Mariano Rodríguez, Frédéric Pascal

TD 5 bis
Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 1 – TFI => TIL.

On suppose que le théorème des fonctions implicites est vrai. Soit f définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E et à valeur dans F, espace de Banach telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ et telle qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ soit un isomorphisme. On note $b = f(a)$.

a) Vérifier que les hypothèses du théorème des fonctions implicites s'appliquent à la fonction $\Phi : U \times F \to F$ définie par $\Phi(x, y) = y - f(x)$.

b) En déduire l'existence de voisinages de a et de b et de f^{-1} définie sur un de ces voisinages.

c) Conclure.

Exercice 2 – TIL=>TFI.

On suppose que le théorème d'inversion locale est vrai. On se donne trois espaces de Banach E, F, G et on considère f définie sur un ouvert U de $E \times F$ à valeur dans G et de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U$ vérifiant $f(a, b) = 0$ et tel que la différentielle partielle par rapport à y en (a, b) c'est-à-dire $d_y f(a, b)$ soit un isomorphime.

a) Montrer que la fonction $\Psi : U \to E \times G$ définie par $\Psi(x, y) = (x, f(x, y))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

b) Vérifier que cette différentielle est inversible en (a, b), montrer en utilisant le théorème d'inversion locale que Ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur des espaces que l'on précisera.

c) Reprendre les questions précédentes dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^p$

d) En remarquant que l'on peut écrire $\Psi^{-1}(x, z)$ sous la forme$(x, g(x, z))$, conclure.

Exercice 3 – Inversion globale. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on ait $\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$ avec $k > 0$ constante.

a) Montrer que f est injective.

b) Montre $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

c) Montrer que $df(x)$ est inversible pour tout x.

d) Conclure.

e) Application à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(\frac{y}{2}) - x, \sin(\frac{x}{2}) - y)$. On prendra la norme $\| \cdot \|_1$.

Exercice 4 – Inversion globale. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y, y/x, z/x)$.

a) Trouver un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ sur lequel f est différentiable. Calculer sa différentielle.

b) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0\ ,\ x + y > 0\}$. f est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $f(V)$?

Exercice 5 – Inversion. Soit H un espace de Hilbert de dimension fini, muni d'un produit scalaire euclidien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$ et soit $f : H \to H$ une application différentiable. On suppose qu'il existe $0 < k < 1$ tel que l'application $\phi :\ H \to H$ définie par $\phi(x) = f(x) - x$ soit k-lipschitzienne.

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que $\forall x \in H, \|d\phi(x)\| \leqslant k$.

c) En déduire que $\forall x \in H,\ df(x)$ est inversible.

d) Montrer que pour tout x de H, on a

$$(1 - k)\|x\| - \|f(0)\| \leqslant \|f(x)\|$$

e) On fixe $y \in H$ et on définit $h(x) = \|f(x) - y\|^2$. Soit $m = \inf\{h(x)\ /\ x \in H\}$. Déduire de la question précédente qu'il existe $z \in H$ tel que $m = h(z)$.

f) Montrer que la différentielle de h en z est nulle.

g) En déduire que $m = 0$.

h) Que peut-on conclure sur f ?

i) Quelle est la conclusion dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 6 – Immersion. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1. On suppose qu'en un point a de U la différentielle $Df\,(a)$ est une application linéaire *injective* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (donc $n \leqslant p$).

a) Montrer qu'après permutation des coordonnées de $\mathbb{R}^p$ (si nécessaire), les relations

$$\begin{cases} y_i = f_i\,(Y_1, ..., Y_n) & si\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i = f_i\,(Y_1, ..., Y_n) + Y_i & si\ n+1 \leqslant i \leqslant p \end{cases}$$

définissent un changement de coordonnées locales $y \mapsto Y$ sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^p$.

b) Montrer que f admet (localment) un inverse à gauche, i.e une application g de classe C^1 telle que $g\,(f\,(x)) = x$.