

# Semaine 23 - Déterminants

Valentin De Bortoli  
email : valentin.debortoli@gmail.com

## 1 Déterminant et polynôme

Soit  $\phi$  une application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ . On pose  $\psi$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$  telle que  $\psi(z) = \phi(z)^{-1}$ . On suppose de plus que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $\phi(z)(i, j) = P_{i,j}(z)$  avec  $P_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$ .

1 Montrer qu'il existe  $Q_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\psi(z)(i, j) = Q_{i,j}(z)$ .

## 2 Déterminant et nombres entiers (1)

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ .

1 Montrer que  $M$  est inversible (c'est-à-dire qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  tel que  $MN = NM = Id$ ) si et seulement si  $|\det(M)| = 1$ .

2 Montrer que  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe  $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{Z})$  telle que la première ligne de  $M$  soit  $(a_1, \dots, a_n)$ .

## 3 Déterminants et nombres entiers (2)

Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . On suppose que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ ,  $A + kB \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{Z})$ .

1 Calculer  $\det(A)$  et  $\det(B)$ .

**Indication :** on pourra utiliser la question 1 de l'exercice précédent.

## 4 Déterminants de Cauchy

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et  $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ .

1 Calculer 
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_1+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

**Remarque :** dans le cas très particulier où  $a_i = i$  et  $b_j = j$  on parle de déterminant de Hilbert. Que vaut le déterminant dans ce cas ?

## 5 Déterminants de Van der Monde et Van der Monde généralisé

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  (on les suppose distincts et rangés par ordre croissant).

1 Calculer 
$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

**2** En déduire l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur de Lagrange aux points  $(a_1, \dots, a_n)$ .

**3** Calculer 
$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_n & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 & 2a_1 & \dots & 2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{2n} & \dots & a_n^{2n} & (2n-1)a_1^{2n} & \dots & (2n-1)a_n^{2n} \end{vmatrix}.$$

**4** Soit  $f$  une application dérivable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Déduire de la question précédente l'existence et l'unicité d'un polynôme de  $\mathbb{R}_{2n}[X]$  tel que  $P(a_i) = f(a_i)$  et  $P'(a_i) = f'(a_i)$ .

**Remarque :** ces polynômes sont appelés les polynômes de Hermite et possèdent, comme les polynômes de Lagrange, de nombreuses propriétés.

## 6 Transformée de Fourier discrète

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ .

**1** Calculer 
$$\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & a+b & a \\ \dots & \dots & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$$

**2** Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . On considère  $C(a_1, \dots, a_n)$  la matrice circulante associée :  $C(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . On pose  $\Lambda_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{nk} \end{pmatrix}$ . Montrer que  $(\Lambda_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$  qui diagonalise  $C(a_1, \dots, a_n)$ .

**3** En déduire le déterminant de  $C(a_1, \dots, a_n)$ .

## 7 Déterminants de Hurwitz

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  et  $a \in \mathbb{C}$ .

**1** Calculer 
$$\begin{vmatrix} a + \lambda_1 & a & \dots & \dots & a \\ a & a + \lambda_2 & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & a + \lambda_{n-1} & a \\ \dots & \dots & \dots & a & a + \lambda_n \end{vmatrix}.$$

## 8 Matrice antisymétrique et déterminant (1)

Soit  $A$  une matrice antisymétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**1** Montrer que si  $n$  est impair le déterminant de  $A$  est nul.

2 Que peut-on dire si  $n$  est pair ?

## 9 Matrice antisymétrique et déterminant (2)

Soit  $A$  une matrice antisymétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1 Montrer que  $\forall z \in \mathbb{C}, \det(A + zJ) = \det(A)$ .

## 10 Une équation sur les endomorphismes

On suppose que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose également que  $f^3 + f = Id$ . On suppose que  $\ker f \neq 0$ .

1 Montrer que  $\dim(\ker f) = 1$ .

## 11 Un déterminant linéaire ?

1 Déterminer tous les  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tels que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$ .

**Remarque :** on pourra commencer par traiter le cas de la dimension 1...

## 12 Matrice de rang 1 et déterminant

Soit  $(A, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ . On suppose que  $\text{rg}(H) = 1$ .

1 Montrer que  $\det(A + H)\det(A - H) \leq (\det(A))^2$ .

## 13 Déterminant par bloc

Soit  $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$ . On suppose que  $D$  est inversible et que  $D$  commute avec  $C$ .

1 Montrer que  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$ .

2 Montrer que  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ .

3 Que peut-on dire si  $D$  n'est plus inversible ?

4 En déduire que si  $AB = BA$ ,  $\det(A^2 + B^2) \geq 0$ .

**Indication :** on pourra penser à introduire  $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$  et multiplier les  $n$  dernières colonnes par  $i$  et les  $n$  dernières lignes par  $i$ .

## 14 Au signe près...

Soit  $A = (a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On considère  $\tilde{A} = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

1 Que dire du déterminant de  $\det(\tilde{A})$  en fonction de  $\det(A)$  ?

## 15 Divisibilité et déterminant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On suppose que les coefficients de  $A$  appartiennent tous à  $\{-1, 1\}$ .

- 1 Montrer que  $2^{n-1}$  divise  $\det(A)$ .

## 16 Déterminant et maximum

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

- 1 Que vaut  $\det(a_{\max(i,j)})$  ?
- 2 Que vaut  $\det(\max(i,j))$  ?  $\det(\min(i,j))$  ?

## 17 Un dernier calcul...

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ .

$$1 \quad \text{Calculer} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$