Semaine 1 - Complexes, sommes et nombres réels

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Quelques autres cosinus et sinus remarquables (1)

1

$$\begin{aligned}(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}})^8 &= (2\sqrt{2}+i2\sqrt{2})^4 \\ &= 2^8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \\ &= -2^8\end{aligned} \tag{1}$$

2 On en déduit que $z_0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ est racine de z^8+1. Ce polynôme possède 8 racines complexes, $(e^{\frac{i(2k+1)\pi}{8}})$ avec $k \in [\![0,7]\!]$. Il s'agit d'identifier à quel k correspond z_0. Si $k \geq 4$ alors $\mathrm{Im}\left(e^{\frac{2ik\pi}{8}}\right) \leq 0$ donc $k \leq 3$. Si $k = 3$ ou 2 alors $\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{8}}\right) \leq 0$. Donc $k \leq 1$. Mais si $k = 1$ alors $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Or $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $k = 0$ et on a,

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases} \tag{2}$$

3 On sait que $\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos(x)}{2}$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1-\cos(x)}{2}$. Ainsi on trouve que,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \tag{3}$$

où on a pu passer à la racine car $\frac{\pi}{8}$ appartient au premier quadran et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est positif.

2 Quelques autres cosinus et sinus remarquables (2)

1 Les solutions sont $e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ avec $k \in [\![0,5$. Pour la suite on note $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}$. Il convient de remarquer que les solutions de $z^5 - 1$ sont $\{z_0, z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}\}$.

2 $Q(z) = \frac{z^5-1}{z-1} = 1+z+z^2+z^3+z^4 = z^2(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2) = z^2(\omega^2+\omega-1)$. Ainsi, puisqu'on peut se restreindre à $\mathbb{C}^*$, 0 n'étant pas solution de $Q(z) = 0$, les solutions de $Q(z) = 0$ vérifient $\omega^2+\omega-1 = 0$. Donc,

$$\begin{cases}\omega_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \omega_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{cases} \tag{4}$$

Ainsi $z^2 - \omega_1 z + 1 = 0$ ou $z^2 - \omega_2 z + 1 = 0$. Les discriminants respectifs sont,

$$\begin{cases}\Delta_1 = \omega_1^2 - 4 = \frac{6-\sqrt{5}-16}{4} = \frac{-10-\sqrt{5}}{4} \\ \Delta_2 = \frac{-10+\sqrt{5}}{4}\end{cases} \tag{5}$$

Ainsi, on obtient quatre solutions à l'équation $Q(z) = 0$,

$$\begin{cases} z_a = \dfrac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+\sqrt{5}}}{4} \\ z_b = \dfrac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+\sqrt{5}}}{4} \\ z_c = \dfrac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-\sqrt{5}}}{4} \\ z_d = \dfrac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-\sqrt{5}}}{4} \end{cases} \tag{6}$$

La partie réelle de z_c est négative. De même pour z_d. La partie imaginaire de z_b est négative donc on a $z_1 = z_a$ comme seule possibilité.

3 On a,

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{4} \end{cases} \tag{7}$$

3 Inverse de la somme, somme des inverses

1 En multipliant par $a+b$ des deux côtés on obtient $1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Il s'agit maintenant de poser $z = \frac{a}{b}$. On a $1 = z + \frac{1}{z}$. Il s'agit donc de trouver les racines du polynômes de second degré $z^2 - z + 1$. On trouve $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Il convient de remarquer que $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$ ou $z = e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Ainsi $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ si et seulement si $(0, a, b)$ forme un triangle équilatéral.

4 Recherche d'une factorisation

1 Il s'agit de poser $Z = z^4$. On a $Z^2 + Z + 1 = 0$. Donc $Z = j$ ou $j^2 = \overline{j}$. Ainsi on a,

$$\begin{cases} z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}} \\ z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ z_3 = -e^{\frac{i\pi}{6}} \\ z_4 = -e^{\frac{2i\pi}{3}} \end{cases} \tag{8}$$

et leurs conjugués solutions de l'équation initiale. Cette distinction entre solution et solution conjuguée est cruciale pour la seconde question.

2 Il s'agit de remarquer que $(z-a)(z-\overline{a}) = z^2 - 2\operatorname{Re}(a)z + |a|^2$ et est donc un polynôme réel. Ainsi,

$$z^8 + z^4 + 1 = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1) \tag{9}$$

5 Produit de sinus

1 Dans un premier temps, $z + 1 = \exp(2i\alpha)\exp(\frac{2ik\pi}{n})$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc $z = e^{2i\alpha + \frac{2ik\pi}{n}} - 1 = 2ie^{i\alpha + \frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$.

