

TD 6

Sous-variétés

Exercice 1 Les dessins suivants représentent des parties de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Dites, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞ .



Exercice 2 Les sous-ensembles V de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 qui suivent sont-ils des sous-variétés ? Et $V \setminus \{0\}$?

- a) $V = \mathbb{R}^2$
- b) $V = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 / t \in [0, 1]\}$;
- c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = |x|\}$.
- d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = z^2\}$;

Exercice 3 Montrer que $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 = 1\}$ est une sous-variété de \mathbb{R}^2 . Montrer que $E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 . Montrer qu'un tore dans \mathbb{R}^3 est une sous-variété de \mathbb{R}^3 (on pourra considérer le cas du tore symétrique par rapport à l'axe z , d'équation $(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2$).

Exercice 4

- a) Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ et } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \text{ ou } 0 \leq 0 < \frac{1}{2} \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété C^∞ de \mathbb{R}^2 .
- b) Donner cependant un exemple d'application C^∞ d'un intervalle de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 d'image A .

Exercice 5 Montrer que les lignes de niveau de la fonction suivante sont des sous-variétés \mathbb{R}^3 :

$$F(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2 + (1 - x^2 - y^2)^2}$$

(Préciser leur dimension)