Semaine 9 - Intégration de fonctions continues

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Une convergence de norme

1 Notons $I_n = \left(\int_a^b f(t)^n \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$. On a tout d'abord que $\forall x \in [a,b]$, $\frac{f(x)}{M} \leq 1$. Ainsi, $\int_a^b \left(\frac{f(t)}{M}\right)^n \mathrm{d}t \leq b-a$, et donc $\frac{1}{M} I_n \leq (b-a)^{\frac{1}{n}}$. Donc $I_n \leq M + \epsilon$ pour n assez grand. D'un autre côté M est atteint car f est continue sur $[a,b]$ (intervalle borné et fermé). Il existe donc un intervalle $I_{x_0,\eta} = [x_0 - \frac{\eta}{2}, x_0 + \frac{\eta}{2}]$ tel que si $x \in I_{a,\eta}$, $f(x) \geq M - \frac{\epsilon}{2}$. $\int_a^b f(t)^n \, \mathrm{d}t \geq \int_{a-\frac{\eta}{2}}^{a+\frac{\eta}{2}} f(t)^n \, \mathrm{d}t \geq \eta(M - \frac{\epsilon}{2})^n$ (si x_0 atteint sur $]a,b[$, le raisonnement est le même aux bords, il faut seulement modifier $I_{x_0,\eta}$. Donc $I_n \geq \eta^{\frac{1}{n}}(M - \frac{\epsilon}{2})$ et ce quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Donc pour n assez grand $\eta^{\frac{1}{n}}$ est plus grand que $\frac{M-\epsilon}{M-\frac{\epsilon}{2}} < 1$. Donc pour n assez grand $M - \epsilon \leq I_n \leq M + \epsilon$ et donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers M.

Remarque : l'ensemble des fonctions à valeurs réelles pour lesquelles l'intégrales $\int |f|^p$ est définie est appelé fonctions $L^p(\mathbb{R})$ (la définition est volontairement assez informelle, il faudrait des outils de théorie de la mesure pour définir de manière rigoureuse ces fonctions). Sur les espaces $L^p(\mathbb{R})$ une norme est donnée par $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (seule l'inégalité triangulaire est vraiment dure à démontrer et fait appel à l'inégalité de Hölder). On appelle souvent $L^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions bornées (dans un sens légèrement différent de celui que vous connaissez) et cet espace peut aussi être muni d'une norme appelée la norme infinie, $\|f\|_\infty = \sup |f|$ (encore une fois ce n'est pas vraiment une borne supérieure mais une borne supérieure essentielle, il se trouve que toutes les subtilités précisées ici n'entrainent pas de modifications par rapport à ce que vous connaissez si on se restreint aux fonctions continues). Cet exercice montre que la norme infinie peut effectivement se voir comme la norme limite des normes des différents L^p. Ces espaces vectoriels possèdent de nombreuses propriétés et constitue un objet d'étude privilégié de l'analyse fonctionnelle.

2 Inégalité et intégrale

Il s'agit d'écrire $f(x) = \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t$. De cette manière, $|f(x)|^2 \leq \left(\int_a^x |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)(t-a) \leq \left(\int_a^b |f'(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right)(t-a)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il s'agit ensuite d'intégrer des deux côtés de l'inégalité en notant que $\int_a^b t - a \, \mathrm{d}t = \frac{(b-a)^2}{2}$.

3 Module et cas d'égalité

On pose $I = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = |I|e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose également ϕ une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(t) = |f(t)|e^{i\phi(t)}$. $I = |I|e^{i\alpha} = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t e^{i\alpha} = \int_a^b |f(t)|e^{i\alpha} \, \mathrm{d}t$. Mais aussi $I = \int_a^b |f(t)|e^{i\phi(t)} \, \mathrm{d}t$. On obtient en faisant la différence, $\int_a^b |f(t)|(1 - e^{i(\phi(t)-\alpha)}) \, \mathrm{d}t = 0$. En passant à la partie réelle et en remarquant que $|f(\cdot)|$ et $1 - \cos(\phi(\cdot) - \alpha)$ sont deux fonctions positives on obtient que $f = 0$ ou $\phi(\cdot) = \alpha$. Ainsi dans tous les cas il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = |f(t)|e^{i\alpha}$.

