Semaine 9 - Nombres réels, suites réelles

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Un théorème de point fixe (1)

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1 Soit $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$. Montrer que A admet une borne supérieure.

2 Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire, $\exists\ x_0 \in [0,1] \mid f(x_0) = x_0$.

2 Un théorème de point fixe (2)

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1 Soit $A = \{x \in [0,1],\ f(x) \geq x\}$. Montrer que A admet une borne supérieure.

2 Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire, $\exists\ x_0 \in [0,1] \mid f(x_0) = x_0$.

3 Inégalité(s) de Shapiro

1 Montrer que $\forall (a,b,c) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$ on $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

2 Soit $(x_1, x_2, x_3) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_3$ et $y_3 = x_1 + x_2$. Montrer que $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_2}{y_2} \geq \frac{3}{2}$.

3 Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$. On pose $y_1 = x_2 + x_3$, $y_2 = x_3 + x_4$, $y_3 = x_4 + x_1$ et $y_4 = x_1 + x_2$. Montrer que $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \geq 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4)$.

4 Montrer que $\sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{y_i} \geq 2$.

Remarque : ces inégalités sont appelées les inégalités de Shapiro et on a $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$ (où l'addition est à prendre modulo n) pour $n \leq 12$ dans le cas pair et $n \leq 23$ dans le cas impair. On remarquera qu'ici on a montré les cas $n = 3$ et $n = 4$. Un contre-exemple pour le cas $n = 14$ a été trouvé en 1985 par Troesch, le voici : $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$.

4 Une borne inférieure

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Déterminer $\inf \left\{ (x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right),\ (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}_+^n \right\}$.

2 Cet infimum est-il atteint ?

5 Borne inférieure et borne supérieure

Soit $A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2},\ (m,n) \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1 Montrer que $\forall x \in A, 0 < x \leq \frac{1}{4}$.

2 Montrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

3 L'infimum est-il atteint ? Même question concernant le supremum.

6 Convergence au sens de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

1 Montrer que $u_n \to l \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ v_n \to l \in \mathbb{C}$.

2 Trouver un contrexemple à la réciproque.

3 Supposons que $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\omega_{n+1} - \omega_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\omega_n \underset{+\infty}{\sim} ln$.

4 On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} ku_k}{n^2}$$

Montrer que $w_n \to \frac{l}{2}$.

7 Suite sous-additive

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite sous-additive au sens où :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1 Rappeler la définition de $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $n = qm + r$, $r \in [\![0, q-1]\!]$, la division euclidienne de n par q. Établir une inégalité faisant intervenir u_n, u_q et u_1.

3 Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ v_{p+q} \leq v_p v_q$$

Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

8 Rationnels et irrationnels

Soit $\left(r_n = \frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels ($(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}\backslash\{0\})^{\mathbb{N}}$). On suppose que $r_n \to x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

1 Montrer que $q_n \to +\infty$.

9 Une équation et des parties entières

1 Pour $x = 8$ on a $\frac{x}{2} - \sqrt{x} = 2(2-\sqrt{2}) > 1$. Donc à partir de $x = 8$ les parties entières de $\frac{x}{2}$ et $\sqrt{x}$ sont différentes. Il s'agit maintenant de trouver les solutions pour $x < 8$ (une autre solution aurait de résoudre une équation du second degré $-\sqrt{x}^2 + (\frac{x}{2} - 1)^2 = 0$. On aurait trouvé une borne similaire) :

- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0$ si et seulement si $x \in [0, 2[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 0$ si et seulement si $x \in [0, 1[$. Donc $[0, 1[$ dans l'ensemble des solutions.
- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 1$ si et seulement si $x \in [2, 4[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$ si et seulement si $x \in [1, 4[$. Donc $[2, 4[$ dans l'ensemble des solutions.
- $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 2$ si et seulement si $x \in [4, 6[$. $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2$ si et seulement si $x \in [4, 8[$. Donc $[4, 6[$ dans l'ensemble des solutions.

On s'arrête là car on sait que les prochaines solutions se trouvent après $x = 9$. On sait donc qu'il n'y en aura plus. On a l'ensemble de solutions suivant :

$$S = [0, 1[\cup [4, 6[\tag{1}$$

10 Une propriété de la partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1 Montrer que $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

11 Somme et partie entière

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1 Montrer que $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor = n\{x\} - \{nx\}$. En déduire que $n\{x\} - \{nx\} \in \mathbb{Z}$.

2 Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Remarque : on pourra commencer par considérer x tel que $\{x\} < \frac{1}{n}$.

12 Nombre de zéros et factorielle

1 Donner le nombre de zéros à la fin de 10!.

2 Même question mais pour 25!

3 Même question mais pour $n!$ avec $n \in \mathbb{N}$. On exprimera le résultat en utilisant la fonction partie entière.