Semaine 17 - Théorie de la dimension et applications linéaires

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

La plupart des corrections ne sont pas très détaillées et ne comportent que les grandes lignes pour vous guider dans la résolution. Si vous avez des questions n'hésitez pas.

1 Une famille libre ?

1 Pour montrer que cette famille est libre on choisit arbitrairement une sous famille **finie**. Il s'agit ensuite de montrer que $(x \mapsto \cos(n_k x))_{k \in [\![1,N]\!]}$ est une famille libre (on a fixé N et les n_k). Pour cela deux méthodes :

- on peut raisonner par récurrence sur N et on raisonne comme suit pour l'hérédité. On a $(\lambda_i)_{i[\![1,N]\!]}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \cos(n_i x) = 0$. On veut montrer que les λ_i sont nuls. On dérive deux fois la relation et je vous laisse conclure.
- on peut aussi remarquer que $\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{dx} = 0$ sauf si $n \neq m$ (que vaut l'intégrale dans ce cas ?). Conclure à partir de cette remarque.

2 Espace vectoriel et fonctions affines

1 Il est facile de vérifier que l'on a bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 On peut utiliser la base suivante à trois éléments :

- la fonction qui vaut 0 sur $[-1, 0]$ et l'identité sinon. On la note f_1
- la fonction qui vaut 0 sur $[0, 1]$ et l'identité sinon. On la note f_2
- la constante égale à 1. On la note f_3

C'est une famille libre. En effet si on a une combinaison linéaire nulle alors on a une combinaison linéaire nulle de f_1 et f_3 sur $[0, 1]$ (car f_2 est nulle). Il est facile de montrer que sur $[0, 1]$ f_1 et f_3 sont libres. Donc $f_1 = f_3 = 0$. On conclut $f_2 = 0$.

C'est une famille génératrice. En effet on a que $f - f(0)$ est linéaire sur $[0, 1]$ et sur $[-1, 0]$. Il s'agit simplement de déterminer les coefficients linéaires sur ces intervalles (on les note α et β). On a alors $f = \alpha f_1 + \beta f_2 + f_3$.

On peut conclure.

3 Une base de polynômes

On montre seulement que c'est une famille libre. On peut conclure par dimension pour le caractère base. Soit λ_i une famille de $n+1$ scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^i (1-X)^{n-i} = 0$. On dérive n fois et évalue en 0. On trouve que $n!\lambda_n = 0$. Donc $\lambda_n = 0$. On reprend l'opération en dérivant $n-1$ fois et en évaluant en 0. On trouve que $(n-1)!\lambda_{n-1} = 0$. On peut conclure par récurrence.

4 Nombres réels et espace vectoriel

Attention : erreur typographique on considère $\log(p_n)$ ici et non p_n.

On suppose qu'on dispose de $\lambda_i = \frac{r_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$ une famille de N rationnels tels que $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{r_i}{q_i} \log(p_i) = 0$. Donc $\prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{\frac{r_i}{q_i}} = 1$. En mettant tout cela à la puissance $q_1 q_2 \dots q_n$ on trouve que $\prod\limits_{i=1}^{n} p_i^{r_i \prod\limits_{j \neq i} q_j} = 1$. Il s'agit ensuite de séparer les cas où r_i est positif des cas où il est négatif. $\prod\limits_{r_i > 0}^{n} p_i^{r_i \prod\limits_{j \neq i} q_j} = \prod\limits_{r_i \leq 0}^{n} p_i^{r_i \prod\limits_{j \neq i} q_j}$. Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers on trouve que $r_i \prod\limits_{j \neq i} q_j = 0$ et donc $r_i = 0$. D'où $\lambda_i = 0$.

2 Autre erreur typographique : on va trouver un polynôme de degré N qui annule x et non $N-1$.

Il s'agit simplement de constater que $(1, x, \dots, x^n)$ est une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}$ donc une famille liée. On peut donc conclure sur l'existence d'un polynôme annulateur de degré n.

