontbindt via een afbeelding $\Delta : U \rightarrow U \otimes U$ moeten we aantonen dat

$$\tilde{\Delta}(X_i X_j - X_j X_i - \sum_k \lambda_{ijk} X_k) = 0$$

We doen dit als volgt:

$$\begin{aligned}& \tilde{\Delta}(X_i X_j - X_j X_i - \sum_{ijk} \lambda_{ijk} X_k) \\&= (X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i)(X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j) - (X_j \otimes 1 + 1 \otimes X_j)(X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i) \\&\quad - \sum_k \lambda_{ijk} (X_k \otimes 1 + 1 \otimes X_k) \\&= (X_i X_j - X_j X_i - \sum_k \lambda_{ijk} X_k) \otimes 1 + 1 \otimes (X_i X_j - X_j X_i - \sum_k \lambda_{ijk} X_k) \\&= 0\end{aligned}$$

Dus we vinden dat Δ een goed gedefinieerd algebrhomomorfisme $U \rightarrow U \otimes U$ is. Een zelfde type redenering kunnen we toepassen voor ϵ en S .

Nu moeten we nog bewijzen dat Δ, ϵ, S voldoen aan de axioma's voor een Hopf-algebra. Laat ons als voorbeeld de coassociativiteit beschouwen. We moeten dus aantonen dat voor alle $u \in U$ geldt

$$(\text{Id}_U \otimes \Delta)(\Delta u) = (\Delta \otimes \text{Id}_U)\Delta u \quad (10.1)$$

We merken onmiddellijk op de volgende feiten op:

1. (10.1) geldt voor $u = 1$ en $u = X_i$.
2. Als de vergelijking (10.1) geldt voor $u = a, b$ dan geldt ze ook voor $u = \lambda a + \mu b$ met $\lambda, \mu \in k$.
3. Als de vergelijking (10.1) geldt voor $u = a, b$ dan geldt ze ook voor $u = ab$

Dit volgt uit het feit dat Δ en bijgevolg dus ook $\text{Id}_U \otimes \Delta$ en $\Delta \otimes \text{Id}_U$ algebrhomomorfismen zijn.

Analoge redeneringen kunnen we toepassen voor de andere Hopf-algebra axioma's. \square

10.4 Quantum groepen

Naast de groepalgebras $\mathbb{C}G$ hebben we nu een nieuwe klasse van Hopf-algebras gevonden: de zogenaamde omhullenden van Lie-algebras $U\mathfrak{g}$. Deze laatste zijn echter nog steeds cocommutatief ($\Delta = \Delta^{\text{coop}}$). Ze geven dus geen aanleiding tot niet triviale oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking.

Het idee van Drinfeld was nu om Hopf-algebras te construeren die in zekere zin erg trekken op omhullenden maar die niet meer cocommutatief zijn. Dit zijn dan (voorbeelden van) zogenaamde quantumgroepen.

We zullen dit uit leggen in het eenvoudigst mogelijke geval: de zogenaamde quantum omhullende van $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dit is een Hopf-algebra die afhangt van een parameter $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0, \pm 1$ die we met $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ noteren.

$U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ wordt gedefinieerd als de algebra met generatoren K, K^{-1}, E, F (K^{-1} is een formeel symbool) en relaties:

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\ KEK^{-1} &= q^2E \\ KFK^{-1} &= q^{-2}F \\ EF - FE &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{aligned} \quad (10.2)$$

De Hopf-algebra structuur op $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ wordt gedefinieerd via

$$\begin{aligned}
\Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K \\
\Delta(F) &= K^{-1} \otimes F + F \otimes 1 \\
\Delta(K) &= K \otimes K \\
\Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1} \\
\epsilon(E) &= \epsilon(F) = 0 \\
\epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1 \\
S(E) &= -EK^{-1} \\
S(F) &= -KF \\
SK &= K^{-1} \\
SK^{-1} &= K
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Dat dit inderdaad een Hopf-algebra structuur is toont men op een analoge manier aan als voor $U\mathfrak{g}$.

Men kan zich afvragen wat precies het verband is tussen $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ en $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Dit verband is een beetje versluierd maar komt ruwweg hierop neer (dit is een zuiver formele manipulatie).

1. Maak in (10.2) de substitutie $K = e^{hH}$, $q = e^h$ ($h \in \mathbb{C}$).
2. Ontwikkel alles in machtreeks in h .
3. Behoud enkel de leidende term in de vergelijkingen.

Dan gaat men eenvoudig na dat men precies de vergelijkingen van $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ uitkomt.

10.5 Een eenvoudige Hopf algebra

Hieronder is q steeds een element van \mathbb{C} , verschillend van $0, \pm 1$. We definiëren U^+ als de ring met generatoren K, K^{-1}, E en relaties

$$\begin{aligned}
KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\
KEK^{-1} &= q^2E
\end{aligned}$$

Lemma 10.5.1. U^+ heeft een basis van de vorm $K^a E^b$ met $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

Bewijs. Zij Z een ring met basis $k^a e^b$, $a \in \mathbb{Z}$ en $b \in \mathbb{N}$ met de vermenigvuldiging gedefinieerd als

$$k^a e^b \cdot k^{a'} e^{b'} = q^{-2ba'} k^{a+a'} e^{b+b'}$$

Het is eenvoudig in te zien dat deze vermenigvuldiging inderdaad associatief is. Verder toont men op analoge manier aan als in Voorbeeld 10.1.3 dat $E \mapsto e$, $K \mapsto k$ een isomorfisme definieert tussen U^+ en Z . \square

Nu definiëren we afbeeldingen Δ, ϵ, S via

$$\begin{aligned}\Delta(K) &= K \otimes K \\ \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1} \\ \Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon(K) &= 1 \\ \epsilon(K^{-1}) &= 1 \\ \epsilon(E) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(K) &= K^{-1} \\ S(K^{-1}) &= K \\ S(E) &= -EK^{-1}\end{aligned}$$

Stelling 10.5.2. Δ, ϵ, S zijn goed gedefinieerd en definiëren een Hopf-algebra structuur op U^+ .

Bewijs. Dit is analoog aan het bewijs dat $U\mathfrak{g}$ een Hopf-algebra is. \square

10.6 Een Hopf bilineaire vorm

Onze bedoeling is nu om een Hopf-bilineaire vorm

$$\langle -, - \rangle : U^+ \times U^+ \rightarrow \mathbb{C} \quad (10.4)$$

te definiëren.

We gebruiken de volgende conventie. Indien $q \in \mathbb{C}$ dan definiëren we

$$(n)_q = q^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

en

$$(n)!_q = (1)_q \cdots (n)_q$$

We definiëren

$$\langle K^a E^b, K^c E^d \rangle = q^{-2ac} \frac{(b)!_{q^{-2}}}{(q - q^{-1})^b} \delta_{b,d} \quad (10.5)$$

en we beweren dat dit een Hopf bilineaire vorm is.

We verifiëren de definiërende eigenschap voor een Hopf-bilineaire vorm (9.32). De andere vereiste (9.33) volgt omdat onze gekozen bilineaire vorm symmetrisch is.

We moeten dus aantonen

$$\langle \Delta(K^a E^b), K^{a'} E^{b'} \otimes K^{a''} E^{b''} \rangle = \langle K^a E^b, K^{a'} E^{b'} K^{a''} E^{b''} \rangle \quad (10.6)$$

Het rechterlid van (10.6) is gelijk aan

$$\begin{aligned} \langle K^a E^b, K^{a'} E^{b'} K^{a''} E^{b''} \rangle &= q^{-2b'a''} \langle K^a E^b, K^{a'+a''} E^{b'+b''} \rangle \\ &= q^{-2aa'-2aa''-2b'a''} \frac{(b)!_{q^{-2}}}{(q-q^{-1})^b} \delta_{b,b'+b''} \end{aligned} \quad (10.7)$$

Om het linkerlid van (10.6) uit te rekenen gebruiken we $\Delta(K^a E^b) = \Delta(K)^a \Delta(E)^b$. Om $\Delta(E)^b = (1 \otimes E + E \otimes K)^b$ te berekenen gebruiken we de zogenaamde “quantum binomiaal formule”.

Onderstel dat R een algebra is die elementen x, y bevat die voldoen aan de vergelijking $yx = pxy$ voor zekere $p \in \mathbb{C}$. Dan toont men aan per inductie dat geldt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_p x^k y^{n-k} \quad (10.8)$$

waarbij

$$\binom{n}{k}_p = \frac{(n)!_p}{(k)!_p (n-k)!_p}$$

Neem nu $x = E \otimes K$ en $y = 1 \otimes E$, Dan geldt $\Delta(E) = x + y$ en verder $yx = q^{-2}xy$. Dus

$$\Delta(E)^b = \sum_r \binom{b}{r}_{q^{-2}} (E \otimes K)^r (1 \otimes E)^{b-r}$$

en dus

$$\Delta(K^a E^b) = \sum_r \binom{b}{r}_{q^{-2}} K^a E^r \otimes K^{a+r} E^{b-r}$$

Het is nu duidelijk dat indien $b \neq b' + b''$ dat dan de twee leden van (10.6) gelijk aan 0 zijn. Dus we onderstellen $b = b' + b''$. Er volgt

$$(10.6) = q^{-2aa'} \frac{(b')!_{q^{-2}}}{(q-q^{-1})^{b'}} q^{-2(a+b')a''} \frac{(b'')!_{q^{-2}}}{(q-q^{-1})^{b''}} \binom{b}{b'}_{q^{-2}} = q^{-2aa'-2aa''-2b'a''} \frac{(b)!_{q^{-2}}}{(q-q^{-1})^b}$$

wat gelijk is aan (10.7).

Opmerking 10.6.1. Hoe zijn we in feite aan die “adhoc” formule (10.5) geraakt? We geven nu een schets van het bewijs dat (10.5) de enige interessante Hopf-bilineaire vorm of U^+ is,

Uit de definiërende eigenschappen (9.28)-(9.31) halen we eenvoudig dat een willekeurige Hopf bilineaire vorm op U^+ bepaald is door $\langle A, B \rangle$ met $A, B \in \{K, K^{-1}, E\}$. Omdat er ook nog relaties zijn tussen de elementen $\{K, K^{-1}, E\}$ mogen we $\langle A, B \rangle$ niet willekeurig kiezen.

Indien we $\langle K, KK^{-1} \rangle = \langle K, 1 \rangle$ en $\langle K^{-1}, KK^{-1} \rangle = \langle K, 1 \rangle$ uitwerken dan verkrijgen we $\langle K^{-1}, K \rangle = \langle K, K^{-1} \rangle = \langle K, K \rangle^{-1}$ (dus in het bijzonder $\langle K, K \rangle \neq 0$) en verder $\langle K^{-1}, K^{-1} \rangle = \langle K, K \rangle$,

Als we $\langle K, KE \rangle = q^2 \langle K, EK \rangle$ uitwerken dan vinden we $\langle K, K \rangle \langle K, E \rangle = q^2 \langle K, E \rangle \langle K, K \rangle$. Aangezien $q \neq \pm 1$, $\langle K, K \rangle \neq 0$ halen we hieruit $\langle K, E \rangle = 0$, en analoog $\langle E, K \rangle = 0$.

Als we tenslotte $\langle E, KE \rangle = q^2 \langle E, EK \rangle$ uitwerken dan vinden we $\langle E, E \rangle = q^2 \langle K, K \rangle \langle E, E \rangle$. We zouden $\langle E, E \rangle = 0$ kunnen onderstellen, maar dit leidt niet tot een interessante theorie.

Indien $\langle E, E \rangle \neq 0$ dan $\langle K, K \rangle = q^{-2}$ en verder mogen we $\langle E, E \rangle$ vrij kiezen. We stellen $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \langle E, E \rangle = (q - q^{-1})^{-1}$. Deze vreemde keuze vereenvoudigt onderstaande berekeningen. Elke andere keuze voor $\langle E, E \rangle$ kunnen we hiertoe herleiden door E te vervangen door μE voor een goed gekozen scalair μ .

10.7 De Drinfeld double van U^+

Hieronder gaan we nu de Drinfeld double van U^+ beschrijven door middel van generatoren en relaties.

Zij $\tilde{U} = D(U^+, U^+)$. We vragen ons af wat de vermenigvuldiging is op \tilde{U} . Als we Stelling 9.3.4 oproepen dan zien we dat we enkel produkten van de vorm $(1 \otimes -)(- \otimes 1)$ moeten berekenen. Dit kunnen we doen met de expliciete formule (9.36) maar zoals gebruikelijk is het weer iets eenvoudiger de impliciete formule (9.40) te gebruiken.

