

## Semaine 24 - Séries

Valentin De Bortoli  
email : valentin.debortoli@gmail.com

### 1 Sommes de Riemann et équivalent

- 1 Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Donner un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- 2 Soit  $\alpha \in ]1, +\infty[$ . Donner un équivalent de  $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### 2 Une série convergente ?

- 1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général :  $u_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$  ?

### 3 Un produit convergent ?

- 1 Que peut-on dire de la convergence du produit de terme général  $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  ?

### 4 Séries de Bertrand

On note  $u_{n,\alpha,\beta} = \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ .

- 1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme générale  $u_{n,\alpha,\beta}$  pour  $\alpha > 1$  ? Pour  $\alpha < 1$  ? Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$  ? Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta \leq 1$  ?
- 2 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(k)^2}$  ?

### 5 Calcul de limite (1)

- 1 Montrer que la série de terme général  $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$  converge et déterminer cette limite.

### 6 Calcul de limite (2)

- 1 Montrer que  $S(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer la limite de  $S(a)$  en  $+\infty$ .

### 7 Somme des inverses des nombres premiers

On énumère les nombres premiers dans l'ordre croissant :  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

- 1 Montrer que la convergence de la série de terme général  $p_n$  est équivalente à la convergence de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ .

2 Montrer que  $v_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Conclure.

3 Discuter en fonction de  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{p_n^\alpha}$ .

## 8 Transformation d'Abel et application

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres complexes. On note  $s_n = \sum_{k=0}^n v_k$

1 On considère  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k v_k$ . Montrer que :

$$S_n = u_n s_n - u_0 s_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k-1}) s_k$$

2 En déduire la convergence de la série de terme général  $u_n = \sin\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$ .

**Remarque :** la transformation d'Abel n'est rien de moins qu'une intégration par partie en discret. Il est peut être utile de garder cette transformation en tête lorsque l'on ne parvient pas à démontrer la convergence de la série avec des règles type Cauchy mais que la forme du terme général nous invite à poursuivre dans cette direction.

## 9 Valeur absolue et sinus

1 Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{|\sin(n)|}{n}$  ?

## 10 Théorème de réarrangement de Riemann

On dit que la série de terme général  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est commutativement convergente si pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ , la série de terme général  $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

1 Montrer que si la série de terme général  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est absolument convergente alors elle est commutativement convergente et pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  on a  $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ .

2 Réciproquement, montrer que si la série de terme général  $u_n$  est semi-convergente alors pour tout  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  il existe  $\sigma$  une permutation de  $\mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k=1}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = a$ .

## 11 Série positive et décroissance

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante positive. On suppose que la série de terme général  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge

1 Montrer que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

## 12 Critère de Raabe et Duhamel

1 Rappeler le critère de d'Alembert. Le démontrer.

2 Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de termes strictement positifs. On suppose que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Montrer que :

- si  $\alpha > 1$  la série converge.
- si  $\alpha < 1$  la série diverge.

**3** Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général  $u_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)}{3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}$  ?

**Remarque :** il s'agit d'une spécification du critère de d'Alembert qui permet de sortir de certains cas douteux où  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . D'autres critères sont à votre disposition (pour l'étude des suites à termes **positifs** seulement) : règle de Cauchy et règle d'Hadamard. Il faut noter que la règle de d'Alembert est moins générale que la règle de Cauchy elle-même moins générale que la règle d'Hadamard.

## 13 Suites récurrentes et équivalent

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

- 1** Montrer que  $u_n \rightarrow 0$ .
- 2** Montrer que  $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$  admet une limite en  $+\infty$  et la calculer.
- 3** Déterminer un équivalent de  $u_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

## 14 Développement asymptotique de la série harmonique

On appelle  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- 1** Donner un équivalent de  $H_n$ .
- 2** Poursuivre en donnant un développement à l'ordre 2 de  $H_n$ .

## 15 Presque la série harmonique

Soit  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une énumération croissante des nombres entiers ne contenant pas de 5 dans leur représentation décimale.

- 1** Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général  $k_n$  ?