Calcul différentiel, E.N.S. Cachan **Partiel du 13/11/2019**

Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées. Il est interdit de communiquer par un quelconque moyen. Les exercices sont indépendants. On recommande très vivement la précision dans la rédaction.
Durée : 3 heures

Exercice 1. Quelques calculs

1. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ avec $m,n,p \in \mathbb{N}$. On suppose que f et g sont deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathrm{d}^2(g\circ f)(x)$.
SOLUTION:
Par règle de dérivation de la composée $g\circ f$ est bien différentiable sur $\mathbb{R}^m$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathrm{d}(g\circ f)(x) = \mathrm{d}g(f(x))(\mathrm{d}f(x))$. On pose $\Psi : \mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p) \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ définie par $\Psi(A,B) = B\circ A$. Cette application est bilinéaire et puisqu'elle prend ses valeurs dans un espace de dimension finie elle est immédiatement différentiable. On peut calculer sa différentielle. Soit $(A,B) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ et $(H,K) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ on a
$$\mathrm{d}\Psi(A,B) = B\circ H + K\circ A\,. \tag{1}$$
Posons maintenant $\phi :\ \mathrm{R}^m \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)$ définie sur $\mathbb{R}^m$ par
$$\phi(x) = (\mathrm{d}f(x), \mathrm{d}g(f(x)))\,. \tag{2}$$
ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}^m$ en tant que composée de fonctions différentiables. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $h \in \mathbb{R}^m$ on a
$$\mathrm{d}\phi(x)(h) = \left(\mathrm{d}^2 f(x)(h,\cdot), \mathrm{d}^2 g(f(x))(\mathrm{d}f(x)(h),\cdot)\right)\,. \tag{3}$$
Il suffit de constater que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathrm{d}(g\circ f)(x) = \Psi(\phi(x))$ et donc $x \mapsto \mathrm{d}(g\circ f)(x)$ est différentiable de différentielle pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et $h \in \mathbb{R}^m$ donnée par
$$\mathrm{d}^2(g\circ f)(x)(h) = \mathrm{d}g(f(x))(\mathrm{d}^2 f(x)(h,\cdot)) + \mathrm{d}^2 g(f(x))(\mathrm{d}f(x)(h), \mathrm{d}f(x)(\cdot))\,. \tag{4}$$

2. Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle :
   (a) On définit $g :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = f(y, f(x,x))$.
   SOLUTION:
   Soient $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ les différentielles partielles de f, et notons $q(x) = f(x,x)$.
   Alors $\mathrm{d}q(x)(h) = \mathrm{d}f(x,x)(h,h)$ et :
   $$\mathrm{d}g(x,y)(h,k) = \partial_1 f(y,q(x))(k) + \partial_2 f(y,q(x))(\mathrm{d}q(x)(h))$$
   $$\mathrm{d}g(x,y)(h,k) = \partial_1 f(y,f(x,x))(k) + \partial_2 f(y,f(x,x))(\mathrm{d}f(x,x)(h,h))$$
   Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est différentiable car c'est une composition de fonctions differentiables, et on a :
   $$\mathrm{d}g(x,y)(h,k) = \mathrm{d}f(y,f(x,x))(k, \mathrm{d}f(x,x)(h,h)).$$

   (b) On définit $h :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(x,y) = e^{xy} f(x+y,x)$.
   SOLUTION:
   Soit $h(x,y) = g(x,y)q(x,y)$ avec $g(x,y) = e^{xy}$ et $q(x,y) = f(x+y,x)$. D'ou
   $$\mathrm{d}g(x,y)(h,k) = e^{xy}yh + e^{xy}xk,$$

$$dq(x,y)(h,k) = df(x+y,x)(h+k,h) = df(x+y,x)(h,h) + df(x+y,x)(k,h).$$

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est différentiable car composition de fonctions differentiables, et on a :

$$dh(x,y)(h,k) = f(x+y,x)[e^{xy}yh + e^{xy}xk] + e^{xy}df(x+y,x)(h+k,h).$$

3. Montrer que les fonctions suivantes sont deux fois différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et écrire leur développement de Taylor-Young à l'ordre deux en un point $a \in \mathbb{R}^2$:
   (a) On définit $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h_1(x,y) = x^2(x+y)$.
   SOLUTION:
   Soient les différentielles partielles

