

Semaine 16 - Théorie de la dimension

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

Dans la suite k est un corps (on se limite à \mathbb{R} et \mathbb{C}) et E un k -espace vectoriel.

1 Une famille libre ?

1 Montrer que $(x \mapsto \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Remarque : on peut montrer de manière plus générale qu'une famille de fonctions $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si il existe n réels $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ tels que $(f_i(x_j))_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ soit une matrice inversible.

2 Espace vectoriel et fonctions affines

1 Soit F l'ensemble des fonctions continues de $[-1, 1]$ affines sur $[-1, 0]$ et affines sur $[0, 1]$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel (de quel espace vectoriel ?).

2 Trouver une base de F .

3 Une base de polynômes

1 Montrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4 Nombres réels et espace vectoriel

Le but de cet exercice est d'étudier \mathbb{R} comme \mathbb{Q} -espace vectoriel. On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des nombres premiers rangés par ordre croissant.

1 Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, $(p_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est une famille libre de \mathbb{R} . En déduire qu'il n'existe pas de base finie de \mathbb{R} comme \mathbb{Q} -espace vectoriel.

2 Autre démonstration : si $(x_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ est une base de \mathbb{R} comme \mathbb{Q} -espace vectoriel en déduire que tout $x \in \mathbb{R}$ est racine d'un polynôme de degré $N - 1$.

3 En considérant $2^{1/N}$ en déduire une contradiction (on admettra que $X^n - 2$ est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$).

Remarque : en fait on peut même montrer en considérant la famille $(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^{\lfloor a^n \rfloor}})_{a > 1}$ que toute base de \mathbb{R} comme \mathbb{Q} -espace vectoriel est de cardinal celui de \mathbb{R} . L'existence d'une base de \mathbb{R} est assurée par l'axiome du choix (bases de Hamel) mais n'est pas constructible.

5 Polynômes à valeurs entières

1 Montrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$ et $P_0 = 1$. Montrer que $(P_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k(m) \in \mathbb{Z}$.

- 3 En déduire la forme des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui prennent des valeurs entières sur les entiers.

6 Divisibilité et sous-espace vectoriel

Soit A polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 1 Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], A|P\}$ est un sous-espace vectoriel.
- 2 Exhiber une base et un supplémentaire de cet espace.

7 Une équation polynomiale

- 1 Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^n$.

8 Une somme directe

1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $F_i = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}, P(j) = 0, P(i) \neq 0\}$. Montrer que $F_i \cup \{0\}$ est un espace vectoriel.

- 2 Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_0 \oplus \dots \oplus F_n$.

9 Drapeaux

Soit u un endomorphisme de E .

- 1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subset \ker u^{k+1}$. Conjecturer et prouver une propriété similaire sur $\operatorname{Im} u^k$.
- 2 On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^n = \ker u^{n+1}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}, p \geq n \Rightarrow \ker u^p = \ker u^{p+1}$.
- 3 En déduire que pour ce n , $\ker u^n$ et $\operatorname{Im} u^n$ sont en somme directe. Que peut-on dire dans le cas de la dimension finie ?

10 Stabilisation et endomorphismes

Soit u un endomorphisme de E .

- 1 On suppose que u stabilise toutes les droites (sous espaces vectoriels de dimension 1), c'est-à-dire que pour toute droite D , $u(D) \subset D$. Que peut-on dire de u ?
- 2 On suppose maintenant que u stabilise tous les sous-espaces vectoriels de dimension k . Que peut-on dire de u ?

11 Polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme de E . On suppose que E est de dimension finie.

- 1 Montrer qu'il existe $P \in k[X]$ tel que $P(u) = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k u^k = 0$.
- 2 Montrer que u est bijectif si et seulement un de ses polynômes annulateurs vérifie $a_0 \neq 0$.

3 Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont en somme directe si et seulement il existe un polynôme annulateur dont 0 est racine d'ordre au plus 1.

4 Que se passe-t-il en dimension infinie ?

12 Rang et endomorphisme

Soit u et v deux endomorphismes de E (espace vectoriel de dimension finie) tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ bijectif.

1 Montrer que $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = \dim E$.