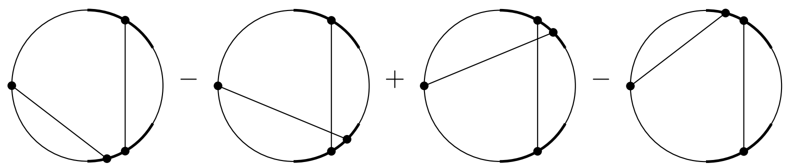
GEWICHTENSYSTEMEN VIA REPRESENTATIES VAN LIE ALGEBRAS

1. "Framed" gewichtensystemen

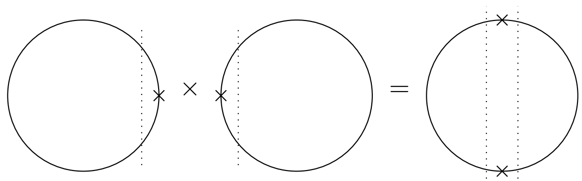
Hieronder zijn alle knopen georiënteerd. We hebben $\mathcal{K}_n$ gedefinieerd als de verzameling koorddiagrammen met n koorden en $E_n = \mathbb{C}\mathcal{K}_n$. We definiëren nu ook

$$A_n^{\text{fr}} = E_n/(\text{deelruimte voortgebracht door de 4-term relatie})$$

waarbij de 4-term relatie gegeven wordt door

(1.1) 

en $A^{\text{fr}} = \bigoplus_n A_n^{\text{fr}}$. We hebben aangetoond dat A (E modulo the 4-term *en* de 1-term relaties) een algebrastructuur heeft. We beweren dat dit ook geldt voor A^{fr}. Met name de vermenigvuldiging in A^{fr} wordt op het niveau van koorddiagrammen nog steeds gegeven door

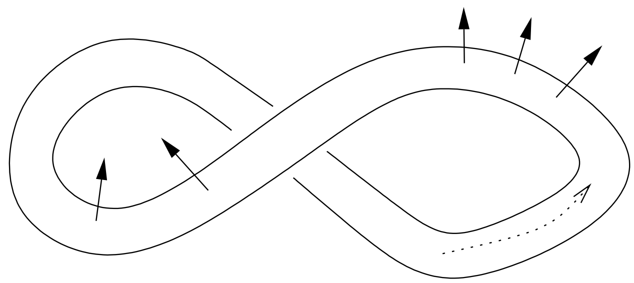
(1.2) 

We zouden natuurlijk moeten aantonen dat dit goed gedefinieerd is. Hiervoor kunnen we twee methoden gebruiken.

Eerste aanpak We kunnen de volledige theorie opbouwen voor knopen in linten. We hebben gezien dat de eerste Reidemeister move de equivalentieklasse van een knoop in een lint niet behoudt (hij veroorzaakt een "kronkel" in het lint). We hebben ook gezien dat de eerste Reidemeister move sterk verwant is aan de 1-term relatie. Het is dus niet onzinnig om te veronderstellen dat in knopentheorie voor linten de 1-term relatie niet voorkomt, en dat is ook zo. In plaats van linten te beschouwen kunnen we ook werken met gewone knopen die uitgerust zijn met een normaal vectorveld dat overal verschillend van nul is. Zo'n vectorveld noemt men een "framing". Dit verklaart een deel van de titel van deze sectie.

We definiëren $\mathcal{W}^{\text{fr}}$ als de equivalentieklassen van knopen uitgerust met een framing en we stellen $W^{\text{fr}} = \mathbb{C}\mathcal{W}^{\text{fr}}$. Zoals voor W bestaat er een natuurlijke filtratie op W^{fr} zodat $A^{\text{fr}} \cong \operatorname{gr} W^{\text{fr}}$. Men gaat dan na dat de geïnduceerde vermenigvuldiging op A^{fr} expliciet gegeven wordt door de formule (1.2).

Tweede aanpak Het is mogelijk om direct na te gaan dat het product (1.2) goed gedefinieerd is modulo de 4-term relatie.



FIGUUR 1.1
Een (georienteerd) lint en de bijbehorende framing.

Zoals voor A is de algebrastructuur op A^{fr} een onderdeel van een bialgebrastructuur. De formules voor de covermenigvuldiging en coeenheid zijn precies dezelfde als voor A. Met name voor een koorddiagram D met $T = \text{koorden}(D)$ hebben we

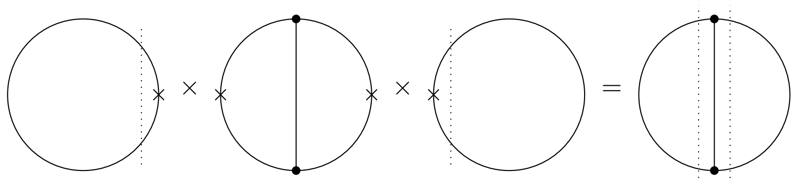
$$\Delta(\overline{D}) = \sum_{S \subset T} \overline{D}_S \otimes \overline{D}_{T-S}$$

$$\epsilon(\overline{D}) = \begin{cases} 1 & \text{indien } T = \emptyset \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Men moet weer nagaan dat Δ en ϵ compatibel zijn met de 4-term relatie. Dit blijkt eenvoudiger te zijn dan voor de vermenigvuldiging.

