

Conclusion Le jury était très sympathique. J'étais tout excité et en pleine forme ; l'oral était vivant et intéressant. J'ai découvert des choses et je leur ai fait part de mon émerveillement, mais je crains qu'ils ne m'aient pris pour un savant fou, surtout que mon développement était un peu brouillon.

Ils ne m'ont pas embêté sur des détails accessoires et, même s'ils ne se satisfaisaient pas d'une pensée brute, un raisonnement bien mené à l'oral semblaient leur convenir. Sauf erreur de ma part, le temps de questions a duré 45 minutes, ce qui m'a permis de bien m'exprimer.

2 Analyse

Tirage :

- 203 Utilisation de la notion de compacité. (celle que j'ai choisie)
- 236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Développements proposés :

- Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints sur un espace de Hilbert séparable. (choix du jury)
- Théorème de Stone-Weierstrass

Questions sur le développement :

- Prouver que x_n converge faiblement vers x implique que Tx_n converge fortement vers Tx .
 - Je n'avais pas eu le temps de revoir cela. Je me suis souvenu qu'il suffisait de montrer que Tx_n n'avait qu'une seule valeur d'adhérence. J'ai fini par m'en sortir après avoir réfléchi un peu. Je n'avais pas mis la définition d'un opérateur compact, ils me l'ont demandée.
- Montrer que si x_n converge fortement vers x et y_n converge faiblement vers y , alors $\langle x_n, y_n \rangle$ converge vers $\langle x, y \rangle$.
 - Là encore, je n'avais pas anticipé. J'avais le souvenir que la preuve était compliquée, ce qui m'a paralysé (alors que c'est très simple en réalité!). Heureusement, un des membres du jury m'a aidé et cela a été vite ensuite.
- Question bizarre : est-ce que votre preuve fait apparaître que le spectre est dénombrable ?
 - J'ai dit que s'il ne l'était pas, on aurait une base Hilbertienne indénombrable (formée de vecteurs propres). Il n'était pas convaincu, je n'ai pas trouvé d'argument satisfaisant donc on est passé à autre chose.

Questions sur le plan :

- Êtes-vous sûr du signe "+" dans votre équation différentielle ?

- J'ai répondu qu'il y avait évidemment une erreur. J'avais mis " $u'' + u$ ".
- "On va vérifier un peu tout ça". Donnez la définition de $H_0^1([0, 1])$. Est-ce que pour tout f , il existe un u vérifiant $a(u, v) = \langle f, v \rangle$ pour tout v dans H_0^1 , avec a le produit scalaire H^1 .
- A l'oral, j'ai donné les arguments permettant d'utiliser le théorème de Riesz. On m'a demandé s'il y avait unicité du u . J'ai dit qu'il y avait unicité dans la théorème de Riesz, ce qui a suffi.
- Est-ce qu'on pourrait étendre cela à une classe plus importante de fonctions pour f ?
- Ils voulaient que je parle de H^{-1} . Je leur ai dit que je ne connaissais pas. Ils ont remarqué que, effectivement, ce n'était peut-être pas au programme de l'agrégation (!).

Exercices :

- Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère, pour tout compact K de \mathbb{R} , $N_K(P) = \sup\{P(x), x \in K\}$. Montrer, dans le cas où K est infini, que c'est une norme.
- J'ai dit qu'un polynôme n'avait qu'un nombre fini de racines (sic), cela a suffi.
- On cherche à montrer que, si K est différent de K' , tous deux infinis, alors les normes associées ne sont pas équivalentes
- J'ai eu besoin d'un peu d'aide. Il fallait prendre un élément dans la différence symétrique de K et K' . Par exemple, x appartenant à K mais pas à K' . Ensuite, considérer une fonction continue qui est nulle sur le compact K' et qui vaut 1 en x . Enfin, considérer une suite de fonctions polynômiales qui tend vers cette fonction, uniformément sur $K \cup K'$. J'ai eu besoin d'un peu d'aide, mais j'ai fini par résoudre l'exercice. Cependant, je n'empruntais visiblement la voie qu'ils avaient prévue et donc je n'ai pas pu aller au bout de mon raisonnement.

