

Semaine 25 - Produit scalaire

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Inégalité(s) de Shapiro

- 1 Montrer que $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^{*3}$ on $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.
- 2 Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{*3}$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$ et $y_3 = x_1 + x_2$. Montrer que $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geq \frac{3}{2}$.
- 3 Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^{*4}$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_4$, $y_3 = x_4 + x_1$ et $y_4 = x_1 + x_2$. Montrer que $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)$.
- 4 En déduire que $\sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{y_i} \geq 2$.

Remarque : ces inégalités sont appelées les inégalités de Shapiro et on a $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$ (où l'addition est à prendre modulo n) pour $n \leq 12$ dans le cas pair et $n \leq 23$ dans le cas impair. On remarquera qu'ici on a montré les cas $n = 3$ et $n = 4$. Un contre-exemple pour le cas $n = 14$ a été trouvé en 1985 par Troesch, le voici : $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$.

2 Une autre inégalité

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.

- 1 Montrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.
- 2 Quels sont les cas d'égalité ?

3 Une matrice inversible

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} \geq 1$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} a_{i,j}^2 < 1$

- 1 Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$.
- 2 En déduire que A est inversible.

4 Intégrale et inégalité (1)

Soit $[a, b]$ un intervalle réel et f une fonction strictement positive sur $[a, b]$. On définit $l(f) = \int_a^b f(t) dt \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt$.

- 1 Montrer que $l(f) \geq (b - a)^2$.

2 Quel est le cas d'égalité ?

3 On a déterminé une borne inférieure de $l(f)$ sur les fonctions continues. Que peut-on dire de la borne supérieure ?

5 Intégrale et inégalité (2)

Soit $[a, b]$ un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$.

1 Montrer que $\int_a^b |f(x)|^2 \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$

2 Quel est le cas d'égalité ?

6 Trace, matrice et produit scalaire

1 Montrer que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB^T)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 En déduire que les matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires et orthogonales.

3 Calculer la distance aux matrices symétriques de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4 Donner la distance de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 aux matrices de trace nulle.

Remarque : la norme associée à ce produit scalaire est appelée la norme de Frobenius. Elle possède de nombreuses propriétés utiles pour l'analyse matricielle. Une question intéressante est la suivante : on peut définir une norme sur les matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simplement à partir d'une norme sur l'espace \mathbb{R}^n (comment ?), on dit alors que la norme est subordonnée, la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée, pourquoi ?

7 Pseudo-inverse et projection

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On admet l'existence d'une matrice $A^\dagger \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ telle que :

- $AA^\dagger \in S_n(\mathbb{R})$
- $A^\dagger A \in S_m(\mathbb{R})$
- $AA^\dagger A = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

La matrice A^\dagger est appelée pseudo-inverse de A .

1 Montrer que $\ker A$ et $\text{Im} A^T$ sont orthogonaux.

2 Montrer que la pseudo-inverse est unique.

3 Montrer que AA^\dagger est la projection sur $\text{Im} A$.

Remarque : avec des outils de deuxième année (diagonalisation des matrices symétriques) on peut démontrer l'existence de cette matrice. Celle-ci est très utile pour donner un sens à l'inverse d'une matrice même lorsque celle-ci n'est pas inversible, voire même pas carrée ! Elle joue un rôle dans la résolution de problèmes de type régression linéaire.

8 Famille obtusangle

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$. On dit que la famille est obtusangle si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \langle x_i, x_j \rangle < 0$.

- 1 Montrer que $p \leq n + 1$.

9 Inégalité d'Hadamard

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ n vecteurs de \mathbb{R}^n . On considère X la matrice dont les colonnes sont les x_i .

- 1 Montrer que $|\det(X)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$.
- 2 Quel est le cas d'égalité ?

Remarque : on peut donner une interprétation géométrique de cette quantité en se rappelant que le déterminant correspond au volume du parallépipède défini par les x_i . L'inégalité d'Hadamard donne alors une majoration de l'aire du parallépipède en fonction des longueurs des côtés et nous indique que le volume maximal d'un parallépipède aux côtés de longueurs fixées est atteint lorsque celui-ci est un rectangle.

10 Une condition d'orthogonalité

Soit $(x, y) \in E$ avec E un espace préhilbertien réel.

- 1 Montrer que $x \perp y$ si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.