Semaine 3 - Fonctions circulaires, fonctions hyperboliques, réciproques

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Fonctions hyperboliques réciproques

1 sinh est strictement croissante. En effet elle est dérivable et sa dérivée vaut cosh qui est strictement positive. Donc elle est injective. Montrons qu'elle est surjective. En effet, sinh tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Donc par continuité elle atteint tous les points de $\mathbb{R}$ (la rédaction de ce point est facile à vérifier et laissée au lecteur). Donc elle est bijective.

2 Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Posons $X = e^x$. $X \in \mathbb{R}_+^*$, donc $2y = X - \frac{1}{X}$, c'est-à-dire, $X^2 - 2yX - 1 = 0$, ou encore $X = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Puisque X est positif on a $X = y + \sqrt{y^2+1}$ ou encore, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. Donc $\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ et ce quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3 cosh est dérivable de dérivée sinh qui strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc cosh est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est donc injective. Montrons la surjectivité. On a $\cosh(0) = 1$ et cosh tend vers $+\infty$ en $+\infty$. On en déduit comme précédemment la surjectivité de cosh sur $[1, +\infty[$.

4 Calculons la réciproque de cosh. Soit $y \in [1, +\infty($ et $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Posons $X = e^x$. On a $X \in \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie la relation $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Donc $X = y \pm \sqrt{y^2-1}$ ($y^2 - 1 \geq 0$ car $y \in [1, +\infty[$). Puisque X est positif on en déduit $X = y + \sqrt{y^2-1}$ et donc $\forall x \in [1, +\infty[,\ \cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

5 On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R},\ \tanh(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On montre que lorsque x tend vers $-\infty$, tanh tend vers -1 et lorsque x tend vers $+\infty$, tanh tend vers 1. Comme précédemment on en déduit la surjectivité. L'injectivité se déduit de manière similaire en remarquant que $\tanh' = 1 - \tanh^2$ et que tanh est à valeurs dans $]-1, 1[$. Ainsi $\tanh'$ est strictement positive et tanh est strictement croissante donc injective. D'où la surjectivité.

6 Pour déterminer la réciproque, on pose $y \in]-1, 1[$ et x tel que $\tanh(x) = y$. Posons $X = e^{2x}$, on a : $\frac{X-1}{X+1} = y$ d'où $X(1-y) = y+1$. Ainsi, on a $\tanh^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$.

2 Quelques arctangentes célèbres

1 Posons $a = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ et $b = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$. On a $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2} = \frac{4}{3}$. Donc,

$$\begin{aligned}\tan(2a-b) &= \frac{\tan(2a) - \tan(b)}{1 + \tan(2a)\tan(b)} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{21}} \\ &= \frac{25}{25} \\ &= 1.\end{aligned} \tag{1}$$

Il s'agit de montrer que $4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$ est compris dans

D'où $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)$. Ainsi $\frac{\pi}{4} = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de montrer que $k = 0$. En effet, $0 \leq 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2}$. D'où, $-\frac{\pi}{4} \leq \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \leq \frac{\pi}{2}$. Ceci impose que $k = 0$ et l'égalité est démontrée.

2 Le processus est identique pour démontrer cette nouvelle égalité. On note $a = \arctan\left(\frac{1}{5}\right)$ et $b = \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$. On a,

$$\begin{aligned} \tan(4a) &= \frac{2\tan(2a)}{1-\tan(2a)^2} \\ &= \frac{4\tan(a)}{(1-\tan(a)^2)\left(1-\frac{4\tan(a)^2}{(1-\tan(a)^2)^2}\right)} \\ &= \frac{4\tan(a)(1-\tan(a)^2)}{(1-\tan(a)^2)^2-4\tan(a)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

On obtient $\tan(4a) = \frac{119}{120}$. De la même manière que précédemment on calcule,

$$\begin{aligned} \tan(4a-b) &= \frac{\tan(4a)-\tan(b)}{1-\tan(4a)\tan(b)} \\ &= \frac{120\times 239-119}{119\times 239+120} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

l'intervalle $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$. On a $\arctan(\frac{1}{5}) \leq \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$-\frac{\pi}{4} \leq 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239}) \leq 4\times\frac{\pi}{4} \tag{4}$$

On conclut comme précédemment.

Compléments : le problème de trouver les solutions de l'équations $m\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + n\arctan\left(\frac{1}{y}\right) = k\frac{\pi}{4}$ avec $(m, n, x, y, k) \in \mathbb{Z}^5$ a été résolue par Störmer en 1899. L'article est accessible à un élève de niveau MPSI `http://www.numdam.org/article/BSMF_1899__27__160_1.pdf`. Il n'existe que quatre solutions à ce problème :

- $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$ (formule d'Euler)
- $2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ (formule d'Hermann)
- $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ (formule de Hutton)
- $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$ (formule de Machin)

3 Somme et arctangente

1 En considérant la fonction $x \mapsto \arctan(x) = \arctan(\frac{1}{x})$, on constate que celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée nulle sur chacun de ces intervalles. Ainsi la fonction est constante et en faisant tendre x vers $\pm\infty$ on trouve que :

- si $a > 0$ alors $\arctan(a) + \arctan(\frac{1}{a}) = \frac{\pi}{2}$,
- si $a < 0$ alors $\arctan(a) + \arctan(\frac{1}{a}) = -\frac{\pi}{2}$.

