Semaine 13 - Arithmétique des polynômes

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Écriture binaire et polynôme

Soit $P_n(x) = (1+X)(1+X^2)\dots(1+X^{2^n})$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1 Donner la forme développée de P_n.

2 Montrer que tout entier $p \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique comme la somme de puissance de deux.

Remarque : ce résultat permet de montrer de manière élégante, l'existence et l'unicité de l'écriture binaire des entiers.

2 Équations polynomiale(s) (1)

Résoudre dans $k[X]$ les équations suivantes.

1 $Q^2 = XP^2$ en (P, Q).

2 $P \circ P = P$ en P.

3 $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ en P

3 Équations polynomiale(s) (2)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$ et P non nul.

1 Montrer que les racines de P sont de module 1.

2 Déduire P.

4 Intégration et polynômes (1)

Soit $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1 On suppose que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\int_a^b f(t)t^k \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Remarque : le théorème de Weierstrass permet de montrer une version limite de ce théorème à savoir : si $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x = 0$, alors $f = 0$.

5 Intégration et polynômes (2)

1 Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1} P(x)\mathrm{d}x = k+1$.

6 Localisation des racines

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Soit z une racine complexe de P.

1 Montrer que $|z| \leq 1 + \max\limits_{j \in [\![0,n-1]\!]} |a_j|$.

Remarque : cette majoration permet de réduire l'ensemble de recherche des racines du polynômes. D'autres techniques permettent d'affiner le domaine : règle de changement des signes de Descartes, suites de Sturm, disques de Gershgörin.

7 Le théorème de Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1 Montrer que toute racine de P' est barycentre des racines de P.

8 Majoration des coefficients

Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$.

1 Calculer $P(1) + P(\omega) + \cdots + P(\omega^n)$ avec ω une racine $n+1$-ème de l'unité.

2 En déduire que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ |a_k| \leq M$ avec $M = \sup\limits_{z \in \mathbb{U}}(|P(z)|)$.

9 Localité et polynômes

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ localement polynômiale :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \exists(\epsilon, P_{x_0}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}[X],\ \forall x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[,\ f(x) = P(x)$$

1 Montrer que f est un polynôme.

Remarque : on peut encore affaiblir les hypothèses (théorème de Balaguer-Corominas) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n_x,\ f^{(n_x)}(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ f \text{ est polynômiale.}$$

10 Trigonométrie et polynômes

1 Peut-on écrire la fonction cos comme un polynôme ?

11 Racines réelles de polynôme (1)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$.

1 Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ admet au plus trois racines réelles.

12 Racines réelles de polynômes (2)

1 Montrer que $P_n = ((1-X^2)^n)^{(n)}$ est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1,1]$.

13 Condition nécessaire et suffisante de primalité

Soit A et B deux polynômes de $k[X]$ non constants.

1 Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont premiers entre eux.
- $\exists (U,V) \in k[X]^2,\ AU + BV = 1$ et $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

2 Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B ne sont pas premiers entre eux.
- $\exists (U,V) \in k[X]^2,\ AU + BV = 0$ et $\deg(U) < \deg(B)$ et $\deg(V) < \deg(A)$.

14 Factorisation (1)

1 Factoriser dans $\mathbb{C}[X],\ (X+i)^n - (X-i)^n$.

Remarque : on rappelle que $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos(\theta)$ et $\frac{2x}{1+x^2} = \sin(\theta) \iff x = \tan(\frac{theta}{2})$.

15 Factorisation (2)

1 Factoriser dans $\mathbb{C}[X],\ X^n + 2\cos(na)X + 1$.

2 Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

16 Division euclidienne et polynôme

Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Soit r le reste de la division euclidienne de n par m.

1 Donner le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

2 Montrer que $X^n - 1 \wedge X^m - 1 = X^{n \wedge m} - 1$.