Valentin De Bortoli, Frédéric Pascal

Feuille 2.1 - Différentiabilité, première propriétés

Exercice 1 – Exemples et contre-exemples.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = \left| \begin{array}{ll} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$

Montrer que f admet une dérivée suivant toutes les directions mais n'est pas différentiable en 0 ni même continue en 0.

b) Étudier suivant les valeurs de $\alpha > 0$, la différentiabilité en $(0,0)$ de l'application $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |xy|^\alpha$.

c) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in U, \partial_1 f(x,y) = 0$$

A-t-on $f(x,y) = g(y)$? (*ie* que f ne dépend pas de la première variable ?)

d) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On définit $g : (x,y) \mapsto f(y,x)$, $g_1 : (x,y) \mapsto f(x, y+x)$ et $h : x \mapsto f(x,-x)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g_1}{\partial x}$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}$ et $h'(x)$.
Remarque: Cet exemple illustre bien l'intérêt d'écrire $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ ou ∂_i au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

e) Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $h : \mathbb{R}^{(n+p)} \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On note $Df(a)$ la matrice telle que $df_a(u) = Df(a)u$ (en identifiant u et son écriture vectorielle).

i Quel lien y a-t-il entre $D(f \circ g)$, Df et Dg?

ii Soit $(e_1, \cdots, e_{n+p})$ une base de $\mathbb{R}^{n+p}$. On s'intéresse à la dérivée partielle de h par rapport aux n premières variables, quel est le lien entre sa matrice et la matrice de dh ?

iii On suppose ici $n = p$, soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que df est un C^1−difféomorphisme. Quel est le lien entre $Df(a)$ et $D(f^{-1})(f(a))$.

f) Soit f définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et différentiable sur cet ensemble. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$$

est équivalent à $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}^*,\ f(tx) = t^k f(x)$ (on dit que la fonction est homogène).

Exercice 2 – Gradient et calcul matriciel. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) On se place sur $M_n(\mathbb{R})$. Calculer le gradient des applications Trace et Déterminant.

b) Soit I une partie de $[|1,n|]$. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $|A_I|$ le mineur principal de A obtenu en considérant les lignes et les colonnes d'indice appartenant à I. Déterminer le gradient de $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $f(A) = |A_I|$.

c) Calculer la différentielle de l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle d, x\rangle + \delta$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Cas où A est symétrique ?

d) Ćalculer la différentielle de $f : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $f(A) = A^{-1}$. Indication : commencer par déterminer la différentielle en I_n en introduisant une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$. Généraliser ensuite à une matrice inversible quelconque.

e) Calculer la différentielle de l'application $f : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

Exercice 3 – Suite et densité.
Soit $f : [1, \infty, [\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable croissante telle que $f(x)$ croit vers $+\infty$ et $f'(x)$ décroit vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que les points $\exp(-if(n))$, pour n entier strictement positif, sont denses sur le cercle unité.

Exercice 4 – Différentielle et polynôme. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^\star$) et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $\Phi : E \times I \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi(P, x) = P(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5 – Un difféomorphisme ?. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, xy)$

a) Montrer que f est de classe C^∞. Calculer la différentielle de f en (x, y). Déterminer l'ensemble S des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en lesquels $\mathrm{d}f_{(x,y)}$ est inversible.

b) Calculer $f(\mathbb{R}^2)$. L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$? L'application f est-elle un difféomorphisme de S sur $f(S)$? Trouver un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que f soit un difféomorphisme de U sur $f(S)$.

Exercice 6 – Différentielle et loi de groupe. Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ dont on note e l'élément neutre. On suppose que la fonction f définie par $f(x, y) = x * y$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On note $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ les dérivées partielles.

a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(\partial_2 f)(x * y, e) = (\partial_2 f)(x, y).(\partial_2 f)(y, e)$$

b) On cherche maintenant à construire une application ϕ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\phi(x * y) = \phi(x) + \phi(y)$$

Montrer que nécessairement ϕ est de la forme : $\phi(x) = a \int_e^x \dfrac{dt}{(\partial_2 f)(t, e)}$

c) Réciproquement, montrer que toute application de la forme précédente est C^1 et transforme la loi $*$ en l'addition.

Exercice 7 – Différentielle et mesure. On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque et on note B_r la boule de centre 0 et de rayon r. Soit f un C^1 difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On supposera pour simplifier que $f(0) = 0$.

a) Soit $\epsilon \in]0,1[$ fixé. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,

$$\| \mathrm{d}f(0)^{-1}(f(x)) - x\| \leqslant \epsilon \|x\|$$

b) Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que, pour $0 \leqslant r \leqslant R'$, $(1-\epsilon)\,\mathrm{d}f(0)(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\epsilon)\,\mathrm{d}f(0)(B_r)$ Indication : Pour la première inclusion, observer que $f(B_R)$ est un voisinage de 0.

c) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ dont on admet qu'elle satisfait la relation $\lambda(AX) = |\det(A)|\lambda(X)$ pour tout ensemble Lebesgue-mesurable X et toute application linéaire $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer alors que :

$$|\det \mathrm{d}f(0)| = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(f(B_r))}{\lambda(B_r)}$$

Exercice 8 – Différenciation sous le signe intégral. Soit E et F deux espaces métriques. Soit K un compact de E et f continue de E and F

a) Montrer que

$$\epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in K \times E,\ d_E(x,y) < \eta \ \Rightarrow\ d_F(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

b) Ce théorème est une généralisation d'un autre bien connu. Lequel ? En quoi consiste cette généralisation ?

c) On suppose que E et F sont des espaces de Banach. Soit $\psi :]0,1[\times U \to F$ avec U ouvert de E. On suppose également que :

1. pour tout $t \in]0,1[$, $\psi(t,\cdot)$ est différentiable,
2. $d_2\psi :]0,1[\times U \to F$ est continue.

Montrer que $g : U \to F$ définie par

$$\forall x \in U, g(x) = \int_{]0,1[} \psi(t,x)\mathrm{d}t,$$

est différentiable et donner sa différentielle.
Remarque : faire le lien avec le théorème de dérivation sous le signe intégral que vous connaissez.