Semaine 4 - Fonctions usuelles

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Fonctions hyperboliques réciproques

1 Montrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2 Déterminer la réciproque de sinh.

3 Montrer que cosh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $[1, +\infty[$.

4 Déterminer la réciproque de cosh.

5 Montrer que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.

6 Déterminer la réciproque de tanh.

2 Quelques arctangentes célèbres

1 Montrer que $\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{7})$ (Jakob Hermann 1678-1733).

2 Montrer que $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ (John Machin 1680-1751).

Remarque : ces formules et d'autres du même type ont longtemps été utilisées pour calculer π avec précision. Depuis le début du XX$^{\text{e}}$ siècle on utilise les formules trouvées par Srinivasa Ramunajan qui permettent de calculer plus rapidement les décimales de π.

3 Somme et arctangente

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1 On suppose que $ab = 1$, calculer $\arctan(a) + \arctan(b)$.

2 On suppose que $a > 0$ et $0 < ab < 1$, calculer $\arctan(a) + \arctan(b)$ en fonction de $\arctan(\frac{a+b}{1-ab})$.

3 Même question si $a > 0$ et $ab > 1$.

4 Même question si $a < 0$ et $ab > 1$.

5 Même question si $ab < 0$.

4 Somme et cosinus hyperbolique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1 Exprimer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cosh(ak + b)$ comme produit de fonctions hyperboliques.

5 Composée, fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1 Rappeler les valeurs de $\arccos(\cos(x))$ et $\cos(\arccos(x))$ si elles existent.

2 Simplifier $\sin(\arccos(x))$ et $\cos(\arcsin(x))$.

3 Simplifier $\cos(\arctan(x))$ et $\sin(\arctan(x))$.

6 Suite et arctangente

Pour cet exercice on admettra que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $ab < 0$ alors $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan(\frac{a+b}{1-ab})$ (on pourra trouver une démonstration de ce résultat à l'exercice 2).

1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\arctan(\frac{2}{k^2}) = \arctan(k+1) - \arctan(k-1)$.

2 En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan(\frac{2}{k^2})$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la déterminer.

7 Suite et tangente hyperbolique

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

1 Montrer que $\tanh(x) = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)}$.

2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh(2^k x)$. Grâce à la question précédente, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite lorsque $n \to +\infty$ et la déterminer.

8 Résolution d'équations

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

2 Résoudre dans $[-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{3}x) = \frac{\pi}{2}$.

9 Quelques considérations sur l'exponentielle

1 Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+,\ (1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$.

2 Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

10 Quelques considérations sur le logarithme

1 Faire l'étude de la fonction f définie par l'expression $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

2 Trouver tous les couples d'entiers $(a, b) \in {\mathbb{N}^*}^2$ avec $a \neq b$ qui vérifient : $a^b = b^a$.