4 Inégalité de Young

1 La forme de la seconde intégrale invite au changement de variable $u = f(t)$. Ce changement de variable est valable car la fonction f est une bijection continûment dérivable. Ainsi on obtient $\int_0^x uf'(u) \, \mathrm{d}u$. En effet $\mathrm{d}uf'(u) = \mathrm{d}t$. Une intégration par partie permet d'écrire $\int_0^x uf'(u) \, \mathrm{d}u = xf(x) - \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$. On obtient donc l'égalité voulue.

2 Supposons que $b \geq f(a)$ (l'autre cas ce traite exactement de la même manière en considérant f^{-1} plutôt que f).

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(a)} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= af(a) + \int_{f(a)}^b f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= ab + \int_{f(a)}^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - a(b - f(a)) \\
&= \int_{f(a)}^b f^{-1}(t) - a\,\mathrm{d}t \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

car f^{-1} est strictement croissante et $f^{-1}(f(a)) = a$. On a égalité si et seulement si $f(a) = b$.

5 Suite et intégrale (1)

1 $J_{n+2} + J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan(x)^2)\tan(x)^n \mathrm{dx} = \frac{1}{n+1} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(.)^{n+1})'(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{n+1}$.

2 $J_0 = \frac{\pi}{4}$, $J_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{dx} = -\ln(\cos(\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}\ln(2)$. On a donc les formules suivantes selon la parité de n :

- $J_{2n} = (-1)^n \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{\pi}{4} \right)$
- $J_{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \frac{1}{2}\ln(2) \right)$

6 Suite et intégrale (2)

1 $K_0 = \frac{\pi}{4}$ et $K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{dx}$. En utilisant les règles de Bioche qui sont rappelées à la fin de cet exercice, on trouve que le changement de variable en sinus est adapté ici. On obtient, $K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)}\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-x^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\mathrm{dx} \right)$. En intégrant, on trouve, $K_1 = \ln\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \right) = \ln(1 + \sqrt{2})$.

2 On a,

$$\begin{aligned}
K_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^2} \frac{1}{\cos(x)^n}\mathrm{dx} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)' \frac{1}{\cos(x)^n}\mathrm{dx} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\sin(x) \frac{1}{\cos(x)^{n+1}}\mathrm{dx} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos(x)^2}{\cos(x)^{n+2}}\mathrm{dx} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} - nK_{n+2} + nK_n \\
&= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{n}{n+1}K_n
\end{aligned} \tag{1}$$

. Ainsi on a entièrement déterminé la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : on rappelle ici les règles de Bioche qui sont très utiles pour calculer des intégrales de fonctions trigonométriques. On pose $f(x) = g(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$ et $F(x) = f(x)\mathrm{dx}$. Si :

- $F(x) = F(-x)$ alors on effectue le changement de variable $x \mapsto \cos(x)$
- $F(x) = F(\pi - x)$ alors on effectue le changement de variable $x \mapsto \sin(x)$
- $F(x) = F(\pi + x)$ alors on effectue le changement de variable $x \mapsto \tan(x)$

.

7 Suite et intégrale (3)

1 $L_{n+1} = \int_1^e \log(x)^{n+1}\mathrm{dx} = [x\log(x)^{n+1}]_1^e - (n+1)L_n = e - (n+1)L_n$. De plus, $L_0 = e - 1$. On détermine donc de manière unique la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Le changement de variable $u = \log(x)$ permet d'écrire $L_n = \int_0^1 u^n e^{-nu}\mathrm{du} \leq \int_0^1 u^n\mathrm{du} \longrightarrow 0$. Donc $e - (n+1)L_n \longrightarrow 0$. D'où $L_n \sim \frac{e}{n}$.

8 Condition suffisante et point fixe

1 Il suffit de remarquer que $\int_0^1 (f(t) - t)\,\mathrm{d}t$. Posons $g(t) = f(t) - t$. $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t \in [0,1]$, $g(t) = t$. Donc $f(t) = t$ et f admet un point fixe

9 Inégalité et maximum

1 Notons $\alpha = \frac{c-a}{b-a}$. On remarque que $1-\alpha = \frac{b-c}{b-a}$. Donc $\alpha\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + (1-\alpha)\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On note $M = \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$. On a $\alpha\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + (1-\alpha)\frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \alpha M + (1-\alpha)M \leq M$. Ainsi, $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M$.

2 L'interprétation géométrique est la suivante. Il s'agit de remarquer que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est la moyenne de f sur $[a,b]$. L'inégalité précédente assure que la moyenne sur $[a,b]$ est plus petite que le maximum entre la moyenne sur $[a,c]$ et celle sur $[c,b]$.