Lemma 1.1. *Er geldt $A = A^{\mathrm{fr}}/(\Theta)$ waarbij Θ het beeld is van het unieke koorddiagram met één enkele koorde.*

Bewijs. Vanwege de identiteit



zien we dat het ideaal (Θ) als vectorruime voortgebracht is door de koorddiagrammen met een geisoleerde koorde. We zien dat dit ook geldt voor[1] $(\Theta) \cap A_n^{\mathrm{fr}}$. Dus $A^{\mathrm{fr}}/(\Theta) = \bigoplus_n A_n^{\mathrm{fr}}/((\Theta) \cap A_n^{\mathrm{fr}}) = \bigoplus_n E_n/(\text{4-term}, \text{1-term}) = A$. □

Definitie 1.2. Een framed gewichtensysteem van orde n met waarden in een abelse groep G is een functie $\mathcal{K}_n \to G$ die voldoet aan de 4-term relatie.

Indien G een $\mathbb{C}$-vectorruimte is dan komt een framed gewichtensysteem van orde n overeen met een element van $\mathrm{Hom}(A_n^{\mathrm{fr}}, G)$. Indien G niet gespecifieerd is dan nemen we zoals gebruikelijk aan $G = \mathbb{C}$. In dat geval komt een framed gewichtensysteem van orde n overeen met een element van $\mathrm{Hom}(A_n^{\mathrm{fr}}, \mathbb{C})$.

[1]We gebruiken stilzwijgend in deze paragraaf dat indien R een gegradeerde ring is en I een ideaal is, voortgebracht door homogene elementen (dwz elementen van $\bigcup_n R_n$) dan geldt $I = \bigoplus_n I \cap R_n \subset R = \bigoplus_n R_n$ en R/I is een gegradeerde ring zodanig dat $R/I = \bigoplus_n R_n/(I \cap R_n)$.

Nu bespreken we het verband tussen framed gewichtensystemen en gewone gewichtensystemen. Het is duidelijk dat een gewoon gewichtensysteem ook een framed gewichtensysteem is. We bespreken dus de omgekeerde richting.

Lemma 1.3. *Er bestaat een gegradeerd algebrahomomorfisme*

$$(-)^{\mathrm{defr}} : A^{\mathrm{fr}} \to A^{\mathrm{fr}}$$

gedefinieerd op de beelden van koorddiagrammen door

$$\overline{D}^{\mathrm{defr}} = \sum_{J \subset \mathrm{koorden}(D)} (-\Theta)^{n-|J|} \overline{D}_J \tag{1.3}$$

met $n = |\,\mathrm{koorden}(D)|$. *Bovendien geldt*

$$\Theta^{\mathrm{defr}} = 0 \tag{1.4}$$

Bewijs. Het volgt direct uit (1.1) dat de afbeelding $E_n^{fr} \to E_{|J|}^{\mathrm{fr}} : D \mapsto D_J$ een 4-term relatie ofwel naar een andere 4-term relatie stuurt (als J de twee deelnemende koorden bevat), ofwel naar nul stuurt. Dus (1.3) is een goed gedefinieerde afbeelding $A^{\mathrm{fr}} \to A^{\mathrm{fr}}$ die compatibel is met de gradatie. We tonen nu aan dat ze compatibel is met de vermenigvuldiging.

Zij D, E zoals in de linkerzijde van (1.2) en zij $D\#E$ het koorddiagram aan de rechterzijde. Dan berekenen we (met $n_? = |\,\mathrm{koorden}(?)|$)

$$\begin{aligned}
(\overline{DE})^{\mathrm{defr}} &= \overline{D\#E}^{\mathrm{defr}} \\
&= \sum_{J \subset \mathrm{koorden}(D\#E)} (-\Theta)^{n-|J|} \overline{D\#E}_J \\
&= \sum_{\substack{J_1 \subset \mathrm{koorden}(D) \\ J_2 \subset \mathrm{koorden}(E)}} (-\Theta)^{(n_D - |J_1|)+(n_E-|J_2|)} \overline{D}_{J_1} \overline{E}_{J_2} \\
&= \overline{D}^{\mathrm{defr}} \overline{E}^{\mathrm{defr}}
\end{aligned}$$

De identiteit (1.4) volgt direct uit de formule (1.3). □

Uit dit lemma volgt dat we $(-)^{\mathrm{defr}}$ mogen beschouwen als een algebra homomorfisme

$$A^{\mathrm{fr}}/(\Theta) \to A^{\mathrm{fr}}$$

Indien P een framed gewichtensysteem van orde n is dan definiëren we P^{defr} als de samenstelling

$$A_n \overset{\text{Lemma 1.1}}{\cong} A_n^{\mathrm{fr}}/((\Theta) \cap A_n^{\mathrm{fr}}) \xrightarrow{(-)^{\mathrm{defr}}} A_n^{\mathrm{fr}} \xrightarrow{P} \mathbb{C} \tag{1.5}$$

We noemen P^{defr} de *deframing* van P.

