

## TD - Théorème du point fixe

### Exercice 1

- a) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas  $X$  complet.
- b) Montrer que le théorème de Picard n'est plus vrai si on ne suppose pas l'application contractante (même avec l'inégalité  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ ).

### Exercice 2

- a) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle  $(u_n)$  telle que  $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$  est connexe par arc.
- b) Soit  $X$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et  $f : X \rightarrow X$  une fonction continue. On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in X$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  et on suppose que  $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.

### Exercice 3

- a) On notera, pour  $A$  une partie d'un espace métrique,  $\delta(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}$  le diamètre de  $A$ . Démontrer le résultat suivant (théorème dit des fermés emboîtés) :  
Un espace métrique  $(X, d)$  est complet ssi l'intersection de toute suite décroissante  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de parties fermées non vides de  $X$  telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(A_n) = 0$  est non vide.
- b) Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide et  $f : X \rightarrow X$  lipschitzienne de rapport  $k \in [0, 1[$ . Pour  $R \in \mathbb{R}^+$ , on pose  $A_R = \{x \in X / d(x, f(x)) \leq R\}$ .
  - i) Montrer que  $f(A_R) \subset A_{kR}$  et en déduire que pour tout  $R \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $A_R$  est une partie fermée non vide de  $X$ .
  - ii) Soient  $x, y \in A_R$ . Montrer que  $d(x, y) \leq 2R + d(f(x), f(y))$  et en déduire que  $\delta(A_R) \leq \frac{2R}{1-k}$ .
  - iii) Montrer que  $A_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_{1/n}$  et en conclure que  $A_0$  est non vide.

**Exercice 4** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$  un point fixe de  $f$ .

- a) On suppose que  $|f'(a)| < 1$ . Montrer qu'il existe un intervalle fermé  $J$  stable par  $f$  de centre  $a$  tel que, pour tout  $x_0 \in J$ , la suite définie par  $u_0 = x_0$  et  $u_n = f(u_{n-1})$  pour  $n \geq 1$  converge vers  $a$ .
- b) Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose de plus que  $f'$  ne s'annule pas sur  $J$ . Montrer que si  $x_0 \neq a$  alors  $u_n \neq a$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$ .
- c) Toujours sous les hypothèses de la première question, on suppose que  $f$  est de classe  $C^2$  que  $f'(a) = 0$  et que  $f''$  ne s'annule pas sur  $J$ . Montrer que, si  $x_0 \in J$  et  $x_0 \neq a$  alors  $u_n \neq a$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et que  $u_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2}(u_n - a)^2$ .

d) On suppose que  $|f'(a)| > 1$ . Montrer qu'il existe un intervalle fermé  $J$  de centre  $a$  tel que pour tout  $x_0 \in J$  et  $x_0 \neq a$  la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sort de  $J$ .

**Exercice 5** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $f_n : X \rightarrow X$  une suite de fonctions continues. On suppose que  $f_n$  admet un point fixe  $x_n$ .

a) On suppose que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

i On suppose que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (vers  $x_0$ ). Montrer que  $x_0$  est un point fixe pour  $f$ .

ii On suppose que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge (vers  $x_0$ ). Montrer que  $x_0$  est un point fixe pour  $f$ .

iii On suppose que  $f$  est contractante. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'unique point fixe de  $f$ .

b) on suppose maintenant que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $X$ . On suppose également qu'il existe  $\alpha > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  soit  $\alpha$ -lipschitzienne.

i Montrer que  $f$  est  $\alpha$ -lipschitzienne et que si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x_0$  alors  $x_0$  est un point fixe de  $f$ .

ii On suppose  $\alpha < 1$ . Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'unique point fixe de  $f$ . Montrer qu'on ne peut pas remplacer la condition  $\alpha < 1$  par la condition  $\alpha_n < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (où  $f_n$  est  $\alpha_n$ -lipschitzienne). On pourra considérer l'opérateur  $f_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  défini par

$$f_n((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (0, \dots, 0, (1 - 1/n)x_n + 1/n, 0, \dots)$$

iii **Application.** Soient  $X$  un compact non vide d'un espace vectoriel normé qu'on suppose étoilé par rapport à l'un de ses points  $x_0$  (c'est le cas par exemple si  $X$  est convexe). On suppose que  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$  pour tous  $x, y \in X$ . Montrer que  $f$  a un point fixe (on pourra introduire une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers 0 et les fonctions  $f_n(x) = (1 - t_n)f(x) + t_n x_0$ ). Peut-on retirer l'hypothèse de compacité ? (Pensez à une translation sur  $\mathbb{R}$ ). Peut-on retirer l'hypothèse 'étoilé' ? (Pensez à une rotation sur le cercle).

