Semaine 8 - Suites numériques

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Divergence et suite extraites

1 Montrer que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2 Montrer de même que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2 Une suite complexe

Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par ($\theta \in [-\pi, \pi[$, $\rho \in \mathbb{R}_+$) :

$$\begin{cases} z_0 = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Exprimer z_n sous la forme d'un produit.

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos(\frac{\theta}{2^k}) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}$.

3 Montrer que z_n admet une limite et la calculer.

3 Irrationalité de e

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$

1 Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2 On admet l'inégalité de Taylor-Lagrange. Celle-ci assure que pour toute fonction $f \ : \ [a,b] \to \mathbb{R} \ \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$ et telle que $f^{(n+1)}$ est bornée, on a :

$$|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in]a,b[} (|f^{(n+1)}|)$$

En l'appliquant à la fonction $x \mapsto e^x$ montrer que $u_n \to e$.

3 On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. En considérant $u_q q!q$ et $v_q q!q$ aboutir à une contradiction.

4 Moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $a \leq b$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a, \ v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \ v_{n+1} = \dfrac{v_n + u_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ ainsi que $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.

2 Montrer que ces limites sont égales. On la note $M(a,b)$ et on l'appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b.

3 Calculer $M(a,a)$, $M(0,a)$ ainsi que $M(\lambda a, \lambda b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

5 Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1 Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.

2 En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note S sa limite.

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

4 Que peut-on dire de la convergence de la suite $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$?

6 Suite sous-additive

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite sous-additive au sens où :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1 Rappeler la définition de $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $n = qm + r$, $r \in [\![0, q-1]\!]$, la division euclidienne de n par q. Établir une inégalité faisant intervenir u_n, u_q et u_1.

3 Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ v_{p+q} \leq v_p v_q$$

Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

7 Récurrence et nombre d'or

1 Montrer que $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8 Suite et équivalent

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in]0, \dfrac{\pi}{2}[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1 Montrer que $u_n \to 0$.

2 Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

3 Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

9 Méthode de Newton

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ à valeurs réelles avec $f' > 0$ sur $[a,b]$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On suppose également que f s'annule en $c \in]a,b[$. Enfin on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [a,b]$.

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}$ correspond à l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des abscisses. Faire un dessin.

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - c| \leq C|x_n - c|^2$ avec $C \in \mathbb{R}_+$.

Indication : on utilisera l'inégalité de Taylor-Lagrange (voir l'exercice 3 question 2).

3 Donner la formule liant x_{n+1} et x_n dans le cas où $f :\ x \mapsto x^2 - a$ et $[0, 2a],\ (a \in \mathbb{R}_+)$ comme intervalle d'étude.

Remarque : cette méthode peut être utilisée pour trouver le minimum de fonctionnelle en considérant f' plutôt que f. Néanmoins cette méthode bien que très rapide fait intervenir des dérivées secondes et demande donc de gros calculs (si on est en grande dimension). Le plus souvent on privilégie des algorithmes d'ordre de dérivation inférieur. Les garanties de convergence sont moindre mais l'implémentation est bien plus aisée.

Remarque : la dernière remarque de cet exercice présente la méthode de Héron, popularisée par Héron d'Alexandrie au premier siècle après Jésus-Christ, qui donne un moyen pratique et rapide de calculer des racines.