2. Metrische Lie algebras

We hebben een Lie algebra gedefinieerd als een deelvectorruimte $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ die gesloten is onder $[-,-]$ waarbij $[A,B] = AB - BA$. De restrictie van $[-,-]$ tot $\mathfrak{g}$ noemen we de Lie haak. Met behulp van de inbedding $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ kunnen we echter nog meer structuur op $\mathfrak{g}$ bekomen. Allereerst hebben we een bilineaire form

$$(-,-) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C} : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$$

Omdat $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ hebben we dus ook $(A, B) = (B, A)$. M.a.w. $(-,-)$ is *symmetrisch.*

We zullen ook geïnteresseerd zijn in de volgende ternaire vorm

$$\langle -,-,-\rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C} : (A, B, C) \mapsto ([A, B], C)$$

Lemma 2.1. $\langle -,-,-\rangle$ *is volledig anti-symmetrisch. Met ander woorden indien* $\sigma \in S_3$ *een permutatie van* $\{1, 2, 3\}$ *is met teken* $\epsilon(\sigma) \in \{\pm\}$ *dan geldt voor* $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{g}$

$$\langle A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}\rangle = \epsilon(\sigma)\langle A_1, A_2, A_3\rangle \tag{2.1}$$

Bewijs. Indien σ ,$\tau \in S_3$ dan geldt $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)$. Onderstel dat (2.1) geldt voor de permutaties σ, τ en stel $B_i = A_{\sigma(i)}$. Dus $B_{\tau(i)} = A_{\sigma\tau(i)}$. We berekenen

$$\begin{aligned}
\langle A_{\sigma\tau(1)}, A_{\sigma\tau(2)}, A_{\sigma\tau(3)}\rangle &= \langle B_{\tau(1)}, B_{\tau(2)}, B_{\tau(3)}\rangle \\
&= \epsilon(\tau)\langle B_1, B_2, B_3\rangle \\
&= \epsilon(\tau)\langle A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}\rangle \\
&= \epsilon(\tau)\epsilon(\sigma)\langle A_1, A_2, A_3\rangle \\
&= \epsilon(\sigma\tau)\langle A_1, A_2, A_3\rangle
\end{aligned}$$

Het is dus voldoende (2.1) te bewijzen voor een stel voortbrengers van S_3. Als voortbrengers kunnen we nemen $\sigma \in \{(12), (23)\}$. Het geval $\sigma = (12)$ is echter triviaal zodat er overblijft $\sigma = (23)$. Dan berekenen we

$$\begin{aligned}
\langle A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, A_{\sigma(3)}\rangle &= \langle A_1, A_3, A_2\rangle \\
&= \mathrm{Tr}([A_1, A_3], A_2) \\
&= \mathrm{Tr}(A_1A_3A_2) - \mathrm{Tr}(A_3A_1A_2)
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\langle A_1, A_2, A_3\rangle &= \mathrm{Tr}(A_1A_2A_3) - \mathrm{Tr}(A_2A_1A_3) \\
&= -(\mathrm{Tr}(A_1A_3A_2) - \mathrm{Tr}(A_3A_1A_2))
\end{aligned}$$

wat het bewijs beëindigt. □

Definitie 2.2. De Lie algebra $\mathfrak{g}$ is metrisch indien $(-,-)$ niet gedegenereerd is.

Men kan aantonen dat de Lie algebras die we voorheen als voorbeeld hebben ingevoerd

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) &= M_n(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}(A)\} \\
\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A + A^t = 0\}
\end{aligned}$$

allemaal metrisch zijn. Tot anders vermeld veronderstellen we hieronder dat $\mathfrak{g}$ een metrische Lie algebra is. Er bestaan dan in het bijzonder duale basissen $(e_i)_i$, $(f_j)_j$ in $\mathfrak{g}$ (dus $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$).

Lemma 2.3. *Het element*

$$c = \sum_i e_i \otimes f_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \tag{2.2}$$

is onafhankelijk van de gekozen duale basissen.

Bewijs. Zij $(e_{i'})_{i'}$ een andere basis. Dan zijn er $(\mu_{i'i})_{i'i} \in \mathbb{C}$ zodat

$$e_{i'} = \sum_i \mu_{i'i} e_i$$

We kunnen we $(\mu_{i'i})_{i'i}$ beschouwen als een omkeerbare matrix. Zij $(\nu_{jj'})_{jj'}$ de inverse matrix. Definieer

$$f_{j'} = \sum_j \nu_{jj'} f_j$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}(e_{i'}, f_{j'}) &= \sum_{i,j} \mu_{i'i}\nu_{jj'}(e_i, f_j) \\ &= \sum_{i,j} \mu_{i'i}\nu_{jj'}\delta_{ij} \\ &= \sum_i \mu_{i'i}\nu_{ij'} \\ &= \delta_{i'j'}\end{aligned}$$

M.a.w. $(f_{j'})_{j'}$ is de duale basis voor $(e_{i'})_{i'}$. We berekenen nu

$$\begin{aligned}\sum_{i'} e_{i'} \otimes f_{i'} &= \sum_{i,j,i'} \mu_{i'i} e_i \otimes \nu_{ji'} f_j \\ &= \sum_{i,j,i'} \nu_{ji'}\mu_{i'i} e_i \otimes f_j \\ &= \sum_{i,j} \delta_{ji} e_i \otimes f_j \\ &= \sum_i e_i \otimes f_i\end{aligned}$$