Na enig gereken komen we de volgende identiteiten uit:

$$\begin{aligned} (1 \otimes K)(K \otimes 1) &= K \otimes K \\ (1 \otimes E)(K \otimes 1) &= q^2 K \otimes E \\ (1 \otimes K)(E \otimes 1) &= q^{-1} E \otimes K \\ (1 \otimes E)(E \otimes 1) + \lambda(K \otimes 1) &= \lambda(1 \otimes K) + E \otimes E \end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen volgt dat \tilde{U} wordt voortgebracht door de volgende

elementen:

$$\begin{aligned} 1 \otimes K^{\pm 1} \\ K^{\pm 1} \otimes 1 \\ 1 \otimes E \\ E \otimes 1 \end{aligned}$$

Beschouw nu de algebra \tilde{V} met generatoren $E, F, K, K^{-1}, L, L^{-1}$ en met relaties:

$$\begin{aligned} KL &= LK \\ KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\ LL^{-1} &= L^{-1}L = 1 \\ KEK^{-1} &= q^2E \\ LEL^{-1} &= q^{-2}E \\ KFK^{-1} &= q^{-2}F \\ LFL^{-1} &= q^2F \\ EF - FE &= \lambda(K - L) \end{aligned} \tag{10.9}$$

Het is duidelijk dat er een algebrhomomorfisme bestaat $\theta : \tilde{V} \rightarrow \tilde{U}$ met de eigenschap

$$\begin{aligned} K^{\pm 1} &\mapsto 1 \otimes K^{\pm 1} \\ L^{\pm 1} &\mapsto K^{\pm 1} \otimes 1 \\ E &\mapsto 1 \otimes E \\ F &\mapsto E \otimes 1 \end{aligned}$$

Stelling 10.7.1. *De afbeelding θ is een isomorfisme.*

Bewijs. We definiëren afbeeldingen $\psi^+ : U^+ \rightarrow \tilde{V}$ en $\psi^- : U^+ \rightarrow \tilde{V}$ als volgt:

$$\begin{aligned} \psi^+(K^{\pm 1}) &= K^{\pm 1} \\ \psi^+(E) &= E \\ \psi^-(K^{\pm 1}) &= L^{\pm 1} \\ \psi^-(E) &= F \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat deze afbeeldingen goed gedefinieerd zijn. We definiëren ook nog $\psi : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ als $\psi(a \otimes b) = \psi^-(a)\psi^+(b)$. Enige voorzichtigheid is geboden omdat het priori niet duidelijk is dat ψ een algebrhomomorfisme is.

Er geldt $\theta\psi(a \otimes b) = \theta\psi^-(a)\theta\psi^+(b)$ en bovendien $\theta\psi^-(a) = a \otimes 1$, $\theta\psi^+(b) = 1 \otimes b$. Het is voldoende deze laatste identiteiten te verifiëren op generatoren aangezien θ en ψ^\pm algebramorfismen zijn. Maar op generatoren is alles duidelijk. Vanwege (9.39) vinden we $\theta\psi(a \otimes b) = a \otimes b$.

Dus de samenstelling $\theta\psi$ is de identiteit. Als we nu ook nog kunnen aantonen dat ψ surjectief is dan volgt dat θ een bijjectie is en dus een algebrasomorfisme (met als inverse ψ).

Het feit dat ψ surjectief is volgt eenvoudig uit het feit dat we via de relaties in \tilde{V} elk element in \tilde{V} kunnen schrijven als een lineaire combinatie van monomen $F^a L^b K^c E^d$ en voor zulke monomen geldt $F^a L^b K^c E^d = \psi(E^a K^b \otimes K^c E^d)$. \square

Dus de algebra \tilde{V} is isomorf met \tilde{U} . Aangezien we \tilde{V} beschreven hebben door middel van generatoren en relaties is ons doel voor deze sectie bereikt.

Hieronder dragen we de Hopf algebra structuur op \tilde{U} over op \tilde{V} . Dus er geldt in \tilde{V} :

$$\begin{aligned}
\Delta(K^{\pm 1}) &= K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1} \\
\Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K \\
\Delta(L^{\pm 1}) &= L^{\pm 1} \otimes L^{\pm 1} \\
\Delta(F) &= F \otimes 1 + L \otimes F \\
\epsilon(K^{\pm 1}) &= 1 \\
\epsilon(E) &= 0 \\
\epsilon(L^{\pm 1}) &= 1 \\
\epsilon(F) &= 0 \\
S(K^{\pm 1}) &= K^{\mp 1} \\
S(L^{\pm 1}) &= L^{\mp 1} \\
S(E) &= -EK^{-1} \\
S(F) &= -L^{-1}F
\end{aligned} \tag{10.10}$$

Tenslotte definiëren we

$$V = \tilde{V}/(L - K^{-1})$$

V heeft generatoren $K, K^{-1}, L, L^{-1}, E, F$ die aan de relaties (10.9) voldoen, tezamen met een extra relatie die gegeven wordt $L = K^{-1}$.

Stelling 10.7.2. *Er is een afbeelding van Hopf-algebras $\sigma : \tilde{V} \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$*

gedefinieerd door

$$\begin{aligned} E &\mapsto E \\ F &\mapsto F \\ K^{\pm 1} &\mapsto K^{\pm 1} \\ L^{\pm 1} &\mapsto K^{\mp 1} \end{aligned}$$

die ontbindt als een samenstelling

$$\tilde{V} \rightarrow V \xrightarrow[\bar{\sigma}]{\cong} U \quad (10.11)$$

waarbij de eerste afbeelding de quotiëntafbeelding is.

Bewijs. Dat σ goed gedefinieerd is en een Hopf-algebrahomomorfisme is, is een directe verificatie. Aangezien $\sigma(L - K^{-1}) = 0$ is het ook duidelijk dat er een ontbinding als in (10.11) bestaat.

We moeten dus enkel bewijzen dat $\bar{\sigma}$ een isomorfisme is. Hiervoor construeren we een inverse van $\bar{\sigma}$. Definieer $\tau : U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \rightarrow V$ via

$$\begin{aligned} E &\mapsto E \\ F &\mapsto F \\ K^{\pm 1} &\mapsto K^{\pm 1} \end{aligned}$$

Het is weer duidelijk dat τ goed gedefinieerd is, en verder kijken we na op generatoren dat $\bar{\sigma}$ en τ mekaars inverse zijn. \square

Gevol 10.7.3. *De afbeelding*

$$\sigma \circ \theta^{-1} : D(U^+, U^+) \rightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) :$$

definieert een Hopf-algebrahomomorfisme waarvan de kern is voortgebracht door $1 \otimes K - K^{-1} \otimes 1$.

Bewijs. Dit is een combinatie van Stellingen 10.7.1 en 10.7.2. \square

10.8 Constructie van oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking

. In de vorige sectie hebben we aangetoond dat $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ een quotiënt is van $D(U^+, U^+)$. Indien U^+ eindig dimensionaal zou zijn en de vorm $\langle -, - \rangle$ niet degenerereerd zou zijn dan zou $D(U^+, U^+)$ een universele R -matrix hebben.

Het beeld hiervan in $U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ zou ons een universele R -matrix op $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ geven. Helaas is U^+ niet eindigdimensionaal zodat deze redenering niet opgaat.

Toch kan men aantonen dat indien V, W representaties van $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ zijn dan bestaan er $c_{V,W}$ die aan Stelling 8.9.3 en (8.45)(8.46) voldoen. De reden hiervoor is dat $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ wel een universele R -matrix heeft maar die ligt in een zekere completie van $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ en niet in $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ zelf.

Omdat we het gebruik van topologische Hopf-algebras willen vermijden gaan we nu de volgende strategie volgen.

- Indien q een eenheidswortel is dan zijn er quotiënten van $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ en U^+ (genoteerd met $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ en \bar{U}^+) die wel eindigdimensionaal zijn en verder is $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ een quotiënt van de double van \bar{U}^+ . Hieruit halen we dat $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ wel braided is.
- $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ heeft een standaard twee dimensionale representatie V gegeven door \mathbb{C}^2 waarbij E, K, F ageren via de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en als q een eenheidswortel is dan blijkt V ook een $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ representatie te zijn. Dus in dat geval kunnen we de matrix $r_q = c_{V,V}$ definiëren. r_q is nu weliswaar enkel gedefinieerd in het geval dat q een eenheidswortel is, maar het blijkt dat de coëfficiënten van r_q Laurent polynomen in q zijn. Dus er bestaat een matrix R met coëfficiënten in $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ zodat $R(q) = r_q$ als q een eenheidswortel is. Uit het feit dat r_q aan de Yang-Baxter vergelijking voldoet voor alle eenheidswortels halen we nu gemakkelijk dat R aan de Yang-Baxter vergelijking voldoet met behulp van het volgende standaard feit.

Lemma 10.8.1. *Zij $f, g \in \mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Als $f(a) = g(a)$ voor een oneindig aantal verschillende a dan $f = g$.*

Bewijs. Als $f \neq g$ dan is $f - g$ een niet triviaal Laurent-polynoom dat dus maar een eindig aantal wortels kan hebben. Dit is in strijd met de hypothesen. \square

Hieronder onderstellen we dat q een d -de eenheidswortel is waarbij d *oneven* is en verder dat $q^e \neq 1$ als $e < d$. Deze laatste beperkingen zijn niet fundamenteel maar ze vereenvoudigen de berekeningen. We definiëren

$$\bar{U}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) / (K^d - 1, E^d, F^d)$$

Dus met andere woorden $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ heeft generatoren $K^{\pm 1}, E, F$ en relaties

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\ KEK^{-1} &= q^2 E \\ KFK^{-1} &= q^{-2} F \\ EF - FE &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \\ K^d &= 1 \\ E^d &= F^d = 0 \end{aligned}$$

Lemma 10.8.2. $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ is een Hopf-algebra als we Δ, S, ϵ met dezelfde formules definiëren als voor $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$.

Om dit lemma te bewijzen maken we weer gebruik van de “quantum binomiaal formule” (10.8)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_p x^k y^{n-k}$$

indien $yx = pxy$.

Onderstel nu dat geldt $p^f = 1$ waarbij $f \geq 1$ minimaal is. Dan volgt uit de sommatieformule voor een meetkundige reeks

$$\begin{aligned} (k)_p &\neq 0 && \text{indien } k < f \\ (f)_p &= 0 \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\binom{f}{k}_p = 0 \quad (\text{indien } 0 < k < f)$$

en bijgevolg

$$(x + y)^f = x^f + y^f \tag{10.12}$$

Voorbeeld 10.8.3. Onderstel $p = -1$ en dus $f = 2$. Dan hebben we $yx = -xy$ en dus

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + y^2$$

zoals voorspelt door (10.12).

Bewijs van lemma 10.8.2. We volgen dezelfde strategie als in het bewijs dat $U_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ een Hopf-algebra is. We moeten identiteiten aantonen zoals

$$(\Delta E)^d = (1 \otimes E + E \otimes K)^d = 0 \quad (\text{in } \bar{U}_q(\mathfrak{sl}(\mathbb{C})) \otimes \bar{U}_q(\mathfrak{sl}(\mathbb{C})))$$

Stel $x = 1 \otimes E$, $y = E \otimes K$, $p = q^2$. Dan geldt $p^d = 1$ en d is minimaal want d oneven. Wat we moeten bewijzen volgt nu uit (10.12). \square

Stelling 10.8.4. 1. $\dim \bar{U}_q(\mathfrak{sl}(\mathbb{C})) < \infty$.

2. $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}(\mathbb{C})) < \infty$ is braided met universele R -matrix

$$\frac{1}{d} \left(\sum_{a,b=0}^{d-1} q^{2ab} K^a \otimes K^{-b} \right) \left(\sum_{c=0}^{d-1} \frac{E^c \otimes F^c}{\langle E^c, E^c \rangle} \right) \quad (10.13)$$

Bewijs. Definieer

$$\bar{U}^+ = U^+ / (K^d - 1, E^d)$$

Als voorheen tonen we aan:

1. \bar{U}^+ heeft een basis van de vorm $K^a E^b$ voor $a, b \in \{0, \dots, d-1\}$. In het bijzonder geldt dus dat \bar{U}^+ eindigdimensionaal is.
2. Er bestaat een Hopf-bilineaire vorm

$$\langle -, - \rangle : \bar{U}^+ \times \bar{U}^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle K^a E^b, K^c E^e \rangle = q^{-2ac} \frac{(b)!_{q^{-2}}}{(q - q^{-1})^b} \delta_{b,e} \quad (10.14)$$

We beweren dat $\langle -, - \rangle$ niet gedegereerd is. Hiervoor is het duidelijk voldoende een stel duale basissen $(a_i)_i, (b_i)_i$ te identificeren.

Voor de basis $(a_i)_i$ nemen we $(K^a E^b)_{a,b=0,\dots,d-1}$. Om de duale basis te berekenen gebruiken we het volgende deellemma.

