

# Semaine 6 - Développements limités et équivalents

Valentin De Bortoli  
email : valentin.debortoli@gmail.com

## 1 Développements limités (1)

- 1 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $x \mapsto \frac{e^x}{(1+x)^3}$ .
- 2 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de  $x \mapsto \sin(x^2)$
- 3 Justifier l'existence et calculer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de  $x \mapsto \ln(1+x)\sin(x)$

## 2 Développements limités et asymptotiques (1)

Soit  $f : x \mapsto \sqrt{1+x+x^2}$ .

- 1 Justifier l'existence et calculer un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 2.
- 2 Le graphe de  $f$  admet-il une tangente en 0 ? Si oui, donner la position du graphe de  $f$  par rapport à cette tangente autour de 0.
- 3 Déterminer une asymptote en  $+\infty$  au graphe de  $f$ .

## 3 Développements limités et asymptotiques (2)

Soit  $f \mapsto (x^2 - 1) \ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$ .

- 1 Justifier l'existence et calculer un développement limité de  $f$  en 0 à l'ordre 3.
- 2 Déterminer une asymptote en  $+\infty$  au graphe de  $f$  et donner la position de la courbe par rapport à cette asymptote lorsque  $x$  est grand.

## 4 Développements limités (2)

- 1 Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 5 de  $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ .
- 2 Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 2 de  $x \mapsto \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) - x}{\sin(x) - x}$ .

## 5 Développements limités (3)

- 1 Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $x \mapsto \frac{\cosh(x) \ln(1+x)}{\cos(x)}$ .

## 6 Développements limités et dérivabilité

- 1 Montrer que  $f$  est continue en 0 si et seulement si  $f$  admet un développement limité d'ordre 0 en 0.

**2** Montrer que  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

**3** Montrer que si  $f$  est deux fois dérivable en 0 alors  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

**3** Montrer que  $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  et prolongée par continuité en 0 admet un développement limité à l'ordre 2 mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

## 7 Développements limités (4)

**1** Justifier l'existence et calculer un développement limité en  $\frac{\pi}{2}$  à l'ordre 2 de  $x \mapsto \ln(\sin(x))$ .

**2** Justifier l'existence et calculer un développement limité en  $\frac{\pi}{2}$  à l'ordre 2 de  $x \mapsto (1 + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$ .

## 8 Développements limités (5)

**1** Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 2 de  $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{\sinh(x)^2}$  (existence admise).

**2** Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $x \mapsto \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}}$ .

**3** Justifier l'existence et calculer un développement limité en 0 à l'ordre 5 de  $x \mapsto \sin(x)^3(e^{x^2} - 1)$ .

## 9 Fonction décroissante et équivalent

Soit  $f$  une fonction décroissante qui de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f(x) + f(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .

**1** Montrer que  $f$  admet une limite et la calculer.

**2** Donner un équivalent de  $f$ .

## 10 Calcul de limites (1)

**1** Montrer que  $x \mapsto \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

**2** Montrer que  $x \mapsto \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}}$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

**3** Montrer que  $x \mapsto \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\ln(x)}$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

## 11 Calcul de limites (2)

**1** Montrer que  $x \mapsto (x+1)e^x - xe^{x+1}$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.

**2** Montrer que  $x \mapsto (x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.