□

Lemma 2.3 impliceert in het bijzonder dat ook geldt

$$c = \sum_i f_i \otimes e_i \tag{2.3}$$

Als we de bilineaire afbeelding $[-,-] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ toepassen op (2.2) en (2.3) vinden we in het bijzonder

$$\sum_i [e_i, f_i] = \sum_i [f_i, e_i] = -\sum_i [e_i, f_i]$$

en dus

$$\sum_i [e_i, f_i] = 0 \tag{2.4}$$

Lemma 2.4. *Voor alle $A \in \mathfrak{g}$ geldt*

$$\sum_i [A, e_i] \otimes f_i + \sum_i e_i \otimes [A, f_i] = 0 \tag{2.5}$$

Bewijs. We definiëren een bilineaire vorm

$$(-,-) : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathbb{C} : (A \otimes B, C \otimes D) \mapsto (A, C)(B, D) \tag{2.6}$$

$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ heeft een basis $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ en $(f_k \otimes e_l)_{k,l}$ is de corresponderende duale basis. Dus (2.6) is niet gedegenereerd. Het is dus voldoende aan te tonen dat geldt $(\mathrm{LZ}(2.5), f_k \otimes e_l) = 0$ voor alle k, l. We berekenen

$$\begin{aligned}(\sum_i [A, e_i] \otimes f_i + \sum_i e_i \otimes [A, f_i], f_k \otimes e_l) &= \sum_i \langle A, e_i, f_k \rangle \delta_{il} + \sum_i \langle A, f_i, e_l \rangle \delta_{ik} \\ &= \sum_i \langle A, e_l, f_k \rangle + \sum_i \langle A, f_k, e_l \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit (2.1). □

Als V een eindigdimensionale vectorruimte is en

$$(-, -) : V \times V \to \mathbb{C}$$

is een symmetrische niet gedegenereerde bilineaire vorm dan bestaan er ook altijd zogenaamde *orthonormale basissen* in V. Dit wil zeggen een basissen $(e_i)_i$ die voldoen aan $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Lemma 2.5. *Zij $(e_i)_i$ een orthonormale basis in $\mathfrak{g}$ en onderstel dat $(\lambda_{ijk})_{ijk} \in \mathbb{C}$ gedefinieerd worden door*

$$[e_i, e_j] = \sum_k \lambda_{ijk} e_k \tag{2.7}$$

Dan is λ_{ijk} volledig anti-symmetrisch in de indices (i, j, k). M.a.w. er geldt voor alle $\sigma \in S_3$:

$$\lambda_{i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, i_{\sigma(3)}} = \epsilon(\sigma) \lambda_{i_1, i_2, i_3}$$

Bewijs. Als we $(-, e_l)$ toepassen op (2.7) dan vinden we

$$\lambda_{ijl} = \langle e_i, e_j, e_l \rangle$$

Het gestelde volgt nu uit (2.1). □

Opmerking 2.6. De λ_{ijk} in het vorig lemma noemt me de *structuurconstanten* van de basis $(e_i)_i$. Om deze te definiëren is het uiteraard niet nodig dat $(e_i)_i$ orthonormaal is.

Tenslotte brengen we de omhullende van een Lie algebra in herinnering. Zij $\mathfrak{g}$ een Lie algebra (niet noodzakelijk metrisch) en zij $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ een basis met structuurconstanten λ_{ijk} zoals in (2.7). Dan definieren we

$$U = \mathbb{C}\langle E_1, \ldots, E_n \rangle / ((E_i E_j - E_j E_i - \sum_k \lambda_{ijk} E_k)_{ij})$$

We hebben dan een afbeelding van vectorruimten $\zeta : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ die op basiselementen gegeven wordt door[2] $\zeta(e_i) = E_i$. Merk op dat $U\mathfrak{g}$ als algebra wordt voortgebracht door het beeld van ζ. Voor $A, B \in \mathfrak{g}$ geldt

$$\zeta([A, B]) = \zeta(A)\zeta(B) - \zeta(B)\zeta(A) \tag{2.8}$$

(het is voldoende van dit na te gaan in het geval dat A, B basiselementen zijn en in dat geval is het per definitie). Men kan nagaan dat $U\mathfrak{g}$ tezamen met de afbeelding $\zeta : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ op isomorfie niet afhangt van de gekozen basis.

[2]Het zou meer accuraat zijn om E_i met $\bar{E}_i$ te noteren maar we doen dit niet om de notatie niet te zwaar te maken.

Onderstel nu terug dat $\mathfrak{g}$ metrisch is en zij $(e_i)_i$, $(f_j)_j$ duale basissen van $\mathfrak{g}$ en zij $(E_i)_i$, $(F_j)_j$ de beelden in $U\mathfrak{g}$. Dan definieren we het *Casimir element* in $U\mathfrak{g}$ als

$$C = \sum_i E_i F_i \tag{2.9}$$

Omdat C het beeld is van $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ onder de afbeelding $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} : A \otimes B \mapsto \zeta(A)\zeta(B)$ zien we dat C niet afhangt van de gekozen basissen.