Deellemma. *Er geldt*

$$\left\langle K^a, \sum_{j=0}^{d-1} q^{2jc} K^j \right\rangle = \delta_{a,c} d \quad (10.15)$$

Bewijs.

$$\text{LZ}(10.15) = \sum_{j=0}^{d-1} q^{2j(c-a)} = \begin{cases} d & \text{indien } c = a \\ \frac{q^{2d(c-a)} - 1}{q^{2(c-a)} - 1} = 0 & \text{indien } c \neq a \end{cases}$$

In het geval $c \neq a$ hebben we de standaard sommering van een meetkundige reeks gebruikt. \square

Uit dit lemma tezamen met (10.14) volgt dat de duale basis voor $K^a E^b$ gegeven wordt door

$$\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\langle E^e, E^e \rangle} \left(\sum_{j=0}^{d-1} q^{2jc} K^j \right) \cdot E^e$$

Dus $D(\bar{U}^+, \bar{U}^+)$ is een braided Hopf-algebra met universele R -matrix

$$\sum_i 1 \otimes b_i \otimes a_i \otimes 1$$

Laat ons dit uitwerken:

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} 1 \otimes \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{\langle E^b, E^b \rangle} \left(\sum_{j=0}^{d-1} q^{2ja} K^j \right) \cdot E^b \otimes K^a E^b \otimes 1 \\ = \frac{1}{d} \sum_{a,b,j} \frac{q^{2ja}}{\langle E^b, E^b \rangle} 1 \otimes K^j E^b \otimes K^a E^b \otimes 1 \\ = \frac{1}{d} \left(\sum_{a,j} q^{2ja} \cdot 1 \otimes K^j \otimes K^a \otimes 1 \right) \left(\sum_b \frac{1}{\langle E^b, E^b \rangle} 1 \otimes E^b \otimes E^b \otimes 1 \right) \end{aligned} \quad (10.16)$$

Het product in de laatste regel wordt genomen in de Hopf algebra $D(\bar{U}^+, \bar{U}^+) \otimes D(\bar{U}^+, \bar{U}^+)$.

Op dezelfde manier als in het bewijs van Gevolg 10.7.3 kunnen we een homomorfisme van Hopf-algebras construeren

$$\mu : D(\bar{U}^+, \bar{U}^+) \rightarrow \bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$$

met

$$\begin{aligned} \mu(K \otimes 1) &= K^{-1} \\ \mu(1 \otimes K) &= K \\ \mu(E \otimes 1) &= F \\ \mu(1 \otimes E) &= E \end{aligned}$$

Het is eenvoudig in te zien dat als $P \in D(\bar{U}^+, \bar{U}^+) \otimes D(\bar{U}^+, \bar{U}^+)$ een universele R -matrix is voor $D(\bar{U}^+, \bar{U}^+)$ dan is $(\mu \otimes \mu)(P)$ een universele R -matrix voor $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ (dit geldt uiteraard voor elk homomorfisme van Hopf-algebras). Als we $\mu \otimes \mu$ toepassen op (10.16) dan vinden we

$$\frac{1}{d} \left(\sum_{j,a} q^{2ja} \cdot K^j \otimes K^{-a} \right) \left(\sum_b \frac{1}{\langle E^b, E^b \rangle} E^b \otimes F^b \right)$$

Als we tenslotte de indices veranderen van (a, j, b) naar (a, b, c) dan verkrijgen we (10.13). \square

We definiëren

$$A = \frac{1}{d} \sum_{a,b=0}^{d-1} q^{2ab} K^a \otimes K^{-b}$$

$$B = \sum_{c=0}^{d-1} \frac{1}{\langle E^c, E^c \rangle} E^c \otimes F^c$$

De formule (10.13) zegt dat de universele R -matrix van $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ gegeven wordt door AB .

We zullen de factor A van meer nabij bekijken.

Lemma 10.8.5. *Onderstel dat V een representatie is van $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Onderstel verder dat $u, v \in V$ eigenvectoren van de actie van K op V zijn met respectievelijke eigenwaarden q^α, q^β voor zekere $\alpha, \beta = 0, \dots, d-1$. Dan is $u \otimes v \in V \otimes V$ een eigenvector voor de actie van A op $V \otimes V$ met eigenwaarde $q^{(d+1)/2\alpha\beta}$.*

Bewijs. Er geldt $A(u \otimes v) = \theta u \otimes v$ waarbij

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{a,b=0}^{d-1} q^{2ab+a\alpha-b\beta}$$

We kunnen θ herschrijven als

$$\theta = \frac{1}{d} \sum_{a=0}^{d-1} q^{a\alpha} \sum_{b=0}^{d-1} q^{(2a-\beta)b}$$

Gebruikmakende voor de sommeringsformule voor een meetkundige reeks vinden we

$$\sum_{b=0}^{d-1} q^{(2a-\beta)b} = \begin{cases} d & \text{indien } 2a \cong \beta, \text{ module } d \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Modulo d is het inverse van 2 gelijk aan $\frac{d+1}{2}$. Dit geeft de formule die we moesten bewijzen. \square

10.9 Een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking

We gaan tenslotte de voorgaande theorie gebruiken om een oplossing van de Yang-Baxter vergelijking te construeren. Zij $V = \mathbb{C}^2$ en laat E, K, F op V werken via de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Men verifieert direct dat dit een representatie van $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ definieert.

Zij e_1, e_2 de standaardbasis van V . D.w.z.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dan geldt

$$\begin{array}{ll} Ee_1 = 0 & Ee_2 = e_1 \\ Fe_2 = 0 & Fe_1 = e_2 \\ Ke_1 = qe_1 & Ke_2 = q^{-1}e_2 \end{array}$$

Een basis voor $V \otimes V$ wordt gegeven door $(e_i \otimes e_j)_{i,j}$ waarbij we de indices i, j lexicografisch ordenen.

Volgen lemma (10.8.5) zijn de $e_i \otimes e_j$ eigenvectoren voor de actie van A . De corresponderende eigenwaarden worden gegeven door

$$\begin{cases} q^{-\alpha} & \text{indien } i \neq j \\ q^{\alpha} & \text{indien } i = j \end{cases}$$

waarbij $\alpha = (d+1)/2$.

Voor B vinden we

$$B = 1 + (q - q^{-1})E \otimes F + \dots$$

waarbij de termen aangegeven met “...” als nul werken op $V \otimes V$.

Samenvattend vinden we nu het volgende voor de universele R -matrix P van $\bar{U}_q(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

$$\begin{array}{l} Pe_1 \otimes e_1 = q^{\alpha} e_1 \otimes e_1 \\ Pe_1 \otimes e_2 = q^{-\alpha} e_1 \otimes e_2 \\ Pe_2 \otimes e_1 = q^{-\alpha} (e_2 \otimes e_1 + (q - q^{-1})e_1 \otimes e_2) \\ Pe_2 \otimes e_2 = q^{\alpha} e_2 \otimes e_2 \end{array}$$

Gebruikmakende van het feit $q^{2\alpha} = q$ verkrijgen we uiteindelijk

$$c_{V,V} = \tau_{V,V}(P \cdot -) = q^{-\alpha} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking zijn maar op een scalair na bepaald dus we kunnen de factor $q^{-\alpha}$ weglaten. Uiteindelijk vinden we de volgende oplossing

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Dit is dezelfde oplossing die we ook al in vroegere hoofdstukken zijn tegengekomen. Hier volgt ze nu als resultaat van een algemene theorie.

Door meer gecompliceerde Lie-algebras en/of representaties te beschouwen kunnen we andere oplossingen van de Yang-Baxter vergelijking construeren.

11 Vassiliev invarianten

11.1 Inleiding

Na de ontdekking van de Jones polynoom en de meer algemene HOMFLY polynoom vond er in het begin van de jaren '90 een nieuwe revolutie plaats. Er werd een systematische methode ontdekt om invarianten zoals de Jones polynoom te bestuderen. Dit leidde tot het begrip Vassiliev invariant (of invariant van eindige orde).

De HOMFLY polynoom is een speciaal geval van een hele reeks invarianten die met behulp van de theorie der quantumgroepen kunnen geconstrueerd worden. De theorie der quantumgroepen levert dus een *constructie* voor knopeninvarianten. Omdat deze “quantuminvarianten” het resultaat van een algemene theorie zijn, kunnen ze als goed begrepen beschouwd worden.

Vassiliev invarianten daarentegen zijn knopeninvarianten die aan een bepaalde *abstracte voorwaarde* voldoen. Hun eigenschappen zijn nog steeds mysterieus. Een befaamde stelling van Kontsevich laat toe om ze allemaal op te schrijven (met behulp van zeer krachtige computers). Er bestaat echter nog geen classificatie voor Vassiliev invarianten.

De standaard referentie voor Vassiliev invarianten is: *Dror Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariants, Topology 34 (1995)*. Een latere versie (uit 1999) is beschikbaar op <http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn>.

Alle quantuminvarianten zijn Vassiliev invarianten en men vermoedde gedurende lange tijd dat het omgekeerde ook waar is. Pierre Vogel vond echter een tegenvoorbeeld voor dit vermoeden (Algebraic structure on modules of diagrams, to downloaden van <http://www.math.jussieu.fr/~vogel/>).

Men vermoedt dat Vassiliev invarianten sterk genoeg zijn om niet equivalente knopen van mekaar te kunnen onderscheiden. Men weet echter zelfs niet of ze in staat zijn om oriëntatie-omkering te detecteren. Het is geweten dat quantuminvarianten *niet* in staat zijn om oriëntatie-omkering te detecteren.

De Vassiliev invarianten werden oorspronkelijk ontdekt als resultaat van het toepassen van technieken uit de algebraïsche topologie op de ruimte van alle knopen (waarvan we dus op een of andere manier de samenhangingscomponenten van willen beschrijven). Het basisidee bestaat uit het toepassen van “Alexander dualiteit.”


Deze dualiteit laat ons toe om (in zeer vage bewoordingen) het aantal samenhangingscomponenten van een verzameling uit te drukken in invarianten van het complement. Op deze manier kan men bijvoorbeeld een elegant en kort bewijs geven voor de traditioneel erg moeilijke Jordan-kromme stelling. Deze stelling zegt dat het complement van een cirkel ingebed in \mathbb{R}^2 precies twee samenhangingscomponenten heeft.

In het geval van de knopentheorie beschouwen we de ruimte van de knopen binnen de ruimte van alle immersies van een cirkel in \mathbb{R}^3 (met zekere restricties die we hier negeren). Het complement bestaat ruwweg uit de *singuliere knopen*. Dit complement is op een natuurlijke manier gefilterd volgens de aard van de singulariteiten van de knopen. De studie van deze filtratie leidt tot de zogenaamde Vassiliev invarianten.¹

Uiteraard vallen deze methoden ver buiten de context van de huidige cursus. Gelukkig bestaat er nu een zuivere combinatorische aanpak om Vassiliev invarianten in te voeren. Deze zullen we nu bespreken.

11.2 Singuliere knopen en Vassiliev invarianten

Conventie 11.2.1. *Hieronder zijn alle knopen, links, diagrammen en afgeleide constructies georiënteerd. We zullen dit niet expliciet vermelden.*

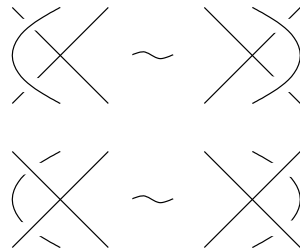
Zoals reeds blijkt uit de inleiding moeten we om Vassiliev invarianten te definiëren het concept van een *singuliere knoop* invoeren. Dit is een gesloten polygonale kromme in \mathbb{R}^3 die ten hoogste zelfsnijdingen van de vorm  heeft. Deze zelfsnijdingen noemen we de singuliere punten van de knoop. Een singuliere link is een disjuncte unie van singuliere knopen. De verzameling van singuliere punten van een singuliere knoop/link K duiden we aan

¹Oorspronkelijk via een zogenaamde “spectraalrij.”

met $\text{sing}(K)$. We definiëren equivalentie van singuliere knopen/links op de gebruikelijke manier via Δ -moves.

Corresponderend met het begrip singuliere link kunnen we ook het begrip *singulier diagram* invoeren. Dit is een unie van gesloten polygonale krommen in \mathbb{R}^2 met ten hoogste zelfsnijdingen van de vorm \times of \times of \times .

We zeggen dat twee singuliere diagrammen equivalent zijn als we van het ene naar het andere kunnen gaan door middel van een combinatie van Reidemeister moves en door middel van één van volgende transformaties:



Men kan weer aantonen dat elke singuliere knoop op equivalentie na een projectie heeft die een singulier diagram is en voorts wordt een singuliere knoop op equivalentie na bepaald door een bijhorend diagram. Twee singuliere knopen zijn equivalent als en slechts als de bijhorende singuliere diagrammen equivalent zijn. Analoge beweringen gelden voor links.

Onderstel dat we een linkinvariant P hebben die waarden in \mathbb{C} aanneemt, dwz een functie

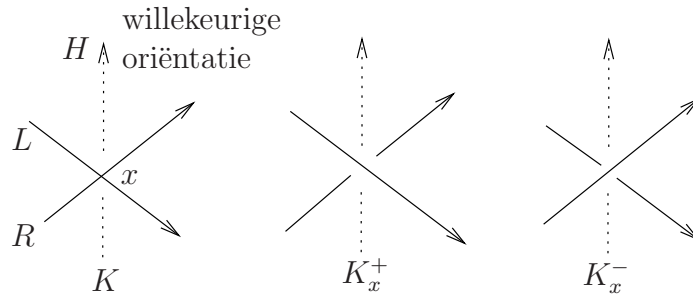
$$\{\text{georiënteerde links}\} \rightarrow \mathbb{C}$$

die constant is op equivalentie klassen (occasioneel zullen we ook invarianten met waarden in Laurent polynomen gebruiken, in feite kunnen we elke abelse groep toelaten).

