Semaine 9 - Nombres réels, suites réelles

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Un théorème de point fixe (1)

1 A sous ensemble des réels non vide et borné donc admet une borne supérieure. On note x_0 cette borne.

2 On élimine facilement les cas $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$. On suppose que $x_0 \in]0,1[$, $\forall x \in [0,1],\ x > x_0 \ \Rightarrow x > f(x)$. Soit x_n une suite de réels qui tend vers x_0 avec $x_n > x_0$. $f(x_0) \leq f(x_n) \leq x_n$. Donc en passant à la limite $f(x_0) \leq x_0$. Puisque x_0 est la borne supérieure de A on peut construire une suite d'éléments de A qui converge vers x_0. $x_n \leq f(x_n) \leq f(x_0)$. Donc en passant à la limite $f(x_0) \geq x_0$.
On conclut.

2 Un théorème de point fixe (2)

1 Même chose que pour le premier exercice.

2 On adapte la preuve du première exercice.
Tout d'abord, $\forall x \in [0,1],\ x > x_0 \ \rightarrow x > f(x)$. Soit x_n une suite de réels qui tend vers x_0 avec $x_n > x_0$. $f(x_n) \leq x_n$. Donc en passant à la limite $f(x_0) \leq x_0$ (par continuité de f en x_0).
Puisque x_0 est la borne supérieure de A on peut construire une suite d'éléments de A qui converge vers x_0. $x_n \leq f(x_n)$. Donc en passant à la limite $f(x_0) \geq x_0$ (par continuité de f en x_0).
On conclut.

3 Inégalité(s) de Shapiro

1 On note que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + \frac{1}{x} \geq 2$. L'inégalité s'obtient en notant que si $x = \frac{a}{b}$ alors $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$. Le terme de gauche s'écrit alors comme la somme de trois termes chacun supérieur à 2.

2 On a :

$$\begin{aligned} \frac{y_1+y_2}{y_3} + \frac{y_2+y_3}{y_1} + \frac{y_1+y_3}{y_1} &= \frac{2x_3+x_1+x_2}{x_1+x_2} + \frac{2x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3} + \frac{2x_2+x_1+x_3}{x_1+x_3} \\ &= 3 + 2\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right) \\ &\geq 6 \end{aligned} \tag{1}$$

L'inégalité s'en déduit.

3 En développant le terme de droite et en le retranchant au terme de gauche on obtient :

$$x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 \tag{2}$$

Cette expression est donc positive et on peut conclure.

4 $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{y_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$ via l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($\sqrt{x_i y_i}\sqrt{\frac{x_i}{y_i}} = x_i$). L'inégalité s'en déduit facilement en utilisant la question 3.

4 Une borne inférieure

1 L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2$. Donc n^2 minorant de A. On traite en même temps la question 2 en montrant que n^2 est bien une borne inférieure car atteint par A. Il s'agit de trouver les cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On trouve $x_i = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

5 Borne inférieure et borne supérieure

1 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$. Donc $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$. La minoration par 0 est triviale.

2 A sous ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et borné donc admet une borne supérieure et une borne inférieure. $\frac{1}{4}$ est un maximum (atteint lorsque $m = n$). 0 est bien une borne inférieure (avec $n = 1$ et $m \in \mathbb{N}$ on a une suite dans A qui tend vers 0). Il est à noter que 0 n'est évidemment pas atteint.

6 Convergence au sens de Césaro

1 Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\ \rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $\frac{\sum_{1}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Donc on a :

$$\begin{aligned} |v_n - l| &= |v_n - \frac{nl}{n}| \\ &\leq \frac{\sum_{1}^{n_0-1} |u_k - l|}{n} + \frac{\sum_{n_0}^{n} |u_k - l|}{n} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - n_0 + 1}{n}\frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{3}$$

D'où la convergence

2 $(-1)^n$ tend vers 0 au sens de Césaro.

3 On calcule la moyenne de Césaro de $u_n = \omega_{n+1} - \omega_n$. On obtient un télescope. On a alors : $\frac{\omega_{n+1} - \omega_0}{n} \rightarrow l$ en vertu de la première question. On obtient alors : $\omega_n \sim ln$.

4 Il s'agit de considérer $\omega_n - \frac{n(n+1)}{2n^2} l = \omega_n - \frac{\sum_{1}^{n} kl}{n^2}$. on procède ensuite de la même manière que pour la question 1. On a alors $\omega_n - \frac{n(n+1)}{2n^2} l \rightarrow 0$. Donc $\omega_n \rightarrow \frac{l}{2}$.

7 Suite sous-additive

1 Cours

2 $u_n \leq qu_m + u_r$. Or $u_n \leq nu_1$ donc $u_n \leq qu_m + ru_1$.