10 Annulation et intégration (1)

1 Si il existe $(x_0, x_1) \in [0,\pi]^2$ tels que $f(x_0)f(x_1) \leq 0$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) f admet un point d'annulation. Il s'agit de remarquer que $x \mapsto \sin(x)$ est positive sur $[0,\pi]$. Supposons donc que f est positive (le cas négatif se traite de la même manière). Alors l'intégrale $\int_0^\pi \sin(t)f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ et l'inégalité est une égalité si et seulement si $f = 0$. Ainsi f admet un point d'annulation.

1 Supposons que f ne s'annule pas sur $I_1 = [0, a[$ et sur $I_2 =]a,\pi]$ alors f est de signe constant sur chacun de ces intervalles. En effet sinon le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure. Supposons que f est positive sur I_1 et I_2 (le cas négatif se traite de la même façon) alors f est positive sur $[0,\pi]$ et comme pour la question précédente cela implique que $f = 0$ et donc f possède deux points d'annulation.

Supposons désormais que f change de signe en a. Par exemple f négative sur I_1 et positive sur I_2. On a donc $x \mapsto f(x)\sin(x-a)$ qui est positive sur $[0,\pi]$ et donc $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t \geq 0$. Mais $\sin(t-a) = \sin(a)\cos(t) - \cos(a)\sin(t)$ et donc $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\,\mathrm{d}t = 0$ ce qui n'est possible que si $f = 0$. Dans tous les cas f possède deux points d'annulation.

11 Annulation et intégration (2)

1 On montre que pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) de degré inférieur ou égal à n, $\int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b f(t)t^k\,\mathrm{d}t = 0$. On raisonne par l'absurde en considérant une fonction qui vérifie l'hypothèse précédente et qui possède moins de $n-1$ points d'annulation. Posons P comme proposé dans l'indication. Il convient de remarquer que $x \mapsto f(x)P(x)$ est de signe constant. Mais puisque le nombre de points de changement de signe est plus petit que le nombre de points d'annulation on obtient que $\int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Cela n'est possible que si $x \mapsto f(x)P(x)$ est la fonction nulle. Ainsi f admet une infinité non dénombrable de points d'annulation donc c'est absurde.

Remarque : en analyse numérique on cherche souvent des polynômes qui ressemblent le plus possible à une fonction f. Pour définir la "ressemblance" on utilise les différentes normes sur les espaces de fonctions à notre disposition (voir exercice 1 pour une explication à ce sujet). Parmi les normes populaires on trouve $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. Par exemple pour la norme $\|\cdot\|_2$ on cherche le minimum $\|f-P\|_2$ sur l'espace des polynômes de degré n (f est fixée). Ce polynôme existe et est unique (pour $\|\cdot\|_\infty$ on a seulement l'existence). On le note $P_{n,2}(f)$ et $h_{n,2} = f - P_{n,2}$. Alors on peut montrer que $f - P_{n,2}$ vérifie l'hypothèse de l'énoncé. En somme toute interpolation polynômiale pour la norme $\|\cdot\|_2$ (c'est le nom donné à $P_{n,2}(f)$) oscille au moins $n+1$ fois. Ce résultat d'oscillation reste vrai pour la norme infinie mais la preuve est beaucoup plus compliquée (théorème d'équioscillation de Tchebychev).

Remarque : à la suite de cet exercice on peut se demander ce qu'il advient si on change $k \in [\![0, n]\!]$ en $\mathbb{N}$. Dans ce cas, on montre que $f = 0$. Il faut cependant déployer des outils d'analyse de Fourier et d'analyse complexe pour conclure correctement.

12 Formule de la moyenne

1 On commence par supposer que $\int_a^b g(t\,\mathrm{d}t = 1$. Soit x_0 tel que $f(x_0) = \min\ f$ et x_1 tel que $f(x_1) = \max\ f$ (possible car f est continue sur un intervalle fermé borné). Il convient de remarque que

$$f(x_0) = \int_a^b f(x_0)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(x_1)g(t)\,\mathrm{d}t \leq f(x_1).$$

Donc si on pose $g(x) = f(x) - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, $g(x_0) \leq 0 \leq g(x_1)$. Il existe donc c dans $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$ ce qui conclut le cas $\int_a^b g(t\,\mathrm{d}t = 1$. Dans le cas général on se ramène au particulier en considérant $\tilde{g} = \frac{g}{\int_a^b g(t\,\mathrm{d}t}$.

2 A FAIRE