Semaine 17 - Théorie de la dimension et applications linéaires

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

Dans la suite k est un corps (on se limite à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) et E un k-espace vectoriel.

1 Une famille libre ?

1 Montrer que $(x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque : on peut montrer de manière plus générale qu'une famille de fonctions $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe n réels $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ tels que $(f_i(x_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ soit une matrice inversible.

2 Espace vectoriel et fonctions affines

1 Soit F l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ affines sur $[-1, 0]$ et affines sur $[0, 1]$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel (de quel espace vectoriel ?).

2 Trouver une base de F.

3 Une base de polynômes

1 Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ avec $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 Nombres réels et espace vectoriel

Le but de cet exercice est d'étudier $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant.

1 Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $(p_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$. En déduire qu'il n'existe pas de base finie de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2 Autre démonstration : si $(x_n)_{n\in[\![1,N]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel en déduire que tout $x \in \mathbb{R}$ est racine d'un polynôme de degré $N - 1$.

3 En considérant $2^{1/N}$ en déduire une contradiction (on admettra que $X^n - 2$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$).

Remarque : en fait on peut même montrer en considérant la famille $(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{10^{\lfloor a^n \rfloor}})_{a>1}$ que toute base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel est de cardinal celui de $\mathbb{R}$. L'existence d'une base de $\mathbb{R}$ est assurée par l'axiome du choix (bases de Hamel) mais n'est pas constructible.

5 Polynômes à valeurs entières

1 Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P_k = \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!}$ et $P_0 = 1$. Montrer que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall k \in [\![0, n]\!]$, $P_k(m) \in \mathbb{Z}$.

3 En déduire la forme des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui prennent des valeurs entières sur les entiers.

6 Divisibilité et sous-espace vectoriel

Soit A polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1 Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], A|P\}$ est un sous-espace vectoriel.

2 Exhiber une base et un supplémentaire de cet espace.

7 Une équation polynômiale

1 Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^n$.

8 Une somme directe

1 Soit $i \in [\![0, n]\!]$ et $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \forall j \in [\![0, n]\!] \backslash \{i\},\ P(j) = 0,\ P(i) \neq 0\}$. Montrer que $F_i \cup \{0\}$ est un espace vectoriel.

2 Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

9 Drapeaux

Soit u un endomorphisme de E.

1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \ker u^k \subset \ker u^{k+1}$. Conjecturer et prouver une propriété similaire sur $\mathrm{Im} u^k$.

2 On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N},\ p \geq n \ \Rightarrow\ \ker u^p = \ker u^{p+1}$.

3 En déduire que pour ce n, $\ker u^n$ et $\mathrm{Im} u^n$ sont en somme directe. Que peut-on dire dans le cas de la dimension finie ?

10 Stabilisation et endomorphismes

Soit u un endomorphisme de E.

1 On suppose que u stabilise toutes les droites (sous espaces vectoriels de dimension 1), c'est-à-dire que pour toute droite D, $u(D) \subset D$. Que peut-on dire de u ?

2 On suppose maintenant que u stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension k. Que peut-on dire de u ?

11 Polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme de E. On suppose que E est de dimension finie.

1 Montrer qu'il existe $P \in k[X]$ tel que $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{\deg P} a_k u^k = 0$.

2 Montrer que u est bijectif si et seulement un de ses polynômes annulateurs vérifie $a_0 \neq 0$.

3 Montrer que $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont en somme directe si et seulement il existe un polynôme annulateur dont 0 est racine d'ordre au plus 1.

4 Que se passe-t-il en dimension infinie ?

12 Rang et endomorphisme

Soit u et v deux endomorphismes de E ($k-$espace vectoriel de dimension finie) tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ bijectif.

1 Montrer que $\mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v = \dim E$.

13 Rang et composition

Soit (f, g) deux endomorphismes de E un $k-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1 Montrer que $\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} f - n \leq \mathrm{rg} f \circ g$.

2 En déduire les endomorphismes u de $\mathbb{R}^3$ tels que $u^2 = 0$.

14 Rang et sous-espace vectoriel

Soit f un endomorphisme de E ($k-$espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1 Montrer que $\dim(\ker f \cap F) \geq \dim F - \mathrm{rg} f$

15 Endomorphismes et polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ on note $\phi :\ \mathbb{R}_n[X] \ \rightarrow\ \mathbb{R}_n[X]$ défini par $\phi(P) = P(X+1) + P(X)$.

1 Montrer que ϕ est un isomorphisme. On note $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P_k = \phi^{-1}(2X^k)$.

2 Montrer que $P_n(X+1)$ est combinaison linéaire des $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$. En considérant $P_n(X+2) - P_n(X+1)$ expliciter cette combinaison linéaire.

3 Donner une relation liant P_n aux $(P_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$.