# Semaine 7 - Développements limités et équations différentielles

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

## 1 Développements limités et dérivabilité

**1** Montrer que $f$ est continue en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité d'ordre 0 en 0.

**2** Montrer que $f$ est dérivable en 0 si et seulement si $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en 0.

**3** Montrer que si $f$ est deux fois dérivable en 0 alors $f$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

**4** Montrer que $x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongée par continuité en 0 admet un développement limité à l'ordre 2 mais n'est pas 2 fois dérivable en 0.

## 2 Calcul de développements limités

**1** Justifier l'existence et calculer un développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(\sin(x))$.

**2** Justifier l'existence et calculer un développement limité en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2 de $x \mapsto (1 + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$.

## 3 Fonction décroissante et équivalent

Soit $f$ une fonction décroissante qui de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) + f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

**1** Montrer que $f$ admet une limite et la calculer.

**2** Donner un équivalent de $f$.

## 4 Calcul de limites (1)

**1** Montrer que $x \mapsto \frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

**2** Montrer que $x \mapsto (\frac{x}{\ln(x)})^{\frac{\ln(x)}{x}}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

**3** Montrer que $x \mapsto \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln(x)}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

## 5 Calcul de limites (2)

**1** Montrer que $x \mapsto (x+1)e^x - xe^{x+1}$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

**2** Montrer que $x \mapsto (x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$ admet une limite en $+\infty$ et la calculer.

## 6 Développement limité et approximation par une fraction rationnelle d'ordre 2

**1** Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que la partie principal de $x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en 0 soit la plus petite possible.

**2** Donner un équivalent de $x \mapsto \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ en 0 pour les valeurs de $(a,b)$ trouvées.

## 7 Suite et équivalent (1)

**1** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in ]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[ \mid \tan(x_n) = x_n$.

**2** Montrer $x_n \underset{+\infty}{\sim} n\pi$.

**3** Montrer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\to} 0$.

**4** Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

## 8 Suite et équivalent (2)

**1** Montrer que $e^x + x - n = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On la note $u_n$.

**2** En posant $v_n = u_n - \ln(n)$, montrer que $v_n \underset{+\infty}{\to} 0$.

**3** Trouver un équivalent de $v_n$ en $+\infty$.

**4** En déduire un développement asymptotique de $u_n$.

## 9 Réciproque et développement limité

**1** Montrer que $f : x \mapsto 2\tan(x) - x$ est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f^{-1}$ est impaire.

**2** Donner un développement limité à l'ordre 6 de $f^{-1}$.

## 10 Résolution d'une équation différentielle (2)

**1** Résoudre en $y$ sur $] - \infty, -1[$, sur $] - 1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ l'équation suivante : $(1-x^2)y'(x) - 2xy(x) = x^2$.

## 11 Résolution d'une équation différentielle (3)

**1** Résoudre en $y$ sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ l'équation suivante : $|x|y'(x) + (x-1)y(x) = x^3$.

## 12 Résolution d'une équation différentielle (4)

**1** Résoudre en $y$ sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2y'(x) - y(x) = 0$

## 13 Fonctions trigonométriques et équation différentielle

**1** Calculer $\cos(\arctan(x))$ pour $x \in ] - 1, 1[$.

**2** Calculer $\sin(\arctan(x))$ pour $x \in ] - 1, 1[$.