Semaine 29 - Formules de Taylor, matrices équivalentes, matrices semblables

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

Dans tous les exercices $n \in \mathbb{N}$.

1 Matrices inversibles

1 Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme de deux matrices inversibles.

2 Déterminant linéaire ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

1 Que peut-on dire de A ?

3 Une caractérisation de la similitude en basse dimension

1 L'égalité des traces et des déterminants ne suffit pas à montrer que deux matrices sont semblables. Trouver un exemple illustrant cette affirmation.

2 Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices semblables. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(A) = 0 \Leftrightarrow P(B) = 0$.

3 Montrer que la réciproque est fausse.

Remarque : *(remarque utile pour la spé !)* en dimension inférieure à 2 on peut montrer que l'égalité des traces et déterminants suffit à montrer que deux matrices sont semblables. Cela est faux dès la dimension 3. Il suffit de considérer des matrices dont les polynômes caractéristiques sont $X^3 + X^2 + X + 1$ et $X^3 + X^2 + 1$. La condition de la question 2 est équivalente au fait que les polynômes minimaux de A et B sont égaux ce qui n'implique pas que les polynômes caractéristiques sont égaux. Par exemple il suffit de prendre les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Par contre, en dimension 3, si les polynômes minimaux et polynômes caractéristiques sont égaux alors les matrices sont semblables. Cette remarque ne tient plus en dimension 4.

4 Inversibilité et application multiplicative

Soit f une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ non constante telle que,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ f(AB) = f(A)f(B). \tag{1}$$

1 Montrer que $f(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.

5 Rang et somme de matrices

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ telles que,

$$\operatorname{rg}(UA + BV) = \min(n, \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)) \tag{2}$$

2 On suppose que $\operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B) \geq n$ que peut-on dire de $UA + BV$?

6 Trace et similitude

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

1 Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

2 On considère l'endomorphisme sur l'espace des matrices $\phi(M) = DM - MD$ avec D matrice diagonale dont tous les éléments sont distincts. Donner le noyau et l'image de cet endormophisme.

3 Montrer que A est de trace nulle si et seulement si il existe $(R, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A = RS - SR$.

7 Une équation matricielle

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A = 0$. On suppose que $A \neq 0$.

1 Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8 Rang et similitude

Soit A une matrice de rang 1.

1 Montrer que $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$ et $\det(I_n + A) = 1 + \operatorname{Tr}(A)$.

9 Changement de corps et similitude

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10 Un schéma numérique

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1 Donner la limite de $\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$ lorsque h tend vers 0.

11 Une approximation

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) - nf(0)$.

1 Donner la limite de la suite S_n.