Lemma 2.7. *C is een element van het centrum van $U\mathfrak{g}$.*

Bewijs. We passen de afbeelding

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} : A \otimes B \mapsto \zeta(A)\zeta(B)$$

toe op (2.5). Dit geeft gebruikmakende van (2.8)

$$\sum_i (\zeta(A)E_i - E_i\zeta(A))F_i + \sum_i E_i(\zeta(A)F_i - F_i\zeta(A)) = \zeta(A)C - C\zeta(A)$$

Het volstaat nu te gebruiken dat $U\mathfrak{g}$ voortgebracht wordt door het beeld van $\mathfrak{g}$. □

Opmerking 2.8. Men kan aantonen dat $C \neq 0$.

Voorbeeld 2.9. Onderstel $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Dan heeft $\mathfrak{g}$ een basis gegeven door

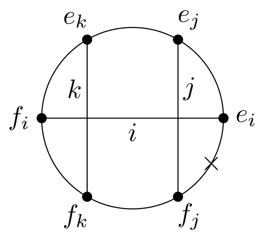
$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Een duale basis wordt gegeven door

$$(f, \frac{1}{2}h, e)$$

Er volgt dat het Casimir element van $U(\mathfrak{sl}_2)$ gelijk is aan

$$C = EF + \frac{1}{2}H^2 + FE$$



$\rightarrow$ $\sum_{ijk} e_i e_j e_k f_i f_k f_j \in U\mathfrak{g}$

FIGUUR 3.1. Een voorbeeld van een gewicht.

3. Framed gewichtensystemen uit Lie algebras

3.1. **Gewichtensystemen met waarden in $U\mathfrak{g}$.** Hieronder onderstellen we dat $\mathfrak{g}$ een metrische Lie algebra. We zullen $\mathfrak{g}$ identificeren met zijn beeld[3] in $U\mathfrak{g}$. Indien $A, B \in U\mathfrak{g}$ dan schrijven we we $[A, B] := AB - BA$. Men toont eenvoudig aan dat voor $A, B, C \in U\mathfrak{g}$ de *Leibniz identiteit* geldt.

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \tag{3.1}$$

Door deze identiteit herhaalde malen toe te passen vinden we ook

$$[A, B_1 \cdots B_n] = \sum_{i=1}^{n} B_1 \cdots B_{i-1}[A, B_i]B_{i+1} \cdots B_n \tag{3.2}$$

We zullen dit ook de Leibniz identiteit noemen.

Opmerking 3.1. Onderstel in het bijzonder dat $A, B, C \in \mathfrak{g}$. De identiteit (3.1) geldt maar ze kan niet gezien worden als een identiteit binnen $\mathfrak{g}$ omdat we twee elementen van een Lie algebra niet kunnen vermenigvuldigen. Binnen $\mathfrak{g}$ geldt echter wel de zogenaamde *Jacobi* identiteit.

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$$

Dit is een fundamentele identiteit[4] maar ze speelt geen grote rol in ons verhaal.

Hieronder is $(e_i)_i$, $(f_j)_j$ een paar duale basissen in $\mathfrak{g}$. We beschrijven nu de procedure om een gewicht $p_{\mathfrak{g}}(D)$ in de $\mathbb{C}$-vectorruimte $U\mathfrak{g}$ toe te kennen aan een koorddiagram D. Een concrete illustratie wordt gegeven in Figuur 3.1.

- Kies een verschillend “label” (bvb $i, j, k, \ldots$) voor elke koorde.
- Kies een basispunt $\times$ op de grote cirkel. Dit basispunt mag niet op een koorde liggen.
- Doorloop de cirkel 1 maal in tegenwijzerzin, startend met het basispunt $\times$ en schrijf een woord volgens de regel: indien we een koorde met label u tegenkomen dan

$$\begin{cases} \text{schrijf } e_u \text{ de eerste keer;} \\ \text{schrijf } f_u \text{ de tweede keer.} \end{cases} \tag{3.3}$$

  Met andere woorden het label u doet nu dienst als een index.
- Neem de som over alle indices.

[3]Met kan aantonen dat $\zeta : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ een injectie is.

[4]Normaal wordt een Lie algebra gedefinieerd als een vectorruimte $\mathfrak{g}$ uitgerust met een bilineaire bewerking $[-, -]$ die voldoet aan $[A, B] = -[B, A]$ en de Jacobi identiteit.

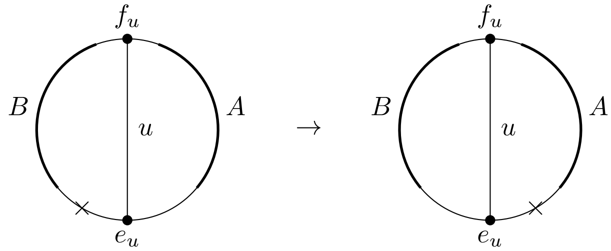
Merk op dat het een beetje prematuur is om de notatie $p_{\mathfrak{g}}(D)$ te gebruiken aangezien de beschreven constructie zou kunnen afhangen van de additionele keuzes, met name het basispunt en de duale basissen. De volgende stelling klaart dit echter op.