2 On considère le polynôme $P(z) = (z+1)^n - e^{2i\alpha n}$. Le terme constant de ce polynôme vaut $1 - e^{2i\alpha n} = -2ie^{i\alpha n}\sin(\alpha n)$. Mais en écrivant $P(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - 2ie^{i\alpha + \frac{ik\pi}{n}}\sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)\right)$ on peut écrire le terme constant comme étant égal à $\prod_{k=0}^{n-1} - 2ie^{i\alpha+\frac{ik\pi}{n}} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = 2^n(-1)^n i^n e^{i\alpha n} i^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = -2^n i e^{i\alpha n} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$. Ainsi on obtient,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin(\alpha n)}{2^{n-1}}. \tag{10}$$

6 Somme de sinus et de cosinus (1)

Dans la suite on considère toujours que x n'est pas un multiple de π auquel cas les sommes sont triviales.

1 Un grand classique. On calcule d'abord $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{i(n-1)\frac{x}{2}} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$. On obtient alors (en considérant partie réelle et partie imaginaire),

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{cases} \tag{11}$$

2 Un grand classique, deuxième édition. On calcule d'abord $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (e^{ix})^k = (1+e^{ix})^n = e^{\frac{inx}{2}} 2^n \cos(x)^n$. Encore une fois en considérant partie réelle et partie imaginaire, on obtient,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cos(kx) = 2^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \cos(x)^n \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sin(kx) = 2^n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cos(x)^n \end{cases} \tag{12}$$

3 Moins classique mais toujours même technique. On calcule d'abord $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}\cos(x)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ix}\cos(x)\right)^k = \frac{1-e^{inx}\cos(x)^n}{1-e^{ix}\cos(x)} = \frac{1-e^{inx}\cos(x)^n}{\sin(x)^2 - i\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)}\left(1-e^{inx}\cos(x)^n\right)(\sin(x)+i\cos(x))$. On peut alors prendre la partie réelle et on obtient,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx)\cos(x)^k = 1-\cos(nx)\cos(x)^n + \frac{1}{\sin(x)}\sin(nx)\cos(x)^n\cos(x) = 1-\cos(nx)\cos(x)^n + \sin(nx)\cot(x)\cos(x)^n \tag{13}$$

4 Une dernière fois... On considère $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(-\cos(x)e^{ix}\right)^k = (1-\cos(x)e^{ix})^n = \sin(x)^n\left(\sin(x) - i\cos(x)\right)^n = \sin(x)^n e^{\frac{in\pi}{2}}$. On considère la partie réelle et on a,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \cos(x)^k \cos(kx) = \sin(x)^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \tag{14}$$

7 Somme de sinus et de cosinus (2)

On pose $a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$ et $c = e^{i\gamma}$. Les relations données assurent que $a+b+c=0$. Mais on a également $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$.

1 On a donc $abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$. D'où $ab+bc+ca = 0$. En considérant la partie réelle et la partie imaginaire on obtient le résultat voulu.

2 Il suffit de considérer $(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 0$ par les questions précédentes. Mais $(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2$. On peut donc conclure en considérant partie réelle et partie imaginaire.

8 Une équation dans les complexes

On commence par simplifier $\frac{1+i\tan(a)}{1-i\tan(a)} = e^{2ia}$. Il s'agit ensuite de trouver z. En effet, $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{1+iz}{1-iz} = e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}$. Cette équation possède une unique solution en z (il s'agit de trouver les racines d'un polynôme de degré 1). On a donc l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{\tan\left(a+\frac{k\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

9 Un peu de géométrie

Isocèle en z^2 On a $|z-z^2| = |z^2-z^3| = |z||z-z^2|$. $z=0$ est une solution triviale on supposera désormais que $z \neq 0$. On a alors $|z||1-z| = |1-z|$. Une autre solution triviale est $z=1$. On supposera donc $z \neq 1$ pour la suite. La relation précédente donne $|z| = 1$. Donc le triangle est isocèle en z^2 si et seulement si z appartient au cercle unité ou $z=0$

Isocèle en z On a $|z-z^2| = |z-z^3|$. Comme précédemment on suppose que $z \neq 0$ (solution triviale). On obtient $|1-z| = |1-z^2| = |1-z||1+z|$. On suppose que $z \neq 1$ (solution triviale) et on obtient $|1+z| = 1$. Donc le triangle est isocèle en z si et seulement si $z=0$ ou $z=1$ ou z appartient au cercle de rayon 1 centré en -1.

Isocèle en z^3 Comme précédemment on élimine directement les cas $z=0$ et $z=1$. On obtient $|z^2-z| = |z^2-1|$. On a, $|z||z-1| = |z-1||z+1|$. On obtient alors $|z| = |z+1|$. Cela est équivalent à $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$. Géométriquement le triangle est isocèle en z^3 si et seulement si $z=0$, $z=1$ ou z appartient à la droite parallèle à l'axe des ordonnées et d'abcisse $-\frac{1}{2}$.

Triangle équilatéral Pour obtenir un triangle équilatéral il s'agit de trouver θ tel que $|1+e^{i\theta}| = 1$, c'est-à-dire $1+2\cos(\theta) = 0$. Donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$. Ainsi les seuls points possibles sont $(1, j, j^2)$.

10 Plus loin dans les sommes de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. On note S_m la m-ième somme de Newton.