Er bestaat een procedure om de invariant P uit te breiden naar de verzameling georiënteerde singuliere links. Dit is het eenvoudigst uit te leggen op een singulier diagram. We definiëren namelijk

$$P(\times) = P(\times) - P(\times)$$

Het lijkt enigszins verrassend maar met enige moeite kan men inzien dat deze definitie ook zin heeft voor singuliere *links* (ipv diagrammen) (zie Figuur 11.1). Zij K een singuliere link met singulariteit x . We construeren een lijn H door x die loodrecht staat op de twee lijnstukjes door x en we geven deze een willekeurige(!) oriëntatie. We geven dan de lijnstukjes de naam L , R op zodanige wijze dat L , R , H een rechts georiënteerd assenstelsel vormen (zoals in het gebruikelijke x, y, z -coördinatenstelsel). We definiëren dan K_x^+ en K_x^- door L respectievelijk een beetje op te tillen en te laten zakken in de richting



Figuur 11.1: De constructie van K_x^+ en K_x^- .

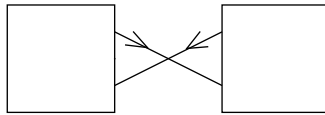
aangegeven door H . Men kan nu gemakkelijk nagaan dat deze definitie van K_x^+ en K_x^- onafhankelijk is van de keuze van de oriëntatie op H .

Zoals voor diagrammen definiëren we nu

$$P(K) = P(K_x^+) - P(K_x^-) \quad (11.1)$$

Als toepassing geven we onmiddellijk het volgende dikwijls gebruikte resultaat

Stelling 11.2.2. *Indien P een linkinvariant is en K is een singuliere link van de vorm*



dan geldt $P(K) = 0$.

Bewijs. We hebben

$$\begin{aligned} P(\text{diagram}) &= P(\text{diagram}) - P(\text{diagram}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

We geven nu de definitie van een Vassiliev invariant.

Definitie 11.2.3. Een invariant P voor georiënteerde links is een Vassiliev invariant van orde m wanneer hij (na uitbreiding tot singuliere links) nul is op elke singuliere georiënteerde link met $m + 1$ singuliere punten. We zeggen dat P *exact* van orde m is indien hij van orde m is en niet van orde m' voor $m' < m$.

Lemma 11.2.4. *Indien P een Vassiliev invariant van orde m is dan is P ook een Vassiliev invariant van orde m' voor alle $m' > 0$.*

Bewijs. Zij P een Vassiliev invariant van orde m . Door de skeinrelatie (11.1) te gebruiken vinden we dat de waarde van P op een link met $m' + 1$ singuliere punten kan uitgedrukt worden als lineaire combinatie van de waarde van P op links met precies $m + 1$ singuliere punten. Dit bewijst wat we willen. \square

De volgende stelling geeft aan dat Vassiliev invarianten inderdaad bestaan.

Stelling 11.2.5. *Zij $X(K)(A)$ de Jones polynoom van een link K zoals gedefinieerd in §2.1. Zij*

$$X(K)(A) = \sum_n X_n(K)(A - 1)^n$$

de Taylorreeks ontwikkeling van X in het punt $A = 1$. Dan zijn de X_n Vassiliev invarianten van orde n .

Bewijs. Zoals gebruikelijk breiden we X uit tot singuliere links. Hetgeen we moeten bewijzen is equivalent met de volgende bewering:

Bewering 1. Indien K een link met $n + 1$ singuliere punten is dan geldt $X_0(K), X_1(K), \dots, X_n(K) = 0$.

We bewijzen dit per inductie op n . Het startgeval wordt gegeven door $n = -1$. In dat geval is er niets te bewijzen.

We maken gebruik van de skeinrelatie in Oefening 2.1.5. Deze was enkel bewezen voor gewone links maar ze blijft geldig voor singuliere links. Dit komt omdat de drie termen in de skeinrelatie met behulp van *dezelfde* lineaire combinatie in termen van niet singuliere links kunnen uitgedrukt worden.

Onderstel dat we onze bewering voor zekere n bewezen hebben. Zij D een diagram met $n + 2$ singuliere punten en zij x een van deze singuliere punten. We werken de skeinrelatie uit voor het singulier diagram verkregen uit K door x te vervangen door een overkruising.

$$\begin{aligned} A^4 &= 1 + (A - 1)(\cdots) \\ A^{-4} &= 1 + (A - 1)(\cdots) \\ A^2 - A^{-2} &= (A - 1)(\cdots) \\ X(\text{overkruising}) &= (A - 1)^{n+1}(X_{n+1}(\text{overkruising}) + (A - 1)(\cdots)) \\ X(\text{overkruising}) &= (A - 1)^{n+1}(X_{n+1}(\text{overkruising}) + (A - 1)(\cdots)) \\ X(\text{overkruising}) &= (A - 1)^{n+1}(X_{n+1}(\text{overkruising}) + (A - 1)(\cdots)) \end{aligned}$$

waarbij we de hogere graadstermen in $A - 1$ met $(A - 1)(\dots)$ aangegeven hebben.

Indien we dit nu substitueren in de skeinrelatie dan vinden we

$$(A - 1)^{n+1}(X_{n+1}(K) + (A - 1)(\dots)) = 0$$

Dus als we kijken naar de coëfficiënt van $(A - 1)^{n+1}$ dan vinden we inderdaad $X_{n+1}(K) = 0$. \square

Met een analoge redenering kunnen we aantonen dat de HOMFLY polynoom in functie van Vassiliev invarianten kan uitgedrukt worden.

11.3 Algebraïsche structuur

Hieronder beperken we voor de gemakkelijheid ons betoog tot knopen. Eventuele veralgemeningen tot links zijn triviaal.

Definieer

$$V_n = \{\text{Vassiliev invarianten van orde } n\}$$

V_n is duidelijk een \mathbb{C} -vectorruimte. Definieer de verzameling V van *alle* Vassiliev invarianten als de unie van alle V_n . Dan is V ook een \mathbb{C} -vectorruimte en de V_n vormen vanwege lemma 11.2.4 een stijgende keten van deelvectorruimten in V .

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

Voor de uniformiteit stellen we $V_i = 0$ voor $i < 0$.

Er blijkt nog veel meer structuur op V te zijn.

Indien P, Q invarianten van knopen zijn dan definiëren we PQ via $(PQ)(K) = P(K)Q(K)$ voor een niet singuliere knoop K .

Stelling 11.3.1. *Indien $P \in V_m$, $Q \in V_{m'}$ dan geldt $PQ \in V_{m+m'}$.*

Om het bewijs te geven moeten we eerst wat voorbereidend werk doen.

Merk eerst op dat indien K singulier is dan *geldt de formule* $(PQ)(K) = P(K)Q(K)$ *niet meer*. We moeten dus eerst een formule voor PQ op singuliere knopen geven. Hiervoor moeten we onze notaties wat uitbreiden.

Indien K singuliere punten x_1, \dots, x_n heeft dan kunnen we die allemaal samen behandelen. We gebruiken de notatie $K_{x_1, \dots, x_n}^{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}$ met $\epsilon_i \in \{+, -\}$ om de (eventueel nog steeds singuliere) knoop aan te geven waarin we x_i door een $+$ -type kruising ($\epsilon_i = +$) of $-$ -type kruising ($\epsilon_i = -$) vervangen hebben.

Indien K singuliere punten x, y heeft dan vinden we

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K_x^+) - P(K_x^-) \\ &= P(K_{x_1 x_2}^{++}) - P(K_{x_1 x_2}^{+-}) - P(K_{x_1 x_2}^{-+}) + P(K_{x_1 x_2}^{--}) \end{aligned}$$

Per inductie bewijst men voor een knoop met singuliere punten x_1, \dots, x_n

$$P(K) = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n} (-1)^l P(K_{x_1, \dots, x_n}^{\epsilon_1 \dots \epsilon_n})$$

waarbij l het aantal $--$ -tekens is in het rijtje $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$.

Stelling 11.3.2. *Zij K een singuliere knoop met $T = \text{sing}(K)$. Dan geldt*

$$(PQ)(K) = \sum_{S \subset T} P(K_{T-S}^{+ \dots +}) Q(K_S^{- \dots -}) \quad (11.2)$$

Bewijs. Zo'n formule bewijzen we uiteraard per inductie op $|T|$. Het startgeval wordt gegeven door $T = \emptyset$. In dit geval is K niet singulier en (11.2) is equivalent met $(PQ)(K) = P(K)Q(K)$. Er valt dus niets te bewijzen.

Onderstel nu dat de formule bewezen is voor alle T met $|T| < n$. Zij $T = T' \cup \{x\}$ met $|T| = n$, $|T'| = n - 1$. Dan geldt per inductie

$$\begin{aligned} (PQ)(K) &= (PQ)(K_x^+) - (PQ)(K_x^-) \\ &= \sum_{S \subset T'} P(K_{x, T'-S}^{+ \dots +}) Q(K_{x, S}^{+ \dots -}) - \sum_{S \subset T'} P(K_{x, T'-S}^{- \dots +}) Q(K_{x, S}^{- \dots -}) \end{aligned} \quad (11.3)$$

Om de notatie te vereenvoudigen definiëren we nu

$$A = K_{T'-S}^{+ \dots +} \quad B = K_S^{- \dots -}$$

waarna we (11.3) compacter kunnen schrijven als

$$\sum_{S \subset T'} P(A_x^+) Q(B_x^+) - P(A_x^-) Q(B_x^-)$$

waarbij we ons uiteraard herinneren dat A en B van S afhangen.

We hebben nu

$$\begin{aligned} P(A_x^+) Q(B_x^+) - P(A_x^-) Q(B_x^-) &= P(A_x^+) (Q(B_x^+) - Q(B_x^-)) + (P(A_x^+) - P(A_x^-)) Q(B_x^-) \\ &= P(A_x^+) Q(B) + P(A) Q(B_x^-) \end{aligned}$$

zodat (11.3) uiteindelijk wordt

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset T'} P(A_x^+) Q(B) + P(A) Q(B_x^-) &= \sum_{S \subset T'} P(K_{x, T'-S}^{+ \dots +}) Q(K_S^{- \dots -}) + P(K_{T'-S}^{+ \dots +}) Q(K_{x, S}^{- \dots -}) \\ &= \sum_{S \subset T'} P(K_{T-S}^{+ \dots +}) Q(K_S^{- \dots -}) + P(K_{T-S'}^{+ \dots +}) Q(K_{S'}^{- \dots -}) \end{aligned}$$

waarbij $S' = S \cup \{x\}$. Het gestelde volgt nu uit de gelijkheid

$$\{S \subset T\} = \{S \subset T'\} \cup \{S \cup \{x\} \mid S \subset T'\} \quad \square$$

Bewijs van Stelling 11.3.1.

Zij P, Q Vassiliev invarianten respectievelijk van orde m en m' . Zij K een singuliere knoop met precies $m_1 + m_2 + 1$ singuliere punten. Noteer $T = \text{sing}(K)$. Uit (11.2) verkrijgen we dat $(PQ)(K)$ een som is van termen van de vorm $P(K_{T-S}^{+\dots+})Q(K_S^{-\dots-})$ met $S \subset T$. De singuliere punten van $K_{T-S}^{+\dots+}$ en $K_S^{-\dots-}$ zijn respectievelijk S en $T - S$.

Uit het feit dat $|T| = m_1 + m_2 + 1$ volgt dat ofwel $|S| \geq m_1 + 1$ ofwel $|T - S| \geq m_2 + 1$. Dus ofwel $P(K_{T-S}^{+\dots+}) = 0$ ofwel $Q(K_S^{-\dots-}) = 0$. Dit bewijst het gestelde. \square

Uit Stelling 11.3.1 volgt dat V een *gefilterde \mathbb{C} -algebra* is. Een \mathbb{C} -algebra R is per definitie een \mathbb{C} -vectorruimte met een \mathbb{C} -bilineaire vermenigvuldiging die een ringstructuur op R definieert (waarbij de optelling komt van de vectorruimte structuur).

Een filtratie op een \mathbb{C} -algebra R is een stijgende keten van deelruimten

$$\dots \subset R_n \subset R_{n+1} \subset R_{n+2} \subset \dots$$

(met $n \in \mathbb{Z}$) zodat $R_m R_n \subset R_{m+n}$.

We zeggen dat zo'n filtratie *exhaustief* is indien $\bigcup_n R_n = R$ en *gesepareerd* ("Hausdorff") indien $\bigcap R_n = 0$. We zeggen dat de filtratie positief is indien $R_n = 0$ voor $n < 0$ en negatief indien $R_n = R$ voor $n > 0$.

Een belangrijke constructie die je met zo'n gefilterde \mathbb{C} -algebra R kan uitvoeren is het nemen van de geassocieerde gegradeerde algebra. Definieer

$$\text{gr } R = \bigoplus_n R_n / R_{n-1}$$

Het blijkt nu dat we op R de structuur van een \mathbb{C} -algebra kunnen zetten. Aangezien $\text{gr } R$ op natuurlijke manier een vectorruimte is moeten we enkel een bilineaire vermenigvuldiging definiëren.

De elementen van $\bigcup_n R_n / R_{n-1}$ noemen we de *homogene elementen* van $\text{gr } R$. We gaan eerst aangeven hoe we homogene elementen moeten vermenigvuldigen.