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x(x+y) + x^2 = 3x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = x^2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 2y; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 0; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x$$

   Alors :

$$\begin{aligned} h(a+x,b+y) =& h(a,b) + (3a^2+2ab)x + (a^2)y + \\ & \frac{1}{2}((6a+2b)x^2 + (4a)xy) + \\ & \|(x,y)\|^2\varepsilon((x,y)). \end{aligned}$$

   (b) On définit $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h_2(x,y) = e^{xy}$.
   SOLUTION:
   Soient les différentielles partielles

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = e^{xy}y; \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = e^{xy}x$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = ; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = e^{xy}x^2; \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy} + e^{xy}xy$$

   Alors :

$$\begin{aligned} h(a+x,b+y) =& h(a,b) + (e^{ab}b)x + (e^{ab}a)y + \\ & \frac{1}{2}((e^{ab}b^2)x^2 + (e^{ab}a^2)y^2 + (e^{ab} + e^{ab}ab)xy) + \\ & \|(x,y)\|^2\varepsilon((x,y)). \end{aligned}$$

Exercice 2. Calcul de Lagrangien. Soient $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $C^1(I,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions qui admettent un prolongement $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{L} \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. Dans toute la suite on identifie f et $\tilde{f}$ sur I. On définit $\mathscr{F} : C^1(I,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pour tout $f \in C^1(I,\mathbb{R})$ par

$$\mathscr{F}(f) = \int_a^b \mathscr{L}(x, f(x), f'(x))dx . \tag{5}$$

1. On munit $\mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie pour tout $f \in \mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$ par $\|f\| = \sup_{t\in I}|f(t)| + \sup_{t\in I}|f'(t)|$. Montrer que $\mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$ muni de cette norme est un espace de Banach.
SOLUTION:
Déjà on remarque que la définition ne pose pas de problème puisqu'on a unicité du représentant $\mathrm{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Dans toute la suite j'identifie $\tilde{f}$ et f. Si on a une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$ alors on a une suite de Cauchy pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ dans les espaces de Banach $\mathrm{C}(I,\mathbb{R})$. On a donc les deux suites qui converge $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ et par théorème de convergence uniforme des dérivées on a que $f \in \mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $g = f'$. On montre ensuite que puisque f admet des dérivées à droite et à gauche on peut bien la prolonger par une fonction par une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\mathscr{F}$ est différentiable et montrer que pour tout $f,h \in \mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$

$$\mathrm{d}\mathscr{F}(f)(h) = \int_a^b \left\{\partial_2\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))h(x) + \partial_3\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))h'(x)\right\}\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

SOLUTION:
Soit $f,h \in \mathrm{C}^1(I,\mathbb{R})$. On a les égalités suivantes

$$\mathscr{F}(f+h) = \mathscr{F}(f) + \int_a^b \left\{\mathscr{L}(x,f(x)+h(x),f'(x)+h'(x)) - \mathscr{L}(x,f(x),f'(x))\right\}\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$= \mathscr{F}(f) + \int_a^b \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))(0,h(x),h'(x))\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$+\int_a^b\int_0^1 \left\{\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x))(0,h(x),h'(x)) - \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))(0,h(x),h'(x))\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$= \mathscr{F}(f) + \int_a^b \left\{\partial_2\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))h(x) + \partial_3\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))h'(x)\right\}\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$+\int_a^b\int_0^1 \left\{\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x))(0,h(x),h'(x)) - \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))(0,h(x),h'(x))\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{11}$$

On pose

$$E(f,h) = \int_a^b\int_0^1 \left\{\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x))(0,h(x),h'(x))\right. \tag{12}$$

$$\left.-\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))(0,h(x),h'(x))\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,. \tag{13}$$

On a alors

$$|E(f,h)| \leq \|h\|\int_a^b\int_0^1 \|\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x)) - \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))\|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,. \tag{14}$$

