Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit $\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Theorem 1. *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ il existe un unique $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tel que*

$$\forall Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P),\ E(XZ) = E(YZ)$$

On appelle espérance conditionnelle la variable Y et on la note $Y = E(X|\mathcal{F})$.

Théorème de Riesz $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En effet soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)\right)^{\mathbb{N}}$ qui converge. Alors c'est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mais aussi dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Par complétude de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ on a que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On a évidemment que $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de Hilbert. On définit l'application $\Phi_X(Z) = E(XZ)$ qui va de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $\mathbb{R}$. Cette application linéaire est continue via le théorème de Cauchy-Schwarz. On peut donc appliquer le théorème de Riesz et il existe un unique $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui vérifie $\forall Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),\ E(XZ) = E(YZ)$. On a montré l'existence de la variable Y (en se rappelant l'inclusion de $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$). Pour montrer l'unicité supposons (Y_1, Y_2) qui vérifie les hypothèses alors $Y_1 - Y_2$ est orthogonale à $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ d'où $Y_1 = Y_2$.

Positivité et majoration Soit X une variable aléatoire de carré intégrable positive. On considère l'évènement $E(X|\mathcal{F}) < 0$ et on obtient que cet ensemble est de mesure nulle. Donc $E(X|F) \geq 0$. On a donc $E(|X| + X|\mathcal{F}) \geq 0$ et $E(|X| - X|\mathcal{F}) \geq 0$. Donc $E(|X||\mathcal{F}) \geq |E(X|\mathcal{F})|$. On a $E(E(|X||\mathcal{F})) = E(|X|)$ (on prend $Z = \chi_\Omega$ dans la définition de l'espérance conditionnelle). Donc

$$\|E(X|\mathcal{F})\|_1 \leq \|X\|_1$$

et on étend par continuité.