Zij $r_m \in R_m$, $s_n \in R_n$ representanten van elementen $\bar{r}_m \in R_m / R_{m-1}$, $\bar{s}_n \in R_n / R_{n-1}$. Dan definiëren we

$$\bar{r}_m \cdot \bar{s}_n = \overline{r_m s_n} \in R_{m+n} / R_{m+n-1}$$

Dit is goed gedefinieerd. Immers indien r'_m, s'_n dezelfde elementen representeren dan geldt $r_m - r'_m \in R_{m-1}$, $s_n - s'_n \in R_{n-1}$ en dus

$$r'_m s'_n - r_m s_n = r'_m (s'_n - s_n) + (r'_m - r_m) s_n \in R_m R_{n-1} + R_{m-1} R_n \subset R_{m+n-1}$$

waaruit volgt $\overline{r'_m s'_n} = \overline{\bar{r}_m \bar{s}_n}$.

We breiden de vermenigvuldiging van homogene elementen bilineair uit tot een vermenigvuldiging op de volledige $\text{gr } R$ via de volgende formule

$$\left(\sum_m \bar{r}_m \right) \cdot \left(\sum_n \bar{s}_n \right) = \sum_{m,n} \bar{r}_m \bar{s}_n \quad (11.4)$$

Uiteraard zijn hier slechts een eindig aantal \bar{r}_m, \bar{s}_n verschillend van nul.

De vermenigvuldiging (11.4) is duidelijk associatief en bilinear. Ze definieert dus een \mathbb{C} -algebra structuur op $\text{gr } R$.

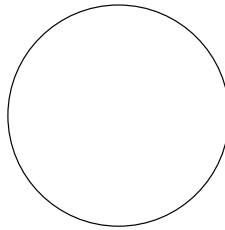
Hieronder schrijven we \bar{V} voor $\text{gr } V$. We gaan de structuur van \bar{V} op een combinatorische manier beschrijven.

11.4 Koorddiagrammen

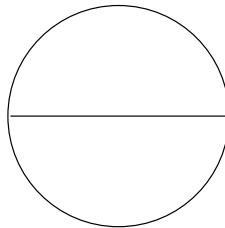
Een *koorddiagram* met n koordes is een cirkel met daarop $2n$ verschillende punten die paarsgewijze door koordes verbonden zijn. We beschouwen enkel de *combinatorische structuur* van een koorddiagram. Dwz we mogen de punten verplaatsen als we hun volgorde maar niet veranderen.

Hier volgen de verschillende koorddiagrammen voor kleine n .

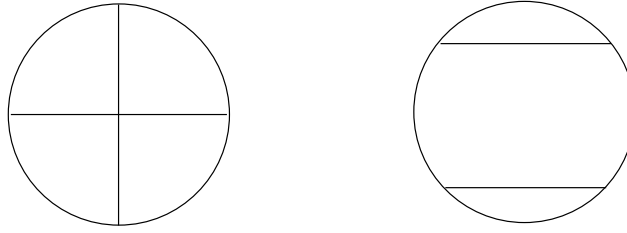
$n = 0$



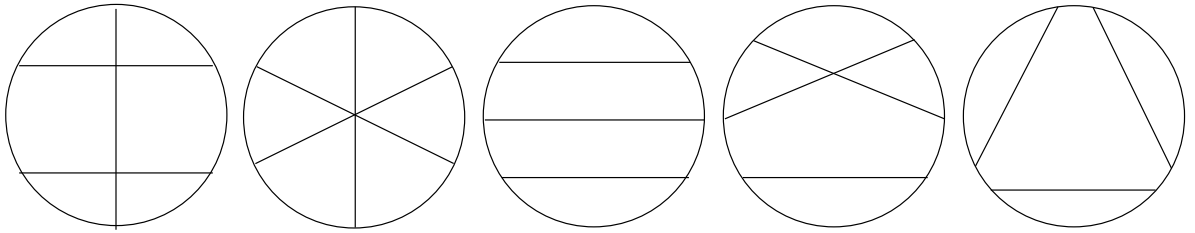
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



Het is duidelijk dat er voor elke n slechts een eindig aantal mogelijkheden zijn. Dit aantal stijgt wel exponentieel met n .

We definiëren

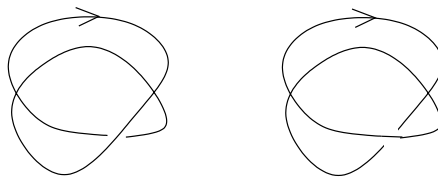
$$\mathcal{K}_n = \{\text{koordddiagrammen met } n \text{ koordes}\}$$

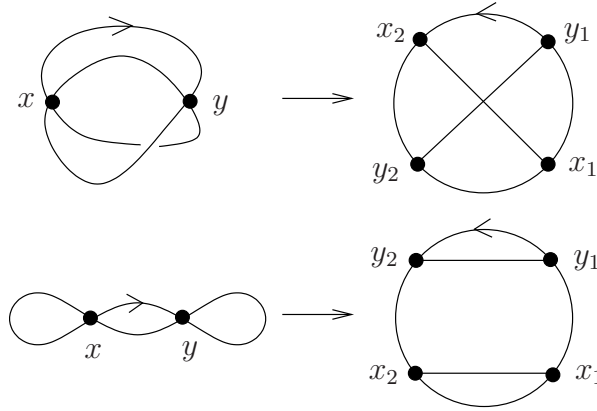
We introduceren nu een natuurlijke afbeelding

$$\Phi : \{\text{singuliere knopen met } |\text{sing}| = n\} / \sim \longrightarrow \mathcal{K}_n$$

Dit gaat als volgt (zie Figuur 11.2). We doorlopen een georiënteerde singuliere knoop K volgens zijn oriëntatie en tegelijk doorlopen we een cirkel in tegenwijzerzin. Telkens wanneer we een singulier punt tegenkomen op de knoop duiden we een corresponderend punt aan op de cirkel. Als we rond zijn dan hebben we voor elk singulier punt op de knoop twee singuliere punten op de cirkel. Die verbinden we dan met een lijnstuk (een “koorde”). Het koordddiagram dat we aldus bekomen is $\Phi(K)$.

Het is vrij duidelijk dat Φ surjectief maar niet injectief is. Het is eenvoudig aan te tonen (bvb door hun Jones polynoom te berekenen) dat de volgende singuliere knopen niet equivalent zijn. Ze corresponderen echter wel met hetzelfde koordddiagram.





Figuur 11.2: Singuliere knopen met hun corresponderende koorddiagrammen

Een *inbedding* van een koorddiagram D is een element van $\Phi^{-1}(D)$. Zo'n inbedding is niet uniek, maar ze is wel uniek indien we de singuliere knoop toelaten om door zich zelf te bewegen. Meer precies: indien K, K' singuliere knopen met n singulariteiten zijn en $\Phi(K) = \Phi(K')$ and bestaan er singuliere knopen L_1, \dots, L_m met $n+1$ singuliere singulariteiten (voor zekere m) zodat

$$K \sim L_{1,x_1}^{\epsilon_1}, L_{1,x_1}^{-\epsilon_1} \sim L_{2,x_2}^{\epsilon_2}, \dots, L_{i,x_i}^{-\epsilon_i} \sim L_{i+1,x_{i+1}}^{\epsilon_{i+1}}, \dots, L_{m,x_m}^{-\epsilon_m} \sim K' \quad (11.5)$$

waarbij $\epsilon_i = \pm$ en x_i is een singulier punt op L_i .

Voor $P \in V_n$ en $D \in K_n$ definiëren we

$$\langle P, D \rangle = P(\text{inbedding van } D)$$

Uit (11.5) volgt dat dit goed gedefinieerd is. Immers indien $K, K', (L_i)_i$ zijn zoals in (11.5) dan volgt uit het feit dat de L_i , $n+1$ singulariteiten hebben: $P(L_{i,x_i}^{-\epsilon_i}) = P(L_{i+1,x_{i+1}}^{\epsilon_{i+1}})$ en dus $P(K) = P(K')$.

De afbeelding

$$w_P : \mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{C} : D \mapsto \langle P, D \rangle$$

noemt men het *gewichtensysteem* van P (of kortweg: de *gewichten* van P). Een belangrijk probleem in de theorie der Vassiliev invarianten is het bepalen welke afbeeldingen $\mathcal{K}_n \rightarrow \mathbb{C}$ een gewichtensysteem vormen.

Als voorbeeld gaan we de gewichten van X_0, X_1, X_2 uitrekenen. Het is eenvoudig in te zien dat $X_1 = 0$, maar we pretenderen dat we dit nog niet weten.

Wat is onze strategie? Volgens Stelling 11.2.5 is X_i een Vassiliev invariant van orde i . We moeten dus $\langle X_i, D \rangle = X_i(\text{inbedding van } D)$ uitrekenen voor $D \in \mathcal{K}_i$. Kies een willekeurige inbedding K van D . Dan moeten we $X_i(K)$

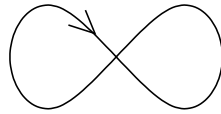
uitrekenen. Per definitie betekent dit dus dat we $X(K)$ moeten uitrekenen en dan de coefficient zoeken van $(A-1)^i$ in de Taylorreeks ontwikkeling van $X(K)$. Deze coefficient wordt gegeven door $\frac{1}{i!} \frac{d^i X(K)(A)}{dA^i} \Big|_{A=1}$.

We voeren dit programma nu uit.

$i = 0$ We hebben $X(\bigcirc) = 1$ en dus $X_0(\bigcirc) = 1$. We vinden dus

$$\langle X_0, \bigcirc \rangle = 1$$

$i = 1$ Een inbedding van \ominus wordt gegeven door



Vanwege Stelling 11.2.2 hebben we $X(\infty) = 0$. Er volgt dus ook $X_1(\infty) = 0$ en dus

$$\langle X_1, \ominus \rangle = 0$$

$i = 2$ Er zijn nu twee mogelijkheden.

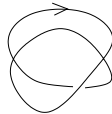
Mogelijkheid 1 Een inbedding van \ominus wordt gegeven door



Weer vanwege Stelling 11.2.2 vinden we $X(\infty) = 0$. Er volgt dus ook $X_2(\infty) = 0$ en dus

$$\langle X_2, \ominus \rangle = 0$$

Mogelijkheid 2 Een inbedding van \oplus wordt gegeven door



We berekenen

$$\begin{aligned} X \left(\text{figure-eight with two right-pointing arrows} \right) &= X \left(\text{figure-eight with one right-pointing arrow} \right) - X \left(\text{figure-eight with one left-pointing arrow} \right) \\ &\quad - X \left(\text{figure-eight with one right-pointing arrow} \right) + X \left(\text{figure-eight with one left-pointing arrow} \right) \\ &= -1 - A^{16} + A^{12} + A^4 \end{aligned}$$

waarbij we gebruik gemaakt hebben van Stelling 11.2.2, een berekening in §2.1 en Stelling 2.2.3.

We moeten nu nog de coëfficiënt van $(A - 1)^2$ vinden in de Taylorreeks ontwikkeling van $-1 - A^{16} + A^{12} + A^4$. Deze wordt gegeven door

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dA^2} (-1 - A^{16} + A^{12} + A^4)|_{A=1} = \frac{-16 \cdot 15 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 3}{2} = -48.$$

Dus

$$\langle X_2, \bigoplus \rangle = -48$$

We definiëren nu $E_n = \mathbb{C}\mathcal{K}_n$. Dus E_n is een vectorruimte met als basis de koordddiagrammen met n koordes. We breiden $\langle -, - \rangle$ uit tot een bilineaire vorm

$$\langle -, - \rangle : V_m \times E_m \rightarrow \mathbb{C}$$

via

$$\langle P, \sum_{i=1}^m \alpha_i D_i \rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \langle P, D_i \rangle$$

Met deze bilineaire vorm kunnen we de volgende afbeelding associëren:

$$\phi_n : V_n \rightarrow E_n^* : P \mapsto \langle P, - \rangle$$

E_n^* is de duale ruimte van E_n . Deze wordt gegeven door de lineaire afbeeldingen $E_n \rightarrow \mathbb{C}$. Zo'n lineaire afbeelding wordt volledig bepaald door het geven van haar waarden op de basisvectoren \mathcal{K}_n . Met een lichtjes foute notatie kunnen we ϕ_n dus ook definiëren als

$$\phi_n : V_n \rightarrow E_n^* : P \mapsto w_P$$

We vragen ons nu af wat de kern en het beeld is van ϕ_n . Het volgende lemma is eenvoudig.