## Exercice 6

a) Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide et  $f : X \rightarrow X$  une application (qu'on ne suppose pas continue). On suppose qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in [0, 1[$  tels que  $d(f^N(x), f^N(y)) \leq \alpha d(x, y)$  pour tous  $x, y \in X$ , c'est à dire que  $f^N$  est une contraction. Montrer que  $f$  a un unique point fixe  $x_0$  et que, pour tout  $x \in X$ , la suite définie par  $u_0 = x$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers  $x_0$ .

b) **Application:** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $I = [a, b]$  un intervalle compact. On considère une fonction  $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $\phi$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

i On suppose que  $(b - a)\|K\|_\infty < 1$ . Montrer qu'il existe une unique application continue  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^b K(s, t)x(s) ds$$

ii Montrer qu'il existe une unique application continue  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$x(t) = \phi(t) + \int_a^t K(s, t)x(s) ds$$

**Exercice 7** Soit  $K$  un espace métrique compact et  $f$  une fonction de  $K$  dans  $K$ . On suppose que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

- a) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe.
- b) Soit  $x_0 \in K$ . On définit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence via  $f(x_{n+1}) = x_n$ . Montrer que  $u_n = d(x_n, f(x_n))$  converge.
- c) Montrer que toute valeur d'adhérence de la suite est un point fixe.
- d) Conclure sur la convergence.

**Exercice 8 Théorème de Sarkowski** Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$  une application continue. Pour  $x \in I$ , on dit que  $x$  est un point  $n$ -périodique lorsque  $f^n(x) = x$  et  $f^k(x) \neq x$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

- a) Si  $K$  est un segment inclus dans  $f(I)$ , montrer qu'il existe un segment  $L \subset I$  tel que  $K = f(L)$ .
- b) Montrer que si  $I_0 \subset I$  est tel que  $I_0 \subset f(I_0)$  alors  $f$  admet un point fixe dans  $I_0$ .
- c) Si  $I_1$  et  $I_2$  sont deux segments quelconques de  $I$  tels que  $I_2 \subset f(I_1)$ , on notera désormais pour simplifier  $I_1 \rightarrow I_2$ . Montrer que si deux segments  $I_0, I_1 \subset I$  vérifient  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$ , alors  $f^2$  admet un point fixe  $x_0 \in I_0$  tel que  $f(x_0) \in I_1$ . En généralisant ceci, montrer que si  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ , alors  $f^n$  admet un point fixe tel que  $f^k(x_0) \in I_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- d) On suppose que  $f$  admet un point 3-périodique  $a \in I$ . On note  $b = f(a)$  et  $c = f^2(a)$ . Quitte à interchanger  $a$  et  $b$ , on peut supposer que  $a = \min\{a, b, c\}$ . Dans le cas où  $a < b < c$ , on définit  $I_0 = [a, b]$  et  $I_1 = [b, c]$ . Montrer que  $I_0 \rightarrow I_1, I_1 \rightarrow I_0, I_1 \rightarrow I_1$ . En déduire que  $f$  admet un point  $n$ -périodique pour tout  $n \geq 1$ . Raisonner de manière similaire pour  $a < c < b$ .
- e) Le résultat précédent se généralise-t-il à des dimensions supérieures ?
- f) **Application** Résoudre l'équation fonctionnelle  $f^3 = id_{[0,1]}$  pour  $f \in C([0, 1], [0, 1])$ .

**Exercice 9** Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow I$  une application continue. On suppose que

$$\forall x \in I, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{n_x}(x) = x$$

- a) Montrer que  $f$  est bijective.
- b) Dans le cas où  $f$  est croissante montrer que  $f = id_I$ .
- c) Conclure dans le cas général.
- d) Reprendre la dernière question de l'exercice précédent.