On pose alors $\varepsilon(f,h) = \int_a^b\int_0^1 \|\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x)) - \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))\|\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. Il s'agit de montrer que $\lim_{\|h\|\to 0}\varepsilon(f,h) = 0$. Supposons que $\|h\| \leq \eta_1$ avec $\eta_1 > 0$ alors par continuité de f et de f' il existe un compact K dans $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in [0,1]$, $(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x)) \in K$. Par le théorème de Heine, on a que $(u,v,w) \mapsto \mathrm{d}\mathscr{L}(u,v,w)$ est uniformément continue sur K. On en déduit donc qu'il existe $\eta_1 \geq \eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in [0,1]$ on a

$$\|\mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x)+th(x),f'(x)+th'(x)) - \mathrm{d}\mathscr{L}(x,f(x),f'(x))\| \leq \varepsilon\,. \tag{15}$$

On peut donc conclure que $\lim_{\|h\|\to 0}\varepsilon(f,h) = 0$ et donc $\mathscr{F}$ est différentiable en f. Sa différentielle est directement identifée dans le calcul précédent.

Exercice 3. Différentielle et exponentielle
Soient E et F deux espaces vectoriels normés avec F un espace de Banach, U un ouvert de E et une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \mathrm{U} \to F$ différentiable sur U. On suppose que

— la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur U,
— la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur U.

1. Montrer que $f = \lim_n f_n$ est différentiable sur U et que pour tout $x \in$ U, $\mathrm{d}f(x) = \lim_n \mathrm{d}f_n(x)$.
SOLUTION:
Soit $a \in U$ On considère $a \in$ U et $h \in E$ assez petit tel que $a+h \in$ U. On pose $u_n = \|f_n(a+h) - f_n(a) - g(a)(h)\|_F$, où $g(a) = \lim_n \mathrm{d}f_n(a)$. Par inégalité des accroissements finis on a

$$u_n \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\mathrm{d}f_n(a+th) - g(a)\|_{E,F}\|h\|_E \ . \tag{16}$$

Par continuité de g, il existe $\varepsilon(a,h)$ tel que $\lim_{h\to 0}\varepsilon(a,h) = 0$ et $\|g(a+h)(h) - g(a)(h)\|_F = \varepsilon(a,h)\|h\|_E$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\mathrm{d}f_n(a+th) - g(a+th)\|_{E,F}\|h\|_E + \varepsilon(a,h)\|h\| \ . \tag{17}$$

Ensuite par convergence uniforme dans le terme de droite et convergence simple dans le terme de gauche on trouve

$$\|f(a+h) - f(a) - g(a)(h)\| \leq \varepsilon(a,h)\|h\| \ . \tag{18}$$

On trouve donc bien que f est différentiable de différentielle g.

2. On considère $\exp : \mathscr{L}_c(E,F) \to \mathscr{L}_c(E,F)$ définie pour tout $A \in \mathscr{L}_c(E,F)$ par

$$\exp(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A^n/n! \ . \tag{19}$$

Montrer que $\exp \in \mathrm{C}^\infty(\mathscr{L}_c(E,F), \mathscr{L}_c(E,F))$, *i.e.* $\exp \in \mathrm{C}^k(\mathscr{L}_c(E,F), \mathscr{L}_c(E,F))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
SOLUTION:
On a la convergence normale de la somme, donc sa convergence (car $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach car F est un espace de Banach). De plus chaque terme est différentiable et si on note $\Psi_n(A) = A^n/n!$ on a $\mathrm{d}\Psi_n(A)(H) = \sum_{i=1}^n A\ldots AHA\ldots A/n!$ et $\|\mathrm{d}\Psi_n(A)\| \leq \|A\|^{n-1}/(n-1)!$. On obtient la convergence normale de la série et donc sa convergence uniforme. On peut ensuite procéder par récurrence pour montrer que $\|\mathrm{d}^k\Psi_n(A)\| \leq \|A\|^{n-k}/(n-k)!$ et appliquer la première question pour conclure.