Lemma 11.4.1. $\ker \phi_n = V_{n-1}$

Bewijs. Zij $P \in \ker \phi_n$. Dus $\langle P, D \rangle = 0$ voor alle $D \in \mathcal{K}_n$. Dit betekent dus ook $P(K) = 0$ voor all knopen met precies n singulariteiten. Maar dat is hetzelfde als zeggen dat $P \in V_{n-1}$. \square

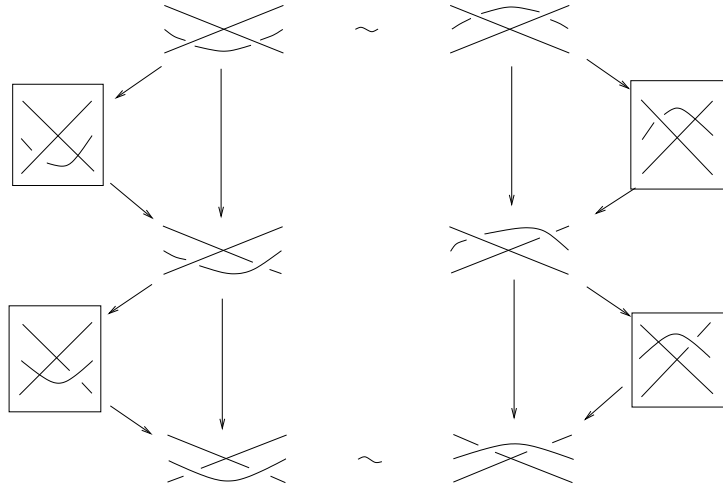
We kunnen dus een injectieve afbeelding definiëren

$$\bar{\phi}_n : V_n/V_{n-1} \rightarrow E_n^* : \bar{P} \mapsto \langle P, - \rangle$$

Hieruit halen we onmiddellijk het volgende belangrijke gevolg:

Gevolg 11.4.2. V_n is eindigdimensionaal.

Bewijs. Uit de dimensieformule volgt $\dim V_n = \dim V_{n-1} + \dim V_n/V_{n-1}$. Aangezien $\bar{\phi}_n$ injectief is hebben we $\dim V_n/V_{n-1} < \dim E_n = |\mathcal{K}_n| < \infty$. Per inductie volgt dus $\dim V_n < \infty$ (gebruikmakende van het feit dat $V_{-1} = 0$). \square



Figuur 11.3: De oorsprong van de 4-term relatie.

Als we het exacte aantal Vassiliev invarianten van gegeven orde willen kennen (de dimensie van V_n) dan moeten we het beeld van ϕ_n bepalen. Dit is een moeilijker probleem. De eerste vraag is of ϕ_n misschien surjectief is, maar hier kunnen we onmiddellijk negatief op antwoorden.

Lemma 11.4.3. *Indien D een diagram is met een koorde die geen andere koordes snijdt dan geldt $\langle P, D \rangle = 0$ voor elke Vassiliev invariant van orde n .*

Bewijs. Indien we een inbedding van D beschouwen dan heeft deze de structuur



Uit Stelling 11.2.2 weten we dat *elke* knopeninvariant nul is op een dergelijke singuliere knoop. \square

Met andere woorden indien $\theta \in E_n^*$ in het beeld van ϕ_n zit dan is θ nul op alle diagrammen met een geïsoleerde koorde. Dit noemt men de *1-term relatie*.

Het blijkt dat er nog een diepere relatie bestaat op de elementen van E_n^* die in het beeld van ϕ_n liggen. Dit is de zogenaamde 4-term relatie. Dat zo een relatie moet bestaan kan afgeleid worden uit figuur 11.3. De precieze vorm wordt gegeven in Stelling 11.4.4.

Stelling 11.4.4. *Zij P een willekeurige invariant voor georiënteerde knopen. Dan voldoen P aan de volgende “skeinachtige” relatie.*

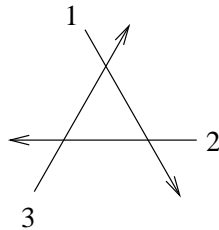
$$P \left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) - P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) + P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) - P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) = 0 \quad (11.6)$$

Bewijs. We hebben

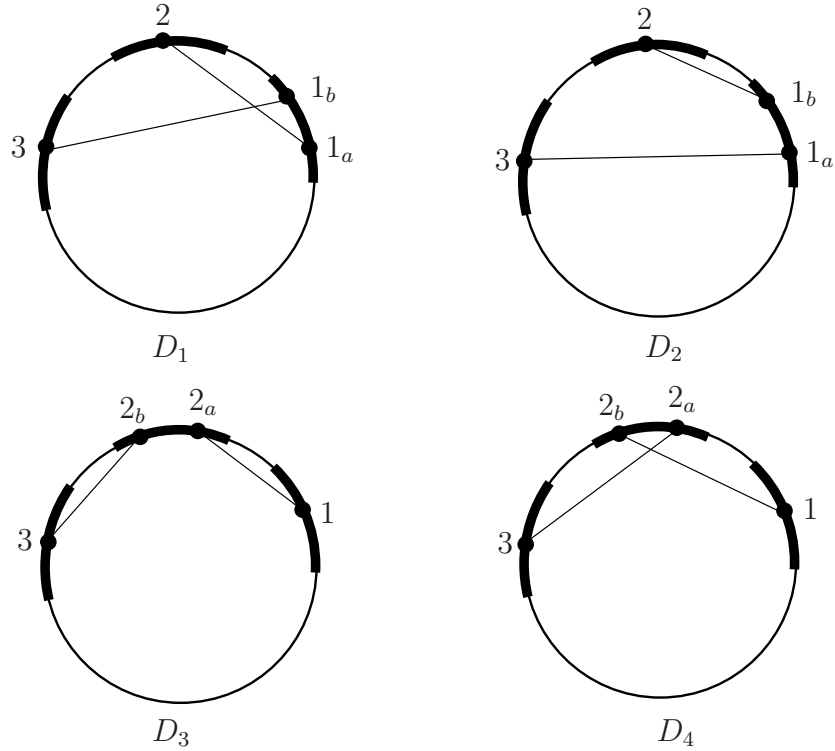
$$\begin{aligned} P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) &= P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) - P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) \\ -P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) &= -P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) + P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) \\ P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) &= P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) - P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) \\ -P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) &= -P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) + P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \nwarrow \quad \nwarrow \end{array} \right) \end{aligned}$$

Het is nu duidelijk dat de som van deze vier uitdrukkingen nul is. \square

We kunnen (11.6) vertalen in termen van koorddiagrammen. Hiervoor moeten we weten in welke volgorde de drie segmenten van de knoop doorlopen worden die een rol spelen in (11.6). Laat ons onderstellen dat de volgorde is als in ondertaande figuur



We krijgen dan de koorddiagrammen zoals in Figuur 11.4. We hebben dus de koorden aangegeven die we moeten toevoegen aan een koorddiagram met $n - 2$ koorden om de 4 koorddiagrammen D_1, \dots, D_4 te verkrijgen. Het is de bedoeling dat de $n - 2$ oorspronkelijke koorden niet de vetgedrukte bogen snijden.



Figuur 11.4: De koorddiagrammen in de 4-term relatie.

Indien de segmenten in (11.6) in een andere volgorde doorlopen worden dan verkrijgen we dezelfde diagrammen.

We hebben dus het volgende lemma:

Lemma 11.4.5. *Indien $P \in E_n$ dan*

$$\langle P, D_1 \rangle - \langle P, D_2 \rangle + \langle P, D_3 \rangle - \langle P, D_4 \rangle = 0$$

We kunnen dit weer herformuleren door te zeggen dat indien $\theta \in \text{im } \phi_n$ dan $\theta(D_1 - D_2 + D_3 - D_4) = 0$. We definiëren nu A_n als het quotiënt van E_n met de vectorruimte B_n voortgebracht door

- de diagrammen D die een geïsoleerde koorde bevatten
- uitdrukkingen van de vorm $D_1 - D_2 + D_3 - D_4$ waarbij D_1, \dots, D_4 zijn zoals in Figuur 11.4.

De conclusie is nu:

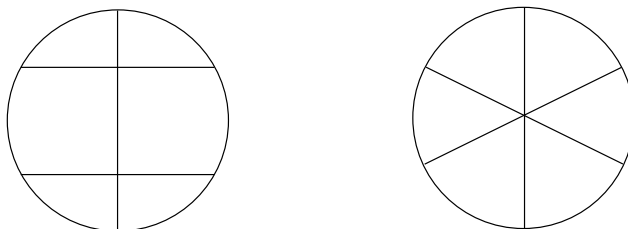
Stelling 11.4.6. *We hebben een goedgedefinieerde injectieve lineaire afbeelding*

$$\bar{\phi}_n : V_n/V_{n-1} \rightarrow A_n^* : \bar{P} \mapsto (\bar{D} \mapsto \langle P, D \rangle)$$

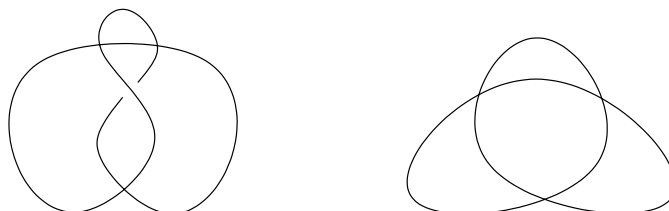
Er blijkt echter meer waar te zijn!! Een befaamde stelling van Maxim Kontsevich zegt namelijk:

Stelling 11.4.7. *Bovenstaande afbeelding $\bar{\phi}_n$ is een isomorfisme.*

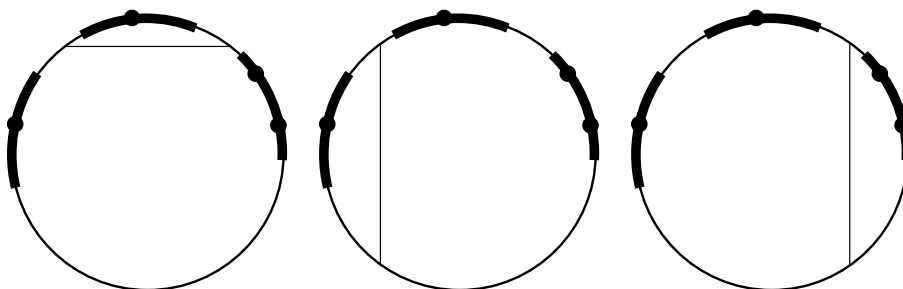
Met deze stelling kunnen we dus in principe alle Vassiliev invarianten systematisch bepalen. We zullen dit illustreren voor orde 3. Eerst moeten we de vectorruimte A_3 beschrijven. De voortbrengers worden gegeven door alle koorddiagrammen met drie koorden die geen geïsoleerde koorde bevatten. Na enig gezoek vindt men dat deze gegeven worden door



De corresponderende singuliere knopen zijn



We moeten nu nog de 4-term relatie in rekening brengen. Dit kunnen we het gemakkelijkste doen door aan te geven hoe we naast de twee gegeven koorden een extra koorde kunnen aanbrengen. Er blijken essentieel drie mogelijkheden te zijn.



(de andere mogelijkheden leiden tot relaties waarin alle diagrammen een geïsoleerde koorde bevatten).

Het blijkt nu dat de buitenste mogelijkheden leiden tot de relatie

$$2 \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \bigcirc \\ \text{---} \end{array} \quad (11.7)$$

terwijl de middelste mogelijkheid niet leidt tot een nieuwe relatie. We hebben dus bewezen.

1. $\dim A_3 = 1$. Een mogelijke generator van A_3 wordt gegeven door \bigoplus .
2. $\dim A_3^* = 1$ (de duale ruimte van een vectorruimte heeft dezelfde dimensie als de vectorruimte). Om een voortbrenger θ van A_3^* te geven moeten we de waarde van θ geven op de generatoren van A_3 en deze waarden moeten bovendien nog voldoen aan de relatie (11.7). We kunnen bijvoorbeeld nemen

$$\theta(\bigoplus) = 1 \quad \theta(\bigotimes) = 2$$

De waarde van θ is nul op alle andere koorddiagrammen met drie kordes vanwege de 1-term relatie.

3. $\dim V_3/V_2 = 1$ (vanwege Stelling 11.4.7).
4. $\dim V_3 = 3$ (omdat we reeds weten $\dim V_2 = 2$).

Zij P een element van V_3 dat afgebeeld wordt op θ . P is slechts bepaald op een element van V_2 na. We kunnen nu P uniek maken door de waarde van P op twee (singuliere) georiënteerde knopen vast te leggen. De gebruikelijke manier om dit te doen is als volgt.

$$P(\bigcirc) = 0 \quad P(\bigotimes) = 0$$

12 Alternatieve aanpak

In de vorige secties hebben we laten zien dat Vassiliev invarianten een (gefilterde) algebra vormen. Nu geven we een alternatieve manier aan om

Vassiliev invarianten te bekijken. Deze laat op natuurlijke wijze een coalgebra structuur verschijnen!

Definieer

$$\mathcal{W} = \{\text{equivalentieklassen van georiënteerde knopen}\}$$

en $W = \mathbb{C}\mathcal{W}$. Definieer ook de afbeelding $I : \mathcal{W} \rightarrow W : K \mapsto K$. Dan is het duidelijk dat I een “universele knopeninvariant” is in de volgende zin: elke knopen invariant P met waarden in een vectorruimte U (dus met andere woorden: een willekeurige afbeelding $P : \mathcal{W} \rightarrow U$) kan op een unieke manier ontbonden worden als $\tilde{P} \circ I$ waarbij $\tilde{P} : W \rightarrow U$ een lineaire afbeelding is.

