Valentin De Bortoli, Frédéric Pascal

Feuille 0.3 - Un peu d'analyse fonctionnelle

Exercice 1 – Théorème de Banach-Steinhaus. Soient $(E, |\cdot|_E)$ un espace de Banach, $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de $L(E, F)$ (fonctions linéaires continues). Montrer que :

- Soit $\{|f| \mid f \in A\}$ est borné,
- Soit il existe $x \in$ tel que $\sup_{f \in A} |f(x)|_F = +\infty$.

Exercice 2 – Application du théorème de Banach-Steinhaus. Soient $(E, |\cdot|_E)$ un espace de Banach, $(F, |\cdot|_F)$ un espace vectoriel normé, et soit (f_n) une suite de $L(E, F)$ convergeant simplement vers $f : E \longrightarrow F$. Montrer que $f \in L(E, F)$.

Exercice 3 – Fonctions continues nulle part dérivables. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme sup. On pose $F_n = \{f \in E,\ \exists x \in [0, 1],\ \forall y \in [0, 1],\ |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}$. On pose également A, l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables.

a) Montrer que $A^c \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

b) Montrer que F_n est fermé.

c) Montrer que F_n est d'intérieur vide.

d) Conclure.

Exercice 4 – Théorème d'Ascoli-Arzela. Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (F, d') un espace métrique complet. On dit qu'une partie A de $C(E, F)$ est relativement compacte si son adhérence est compacte. Montrer que $A \subset C(E, F)$ est relativement compacte *ssi* :

1. A est uniformément équicontinue, *ie* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall f \in A$, $\forall x, y \in E$, si $d(x, y) < \eta$ alors $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.
2. Pour tout $x \in E$, $A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$ est relativement compact.

Exercice 5 – Distance de Haussdorff. Soit (E, d) un espace métrique et $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble de ses compacts. Soit $A \subset E$ et $\epsilon > 0$. On définit $A_\epsilon = \{x \in E, d(x, A) \leq \epsilon\}$.

a) Montrer que $d_H(X, Y) = \max\left(\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y),\right)$ est une distance sur $\mathcal{K}(E)$.

b) Montrer que $d_H(X, Y) = \inf\{\epsilon > 0, X \subset Y_\epsilon \text{ et } Y \subset X_\epsilon\}$.

c) Montrer que E complet implique que $\mathcal{K}(E)$ est complet. On posera $(K_n)_n$ une suite de Cauchy et K l'ensemble des limites de suites $x_n \in K_n$.

d) Montrer que E compact implique que $\mathcal{K}(E)$ est compact.
Remarque : La distance de Haussdorff permet de donner un sens à la notion de fractale. Une autre notion intéressante est la distance de Gromov-Haussdorff qui permet de comparer des espaces métriques compacts entre eux.