Stelling 3.2. (1) *$p_{\mathfrak{g}}(D)$ hangt niet af van $(e_i)_i$, $(f_j)_j$.*
(2) *$p_{\mathfrak{g}}(D)$ hangt niet af van de keuze van $\times$.*
(3) *$p_{\mathfrak{g}}(D)$ is een element van het centrum $Z(U\mathfrak{g})$ van $U\mathfrak{g}$.*
(4) *$p_{\mathfrak{g}}(-)$ voldoet aan de 4-term relatie.*
(5) *De corresponderende lineaire afbeelding*
$$p_{\mathfrak{g}} : A^{\mathrm{fr}} \to Z(U\mathfrak{g}) : \overline{D} \mapsto p_{\mathfrak{g}}(D)$$
is een algebra homomorfisme.
(6) *$p_{\mathfrak{g}}(\Theta) = C$ met C zoals in* (2.9)*.*
(7) *Zij $K = \mathrm{koorden}(D)$. Er geldt*
$$p_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{defr}}(D) = \sum_{J \subset K} (-C)^{|K|-|J|} p_{\mathfrak{g}}(D_J)$$

Bewijs van Stelling 3.2(1)*.* Zijn $n = |K|$ met K zoals in (7) en zij $c = \sum_u e_u \otimes f_u$ zoals in (2.2). Dan kunnen we $p_{\mathfrak{g}}(D)$ beschrijven als het beeld van
$$\underbrace{c \otimes \cdots \otimes c}_{n} \in \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{2n}$$
onder de samenstelling
$$\underbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{2n} \xrightarrow{\sigma} \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \mathfrak{g}}_{2n} \xrightarrow{\text{vermenigvuldiging}} U\mathfrak{g}$$
waarbij σ een goed gekozen permutatie is. Bijvoorbeeld in het voorbeeld in Figuur 3.1 wordt σ gegeven door
$$a \otimes a' \otimes b \otimes b' \otimes c \otimes c' \mapsto a \otimes b \otimes c \otimes a' \otimes c' \otimes b'$$
zodat in het bijzonder geldt
$$e_i \otimes f_i \otimes e_j \otimes f_j \otimes e_k \otimes f_k \mapsto e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes f_i \otimes f_k \otimes f_j$$
Vanwege Lemma 2.3 weten we dat c niet afhangt van de gekozen basissen. Met deze beschrijving is het dan duidelijk dat $p_{\mathfrak{g}}(D)$ in zijn geheel niet afhangt van de basissen. □

Opmerking 3.3. Uit voorgaand bewijs volgt dat we in feite voor elke koorde u een verschillend paar duale basissen $(e_{u,i})_i$, $(f_{u,i})_i$ kunnen kiezen. Met andere woorden we kunnen ook een gegeven $(e_i)_i$, $(f_i)_i$ vervangen door $(f_i)_i$, $(e_i)_i$. Dit heeft tot gevolg dat we in (3.3) in feite niet moesten specifieren dat we de eerste keer e_i schrijven en de tweede keer f_i. We kunnen het net zo goed andersom doen.

Bewijs van Stelling 3.2(2)*.* We moeten invariantie aantonen van $p_{\mathfrak{g}}(D)$ onder het springen van het basispunt over het uiteinde van één enkel koorde. Met name:



waarbij we in het tweede diagram ook Opmerking 3.3 gebruikt hebben. We zullen voor de duidelijkheid voor elke koorde v een afzonderlijke duale basis $(e_{v,i})_i$, $(f_{v,i})_i$ kiezen

De gewichten corresponderend met de twee basispunten zijn dan respectievelijk sommen

$$\sum_{A,B}\sum_i e_{u,i}Af_{u,i}B \qquad \text{en} \qquad \sum_{A,B}\sum_i Af_{u,i}Be_{u,i}$$

waarbij in beide gevallen A, B door dezelfde woorden lopen (die nooit een $e_{u,i}$ of $f_{u,i}$ bevatten). Door het verschil te nemen zien we dat we moeten aantonen

$$\sum_{A,B}\sum_i [e_{u,i}, Af_{u,i}B] = 0$$

Vanwege de Leibniz identiteit hebben we

$$\begin{aligned}\sum_{A,B}\sum_i [e_{u,i}, Af_{u,i}B] &= \sum_{A,B}\sum_i [e_{u,i}, A]f_{u,i}B + A[e_{u,i}, f_{u,i}]B + Af_{u,i}[e_{u,i}, B] \\ &= \sum_{A,B}\sum_i [e_{u,i}, A]f_{u,i}B + Af_{u,i}[e_{u,i}, B]\end{aligned}$$

waarbij we (2.4) gebruikt hebben. We kunnen de rechterzijde van de vorige vergelijking verder uitwerken via de Leibniz identiteit. We bekomen dan een som over koorden $v \neq u$ van sommen van de vorm

$$\sum_{X,Y,Z}\sum_j X[e_{u,i}, e_{v,j}]Yf_{v,j}Z + Xe_{v,j}Y[e_{u,i}, f_{v,j}]Z \tag{3.4}$$

voor monomen X, Y, Z.