We breiden I uit naar singuliere knopen via de gebruikelijk skein relatie (11.1).

$$I(\times) = I(\nearrow \searrow) - I(\searrow \nearrow)$$

Zoals eerder aangegeven hebben we de volgende formule voor $I(K)$ indien $\text{sing}(K) = T$:

$$I(K) = \sum_{\epsilon: T \rightarrow \{\pm\}} (-)^{s(\epsilon)} K_T^\epsilon$$

waarbij $s(\epsilon) = |\{t \mid \epsilon(t) = -\}|$.

Voor $m \in \mathbb{N}$ definieer $W_{-m} \subset W$ de vectorruimte voortgebracht door $I(K)$, $|\text{sing}(K)| \geq m$. We hebben dus een stijgende filtratie op de vectorruimte W gegeven door:

$$\cdots \subset W_{-2} \subset W_{-1} \subset W_0 = W$$

Voor de consistentie stellen we $W_m = W$ voor $m \geq 0$.

Definieer nu

$$\bar{I}_m : \mathcal{W} \rightarrow W/W_{-m-1} : K \mapsto \overline{I(K)}$$

Per definitie is \bar{I}_m nul op singuliere knopen met $m+1$ singulariteiten. Dus \bar{I}_m is een Vassiliev invariant van orde m (die waarden aanneemt in de vectorruimte W/W_{-m-1}).

Er is meer: het is nu weer eenvoudig in te zien dat \bar{I}_m een “universele Vassiliev invariant van orde m ” is. Elke Vassiliev invariant P van orde m met waarden in een vectorruimte U kan op een unieke manier ontbonden worden als $\tilde{P} \circ I$ waarbij $\tilde{P} : W/W_{-m-1} \rightarrow U$ een lineaire afbeelding is.

Men zou nu wensen dat geldt

$$\bigcap_m W_{-m} = 0 \tag{12.1}$$

Indien dit waar is en $K, L \in \mathcal{W}$ zijn twee knopen dan bestaat er een m zodat $K - L \notin W_{-m}$. Met andere woorden: $\bar{I}_m(K - L) \neq 0$. Kies een lineaire afbeelding $\sigma : W/W_{-m-1} \rightarrow \mathbb{C}$ zodat $\sigma(\bar{I}_m(K - L)) \neq 0$. Dan is $P = \sigma \circ \bar{I}_m$ een Vassiliev invariant van orde m en we hebben $P(K) \neq P(L)$. Met andere woorden: indien (12.1) waar is dan zouden Vassiliev invarianten sterk genoeg zijn om niet equivalente knopen van elkaar te scheiden. Jammer genoeg heeft niemand enige idee hoe (12.1) aan te pakken.

Omdat \bar{I}_m een Vassiliev invariant is kunnen we er een gewichtensysteem aan toekennen.

$$\langle \bar{I}_m, - \rangle : \mathcal{K}_m \rightarrow W/W_{-m-1} : D \mapsto \overline{I(\text{inbedding van } D)}$$

We kunnen de die afbeelding lineair uitbreiden tot een afbeelding:

$$\langle \bar{I}_m, - \rangle : E_m \rightarrow W/W_{-m-1}$$

Gewichten voldoen aan de 1 en 4-term relatie zodat we in feite een afbeelding bekomen

$$\langle \bar{I}_m, - \rangle : A_m \rightarrow W/W_{-m-1} : \bar{D} \mapsto \overline{I(\text{inbedding van } D)} \quad (12.2)$$

Het beeld van deze afbeelding is duidelijk W_{-m}/W_{-m-1}

Het eindresultaat van deze beschouwingen is een surjectieve afbeelding:

$$\langle \bar{I}_m, - \rangle : A_m \rightarrow W_m/W_{m-1} \quad (12.3)$$

Lemma 12.1. *Dit is een isomorfisme.*

Bewijs. Omdat we al weten dat (12.3) surjectief is, is het duidelijk voldoende om aan te tonen dat $\dim A_m = \dim W_{-m}/W_{-m-1}$.

Vanwege de universaliteit van I_m weten we dat elke Vassiliev invariant van orde m met waarden in \mathbb{C} overeenkomt met een unieke lineaire afbeelding $W/W_{-m-1} \rightarrow \mathbb{C}$. Met andere woorden: er is een natuurlijk isomorfisme $V_m \cong (W/W_{-m-1})^*$.

Vanwege Stelling 11.4.7 hebben we ook $A_m \cong (V_m/V_{m-1})^*$. Hieruit halen we

$$\begin{aligned} \dim A_m &= \dim V_m - \dim V_{m-1} \\ &= \dim W/W_{-m-1} - \dim W/W_{-m} \\ &= \dim W_{-m}/W_{-m-1} \end{aligned}$$

hetgeen we moesten bewijzen. □

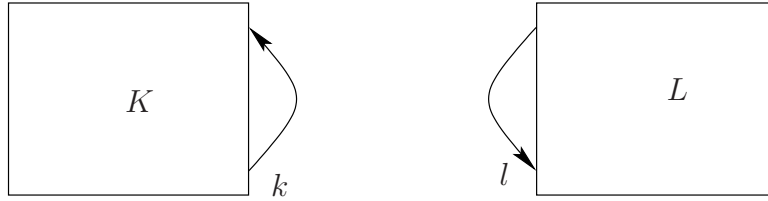
We definiëren zoals gebruikelijk

$$\text{gr } W = \oplus_m W_m / W_{m-1}$$

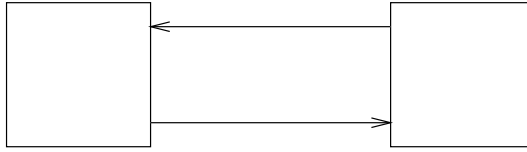
We gaan nu aantonen dat $\text{gr } W$ op natuurlijke manier een algebra structuur heeft.

Indien $K, L \in \mathcal{W}$ dan definiëren we $K \cdot L = K \# L$ waarbij $K \# L$ is zoals gedefinieerd in §2.3. We breiden “ \cdot ” uit tot een associatieve vermenigvuldiging $\mathbb{C}\mathcal{W} \times \mathbb{C}\mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}\mathcal{W}$.

We breiden de vermenigvuldiging “ $\#$ ” ook uit tot singuliere knopen. Indien K, L singuliere knopen zijn zoals in de volgende afbeelding



dan willen we $K \# L$ op de gebruikelijke manier definiëren



Deze definitie is echter niet correct, omdat het gemakkelijk in te zien is dat $K \# L$ afhangt van de keuze van de boogjes k, l . Er geldt echter het volgende:

Lemma 12.2. $I(K) \cdot I(L) = I(K \# L)$ (met andere woorden: in W is de bewerking $\#$ wel goed gedefinieerd).

Bewijs. Het bewijs is de volgende berekening:

$$\begin{aligned} I(K) \cdot I(L) &= \sum_{\underline{\epsilon}, \underline{\mu}} (-)^{s(\underline{\epsilon}) + s(\underline{\mu})} K_{\text{sing}(K)}^{\underline{\epsilon}} \# L_{\text{sing}(L)}^{\underline{\mu}} \\ &= \sum_{(\underline{\epsilon}, \underline{\mu})} (-)^{s(\underline{\epsilon}, \underline{\mu})} (K \# L)_{\text{sing}(K \# L)}^{(\underline{\epsilon}, \underline{\mu})} \\ &= I(K \# L) \end{aligned}$$

□

Uit dit lemma halen we $W_{-m} \cdot W_{-n} \subset W_{-(m+n)}$ en dus is W een gefilterde \mathbb{C} -algebra.

Definieer nu $E = \oplus_m E_m$, $A = \oplus_m A_m$. Met andere woorden E is een vektorruimte met als basis de koorddiagrammen en A is het quotient van E verkregen door het uitdelen van de 1- en 4-term relaties.

We hebben nu twee isomorfismen:

$$A \cong \oplus_m (V_m/V_{m-1})^* \quad (\text{Stelling 11.4.7})$$

$$A \cong \oplus_m W_{-m}/W_{-m-1} \quad (\text{lemma 12.1})$$

Dus A heeft blijkbaar zowel een algebra structuur (via het tweede isomorfisme) als een soort van duale algebra structuur (via het eerste isomorfisme). Dit suggereert dat A wel eens een Hopf algebra zou kunnen zijn. Dit is inderdaad het geval en dat gaan we nu aantonen.

In feite is A nog iets meer dan een Hopf algebra. Het is een zogenaamde *gegradeerde Hopf algebra*. We zullen dit concept nu invoeren.

Een *gegradeerde vektorruimte* is een vektorruimte V tezamen met een interne directe som decompositie $V = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$. De elementen van $\bigcup_n V_n$ worden *homogene elementen* genoemd. Indien $v \in V_n$ dan noemen we n de *graad* van n .

Een *gegradeerde algebra* is een algebra structuur op een gegradeerde vektorruimte $A = \oplus_n A_n$ zodat $1 \in A_0$ en $A_m A_n \subset A_{m+n}$. Een *gegradeerde coalgebra* is een coalgebra structuur op een gegradeerde vektorruimte $C = \oplus_n C_n$ zodat $\epsilon|C_n = 0$ voor $n \neq 0$ en $\Delta(C_n) \subset \oplus_i C_i \otimes C_{n-i} \subset C \otimes C$.

Een *gegradeerde bialgebra* is een bialgebra structuur op een gegradeerde vektorruimte $H = \oplus_n H_n$ zodat de bijbehorende algebra en coalgebra structuren gegradeerd zijn.

Een *gegradeerde Hopf algebra* is een Hopf algebra structuur op een gegradeerde vektorruimte $H = \oplus_n H_n$ zodat de bijbehorende bialgebra structuur gegradeerd is en zodat $S(H_n) \subset H_n$.

De dualiteit tussen algebras/coalgebras heeft een analogon voor gegradeerde algebras/coalgebras. Indien V een gegradeerde vektorruimte is dan definiëren we $V^+ = \oplus_n V_n^*$. Merk op dat $V^* = \prod_n V_n^*$. Dus $V^+ \subset V^*$ maar er is in het algemeen geen gelijkheid. Vanwege de inclusie $V^+ \subset V^*$ kunnen we dus wel een element van V^+ evalueren op een element van V . Een element $f \in V^*$ is in V^+ indien er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $f|V_n = 0$ voor $|n| \geq N$.

Indien C een gegradeerde coalgebra is met $C_{-N} = 0$ voor $N \gg 0$ dan is C^+ op natuurlijke manier een gegradeerde algebra. De vermenigvuldiging wordt op de gebruikelijke manier gedefinieerd. Zij $f, g \in C^+$, $c \in C$ dan

stellen we

$$(fg)(c) = \sum_c f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

Merk op dat we moeten aantonen dat $fg \in C^+$. Dit is een plezierige oefening.

De eenheid voor bovenstaande vermenigvuldiging is de coeenheid van C opgevat als element van C^+ .

Indien A een gegradeerde algebra is met de eigenschappen $\dim A_n < \infty$ voor alle n en bovendien $A_{-N} = 0$ voor $N \gg 0$ dan is A^+ op natuurlijke manier een coalgebra. Eerst definiëren we $\Delta_{m,n} : A_{m+n}^* \rightarrow A_m^* \otimes A_n^*$ via de samenstelling

$$A_{m+n}^* \xrightarrow{m^*} (A_m \otimes A_n)^* \cong A_m^* \otimes A_n^*$$

Dan definiëren we $\Delta : A^* \rightarrow A^* \otimes A^*$ als volgt. Indien $\phi \in A_p^*$ dan $\Delta(\phi) = \sum_{r+s=p} \Delta_{r,s}(\phi)$ (merk op dat we moeten aantonen dat dit een eindige som is). Indien $\phi = \sum_p \phi_p$ met $\phi_p \in A_p^*$ dan $\Delta(\phi) = \sum_p \Delta(\phi_p)$.

Zoals in het ongegradeerde geval is Δ gedefinieerd door de volgende impliciete formule:

$$\phi(ab) = \sum_{\phi} \phi_{(1)}(a)\phi_{(2)}(b)$$

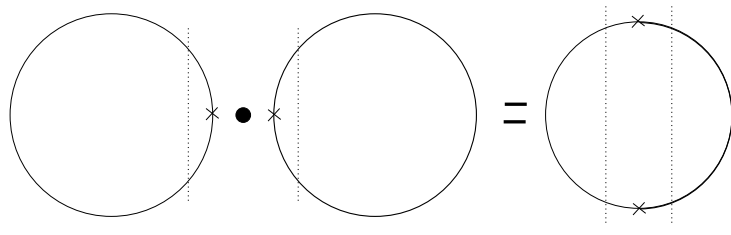
We stellen ook

$$\epsilon(\phi) = \phi(1)$$

Tenslotte is het gemakkelijk in te zien dat de duale van een bialgebra of Hopf algebra terug een structuur van dezelfde soort is.

We bekijken eerst de (gegradeerde) algebrastructuur op A van iets meer nabij.