3 L'erreur typographique se poursuit ici. On considère 2^{n+1}. $P = X^{n+1} - 2$ annule ce réel. On admet son irréductibilité dans $\mathbb{Q}$. Soit un autre polynôme annulateur de degré strictement inférieur à $n+1$. On le note Q. On remarque que $Q \wedge P$ est toujours annulateur de x. Si il existe un polynôme annulateur de degré plus petit ou égal à n alors on a un polynôme annulateur de degré plus petit ou égal à n qui divise P. Mais P est irréductible donc le polynôme annulateur Q n'existe pas et on a une contradiction avec notre hypothèse de départ.

5 Polynômes à valeurs entières

On suppose λ_i, $n+1$ scalaires tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$$

. En évaluant en 0 on trouve que $\lambda_0 = 0$. En évaluant en 1 on trouve ensuite que $\lambda_1 = 0$. On poursuit par récurrence jusqu'à $\lambda_n = 0$. On conclut sur le caractère de base via la dimension.

2 Trivial pour P_0. On pose $k > 1$. On a plusieurs cas :

- si $m \geq k$ on trouve $P_k(m) = \binom{k}{m}$.
- si $m \in [\![0, k-1]\!]$ alors $P_k(m) = 0$.
- si $m < 0$ on trouve $P_k(m) = \binom{k}{m+k}(-1)^k$.

3 On a que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$$

. En évaluant en 0 on trouve que λ_0 est un entier. Ainsi de suite on trouve que tous les λ_k sont entiers. Réciproquement si un polynôme s'écrit comme

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$$

avec $\lambda_k \in \mathbb{Z}$ il est trivial qu'il prend des valeurs entières sur les entiers.

6 Divisibilité et sous-espace vectoriel

1 Simple vérification.

2 Une base de cet espace peut être exhibé de la manière suivante. On suppose que le degré de A est $p \leq n$: $(A, AX, \dots AX^{n-p})$. Cette famille est libre car de degré échelonnée. Elle est génératrice car puisque tout polynôme de notre sous-espace vectoriel est divisible par A et dans $\mathbb{R}_n[X]$ il s'écrit comme combinaison linéaire des polynômes exprimés.

Pour trouver un supplémentaire on pose $\mathbb{R}_p[X]$. Tout polynôme s'écrit de manière unique $P = AQ + R$ avec $R \in \mathbb{R}_p[X]$ (division euclidienne). Cela suffit à montrer la proposition.

7 Une équation polynômiale

1 Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^n$.

On considère $\phi : \mathbb{R}_{n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ et tel que $\phi(P) = P(X+1) - P(X)$. ϕ endomorphisme de noyau les polynômes constants. En appliquant le théorème du rang on montre que cet endomorphisme est surjectif. Donc l'ensemble des polynômes qui vérifie $P(X+1) - P(X) = X^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1. En fixant la constante on démontre l'unicité.

8 Une somme directe

1 Soit $P \in F_j$. On a que

$$Q = \prod_{i=0, i \neq j}^{n} (X - i)$$

divise P. Mais pour des raisons de degré $P = \lambda Q$ avec $\lambda \in k^*$. On conclut que $F_j \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

2 Il est facile de montrer que les F_j sont en somme directe. On conclut sur l'égalité avec $\mathbb{R}_n[X]$ par dimension.

9 Drapeaux

Soit u un endomorphisme de E.

1 Il est facile de démontrer que l'on a des inclusions croissantes sur le noyau et décroissantes sur les images.

2 On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq n \Rightarrow \ker u^p = \ker u^{p+1}$.

On démontre la proposition par récurrence. Elle est vraie pour $p = n$ on suppose que $p > n$ Soit $x \in \ker u^{p+1}$. $u^p(u(x)) = 0$. Donc $u(x) \in \ker u^p = \ker u^{p-1}$. Donc $u^{p-1}(u(x)) = u^p(x) = 0$. Donc on peut conclure sur l'égalité des noyaux.

3 La propriété de somme directe n'est pas compliquée à établir. Il suffit de montrer que l'intersection est vide. On conclut ensuite grâce au théorème du rang que $E = \ker u^n \bigoplus \mathrm{Im} u^n$.

