Semaine 15 - Applications linéaires

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dans tous les exercices qui suivent.

1 Des projecteurs

Soit p et q deux endomorphismes de E.

1 Montrer que si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors ce sont deux projecteurs de même noyau.

2 On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur. Quel est son noyau ? Son image ?

3 On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. Quel est son noyau ? Son image ?

2 Endomorphismes de carré nul

Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un projecteur p avec $u = p \circ u - u \circ p$.

1 Montrer que $u(\ker p) \subset \mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} p \subset \ker u$.

2 En déduire $u^2 = 0$.

3 Que peut-on dire de la réciproque ?

3 Carré, noyau et image

Soit u un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\mathrm{Im} u \cap \ker u = \{0\} \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2$.

2 Montrer que $E = \mathrm{Im} u + \ker u \Leftrightarrow \mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$.

4 Introduction à la réduction

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id} = 0$.

1 Montrer que u est inversible et que son inverse est un polynôme en u.

2 Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

5 Trois endomorphismes

Soient (f, g, h) trois endomorphismes de E tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1 Montrer que f, g et h ont même noyau et même image.

2 Montrer que $f^5 = f$.

3 En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.

6 Deux endomorphismes

Soient (f, g) deux endomorphismes de E tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f = f \circ g \circ f$.

1 Montrer que $\mathrm{Im}f$ et $\ker g$ sont supplémentaires.

2 Montrer que $f(\mathrm{Im}g) = \mathrm{Im}f$.

7 Drapeaux

Soit u un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ker u^k \subset \ker u^{k+1}$. Conjecturer et prouver une propriété similaire sur $\mathrm{Im}u^k$.

2 On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N},\ p \geq n \ \Rightarrow\ \ker u^p = \ker u^{p+1}$.

3 En déduire que pour ce n, $\ker u^n$ et $\mathrm{Im}u^n$ sont en somme directe.

8 Anneau de Boole

Soit $(A, +, \times)$ un anneau de Boole, c'est-à-dire un anneau tel que tout élément est idempotent ($x^2 = x$).

1 $\forall (x, y) \in A^2,\ xy + yx = 0$. En déduire que $x + x = 0$ et que l'anneau est commutatif.

2 Montrer que la relation binaire définie par $x \leq y \ \Leftrightarrow\ yx = x$ est une relation d'ordre.

3 Montrer que $\forall (x, y) \in A^2,\ xy(x + y) = 0$ et en déduire qu'un anneau de Boole intègre ne peut contenir que deux éléments.

9 Sous-corps des rationnels

Soit k un sous corps des rationnels , $\mathbb{Q}$.

1 Montrer que $k = \mathbb{Q}$.

10 Inversibles d'un anneau

Soit (a, b) deux éléments d'un anneau $(A, +, \times)$.

1 Montrer que si $1 - ab$ est inversible alors $1 - ba$ l'est aussi.

2 Montrer que si ab est inversible et b n'est pas un diviseur de 0 alors a et b sont inversibles.