Lemma 12.3. *De vermenigvuldiging op A (geïnduceerd door het isomorfisme $A \cong \text{gr } W$) wordt op koorddiagrammen gegeven door*


(12.4)

Bewijs. Zij D_1, D_2, D de koorddiagrammen die in (12.4) voorkomen en zij K_1, K_2 inbeddingen van D_1 en D_2 . Dan volgens (12.2) komen $\overline{D_1}, \overline{D_2}$ overeen met $\overline{I(K_1)}, \overline{I(K_2)}$ en $D_1 \cdot D_2$ moet dus overeenkomen met $\overline{I(K_1) \cdot I(K_2)} = \overline{I(K_1 \# K_2)}$ waarbij we lemma 12.2 gebruikt hebben. Het koorddiagram van $K_1 \# K_2$ wordt duidelijk gegeven door D . Dus $\overline{I(K_1 \# K_2)}$ komt overeen met D en we zijn klaar. \square

De eenheid voor de vermenigvuldiging (12.4) is duidelijk het triviale koorddiagram. Dit komt overeen met de triviale knoop die de eenheid vormt in W .

Zoals gebruikelijk noteren we de algebra structuur op A weer als (A, m, η) .

Opmerking 12.4. De definitie (12.4) definieert geen vermenigvuldiging op E . Immers de definitie hangt af van de keuze van de breekpunten (aangegeven met een kruisje).

Het feit dat (12.4) een legale definitie is op A volgt uit het feit dat ze een vertaling is van de definitie van de vermenigvuldiging op $\text{gr } W$.

Het is echter ook mogelijk om *rechtstreeks* via de 4-term relatie aan te tonen dat (12.4) een goede definitie is voor A .

We gaan nu een (gegradeerde) coalgebra structuur op A definiëren. We halen deze uit de algebra structuur op $\text{gr } V$.

In Stelling 11.4.7 hebben we een isomorfisme

$$\bar{\phi}_n : V_n/V_{n-1} \rightarrow A_n^* : \bar{P} \mapsto (\bar{D} \mapsto \langle P, D \rangle)$$

gedefinieerd. Als we dit dualizeren dan krijgen we een isomorfisme

$$\gamma : A_n \xrightarrow{\mu} A_n^{**} \xrightarrow{\bar{\phi}_n^*} (V_n/V_{n-1})^*$$

waarbij $\mu : A_n \rightarrow A_n^{**}$ de natuurlijke afbeelding is gegeven door $\mu(\bar{D})(\psi) = \psi(\bar{D})$ (zie §8.5). Er geldt

$$\gamma(\bar{D})(\bar{P}) = \langle P, D \rangle$$

Dit volgt uit de volgende berekening $\gamma(\bar{D})(\bar{P}) = \bar{\phi}_n^*(\mu(\bar{D}))(\bar{P}) = \mu(\bar{D})(\bar{\phi}_n(\bar{P})) = \bar{\phi}_n(\bar{P})(\bar{D}) = \langle P, D \rangle$.

Dus als gegradeerde vektorruimten hebben we $A = (\text{gr } V)^+$. Aangezien $\text{gr } V$ een gegradeerde algebra is en $\dim(\text{gr } V)_m < \infty$ volgt hieruit dat A een gegradeerde coalgebra is. We gaan deze nu bepalen.

Laat ons $\text{koorden}(D)$ schrijven voor de verzameling koorden van een koorddiagram D . Indien $S \subset \text{koorden}(D)$ dan noteren we met D_S het koorddiagram dat verkregen wordt uit D door alle koorden die niet in S voorkomen te schrappen.

Stelling 12.5. *Er geldt voor D een koorddiagram en \bar{D} het beeld in A :*

$$\Delta(\bar{D}) = \sum_{S \subset T} \overline{D_S} \otimes \overline{D_{T-S}} \quad (12.5)$$

en

$$\epsilon(\bar{D}) = \begin{cases} 1 & \text{indien } D = \bigcirc \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad (12.6)$$

Bewijs. We bewijzen eerst (12.5). Indien $D \in A_{m+n}$ en $P \in V_m/V_{m-1}$, $Q \in V_n/V_{n-1}$ dan moeten we volgens de impliciete formule voor het coproduct dus aantonen

$$\gamma(\bar{D})(\bar{P}\bar{Q}) = \sum_{S \subset T} \gamma(\bar{D}_S)(P) \gamma(\bar{D}_{T-S})(Q)$$

oftewel

$$\langle PQ, D \rangle = \sum_{S \subset T} \langle P, D_S \rangle \langle Q, D_{T-S} \rangle$$

Zij K een inbedding van D en zij $T = \text{sing}(K) \cong \text{koorden}(D)$. Uit (11.2) halen we

$$(PQ)(K) = \sum_{S \subset T} P(K_{T-S}^{+\dots+}) Q(K_S^{-\dots-})$$

Omdat P, Q respectievelijk Vassiliev invarianten van orde m en n zijn blijven er enkel de termen over waarbij $|S| = n$. Bovendien zijn $K_{T-S}^{+\dots+}$ en $K_S^{-\dots-}$ inbeddingen van D_S en D_{T-S} . We hebben dus

$$\langle PQ, D \rangle = \sum_{S \subset T} \langle P, D_S \rangle \langle Q, D_{T-S} \rangle$$

Dit beëindigt het bewijs.

Nu bewijzen we (12.6). We moeten aantonen dat $\gamma(\bar{D})(\bar{1}) = \langle 1, D \rangle$ gelijk is aan de rechterzijde van (12.6) maar dit is duidelijk. (12.6). \square

Opmerking 12.6. Het is weer niet apriori duidelijk dat (12.5) goed gedefinieerd is. Indien we dit rechtstreeks zouden willen nagaan dan moeten we bewijzen dat Δ compatieel is met de 1-term en 4-term relatie. Merk echter op dat we dit *niet* moeten doen. Immers (12.5) volgt gewoon uit de algebrastructuur op $\text{gr } V$.

Met behulp van de formules (12.4), (12.5) en (12.6) toont men nu gemakkelijk aan dat $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon)$ een gegradeerde bialgebra is.

A heeft ook een antipode die gegeven wordt door de volgende formule:

$$S(\bar{D}) = \sum_{\substack{S_1 \amalg \dots \amalg S_n = K \\ S_i \neq \emptyset}} (-1)^n \bar{D}_{S_1} \cdots \bar{D}_{S_n}$$

waarbij K de verzameling koorden is in D .

Het is een plezierige (niet volledig triviale) oefening om aan te tonen dat met deze definitie $(A, m, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ een gegradeerde Hopf algebra is.

Lemma 12.7. *A is zowel commutatief als cocommutatief.*

Bewijs. De cocommutativiteit is duidelijk uit de formule (12.5). De commutativiteit volgt uit het isomorfisme $A \cong \text{gr } W$ en het feit dat W commutatief is. Dit laatste volgt uit de commutativiteit van het produkt “ $\#$ ” op knopen. Dit hebben we in feite nog nooit vermeld. Als we echter naar de definitie van $K_1 \# K_2$ kijken (zie §2.3) dan zien we dat die niet afhangt van de volgorde van K_1 en K_2 . Dus “ $\#$ ” is commutatief. \square

We zeggen dat een gegraadeerde vektorruimte V *samenhangend* is indien $V_n = 0$ voor $n < 0$ en $V_0 = \mathbb{C}$. We breiden deze definitie uit naar structuren die als onderliggende vektorruimte V hebben.

Lemma 12.8. *Onderstel dat C een samenhangende gegraadeerde coalgebra is en $c \in C_m$, $m > 0$. Dan geldt*

$$\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c + \dots$$

waarbij de \dots termen van de vorm $a \otimes b$ zijn waarbij de graad van a en b strikt tussen 0 en m ligt.

Bewijs. Om graadredenen hebben we

$$\Delta(c) = c' \otimes \lambda' + \lambda'' \otimes c'' + \sum_i a_i \otimes b_i$$

waarbij $\lambda', \lambda'' \in \mathbb{C}$ en de a_i, b_i zijn homogene elementen met graad strikt tussen 0 en m . In het bijzonder $\epsilon(a_i) = \epsilon(b_i) = 0$.

Skalaren kunnen we overbrengen in een tensorprodukt, dus we mogen onderstellen $\lambda' = \lambda'' = 1$. Toepassen van $m \circ (\text{Id} \otimes \epsilon)$ en $m \circ (\epsilon \otimes \text{Id})$ levert dan $c = c' = c''$. \square

We hebben de volgende stelling.

Stelling 12.9. *Zij H een commutatieve samenhangende gegraadeerde bialgebra met $\dim H_n < \infty$ voor alle n . Dan bestaan er homogene elementen h_1, h_2, \dots in H (mogelijks een oneindig aantal) zodat $H = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots]$. Dwz elk element van H kan op unieke manier geschreven worden als polynoom in de $(h_i)_i$.*

We bewijzen eerst een lemma.

Lemma 12.10. *Zij H een commutatieve samenhangende gegraadeerde bialgebra en zij H' een gegraadeerde deelbialgebra van H en zij tenslotte $x \in H - H'$ een homogeen element zodat H als algebra is voortgebracht door H' en x (dwz H is de kleinste deelalgebra van H die x en H' bevat). Dan geldt $H = H'[x]$. Dwz elk element van H kan op een unieke manier geschreven worden als polynoom in x met coëfficiënten in H' .*

Bewijs. Zij $J \subset H$ het ideaal in H voortgebracht door de elementen van H' van strikt positieve graad en door x^2 .

Zij nu $h' \in H'$. We hebben vanwege lemma 12.8

$$\Delta(h') = h' \otimes 1 + \text{rest}$$

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \text{rest}$$

waarbij $\text{rest} \in H \otimes J$.

We gaan nu aantonen dat er geen niet triviale uitdrukking van de vorm $\sum_{i \in \mathbb{N}} h'_i x^i$ met $h'_i \in H'$ gelijk aan nul kan zijn. Indien dit zo is dan geldt $H = H'[x]$.

Onderstel dus

$$\sum_{i=0}^r h'_i x^i = 0$$

met $h'_i \neq 0$. Als we Δ toepassen dan vinden we

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^r (h'_i \otimes 1)(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^i \\ &= \sum_{i=0}^r h'_i x^i \otimes 1 + \sum_{i=0}^r i h'_i x^{i-1} \otimes x + \text{rest} \\ &= \sum_{i=1}^r i h'_i x^{i-1} \otimes x + \text{rest} \end{aligned} \tag{12.7}$$

waarbij nog steeds: $\text{rest} \in H \otimes J$.

Uit graad overwegingen volgt eenvoudig $x \notin J$. Kies een lineaire afbeelding $p : H \rightarrow \mathbb{C}$ zodat $p|_J = 0$ en $p(x) = 1$.

Als we $m \circ (\text{Id}_H \otimes p)$ toepassen op (12.7) dan vinden we

$$0 = \sum_{i=1}^r i h'_i x^{i-1}$$

Dit is een relatie van lagere graad in x . Als we ons procedé herhalen vinden we uiteindelijk een relatie van de vorm $r! h'_r = 0$. Omdat we $h'_r \neq 0$ ondersteld hebben is dit onmogelijk. \square

Bewijs van Stelling 12.9. Kies elementen h_0, h_1, h_2, \dots op de volgende manier.

- $h_0 = 1$.

- Onderstel dat we h_0, h_1, \dots, h_{i-1} gekozen hebben. Dan is h_i een homogeen element van laagst mogelijke graad zodat h_i niet in de algebra voortgebracht is door h_0, h_1, \dots, h_{i-1} .

Zij H_i de algebra voortgebracht door h_0, h_1, \dots, h_{i-1} en zij H_∞ de algebra voortgebracht door alle h_i . Uit de onderstelling dat $\dim H_m < \infty$ voor alle m volgt dat de graad van h_i naar oneindig moet gaan. H_∞ is een gegradeerde deelalgebra van H . Indien $H \neq H_\infty$ dan is er een m zodat $H_m \neq H_{\infty, m}$. Kies $z \in H_m - H_{\infty, m}$. Er bestaat dan een h_i met graad hoger dan z . Maar z is duidelijk niet in H_{i-1} . Dus dit is in strijd met de regel voor de keuze van h_i .

Zij H_i de algebra voortgebracht door h_0, h_1, \dots, h_{i-1} . We beweren dat H_i een deelbialgebra van H is. We bewijzen dit per inductie op i . Als $i = 0$ dan $H_0 = \mathbb{C}$. Dit is een deelbialgebra van H . Onderstel dat H_{i-1} een bialgebra is. We moeten enkel nog aantonen dat $\Delta(h_i) \subset H_i$. We hebben

$$\Delta(h_i) = h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i + \text{rest} \quad (12.8)$$

waarbij de termen aangegeven met “...” van de vorm $a \otimes b$ zijn waarbij de graad van a en b strikt tussen 0 en de graad van h_i ligt. Dus $a, b \in H_{i-1}$. Dus inderdaad $\Delta(h_i) \in H \otimes H$.

Vanwege lemma vorig geldt nu $H_1 = H_0[h_1] = \mathbb{C}[h_1]$, $H_2 = H_1[h_2] = \mathbb{C}[h_1, h_2]$ en dus per inductie $H_i = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_i]$.

Elk polynoom in de $(h_i)_i$ bevat maar een eindig aantal $(h_i)_i$. Hieruit volgt $H_\infty = \mathbb{C}[h_1, \dots, h_i, \dots]$. \square

Deze stelling is van toepassing op A en ook op $\text{gr } V \cong A^+$. We vinden dus dat $\text{gr } V$ een polynoomalgebra is. Het is een eenvoudige oefening om hieruit af te leiden dat V zelf een polynoomalgebra is.