

# Semaine 26 - Isométries vectorielles

Valentin De Bortoli  
email : valentin.debortoli@gmail.com

## 1 Trace, matrice et produit scalaire

1 Montrer que  $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB^T)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2 En déduire que les matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires et orthogonales.

3 Calculer la distance aux matrices symétriques de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

4 Donner la distance de la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 aux matrices de trace nulle (qui est un espace vectoriel, pourquoi ?).

**Remarque :** la norme associée à ce produit scalaire est appelée la norme de Frobenius. Elle possède de nombreuses propriétés utiles pour l'analyse matricielle. Une question intéressante est la suivante : on peut définir une norme sur les matrices  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  simplement à partir d'une norme sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  (comment ?), on dit alors que la norme est subordonnée, la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée, pourquoi ?

## 2 Pseudo-inverse et projection

Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ . On admet l'existence d'une matrice  $A^\dagger \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  telle que :

- $AA^\dagger \in S_n(\mathbb{R})$
- $A^\dagger A \in S_m(\mathbb{R})$
- $AA^\dagger A = A$
- $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

La matrice  $A^\dagger$  est appelée pseudo-inverse de  $A$ .

1 Montrer que  $\ker A$  et  $\text{Im} A^T$  sont orthogonaux.

2 Montrer que la pseudo-inverse est unique.

3 Montrer que  $AA^\dagger$  est la projection orthogonale sur  $\text{Im} A$ .

**Remarque :** avec des outils de deuxième année (diagonalisation des matrices symétriques) on peut démontrer l'existence de cette matrice. Celle-ci est très utile pour donner un sens à l'inverse d'une matrice même lorsque celle-ci n'est pas inversible, voire même pas carrée ! Elle joue un rôle dans la résolution de problèmes de type régression linéaire.

## 3 Inégalité d'Hadamard

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$   $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . On considère  $X$  la matrice dont les colonnes sont les  $x_i$ .

1 Montrer que  $|\det(X)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$ .

## 2 Quel est le cas d'égalité ?

**Remarque :** on peut donner une interprétation géométrique de cette quantité en se rappelant que le déterminant correspond au volume du parallépipède défini par les  $x_i$ . L'inégalité d'Hadamard donne alors une majoration de l'aire du parallépipède en fonction des longueurs des côtés et nous indique que le volume maximal d'un parallépipède aux côtés de longueurs fixées est atteint lorsque celui-ci est un rectangle.

## 4 Une équation et deux matrices orthogonales

Soient  $(A, B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\frac{1}{3}(A + 2B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

### 1 Que dire de $A$ et $B$ ?

## 5 Coefficients et matrices orthogonales (1)

Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

1 Montrer que  $\left| \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{i,j} \right| \leq n$

## 6 Coefficients et matrices orthogonales (2)

Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On considère  $\sigma = ab + bc + ca$  et  $S = a + b + c$ . On considère également la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

1 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit orthogonale.

2 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M$  soit spéciale orthogonale.

3 Montrer que  $M$  est spéciale orthogonale si et seulement si  $M$  est racine du polynôme  $X^3 - X^2 + k$  avec  $k \in (0, \frac{4}{27}]$ .

## 7 Isométrie vectorielle et vecteurs

Soit  $(u, v)$  deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien orienté.

1 Quelles sont les isométries vectorielles qui envoient  $u$  sur  $v$

## 8 Commutativité chez les isométries

1 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une rotation du plan et une réflexion du plan commutent ?

## 9 Des mesures angulaires

Soient  $(u, v, w)$  trois vecteurs unitaires. On note  $\alpha$  l'angle entre  $u$  et  $v$ ,  $\beta$  celui entre  $u$  et  $w$  et  $\gamma$  celui entre  $v$  et  $w$ .

1 Montrer que  $\beta \leq \alpha + \gamma$