3. On suppose pour toute la suite de l'exercice que $E = F = \mathbb{R}^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. On a alors $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $M, H \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$

$$\mathrm{d}\exp(M)(H) = \int_0^1 \exp(tM)H\exp((1-t)M)\mathrm{d}t \ . \tag{20}$$

SOLUTION:
On commence par remarquer que pour tout $A, H \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{d}\exp(A)(H) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n!)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} A^k H A^{n-1-k} \ . \tag{21}$$

De la même manière on a, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\int_0^1 \exp(tM)H\exp((1-t)M)\mathrm{d}t = \sum_{p,q=0}^{+\infty}(p!q!)^{-1}\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t M^p H M^q \ . \tag{22}$$

On pose $J_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t$. Une récurrence (ou directement par l'utilisation du lien entre la fonction Beta et la fonction Gamma) montre que $J_{p,q} = (p!q!)/(p+q+1)!$. On obtient donc

$$\int_0^1 \exp(tM)H\exp((1-t)M)\mathrm{d}t = \sum_{p,q=0}^{+\infty}(p+q+1)!^{-1}M^p H M^q \ . \tag{23}$$

Posons $n=p+q+1$ et $k=p$. On a $p\geq 0$ qui est équivalent à $k\leq n-1$ et donc on obtient

$$\int_0^1 \exp(tM)H\exp((1-t)M)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(n!)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}A^kHA^{n-1-k} = \mathrm{d}\exp(A)(H)\,. \tag{24}$$

4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$. Montrer que si $A_n\to A$ alors $(\mathrm{Id}+A_n/n)^n\to\exp(A)$.
   SOLUTION:
   On peut écrire le binôme de Newton car A_n et Id commutent. On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$(\mathrm{Id}+A_n/n)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_n^k n^{-k} = \sum_{k=0}^{n}(n!n^{-k})/(k!(n-k)!)A_n^k\,. \tag{25}$$

   Donc on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\exp(A_n)-(\mathrm{Id}+A_n/n)^n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}k!A_n^k + \sum_{k=0}^{n}[-(n!n^{-k})/(k!(n-k)!)+k!^{-1}]A_n^k\,. \tag{26}$$

   Puisque, $(n!n^{-k})/(n-k)!\leq 1$, on obtient

$$\|\exp(A_n)-(\mathrm{Id}+A_n/n)^n\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}k!\|A_n\|^k + \sum_{k=0}^{n}[-(n!n^{-k})/(k!(n-k)!)+k!^{-1}]\|A_n\|^k \tag{27}$$

$$\leq \exp(\|A_n\|)-(1+\|A_n\|/n)^n\,. \tag{28}$$

   On conclut en utilisant le résultat connu dans $\mathbb{R}$.

5. Déduire de la questions précédente la formule de Lie-Trotter-Kato : pour tout $A,B\in\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$

$$\lim_n(\exp(A/n)\exp(B/n))^n = \exp(A+B)\,. \tag{29}$$

   SOLUTION:
   Par développement limité on sait qu'il existe une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n M_n=0$ et

$$\exp(A/n)\exp(B/n) = \mathrm{Id}+(A+B+M_n)/n\,. \tag{30}$$

   On conclut en utilisant la question précédente.

Exercice 4. Symétrie, jacobienne et lemme de Poincaré
Soit $f\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. On note $\mathrm{D}f(x)$ sa jacobienne au point x.

1. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}f(x)$ est antisymétrique. Montrer qu'il existe $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b\in\mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)=Ax+b$.
   SOLUTION:
   Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On note $a_{i,j,k}=\partial_{j,k}f_i$. Par théorème de Schwartz on a $a_{i,j,k}=a_{i,k,j}$. De plus par antisymétrie on $a_{i,j,k}=a_{i,k,j}$. Si on note σ le 3-cycle $\sigma(i,j,k)=(j,k,i)$ on obtient $a_{\sigma(i,j,k)}=-a_{i,j,k}$. Mais $\sigma^3=\mathrm{Id}$ et on a donc $a_{i,j,k}=(-1)^3a_{i,j,k}$ et donc $a_{i,j,k}$. On a donc $\mathrm{d}^2f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. Donc $f(x)=Ax+b$ (on peut intégrer car on est sur un convexe).

2. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}f(x)$ est symétrique. Montrer qu'il existe $\varphi\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ telle que pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$ et $x\in\mathbb{R}$,

$$f_i(x)=\partial_i\varphi(x)\,. \tag{31}$$

   On pourra poser $\varphi(x)=\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1 f_i(tx)\,\mathrm{d}t$.
   SOLUTION:

φ a la régularité demandée par différenciation sous le signe intégral. Il s'agit maintenant de différencier. Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_i \varphi(x) = \int_0^1 f_i(tx)\ \mathrm{d}t + t\sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 \partial_i f_j(tx)\ \mathrm{d}t \tag{32}$$

$$= \int_0^1 \{f_i(tx) + t\sum_{j=1}^n x_j \partial_i f_j(tx)\}\ \mathrm{d}t \tag{33}$$

$$= \int_0^1 \{f_i(tx) + t\sum_{j=1}^n x_j \partial_j f_i(tx)\} = \int_0^1 (t f_i(tx))'\ \mathrm{d}t = f_i(x)\ . \tag{34}$$

Exercice 5. Fonctions harmoniques et propriété de la moyenne

Dans tout cet exercice $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. On admet la formule suivante valable pour tout $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = S_n \int_0^{+\infty} f(\rho)\rho^{n-1}\ \mathrm{d}\rho\ , \tag{35}$$

avec $S_n \geq 0$. On note $V_n(r) = \int_{\|x\|\leq r} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$ le volume de la boule centrée en 0 et de rayon r. Soit $f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. On note $M_f(a,r)$ la moyenne de f sur la boule de centre a et de rayon r définie par

$$M_f(a,r) = V_n(r)^{-1} \int_{\|x-a\|\leq r} f(x)\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n\ . \tag{36}$$

1. Montrer que pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\|x\|\leq r} x^\top A x\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = r^2 V_n(r) \mathrm{Tr}(A)(n+2)^{-1}\ . \tag{37}$$

SOLUTION:
On remarque que l'on peut se restreindre aux matrices symétriques pour montrer la formule cette dernière étant triviale sur les matrices antisymétriques. Soit donc A une matrice symétrique. Il existe une matrice de diagonalisation P orthogonale par le théorème spectral. On obtient donc en effectuant le changement de base

$$\int_{\|x\|\leq r} x^\top A x\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\|x\|\leq r} x_i^2 \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \tag{38}$$

$$= n^{-1}\mathrm{Tr}(A) \int_{\|x\|\leq r} \|x\|^2\ \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n \tag{39}$$

$$= n^{-1}\mathrm{Tr}(A) S_n \int_0^r s^{n+1}\ \mathrm{d}s = n^{-1}\mathrm{Tr}(A) S_n r^{n+2}(n+2)^{-1}\ . \tag{40}$$

Il s'agit ensuite de remarquer que

$$V_n(r) = \int_{\|x\|\leq r} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = S_n r^n / n\ , \tag{41}$$

et on peut conclure.

2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ on a $M_f(a,r) = f(a) + r^2/(2(n+2))\Delta f(a) + o(r^2)$.
SOLUTION:
On intègre le développement limité de f autour de a. On sait que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $\|h\| \leq \eta$ on a

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}^2 f(a)(h,h) + R(a,h)\ , \tag{42}$$

et $\|R(a,h)\| \leq \varepsilon\|h\|$. En utilisant la formule admise (le reste est intégrable car continu) on a

$$\|V_n(r)^{-1} \int_{\mathrm{B}(a,\eta)} R(a,x-a)\mathrm{d}x\| \leq \varepsilon r\,. \tag{43}$$

Le premier terme associé à la première différentielle est nul car symétrique. Le second est donné par la première question.

3. En déduire que si f satisfait la propriété de la moyenne, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $M_f(a,r) = f(a)$ alors f est harmonique, c'est-à-dire que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\Delta f(a) = 0$.
   SOLUTION:
   Immédiat par la question précédente.