Semaine 24 - Séries et dénombrement

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Permutations et probabilités

On suppose que trois personnes ($1, 2$ et 3) sont assises à une table. Les trois chaises portent les noms A, B et C. Toutes les minutes, deux personnes échangent de place.

1 Quelle est la probabilité pour qu'au bout de n minutes on retrouve la configuration initiale ?

2 Formule de Vandermonde

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $k \in [\![1, \min(p, n)]\!]$.

1 Montrer que $\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{p}{k-j}$.

3 Nombre de surjections

Soit E de cardinal n et F de cardinal p. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F. Le but de cet exercice est de donner une formule pour S_n^p.

1 Que peut-on dire si $p = 1$? Si $p = n$? Si $p > n$?

2 Dans le cas où $p \leq n$ donner une formule liant S_n^p, S_{n-1}^{p-1} et S_{n-1}^p.

3 En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$.

Remarque : on peut retrouver ce résultat d'une manière plus naturelle en utilisant la formule du crible : $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i_j \in \{i_1, \dots, i_n\}} A_j\right)$ et en posant A_i l'ensemble des applications de E dans F tel que l'élément numéro i de F n'a pas d'antécédent.

4 Nombre de dérangements

On considère l'espace des permutations de $[\![1, n]\!]$. On appelle dérangement toute permutation sans point fixe. Notre but ici est de donner une formule explicite du nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

1 En s'inspirant de la remarque de l'exercice précédent montré que le nombre de dérangements $D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2 En déduire le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement r points fixes.

Remarque : $\frac{D_n}{n!} \to e^{-1}$. Ainsi lors du tirage des noms pour un "Secret Santa", on a en gros une probabilité de 0.36 pour que personne ne tombe sur son propre prénom.

5 Suites croissantes (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

1 Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n ?

2 En déduire le nombre de suites de p éléments de $\mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ qui vérifient $x_1 + \cdots + x_p \leq n$.

2 En déduire le nombre de suites de p éléments de $\mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ qui vérifient $x_1 + \cdots + x_p = n$.

6 Suites croissantes (2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

1 Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n ? Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

2 Combien existe-t-il de suites croissantes de p entiers compris entre 1 et n ?

7 Des droites et des triangles

Soient n droites du plan en position générale (deux droites choisies arbitrairement ne sont pas parallèles, trois droites choisies arbitrairement ne sont pas concourantes).

1 Combien forme-t-on de triangles ?

8 Relations d'ordre

Soit E un ensemble à n éléments.

1 Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur E ?

9 Des anagrammes

Soit un mot de longueur n. On suppose que la lettre numéro j apparaît p_j fois.

1 Combien d'anagrammes peut-on écrire à partir du mot de longueur n ?

10 Le paradoxe du prince de Toscane

On lance trois dés (valeurs comprises entre 1 et 6). On note X la valeur de la somme des valeurs obtenues (exemple $5 = 3 + 2 + 1$).

1 Combien y a-t-il de manière d'écrire 10 comme somme de trois chiffres ? 9 ?

2 En déduire la probabilité p_9 que X vaille 9 et la probabilité p_10 que X vaille 10.

11 Dimension d'un espace vectoriel

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace $k_n[X_1, \ldots, X_k]$ des polynômes à k indéterminées de degré n, par exemple $XY + X^2 + Y^2 + 10X \in k_2[X, Y]$.

1 Après avoir montré que $k_n[X_1, \ldots, X_k]$ est un k-espace vectoriel, déterminer sa dimension.

12 Sommes de Riemann et équivalent

1 Soit $\alpha \in]0,1[$. Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini.

2 Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini.

13 Une série convergente ?

1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général : $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$?

14 Un produit convergent ?

1 Que peut-on dire de la convergence du produit de terme général $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$?

15 Séries de Bertrand

On note $u_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme générale $u_{n,\alpha,\beta}$ pour $\alpha > 1$? Pour $\alpha < 1$? Pour $\alpha = 1$ et $\beta > 1$? Pour $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$?

2 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)^2}$?

16 Calcul de limite (1)

1 Montrer que la série de terme général $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge et déterminer cette limite.

17 Calcul de limite (2)

1 Montrer que $S(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer la limite de $S(a)$ en $+\infty$.

18 Somme des inverses des nombres premiers

On énumère les nombres premiers dans l'ordre croissant : $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1 Montrer que la convergence de la série de terme général p_n est équivalente à la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$.

2 Montrer que $v_n \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Conclure.

3 Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la convergence de la série de terme général $\frac{1}{p_n^\alpha}$.

19 Transformation d'Abel et application

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On note $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$

1 On considère $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_k$. Montrer que :

$$S_n = u_n s_n - u_0 s_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k-1}) s_k$$

2 En déduire la convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

Remarque : la transformation d'Abel n'est rien de moins qu'une intégration par partie en discret. Il est peut être utile de garder cette transformation en tête lorsque l'on ne parvient pas à démontrer la convergence de la série avec des règles type Cauchy mais que la forme du terme général nous invite à poursuivre dans cette direction.

20 Valeur absolue et sinus

1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{|\sin(n)|}{n}$?