Semaine 10 - Structure de groupe

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

A moins que cela ne soit explicitement précisé on adopte la notation multiplicative pour la loi du groupe G.

1 Ordre d'un élément et commutativité

Soit G un groupe dans lequel tout élément est d'ordre 2, c'est-à-dire que $\forall g \in G,\ g^2 = 1$.

1 Montrer que G est abélien.

2 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal 4.

Remarque : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6, question 5.

2 Groupe distingué, groupe quotient

Soit G un groupe. On dit que H est un sous groupe distingué de G si H est un sous groupe de G et si $\forall (g,h) \in G \times H,\ ghg^{-1} \in H$. Soit H un tel groupe.

1 Montrer que tout sous groupe d'un groupe abélien est distingué.

2 On note $G/H = \{gH,\ g \in G\}$. Montrer que G/H muni de la loi $(gH)(g'H) = gg'H$ est un groupe. On dit que G/H est le groupe quotient de G par H.

3 Soit ϕ un morphisme de G dans K (un groupe). Montrer que $\ker(\phi)$ est distingué.

4 Montrer que $\overline{\phi}$ qui va de $G/\ker(\phi)$ dans $\mathrm{Im}(\phi)$ défini par $\overline{\phi}(G/\ker(\phi)) = \phi(g)$ est un isomorphisme.

Remarque : cette technique est appelée dévissage et elle permet de comprendre la structure de groupe compliqués en se ramenant à des groupes plus simples (les groupes simples...). On peut dresser toute une zoologie des groupes simples. Celle-ci a été complété en 1983 par Daniel Gorenstein (et comporte des milliers de pages de preuves !).

3 Somme des images et morphisme

Soit ϕ un morphisme non constant de G dans $\mathbb{C}^*$.

1 Que vaut $\sum\limits_{g \in G} \phi(g)$.

4 Un isomorphisme ?

1 Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe.

2 Montrer que $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe.

3 Y a-t-il isomorphisme entre ces deux groupes ?

5 Un sous groupe d'un groupe abélien

Soit G un groupe abélien. Soit $H = \{g, g \in G \text{ et } \exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 1\}$.

1 Montrer que G est un groupe.

Remarque : cela n'est plus vrai si G n'est pas abélien.

6 Le théorème de Lagrange

Soit G un groupe fini. Soit H un sous groupe de G.

1 Soit $a \in G$. Montrer que le cardinal de aH est le même que celui de H.

2 Montrer que $aH \cap bH \neq \emptyset \ \Rightarrow\ aH = bH$.

3 Montrer que $G = \bigcup\limits_{g \in G} gH$.

4 En déduire que le cardinal d'un sous groupe divise toujours le cardinal du groupe.

5 Soit $H_x = \{x^n, n \in \mathbb{N}\}$. On appelle **ordre** de x le cardinal de ce sous-groupe. Montrer que l'ordre de x divise le cardinal du groupe.

7 Le théorème de Cayley

Soit G un groupe fini. On note $\mathfrak{S}_G$ l'ensemble des bijections de G dans G. On note τ_x ($x \in G$) la fonction qui va de G dans G et qui est définie par $\forall g \in G,\ \tau_x(g) = xg$.

1 Vérifier que τ_x est un élément de $\mathfrak{S}_G$.

2 Vérifier que $\mathfrak{S}_G$ est un groupe.

3 Montrer que ϕ qui va de G dans $\mathfrak{S}_G$ définie par $\phi(x) = \tau_x$ est un morphisme de groupe injectif.

4 En déduire que G est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_G$.

8 Nombres réels et sous groupes

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à un élément. On note $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$. On note $x_0 = \text{inf} G_+$.

1 Vérifier que x_0 est bien défini.

2 Montrer que si $x_0 = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

3 Montrer que si $x_0 \neq 0$ alors $x_0 = \min G_+$, c'est-à-dire $x_0 \in G_+$.

4 Montrer alors que $G = x_0\mathbb{Z}$.

5 Conclure sur la forme des sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$

9 Le groupe symétrique

Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$.

1 Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est un groupe. On le nomme groupe symétrique.

2 Soit $(a\ b)$ la bijection qui échange a et b (on la nomme permutation). Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'exprimer comme composition de permutations.

10 Loi de groupe et géométrie

On donne le procédé de construction suivant. Dans le plan on place $A(1,0)$ et $B(0,1)$. On considère également les points $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$. On place P_0 de la manière suivante :

- $P_0 \in (AB)$.
- (P_0M_0) parallèle à (Ox).

On place Q_0 de la manière suivante :

- (P_0Q_0) et (M_1B) parallèles.
- $Q_0 \in (AM_1)$

On place M_2 de manière à ce que $M_0P_0Q_0M_2$ forme un parallélogramme.

1 Montrer que les coordonnées de Q_0 sont $(1 + x_0y_1, y_0y_1)$.

2 En déduire que M_2 a pour coordonnées $(x_0 + x_1y_0, y_0y_1)$.

3 Montrer que $\mathcal{P}' = \{M(x,y),\ y \neq 0\}$ est un groupe pour la loi $*$ définie par $M_0 * M_1 = M_2$.