Semaine 7 - Bornes supérieures, équations différentielles linéaires

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Résolution d'une équation différentielle (1)

1 Résoudre en y sur $]-\infty,-1[$, sur $]-1,1[$ et sur $]1,+\infty[$ l'équation suivante : $(1-x^2)y'(x)-2xy(x)=x^2$.

2 Résolution d'une équation différentielle (2)

1 Résoudre en y sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ l'équation suivante : $|x|y'(x)+(x-1)y(x)=x^3$.

3 Résolution d'une équation différentielle (3)

1 Résoudre en y sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2y'(x)-y(x)=0$

4 Fonctions trigonométriques et équation différentielle

1 Calculer $\cos(\arctan(x))$ pour $x\in]-1,1[$.

2 Calculer $\sin(\arctan(x))$ pour $x\in]-1,1[$.

5 Résolution d'équation différentielle du second ordre (1)

1 Déterminer les solutions réelles de $y''(x)-3y'(x)+2y(x)=\sin(2x)$.

6 Résolution d'équation différentielle du second ordre (2)

1 Déterminer les solutions réelles de $y''(x)+y(x)=\sinh(x)$.

2 Déterminer les solutions réelles de $y''(x)-2y'(x)+y(x)=2\cosh(x)$.

7 Résolution d'équation différentielle du second ordre (3)

1 Déterminer les solutions réelles de $y''(x)+2y'(x)+y(x)=\sin(x)^3$.

2 Déterminer les solutions réelles de $y''(x)+y(x)=2\cos(\frac{x}{2})^2$.

8 Résolution d'équation différentielles du second ordre (4)

1 Déterminer les solutions réelles de $ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : on pourra penser à poser $z(t)=y(e^t)$ et remarquer que z vérifie une équation différentielle.

9 Solutions bornées et équations différentielles du second ordre

1 Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y''(x)+ay'(x)+by(x)=0$ soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

10 Un théorème de point fixe (1)

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1 Soit $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$. Montrer que A admet une borne supérieure.

2 Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire, $\exists\ x_0 \in [0,1] \mid f(x_0) = x_0$.

11 Un théorème de point fixe (2)

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1 Soit $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$. Montrer que A admet une borne supérieure.

2 Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire, $\exists\ x_0 \in [0,1] \mid f(x_0) = x_0$.

12 Inégalité(s) de Shapiro

1 Montrer que $\forall (a,b,c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ on $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

2 Soit $(x_1, x_2, x_3) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$ et $y_3 = x_1 + x_2$. Montrer que $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_2}{y_2} \geq \frac{3}{2}$.

3 Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_4$, $y_3 = x_4 + x_1$ et $y_4 = x_1 + x_2$. Montrer que $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)$.

4 Montrer que $\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{y_i} \geq 2$.

Remarque : ces inégalités sont appelées les inégalités de Shapiro et on a $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$ (où l'addition est à prendre modulo n) pour $n \leq 12$ dans le cas pair et $n \leq 23$ dans le cas impair. On remarquera qu'ici on a montré les cas $n = 3$ et $n = 4$. Un contre-exemple pour le cas $n = 14$ a été trouvé en 1985 par Troesch, le voici : $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$.

13 Une borne inférieure

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Déterminer $\inf \left\{ (x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right),\ (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}_+^n \right\}$.

2 Cet infimum est-il atteint ?

14 Borne inférieure et borne supérieure

Soit $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2},\ (m,n) \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1 Montrer que $\forall x \in A, 0 < x \leq \frac{1}{4}$.

2 Montrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

3 L'infimum est-il atteint ? Même question concernant le supremum.