Vanwege Lemma 2.4 hebben we

$$\sum_v [e_{u,i}, e_{v,j}] \otimes f_{v,j} + e_{v,j} \otimes [e_{u,i}, f_{v,j}] = 0$$

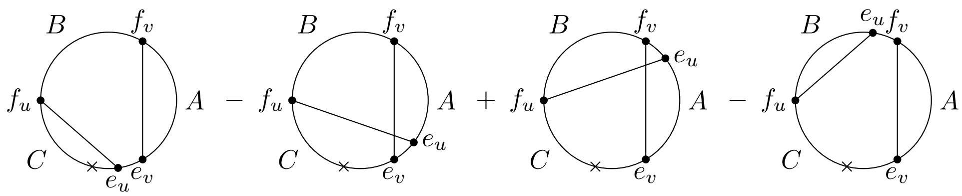
Na toepassen van de lineaire afbeelding

$$U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} : p \otimes q \mapsto XpYqZ$$

bekomen we het gestelde. □

Bewijs van Stelling 3.2(3). Het element $p_{\mathfrak{g}}(D) \in U\mathfrak{g}$ is in het centrum van $U\mathfrak{g}$ als het commuteert met alle generatoren. Dus met ander woorden indien $[e_u, p_{\mathfrak{g}}(D)] = 0$ voor alle u, waarbij u een label is dat niet gebruikt wordt als label van een koorde in D. We kunnen nu op dezelfde manier voortgaan als in het bewijs van (2). Met behulp van de Leibniz identiteit schrijven we $[e_u, p_{\mathfrak{g}}(D)]$ als een som over de koorden v in D. We krijgen dan dat $[e_u, P_{\mathfrak{g}}(D)]$ een som is van uitdrukkingen van de vorm (3.4) waarvan we hebben aangetoond dat ze nul zijn. □

Bewijs van Stelling 3.2(4). We moeten het nul zijn aantonen van de som corresponderend met



waarbij we gebruiken dat vanwege (2) de keuze van het basispunt × niet belangrijk is. Dus met andere woorden we moeten aantonen

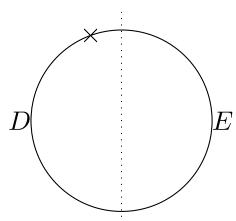
$$0 = \sum_{A,B,C,u,v} \left(e_u e_v A f_v B f_u C - e_v e_u A f_v B f_u C + e_v A e_u f_v B f_u C - e_v A f_v e_u B f_u C \right)$$

Het is dus voldoende om aan te tonen

$$0 = \sum_v [e_u, e_v] A f_v + e_v A [e_u, f_v]$$

Dit leiden we af zoals (3.4). □

Bewijs van Stelling 3.2(5). Indien D, E koorddiagrammen zijn, voorzien van een basispunt, dan wordt $D \# E$ gegeven door



waarbij er geen koorden de stippellijn kruisen. Als we het basispunt × voor $D\#E$ kiezen zoals aangegeven in de figuur dan zijn de woorden die voorkomen in de uitdrukking voor $p_{\mathfrak{g}}(D\#E)$ de producten van de woorden in $p_{\mathfrak{g}}(D)$ en $p_{\mathfrak{g}}(E)$. Hieruit volgt het gestelde. □

Bewijs van Stelling 3.2(6). Er geldt

$$p(\Theta) = \sum_i e_i f_i = C \qquad \square$$

Bewijs van Stelling 3.2(7). Dit volgt gewoon uit de definitie van $(-)^{\mathrm{defr}}$. We hebben

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{g}}^{\mathrm{defr}}(D) &= p_{\mathfrak{g}} \left(\sum_{J \subset K} (-\Theta)^{|K|-|J|} D_J \right) && \text{vanwege (1.5)} \\ &= \sum_{J \subset K} (-p_{\mathfrak{g}}(\Theta))^{|K|-|J|} p_{\mathfrak{g}}(D_J) && \text{vanwege (5)} \\ &= \sum_{J \subset K} (-C)^{|K|-|J|} p_{\mathfrak{g}}(D_J) && \text{vanwege (6)} \qquad \square \end{aligned}$$

3.2. **Representaties van Lie algebras.** Zij $\mathfrak{g}$ een Lie algebra. Een representatie van $\mathfrak{g}$ is een eindigdimensionale vectorruimte V tezamen met een lineaire afbeelding

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$$

zodat

$$\rho([A,B]) = \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A)$$

Zoals gebruikelijk kunnen we een ρ interpreteren als een actie $\mathfrak{g} \times V \to V$ van $\mathfrak{g}$ op V. Met name voor $A \in \mathfrak{g}$ en v in V definieren we

$$Av = \rho(A)(v)$$

Deze actie voldoet aan

$$[A,B]v = A(Bv) - B(Av) \tag{3.5}$$

Deze procedure is omkeerbaar. Een bilineaire actie van $\mathfrak{g}$ op V die voldoet aan (3.5) maakt van V een $\mathfrak{g}$-representatie.

Men kan ook aantonen dat ρ uniek kan uitgebreid worden tot een algebra homomorfisme $\rho : U\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ zoals in het volgende diagram.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho"'] & & U\mathfrak{g} \arrow[dl, dotted, "\rho"] \\ & \mathrm{End}(V) & \end{tikzcd}$$

Concreet voor $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{g}$ met product $A_1 \cdots A_n$ in $U\mathfrak{g}$ geldt $\rho(A_1 \ldots A_n) = \rho(A_1) \cdots \rho(A_n)$. Dus een Lie algebra representatie van $\mathfrak{g}$ geeft altijd aanleiding tot een algebra representatie van $U\mathfrak{g}$ en het omgekeerde is ook waar. Immers een algebra representatie van $U\mathfrak{g}$ kunnen we samenstellen met $\zeta : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ en op deze manier bekomen we een Lie algebra representatie. Deze twee procedures zijn elkaars inverse.

