Semaine 7 - Développements limités

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Développements limités (1)

1 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \frac{e^x}{(1+x)^3}$.

2 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \sin(x^2)$

3 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $x \mapsto \ln(1+x)\sin(x)$

2 Développements limités et asymptotiques (1)

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$.

1 Justifier l'existence et calculer un développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

2 Le graphe de f admet-il une tangente en 0 ? Si oui, donner la position du graphe de f par rapport à cette tangente autour de 0.

3 Déterminer une asymptote en $+\infty$ au graphe de f.

3 Développements limités et asymptotiques (2)

Soit $f \mapsto (x^2-1)\ln\left(|\frac{1+x}{1-x}|\right)$.

1 Justifier l'existence et calculer un développement limité de f en 0 à l'ordre 3.

2 Déterminer une asymptote en $+\infty$ au graphe de f et donner la position de la courbe par rapport à cette asymptote lorsque x est grand.

4 Développements limités (2)

1 Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 5 de $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

2 Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)-x}{\sin(x)-x}$.

5 Développements limités et dérivabilité

1 Montrer que f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en 0.

2 Montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

3 Montrer que si f est deux fois dérivable en 0 alors f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

4 Montrer que $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongée par continuité en 0 admet un développement limité à l'ordre 2 mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

6 Calcul de développements limités

1 Justifier l'existence et calculer un développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(\sin(x))$.

2 Justifier l'existence et calculer un développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de $x \mapsto (1+\cos(x))^{\frac{1}{x}}$.

7 Développement limité et approximation par une fraction rationnelle d'ordre 2

1 Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que la partie principal de $x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en 0 soit la plus petite possible.

2 Donner un équivalent de $x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en 0 pour les valeurs de (a,b) trouvées.

8 Suite et équivalent (1)

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[\mid \tan(x_n) = x_n$.

2 Montrer $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

3 Montrer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.

4 Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

9 Suite et équivalent (2)

1 Montrer que $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note u_n.

2 En posant $v_n = u_n - \ln(n)$, montrer que $v_n \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$.

3 Trouver un équivalent de v_n en $+\infty$.

4 En déduire un développement asymptotique de u_n.

10 Réciproque et développement limité (1)

1 Montrer que $f : x \mapsto 2\tan(x) - x$ est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

2 Donner un développement limité à l'ordre 3 de f^{-1}.

11 Réciproque et développement limité (2)

1 Montrer que $x \mapsto x\exp(x^2)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2 On admet que f^{-1} est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner un développement limité à l'ordre 4 de f^{-1}.

12 Développement limité et grand ordre

1 Donner un développement à l'ordre 1000 de $x \mapsto \ln(\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!})$.

13 Dérivée de grand ordre

1 Donner la dérivée en 0 d'ordre 1000 de $x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}$.