Feuille 5 - Convexité, optimisation

Exercice 1 – Caractérisation de la convexité.

a) On suppose que f est différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geqslant \mathrm{d}f_x(y - x)$$

pour tous $x, y \in U$.

b) On suppose que f est deux fois différentiable sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si $\mathrm{d}^2 f(x)$ est positive (en tant que forme quadratique) pour tout $x \in U$.

c) On suppose que f est convexe et différentiable sur U. Soit $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f_a = 0$. Montrer que a est un minimum global de f sur U.

d) *Exemple :* Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive, $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

A quelle condition f a-t-elle un minimum global ? En déduire une méthode de résolution d'un système linéaire inversible.

Exercice 2 – Moindres carrés.

Soient $(x_i, y_i)_{i\in\{1,..,n\}}$ n points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que les x_i ne soient pas tous égaux entre eux. Montrer qu'il existe une unique droite du plan, d'équation $y = \lambda x + \mu$, qui minimise la somme des carrés des distances prises 'verticalement' entre les points et la droite.

Exercice 3 – Moyenne de Fréchet.

Exprimer la moyenne de n points dans $\mathbb{R}^d$ en terme de minimisation.

Exercice 4 – Norme et majoration.

On considère E égal à l'ensemble $\mathbb{R}^d$ privé de $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \exists i : \quad x_i = 0\}$. On note $N_1(x) = \sum_i |x_i|$ et $N_2(x) = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

a) On note $F_C = \{x \in E \mid N_1(x) = C\}$. Peut-on minorer N_2 sur F_C ? Et la majorer ? (si oui donner les extrema).

b) On note $G_C = \{x \in E \mid N_2(x) = C\}$. Peut-on minorer N_1 sur G_C ? Et la majorer ? (si oui donner les extrema).

Exercice 5 – Une caractérisation des matrices spéciales orthogonales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa norme euclidienne $\|M\|_2 = Tr(M^T M)$. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

Exercice 6 – Loi de Descartes.

On considère un rayon lumineux se déplaçant dans un plan et reliant deux points A et B situés de part et d'autre d'une courbe $\mathcal{C}$ (supposé être une sous-variété de dimension 1) délimitant deux milieux d'indices de réfraction respectifs $n_1 = \frac{c}{v_1}$ et $n_2 = \frac{c}{v_2}$. En admettant que la lumière suit le principe de Fermat (ie qu'elle minimise la durée du trajet parmi toutes les trajectoires possibles), prouver la loi de réfraction de Descartes en utilisant le théorème des extrema liés. De la même manière, lorsque $\mathcal{C}$ est cette fois-ci un miroir et que A et B sont situés du même côté, prouver la loi de la réflexion d'un rayon lumineux.

Exercice 7 – Descente de gradient.

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant la propriété suivante

$$\exists \alpha > 0 \quad | \quad \forall x, y \quad < \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geqslant \alpha \|x - y\|^2$$

a) A l'aide d'une formule intégrale de Taylor avec reste intégral, démontrer que pour tout x,y on a $f(y) - f(x) - < \nabla f(x), y - x > \geqslant \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2$.

b) En déduire que f est coercive.

c) Que peut-on en conclure sur le problème de minimisation de f ?

d) Pour x^0 donné, on définit la suite x^k par $x^{k+1} = x^k - \rho_k \nabla f(x^k)$ où ρ_k (que l'on ne cherchera pas à déterminer) est tel que

$$f(x^k - \rho \nabla f(x^k)) = \min_{\rho \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \rho \nabla f(x^k))$$

Vérifier que si a est une solution du problème de minimisation, $\alpha \|x^k - a\| \leqslant \|\nabla f(x^k)\|$.

e) Montrer que $< \nabla f(x^{k+1}), \nabla f(x^k) >= 0$ pour tout k. En déduire que la suite $f(x^k)$ est une suite décroissante et que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$.

f) On suppose de plus que ∇f est lipschitzienne, montrer que $\|\nabla f(x^k)\| \longrightarrow 0$ et conclure.

Exercice 8 – Méthode de Newton. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^2 et $c \in \Omega$ tel que $f(c) = 0$ et $\mathrm{d}f_c$ est inversible. On définit $F : x \mapsto x - (\mathrm{d}f_x)^{-1} \cdot f(x)$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage de c sur lequel F est bien définie et C^1.

b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\bar{B}(c, \delta)$ est stable par F et pour tout $x_0 \in \bar{B}(c, \delta)$, si on pose $x_{n+1} = F(x_n)$ alors $x_n \longrightarrow c$.

c) Faire le lien avec l'exercice précédent.