1 $S_0 = n$, $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2 On raisonne par récurrence. Au rang 0 c'est évident. On suppose la relation vraie au rang n, montrons là au rang $n+1$. On a,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^2 + 2(n+1)\sum_{k=0}^{n} k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^2 + (n+1)^2 n \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k^3\end{aligned} \tag{15}$$

3 On a,

$$\begin{aligned}
(n+1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} n^k \\
(n+1)^{m+1} - n^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} n^k \\
(n+1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} S_k \\
S_m &= \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} S_k
\end{aligned} \tag{16}$$

11 Nombre de zéros et factorielle

1 On a deux zéros. $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$. 10 compte pour un zéro, 5 (associé avec 2 ou n'importe quel nombre pair) compte pour un zéro.

2 On va traiter la question 3 et on l'appliquera à la question 2. Il s'agit de trouver la puissance associée à 5 dans la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $n!$. En effet on cherche la plus grande puissance 10^k telle que 10^k divise $n!$. Ainsi, il s'agit de trouver la puissance de 5 dans la décomposition en produit de nombre premiers de $n!$ ainsi que la puissance de 2 dans la décomposition en produit de nombres premiers de $n!$. On montre par récurrence que pour tout nombre premier p si on note k_p sa puissance dans la décomposition en produit de nombres premiers de $n!$ on a,

$$k_p = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \tag{17}$$

On en déduit facilement que $k_2 \geq k_5$ et donc le nombre de zéros à la fin de $n!$ est égal à k_5.

3 On trouve que $\lfloor \frac{1515}{5} \rfloor = 303$. On trouve également $\lfloor \frac{1515}{25} \rfloor = 60$. On a aussi $\lfloor \frac{1515}{125} \rfloor = 12$ et $\lfloor \frac{1515}{625} \rfloor = 2$. Donc on a 377 zéros à la fin de 1515!. Ce calcul permet de rendre compte de la démesure de la factorielle !

12 Inégalité(s) de Shapiro

1 Une rapide étude de fonction permet de constater que pour tout réel positif non nul x on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Ainsi$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^{*3}$ on $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 6$.

2 En appliquant le résultat obtenu à la question précédente on a,

$$\begin{aligned}
\frac{y_1+y_2}{y_3} + \frac{y_2+y_3}{y_1} + \frac{y_1+y_3}{y_2} &\geq 6 \\
3 + 2\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3}\right) &\geq 3 \\
\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} &\geq \frac{3}{2}
\end{aligned} \tag{18}$$

3 Il suffit de développer,

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4) &= (x_1+x_2+x_3+x_4)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 - 2x_3x \\
&= x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_4^2 \\
&= (x_1-x_3)^2 + (x_2-x_4)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{19}$$

4 Immédiat en minorant $\left(\sum_{i=1}^4 x_i\right)^2$ par $2\sum_{i=1}^4 x_iy_i$.

13 Un théorème de point fixe

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1 Sous ensemble non-vide de $\mathbb{R}$ (contient 0) et borné par 1 donc admet une borne supérieure.

2 Soit x_0 cette borne supérieure. Si $x = 1$ alors $f(1) = 1$ et f admet un point fixe. Supposons que $x_0 < 1$. Soit $x > x_0$ alors $f(x) > f(x_0)$ par croissance. Mais $x > f(x)$ sinon $x \in A$. Donc $\forall x \geq x_0 x \geq f(x_0)$. En considérant une suite qui tend vers x_0 on obtient que $f(x_0) \leq x_0$. Si $x_0 = 0$ alors $f(x_0) = 0$ et f admet un point fixe. Supposons désormais que $x_0 > 0$. Alors par la propriété de la borne supérieure $\forall \epsilon > 0,\ \exists x < x_0,\ x \in A$ et $x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0$. D'où par croissance $f(x) \leq f(x_0)$ et par appartenance à A $x \leq f(x_0)$. On peut donc choisir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers x_0 d'où $f(x_0) \geq x_0$ par passage à la limite. On peut conclure $f(x_0) = x_0$ et f admet un point fixe.

Remarque : la démonstration est quasiment identique si f est supposée continue et non croissante !

14 Une équation et des parties entières

1 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation suivante : $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

1 On peut commencer par chercher un intervalle acceptable dans lequel chercher des solutions. On constate que si $\frac{x^2}{4} - x - 1 \geq 0$ alors x ne peut pas être solution de l'équation. On résout donc $x^2 - 4x - 4 = 0$. Les racines sont, $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$. Donc on peut restreindre l'ensemble de recherche à $[0,6]$. On va découper cet intervalle en plusieurs morceaux:

- sur $[0,1[$ tout x est solution.
- sur $[1,2[$, $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 1$et $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 0$ donc on n'a pas de solutions.
- sur $[2,4[$ tout x est solution.
- $x = 4$ est également solution. Sur $[4,6[$, $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor = 2 = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Donc l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est le suivant,

$$\mathcal{S} = [0,1[\cup[2,6] \tag{20}$$