2 On a que $\tan(\arctan(a) + \arctan(b)) = \frac{a+b}{1-ab}$. Donc on a,

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi \tag{5}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Ici grâce à l'hypothèse faite et la croissance de l'arctangente on a $0 < \arctan(a) + \arctan(b) < \arctan(a) + \arctan(\frac{1}{a}) < \frac{\pi}{2}$. Ceci assure que $k = 0$ puisque la fonction arctangente est à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3 En reprenant le même raisonnement on trouve que $k \geq 1$. Mais puisque $\arctan(a) + \arctan(b) \in]0, \pi[$ on trouve également $k \leq 1$ et on a $k = 1$.

4 Par le même raisonnement que la question 2 on trouve que $k = 0$.

5 Si $ab < 0$ on peut suppose $a > 0$ et $b < 0$ dans ce cas $0 < \arctan(a) < \frac{\pi}{2}$ et $0 > \arctan(b) > -\frac{\pi}{2}$. Donc la somme appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $k = 0$.

4 Somme et cosinus hyperbolique

1 On a,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cosh(ak+b) &= \frac{1}{2}\left(e^b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ak} + e^{-b} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-ak}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^b(1+e^a)^n + e^{-b}(1+e^{-a})^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^b e^{\frac{an}{2}} \cosh\left(\frac{a}{2}\right)^n + e^{-b} e^{-\frac{an}{2}} \cosh\left(\frac{a}{2}\right)^n\right) 2^n \\
&= 2^n \cosh\left(\frac{an}{2} + b\right) \cosh\left(\frac{a}{2}\right)^n
\end{aligned} \tag{6}$$

5 Composée, fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques

1 Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\cos(x) \in [-1, 1]$ donc $\cos(x)$ appartient au domaine de définition de arccos et $\arccos(\cos(x))$ est bien défini. $\arccos(\cos(x))$ est défini comme le réel $\dot{x}$ de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\dot{x}) = \cos(x)$. Donc,

- $\arccos(\cos(x)) = x[2\pi]$ si $x[2\pi] \in [0, \pi]$
- $\arccos(\cos(x)) = -x[2\pi]$ si $x[2\pi] \in]\pi, 2\pi[$

$\arccos(x)$ est le réel $y \in [0, \pi]$ tel que $\cos(y) = x$. Ainsi $\cos(\arccos(x)) = \cos(y) = x$. Il est très important de comprendre la différence fondamentale entre ces deux calculs. Celle-ci provient du fait que la fonction réciproque de cosinus ne l'est que sur un intervalle où celle-ci est bijective, en l'occurence $[0, \pi]$.

2 On a $\sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1$. Puisque $\arccos(x) \in [0, \pi]$, $\sin(\arccos(x)) \geq 0$. On obtient, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$. De la même manière puisque $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$. On trouve le même résultat, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

3 On a $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arctan(x))$ est positif. De plus $\tan(x)^2 = \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} - 1$. Donc on obtient, $x^2 = \frac{1}{\cos(\arctan(x))^2} - 1$ c'est-à-dire $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. On a de plus, $\frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = x$ donc, $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Il existe une autre méthode assez originale pour trouver ce résultat. Elle fait intervenir les équations différentielles ordinaires et fait l'objet d'une correction pour la feuille 4.

6 Suite et arctangente

1 On pose $a = k+1$ et $b = -k+1$. On obtient $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = \arctan\left(\frac{2}{1+k^2-1}\right) = \arctan\left(\frac{2}{k^2}\right)$.

2 $u_n = \arctan(n+1)$ par télescopage. Donc $u_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

7 Suite et tangente hyperbolique

1 On a,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh(x)} &= \frac{2(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1} - \frac{e^x+1}{e^x-1} \\
&= \frac{2(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1} - \frac{(e^x+1)^2}{e^{2x}-1} \\
&= \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}-1} \\
&= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x-1)(e^x+1)} \\
&= \tanh(x)
\end{aligned} \tag{7}$$

.

2 On a donc $x\tanh(x) = \frac{2x}{\tanh(2x)} - \frac{x}{\tanh(x)}$. Si on pose $v_k = 2^k\tanh(2^k x)$ on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} v_{k+1} - v_k = v_{n+1}$, par télescopage. Or $\frac{v_{n+1}}{2^{n+1}} = \tanh(2^{n+1}x)$ et donc u_n tend vers 1 si x est positif, -1 sinon.

8 Résolution d'équations

1 Il convient tout d'abord de remarquer que l'équation admet une et une seule solution. En effet, la somme de deux fonctions strictement croissantes est strictement croisante (donc injective) et puisque $\arctan(2x) + \arctan(x) \underset{\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ est atteint. Ainsi il existe une unique solution à l'équation. Soit x une solution. On a alors, en passant à la tangente, $\frac{3x}{1-2x^2} = 1$ donc x racine de $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Donc $x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. La solution négative est rejetée car sinon la somme de tangentes réciproques est négative. Ainsi il ne reste qu'une seule solution, $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

2 Soit x une solution de l'équation. On obtient en soustrayant par $\arcsin(\sqrt{3}x)$ et en passant au cosinus, $\cos(\arcsin(x))) = \sqrt{3}x$. Comme on l'a montré dans l'exercice "Composée, fonctions circulaires et fonctions circulaires réciproques", $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. Donc en passant au carré on obtient, $4x^2 = 1$, c'est-à-dire $x = \pm\frac{1}{2}$. La solution négative ne convient pas, sinon la somme de sinus réciproques est négative. Il suffit de vérifier que $x = \frac{1}{2}$ est solution. En effet, $\arcsin(\frac{1}{2}) + \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.