3 On suppose que la borne inférieure de cet ensemble est réelle. Si elle vaut $-\infty$ on raisonne de la même manière... Soit m tel que $\frac{u_m}{u_m} \leq \inf\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} + \frac{\epsilon}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $n = qm + r$ (résultat de la division euclidienne de n par m).

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{qm}{n}\frac{u_q}{q} + \frac{r}{n}u_1 \tag{4}$$

Le deuxième terme ($\frac{r}{n}u_1$) est inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ pour n assez grand. On a donc pour n assez grand :

$$\frac{u_n}{n} \leq \inf\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \tag{5}$$

Donc $|\frac{u_n}{n} - \inf\{\frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}| \leq \epsilon$ pour n assez grand. On a donc prouvé la convergence

4 $\ln(v_n)$ est sous-additive. On en déduit que $v_n^{\frac{1}{n}}$ converge.

8 Rationnels et irrationnels

1 q_n supposée bornée. On peut extraire une suite convergente (on la nomme encore q_n). Donc q_n stationnaire en $l \in \mathbb{N}$ (convergente et entière donc stationnaire). Donc $lr_n = p_n$ donc en passant à la limite, p_n converge vers lx avec $lx \in \mathbb{N}$. Donc x rationnel et c'est absurde.
Supposons que q_n ne tende pas vers $+\infty$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et une suite extraire (encore notée q_n) telle que q_n bornée. On applique la remarque précédente et on conclut par l'absurde.

9 Une équation et des parties entières

1 Pour $x = 8$ on a $\frac{x}{2} - \sqrt{x} = 2(2 - \sqrt{2}) > 1$. Donc à partir de $x = 8$ les parties entières de $\frac{x}{2}$ et $\sqrt{x}$ sont différentes. Il s'agit maintenant de trouver les solutions pour $x < 8$ (une autre solution aurait de résoudre une équation du second degré $-\sqrt{x}^2 + (\frac{x}{2} - 1)^2 = 0$. On aurait trouvé une borne similaire) :

- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0$ si et seulement si $x \in [0, 2[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 0$ si et seulement si $x \in [0, 1[$. Donc $[0, 1[$ dans l'ensemble des solutions.
- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 1$ si et seulement si $x \in [2, 4[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ si et seulement si $x \in [1, 4[$. Donc $[2, 4[$ dans l'ensemble des solutions.
- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 2$ si et seulement si $x \in [4, 6[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ si et seulement si $x \in [4, 9[$. Donc $[4, 6[$ dans l'ensemble des solutions.

On s'arrête là car on sait que les prochaines solutions se trouvent après $x = 9$. On sait donc qu'il n'y en aura plus. On a l'ensemble de solutions suivant :

$$S = [0, 1[\cup [4, 6[\tag{6}$$

10 Une propriété de la partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1 On a :

$$\begin{aligned}
&x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[\\
&nx \in [n\lfloor x \rfloor, n\lfloor x \rfloor + n[\\
&\lfloor nx \rfloor \in [n\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + n[, \text{ car } n\lfloor x \rfloor \text{ entier} \\
&\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1[
\end{aligned} \tag{7}$$

On conclut.

11 Somme et partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1 Il s'agit simplement d'écrire $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ et $nx = \lfloor nx \rfloor + \{nx\}$. On multiplie par n la première équation et on égalise.

2 On peut comprendre la démarche en posant $\{x\} < \frac{1}{n}$. On a alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$. De plus on a $n\{x\} \in [0, 1[$ donc $n\{x\} - \{nx\} \in]-1, 1[$ donc $n\lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor$. On peut donc conclure.
Pour les autres cas, $\exists k_0 \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\{x\} + \frac{k_0}{n} \geq 1$ et $\{x\} + \frac{k_0 - 1}{n} < 1$. donc si $k \leq k_0$, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$. Sinon, $\lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Si on considère la somme étudiée (notée S) on a :

$$S = n\lfloor x \rfloor + (n - k_0 + 1) \tag{8}$$

Mais $n - k_0 \leq n\{x\} < n - k_0 + 1$. Donc $n - k_0 - \{nx\} \leq n\{x\} - \{nx\} < n - k_0 + 1$. Mais le nombre encadré est entier et est compris dans un intervalle qui ne contient qu'un entier. Donc $n\{x\} - \{nx\} = n - k_0$. Donc en remplaçant dans l'expression trouvée pour S on peut conclure.

12 Nombre de zéros et factorielle

1 2 zéros

2 6 et pas 5 attention ! Si on fait la liste des termes qui rajoutent un zéro on a : $5 \times 2 = 10$, 10, 15×4, 20 et 25×8

3 La formule est la suivante :

$$\text{nombre de zéros} = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_5(n) \rfloor} \lfloor \frac{n}{5^k} \rfloor \tag{9}$$