10 Stabilisation et endomorphismes

1 Les homothéties vérifient cette propriété. Soit un endomorphisme qui stabilise les droites. Il convient de remarquer que si la dimension de E est égale à 1 alors les seules endomorphismes sont les homothéties et que ceux-ci stabilisent les droites... On suppose donc que $\dim E > 2$. Soit $x \in E$. On choisit x' tel que (x, x') est une famille libre. Puisque u stabilise les droites, $\exists \lambda_1 \in k,\ u(x) = \lambda_1 x$, $\exists \lambda_2 \in k,\ u(x') = \lambda_2 x'$, $\exists \lambda_3 \in k,\ u(x + x') = \lambda_3(x + x')$. Par linéarité on trouve que $(\lambda_1 - \lambda_3)x + (\lambda_2 - \lambda_3)x' = 0$. On peut donc conclure que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Donc on a bien une homothétie.

2 Il suffit de remarquer que tout sous-espace vectoriel de dimension $k - 1$ peut s'écrire comme intersection de sous-espaces vectoriels de dimension k. En raisonnant par récurrence on montre que à nouveau les homothéties sont les seuls endomorphismes qui ont cette propriété.

11 Polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme de E. On suppose que E est de dimension finie.

1 On pose $n = \dim E$. $(Id, u, \ldots, u^{n^2})$ famille liée. Donc il existe un polynôme annulateur.

2 Si u bijectif et $P(u) = 0$ alors on compose par u^-1 autant de fois que nécessaire pour que $P(u)u^{-k}$ ait un coefficient constant non-nul et on a toujours $P(u)u^{-k}$ annulateur. Réciproquement, $a_0 Id + Q(u)u = 0$ (en regroupant les termes sans coefficient d'ordre 0). On trouve donc que u est inversible d'inverse $-\frac{1}{a_0}Q(u)$.

3 $uQ(u) = 0$ avec $Q \wedge X = 1$. Donc $\ker Q(u)$ et $\ker u$ sont en somme directe. De plus si $x \in \ker Q(u)$, $a_0 x + u(\tilde{Q}(u(x))) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Im}(u)$. On peut conclure via un argument de dimension. La réciproque est plus compliquée. On considère X qui est annulateur de la restriction de u à $keru$ et Q qui est annulateur de la restriction de u à $\mathrm{Im}(u)$. Puisque la restriction de u à son image est injective on peut considérer que Q n'est pas divisible par X (voir question 1). Ensuite il convient de vérifier que XQ est bien annulateur de u. Une fois cela vérifié on peut conclure.

4 On n'a pas forcément de polynôme annulateur. Considérer l'endomorphisme dérivation sur les polynômes...

12 Rang et endomorphisme

1 L'image de $u + v$ est incluse dans la somme de l'image de u et de l'image de v. En utilisant la formule de Grassmann on a que $n = \mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

De plus, $u \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}(v) \subset \ker u$. Le théorème du rang donne donc $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$. On peut donc conclure.

13 Rang et composition

1 On applique le théorème du rang à la restriction de f à $\mathrm{Im} g$. On a alors $\mathrm{rg} g = \mathrm{rg}(f \circ g) + \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g)$. Mais ce dernier ensemble est bien inclus dans le noyau de f et on peut conclure en utilisant le théorème du rang sur f.

2 On trouve les endomorphismes de rang 1 dont l'image est incluse dans le noyau.

14 Rang et sous-espace vectoriel

1 Il s'agit simplement de considérer la restriction de l'endomorphisme à F et d'appliquer le théorème du rang.

15 Endomorphismes et polynômes

Il y a une erreur dans l'exercice. A la dernière question il faut remplacer $P_n(X+2)-P_n(X+1)$ par $P_n(X+2)+P_n(X+1)$

1 Le noyau est vide donc on a isomorphisme. On peut donc construire une base comme image réciproque de la base proposée.

2 $P_n(X + 2) + P_n(X + 1) = \phi(P_n(X + 1))$ mais on a aussi que $P_n(X + 2) + P_n(X + 1) = 2(X + 1)^n$. Donc

$$\phi(P_n(X + 1)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 2X^k$$

. D'où

$$P_n(X + 1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} P_k$$

. Donc puisque $P_n(X + 1) + P_n(X) = 2X^n$ on trouve

$$P_n = X^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n} P_k$$

.