Opmerking 3.4. Merk op dat dit volledig analoog is aan het verband tussen representaties van een groep G en deze van zijn groepalgebra $\mathbb{C}G$.

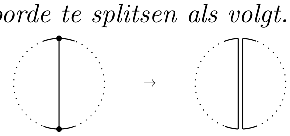
3.3. **Gewichtensystemen met waarden in $\mathbb{C}$.** Voor een paar $(\mathfrak{g}, V)$ bestaande uit een metrische Lie algebra en een representatie definieren we

$$p_{\mathfrak{g},V}(D) = \mathrm{Tr}(\rho(P_{\mathfrak{g}}(D))) \in \mathbb{C} \tag{3.6}$$

waarbij we zoals boven ρ stilzwijgend hebben uitgebreid tot $U\mathfrak{g}$, zoals in §3.2, zodat de deeluitdrukking $\rho(P_{\mathfrak{g}}(D)))$ zin heeft en een element van $\mathrm{End}(V)$ definieert waarvan we vervolgens het spoor kunnen nemen.

Met behulp van de formule (3.6) kunnen we veel gewichtensystemen construeren die aan de 4-term relatie voldoen. Soms hebben dergelijke gewichtensystemen een elegante combinatorische interpretatie. We geven een voorbeeld in de volgende stelling.

Stelling 3.5. *Zij $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$ en zij $V = \mathbb{C}^n$ de standaard representatie van $M_n(\mathbb{C})$ (de actie van $A \in M_n(\mathbb{C})$ op $v \in \mathbb{C}^n$ is gewoon de matrixvermenigvuldiging Av). Voor een koorddiagram D zij $s(D)$ het aantal samenhangingscomponenten dat we bekomen door elke koorde te splitsen als volgt.*



Dan geldt

$$p_{\mathfrak{g},V}(D) = n^{s(D)} \tag{3.7}$$

Bewijs. Als basis voor $\mathfrak{g}$ nemen we $(e_{ii'})_{ii'}$ waarbij $e_{ii'}$ de matrix is met een 1 op de intersectie van de i-de rij en de i'-de kolom en nullen op alle andere plaatsen. De duale basis wordt gegeven door $(e_{i'i})_{ii'}$.

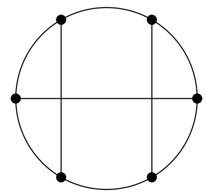
Hieronder moeten we uitdrukkingen van de vorm $\mathrm{Tr}(\rho(e_{i_1i_2}e_{i_3i_4}\cdots e_{i_{u-1}i_u}))$ berekenen. Merk op dat $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V) = M_n(\mathbb{C})$ hier gewoon de identiteit is. Er geldt

$$\begin{aligned}\rho(e_{i_1i_2}e_{i_3i_4}\cdots e_{i_{u-1}i_u}) &= \rho(e_{i_1i_2})\cdots\rho(e_{i_{u-1}i_u})\\ &= e_{i_1i_2}\cdots e_{i_{u-1}i_u}\\ &= \delta_{i_2i_3}\cdots\delta_{i_{u-2}i_{u-1}}e_{i_1i_u}\end{aligned}$$

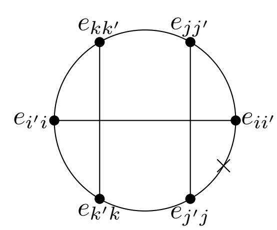
waarbij de uitdrukking op de tweede lijn het gewone product is in $M_n(\mathbb{C})$. Aangezien ook $\mathrm{Tr}(e_{i_1i_u}) = \delta_{i_1i_u}$ besluiten we

$$\mathrm{Tr}(\rho(e_{i_1i_2}e_{i_3i_4}\cdots e_{i_{u-1}i_u})) = \begin{cases}1 & \text{indien } i_2 = i_3, i_4 = i_5, \ldots, i_u = i_1\\ 0 & \text{anders}\end{cases} \tag{3.8}$$

We zullen de rest van het bewijs uitleggen aan de hand van een voorbeeld. Onderstel dat we $p_{\mathfrak{g},V}(D)$ willen berekenen met D gelijk aan



Dit betekent dat we een som moeten maken over alle diagrammen van de vorm



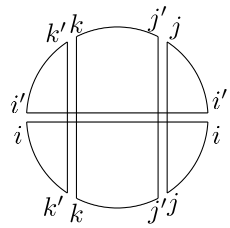
Vanwege (3.8) zal de bijdrage van zo'n diagram nul zijn tenzij

$$i' = j, j' = k, k' = i', i = k', k = j', j = i \tag{3.9}$$

in welk geval de bijdrage 1 is. (3.9) is equivalent met

$$i' = j = i = k, \quad \text{en} \quad j' = k$$

We kunnen dus twee indices vrij kiezen er er zijn dus n^2 indices die voldoen aan (3.9). Met andere woorden $p_{\mathfrak{g},V}(D) = n^2$. Een andere manier om de constraints (3.9) te bekomen is door te eisen dat de indices constant zijn op de samenhangingscomponenten van het diagram bekomen door een splitsing van de koorden uit te voeren. We illustreren dit in de volgende figuur.



Er zijn 2 samenhangingscomponenten en dus $s(D) = 2$. Dus de formule (3.7) is correct. $\square$