Semaine 9 - Intégration de fonctions continues

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Une convergence de norme

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Soit $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(t)|$.

1 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(t)^n \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = M$.

Indication : on pourra penser à démontrer que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que $\forall x \in [\alpha,\beta],\ f(x) \geq M - \epsilon$.

2 Inégalité et intégrale

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ telle que $f(a) = 0$.

1 Montrer que $\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$.

3 Module et cas d'égalité

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

1 On suppose que $|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t| = \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$. Montrer que $\forall t \in [a,b],\ f(t) = |f(t)|e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4 Inégalité de Young

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}_+$. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x)$.

2 En déduire que $\int_0^a f(t)\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\mathrm{d}t \geq ab$ avec égalité si et seulement si $b = f(a)$.

5 Suite et intégrale (1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n \mathrm{d}x$.

1 Donner une formule liant J_{n+2} et J_n. On commencera par calculer $J_{n+2} + J_n$.

2 Après avoir calculé J_0 et J_1 exprimer J_n en fonction de la parité de n.

6 Suite et intégrale (2)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n} \mathrm{d}x$.

1 Calculer K_0 et K_1.

2 Donner une formule liant K_{n+2} et K_n. On pourra intégrer par partie K_{n+2}.

7 Suite et intégrale (3)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $L_n = \int_1^e \ln(x)^n \mathrm{dx}$.

1 Donner une formule liant L_{n+1} et L_n.

8 Condition suffisante et point fixe

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],[0,1])$ telle que $\int_0^1 f(t) = \frac{1}{2}$.

1 Montrer que f admet un point fixe.

9 Inégalité et maximum

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$.

1 Montrer que $\forall c \in]a,b[,\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \max\left(\frac{1}{c-a}\int_a^c f(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{b-c}\int_c^b f(t)\mathrm{d}t\right)$.

2 Donner une interprétation géométrique.

10 Annulation et intégration (1)

Soit $f \in \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$.

1 On suppose que $\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,\pi[$. On note a un élément de $]0,\pi[$ tel que $f(a) = 0$.

2 On suppose que $\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]0,\pi[$.

Indication : Que peut-on dire de $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)\mathrm{d}t$?

11 Annulation et intégration (2)

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1 On suppose que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \int_a^b f(t)t^k\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Indication : On raisonnera par l'absurde et on posera $P(x) = \prod_{i=1}^{n_0}(x-x_i)$ avec $(x_i)_{i\in[\![1,n_0]\!]}$ les points d'annulation de f en lesquels f change de signe.

Remarque : on pourrait même aller plus loin et montrer que f change de signe $n+1$ fois. On montre en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass (que vous verrez l'année prochaine) que si $\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b f(t)t^k = 0$ alors $f = 0$.

12 Formule de la moyenne

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Soit $g \in \mathcal{C}([a,b])$ positive.

1 Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c) \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2 Soit I définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $I(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \ln(t^2) \sin(\frac{1}{t})\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} I(x) = 0$.