

TD 5

Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites

Exercice 1 Soit $\mathcal{S}_{r,s}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à n racines simples. Montrer que $\mathcal{S}_{r,s}$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 Soient $A_0 \in Mn(\mathbb{R})$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ une valeur propre de multiplicité dans le polynôme caractéristique égale à 1. Montrer qu'il existe une fonction "valeur propre" de classe C^1 dans un voisinage de A_0 . De façon précise, montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $Mn(\mathbb{R})$, un voisinage W de λ_0 et une fonction $vp : V \rightarrow W$ tel que $vp(A)$ soit une valeur propre de A pour tout $A \in V$.

Exercice 3 Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in \Omega$, $df_x \in O_n(\mathbb{R})$. On va montrer que f est en fait une isométrie affine.

a) Justifier qu'il suffit de prouver que df est localement constante sur Ω .

b) Si $x_0 \in \Omega$, montrer que pour x assez proche de x_0 on a

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|x - x_0\|$$

c) Soit g continue de $[0, 1]$ à valeurs dans la boule unité de \mathbb{R}^n . Soit $I = \int_0^1 g(t)dt$. Montrer que si $\|I\| = 1$ alors g est constante égale à I en tout t .

d) En déduire que df est localement une isométrie affine. Conclure

Exercice 4 Soit $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous-espace des matrices symétriques d'ordre n . On rappelle qu'une forme quadratique Q sur \mathbb{R}^n (identifiée à une matrice de $S_n(\mathbb{R})$ dans une base fixée) est dite de signature (p, q) avec $p, q \in \mathbb{N}$, $p + q \leq n$ s'il existe une matrice inversible B telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (Bx)^T Q (Bx) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

a) Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit Φ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$ telle que $\Phi(M) = M^T A_0 M$. Montrer que $d\Phi(I_n)$ est surjective et préciser son noyau.

b) En considérant la restriction de Φ au sous-espace $A_0^{-1}S_n(\mathbb{R})$ montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application de classe C^1 de V à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui à A associe M telle que $\forall A \in V, A = M^T A_0 M$.

c) Soit maintenant U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^3 . On suppose que $df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n - p)$. Montrer que $f(x) - f(0) = x^T Q(x)x$ où Q est une fonction de classe C^1 de \mathbb{R}^n dans $S_n(\mathbb{R})$.

- d)** Montrer qu'au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une fonction $x \rightarrow M(x)$ de classe C^1 à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(x) = M(x)^T Q(0) M(x)$. En déduire l'existence d'un difféomorphisme $: x \rightarrow \Psi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_n(x))$ entre deux voisinages de l'origine dans \mathbb{R}^n tel que $\Psi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = \Psi_1(x)^2 + \dots + \Psi_p(x)^2 - \Psi_{p+1}(x)^2 - \dots - \Psi_n(x)^2$.

Exercice 5 Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère le système différentiel

$$S_\mu \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y^2 - \cos x \\ \frac{dy}{dt} = -y \sin x - \mu y e^y \end{cases}$$

- a)** Montrer que pour tout $0 \leq \mu < 1$ le système S_μ admet un unique point d'équilibre $C(\mu) = (x_c(\mu), y_c(\mu))$ dans la bande $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, y > 0\}$.
- b)** Montrer que la fonction $: \mu \rightarrow C(\mu)$ est de classe C^1 au voisinage de 0 et donner un développement limité à l'ordre 1 de $x_c(\mu)$ et $y_c(\mu)$.
- c)** On note $A(\mu)$ la matrice du problème linéarisé au point $C(\mu)$. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de $A(\mu)$ en 0.