Semaine 15 - Espaces vectoriels et applications linéaires

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

Dans la suite k est un corps (on se limite à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) et E un k-espace vectoriel.

1 Opérations ensemblistes et espaces vectoriels

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1 A quelle condition $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ?

2 A quelle condition $F \cap G = F + G$?

3 Soit A et B deux ensembles de E. Que peut-on dire de $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$?

2 Une égalité d'espaces

Soit F, F', G, G' quatre sous-espaces vectoriels de E tels que $F' \cap G' = F \cap G$.

1 Montrer que $F = (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$.

3 Quelques sous-espaces vectoriels

1 Soit $E = \mathcal{F}([0,1])$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes de $[0,1]$. Montrer que $F = \{f \in E, f(0) = -f(1)\}$ est un espace vectoriel. Trouver un supplémentaire de cet espace.

2 Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes de $[0,1]$. Montrer que $F = \{f \in E, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ est un espace vectoriel. Trouver un supplémentaire de cet espace.

3 Soit $E = \mathcal{C}([0,\pi])$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues à valeurs complexes de $[0,\pi]$. Trouver un supplémentaire de $G = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

4 Espace vectoriel et fonctions affines

1 Soit F l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ affines sur $[-1,0]$ et affines sur $[0,1]$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel (de quel espace vectoriel ?).

2 Trouver une base de F.

5 Une base de polynômes

1 Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ avec $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6 Nombres réels et espace vectoriel

Le but de cet exercice est d'étudier $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant.

1 Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ (p_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'existe pas de base finie de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2 Autre démonstration : si $(x_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel en déduire que tout $x \in \mathbb{R}$ est racine d'un polynôme de degré $N-1$.

3 En considérant $2^{1/N}$ en déduire une contradiction (on admettra que $X^n - 2$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$).

Remarque : en fait on peut même montrer en considérant la famille $(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{10^{\lfloor a^n \rfloor}})_{a>1}$ que toute base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est de cardinal celui de $\mathbb{R}$. L'existence d'une base de $\mathbb{R}$ est assurée par l'axiome du choix (bases de Hamel) mais n'est pas constructible.

7 Polynômes à valeurs entières

1 Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ avec $\forall k \in [\![1,n]\!],\ P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ et $P_0 = 1$. Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall k \in [\![0,n]\!],\ P_k(m) \in \mathbb{Z}$.

3 En déduire la forme des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui prennent des valeurs entières sur les entiers.

8 Divisibilité et sous-espace vectoriel

Soit A polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1 Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], A|P\}$ est un sous-espace vectoriel.

2 Exhiber une base et un supplémentaire de cet espace.

9 Une équation polynômiale

1 Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vérifient $P(X+1) - P(X) = 0$.

2 Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^n$.

10 Une somme directe

1 Soit $i \in [\![0,n]\!]$ et $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \forall j \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\},\ P(j) = 0,\ P(i) \neq 0\}$. Montrer que $F_i \cup \{0\}$ est un espace vectoriel.

2 Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$.

11 Des projecteurs

Soit p et q deux endomorphismes de E.

1 Montrer que si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ alors ce sont deux projecteurs de même noyau.

2 On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur. Quel est son noyau ? Son image ?

3 On suppose que p et q sont deux projecteurs. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$. Quel est son noyau ? Son image ?

12 Endomorphismes de carré nul

Soit u un endomorphisme de E tel qu'il existe un projecteur p avec $u = p \circ u - u \circ p$.

1 Montrer que $u(\ker p) \subset \mathrm{Im} p$ et $\mathrm{Im} p \subset \ker u$.

2 En déduire $u^2 = 0$.

3 Que peut-on dire de la réciproque ?

13 Carré, noyau et image

Soit u un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\mathrm{Im} u \cap \ker u = \{0\} \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2$.

2 Montrer que $E = \mathrm{Im} u + \ker u \Leftrightarrow \mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$.

14 Introduction à la réduction

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id} = 0$.

1 Montrer que u est inversible et que son inverse est un polynôme en u.

2 Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id})$ et $\ker(u - 2\mathrm{Id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

15 Trois endomorphismes

Soient (f, g, h) trois endomorphismes de E tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1 Montrer que f, g et h ont même noyau et même image.

2 Montrer que $f^5 = f$.

3 En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires.

16 Deux endomorphismes

Soient (f, g) deux endomorphismes de E tels que $g \circ f \circ g = g$ et $f = f \circ g \circ f$.

1 Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\ker g$ sont supplémentaires.

2 Montrer que $f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$.

17 Drapeaux

Soit u un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\ker u^k \subset \ker u^{k+1}$. Conjecturer et prouver une propriété similaire sur $\mathrm{Im} u^k$.

2 On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N},\ p \geq n \ \Rightarrow\ \ker u^p = \ker u^{p+1}$.

3 En déduire que pour ce n, $\ker u^n$ et $\mathrm{Im} u^n$ sont en somme directe.