Semaine 21 - Ensemble, dénombrement et permutations

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Permutations et probabilités

On suppose que trois personnes $(1, 2$ et $3)$ sont assises à une table. Les trois chaises portent les noms A, B et C. Toutes les minutes, deux personnes échangent de place.

1 Quelle est la probabilité pour qu'au bout de n minutes on retrouve la configuration initiale ?

2 Formule de Vandermonde

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $k \in [\![1, \min(p, n)]\!]$.

1 Montrer que $\binom{n+p}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{p}{k-j}$.

3 Nombre de surjections

Soit E de cardinal n et F de cardinal p. On note S_n^p le nombre de surjections de E dans F. Le but de cet exercice est de donner une formule pour S_n^p.

1 Que peut-on dire si $p = 1$? Si $p = n$? Si $p > n$?

2 Dans le cas où $p \leq n$ donner une formule liant S_n^p, S_{n-1}^{p-1} et S_{n-1}^p.

3 En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p$.

Remarque : on peut retrouver ce résultat d'une manière plus naturelle en utilisant la formule du crible : $\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n} \operatorname{card}\left(\bigcap_{i_j \in \{i_1, \dots, i_n\}} A_j\right)$ et en posant A_i l'ensemble des applications de E dans F tel que l'élément numéro i de F n'a pas d'antécédent.

4 Nombre de dérangements

On considère l'espace des permutations de $[\![1, n]\!]$. On appelle dérangement toute permutation sans point fixe. Notre but ici est de donner une formule explicite du nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

1 En s'inspirant de la remarque de l'exercice précédent montré que le nombre de dérangements $D_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2 En déduire le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement r points fixes.

Remarque : $\frac{D_n}{n!} \to e^{-1}$. Ainsi lors du tirage des noms pour un "Secret Santa", on a en gros une probabilité de 0.36 pour que personne ne tombe sur son propre prénom.

5 Suites croissantes (1)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

1 Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n ?

2 En déduire le nombre de suites de p éléments de $\mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ qui vérifient $x_1 + \cdots + x_p \leq n$.

2 En déduire le nombre de suites de p éléments de $\mathbb{N}^*$, $(x_k)_{k\in[\![1,p]\!]}$ qui vérifient $x_1 + \cdots + x_p = n$.

6 Suites croissantes (2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

1 Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n ? Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

2 Combien existe-t-il de suites croissantes de p entiers compris entre 1 et n ?

7 Des droites et des triangles

Soient n droites du plan en position générale (deux droites choisies arbitrairement ne sont pas parallèles, trois droites choisies arbitrairement ne sont pas concourantes).

1 Combien forme-t-on de triangles ?

8 Relations d'ordre

Soit E un ensemble à n éléments.

1 Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur E ?

9 Des anagrammes

Soit un mot de longueur n. On suppose que la lettre numéro j apparaît p_j fois.

1 Combien d'anagrammes peut-on écrire à partir du mot de longueur n ?

10 Le paradoxe du prince de Toscane

On lance trois dés (valeurs comprises entre 1 et 6). On note X la valeur de la somme des valeurs obtenues (exemple $5 = 3 + 2 + 1$).

1 Combien y a-t-il de manière d'écrire 10 comme somme de trois chiffres ? 9 ?

2 En déduire la probabilité p_9 que X vaille 9 et la probabilité p_10 que X vaille 10.

11 Dimension d'un espace vectoriel

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace $k_n[X_1, \ldots, X_k]$ des polynômes à k indéterminées de degré n, par exemple $XY + X^2 + Y^2 + 10X \in k_2[X, Y]$.

1 Après avoir montré que $k_n[X_1, \ldots, X_k]$ est un k-espace vectoriel, déterminer sa dimension.