

TD 7

Sous-variétés

Exercice 1 Soient $0 \leq r \leq n$ des entier (avec $n \geq 2$).

- a) Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété C^∞ .
- b) Montrer que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang $n - 1$ est une sous-variété.
- c) Montrer qu'il existe un voisinage U de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que si

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in U$$

alors la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$

est de rang r ssi $D = B(I_r + A)^{-1}C$.

- d) Soit $V_r \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de rang r . Montrer que c'est une sous-variété et donner sa dimension.
- e) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de rang r forment une sous-variété de l'espace des matrices symétriques. Donner sa dimension.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble $N = \{M \in M_2(\mathbb{R}), \quad M \neq 0, \quad M^2 = 0\}$ est une sous-variété. Donner sa dimension. *Remarque: On pourra commencer par chercher une caractérisation de N à l'aide de la trace et du déterminant*

Exercice 3 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 avec I intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. $\mathcal{C} = \{\gamma(t) / t \in I\}$ définit une courbe paramétrée du plan. \mathcal{C} est-elle nécessairement une sous-variété de \mathbb{R}^2 ? Et si l'on suppose de plus que γ est injective ?