Conclusion Un membre du jury était très intéressé par les espaces de Sobolev ! Donner la définition en affirmant que les éléments de H^1 avaient un représentant continu leur suffisait largement, ils n'ont pas vraiment cherché à me piéger.

Pendant mon temps de préparation, j'ai gardé en tête le conseil donné par A. Leclaire : "se concentrer sur des applications percutantes". Je suis donc rentré immédiatement dans le vif du sujet et mon plan était très dynamique.

Fatigué, je n'ai pas réussi à optimiser mon temps de préparation. J'ai surtout revu les applications de base de la compacité et n'ai pas eu le temps d'aller plus loin, ni d'anticiper les questions qu'ils me poseraient.

Mon plan était très ambitieux mais je ne m'en suis rendu compte que trop tard. D'un certain point de vue, cela ne m'a pas vraiment pénalisé car on ne m'a pas trop piégé dessus. Cependant, je ne me sentais pas très à l'aise. Ainsi, je n'étais pas capable d'anticiper les questions qu'ils me posaient, d'ajouter des éléments montrant que j'en savais encore plus, ni même de répondre rapidement à l'oral. Je trouve que l'oral a manqué de dynamisme à cause de cela ; c'est un

aspect auquel je n'avais pas pensé avant.

Au passage, je remercie M. Breden pour la superbe preuve du théorème de diagonalisation qu'il nous a apprise !

3 Modélisation

Textes proposés :

- Celui que j'ai choisi : un texte parlant de codage et ayant comme mots clés "corps finis, arithmétique des polynômes"
- L'autre avait comme mots clés "Polynômes à plusieurs variables, ...". Il traitait d'un système de proie prédateur qui était modélisé par une équation différentielle d'ordre 1 linéaire.

Le texte Le texte que j'ai choisi traitait de l'exemple du codage du bluetooth. C'est un codage par décalage, où la suite du décalage vérifie une relation de récurrence linéaire. Le problème auquel le texte s'intéressait principalement était celui de la périodicité : en effet, les bits du décalage présentent nécessairement une périodicité, qui peut éventuellement être utilisée pour casser le code.

Le texte était d'une qualité comparable à ceux qu'on a eu pendant l'année. Les démonstrations n'étaient pas très jolies. Il manquait de cohérence et s'est petit à petit éloigné du problème concret pour devenir un problème de mathématiques pures. Il était possible d'en faire quelque chose de construit, mais le texte ne proposait même pas d'outils adaptés. Par exemple, j'ai du introduire moi-même des matrices compagnons, alors que c'était vraiment fondamental pour bien comprendre les phénomènes en jeu. A la fin, le texte énonçait même des théorèmes en caractéristique nulle... Je n'ai pas trouvé cela très sérieux donc je n'en ai pas parlé. Avec le recul, cela avait quand-même un intérêt car ils étaient aussi vrais lorsque la caractéristique était suffisamment grande.

Mon exposé Pendant le temps de préparation, j'ai passé beaucoup de temps à trouver une démonstration d'un théorème central qui était admis. Le reste (avant que ça parte en délire complet !) était classique.

Mes simulations se sont limitées à vérifier que le système bluetooth vérifiait bien les propriétés annoncées. Pour ce faire, j'ai recopié les polynômes du bluetooth, qui n'étaient pas vraiment destinés à cela car ils n'apparaissaient que sur un schéma mal photocopié (!). Globalement, je n'ai fait que des trucs très basiques :

- Test d'irréductibilité utilisant la factorisation de $X^{2^n} - X$.
- Savoir si \bar{X} engendre $\mathbb{F}_2[X]/(P)^*$: naïf et avec la décomposition en facteur premiers de l'ordre du groupe.

... et ils avaient l'air contents !

Je n'ai pas du tout suivi les indications de la fin du document car elles ne me paraissaient pas très pertinentes. J'ai préféré faire quelque chose de cohérent,