Semaine 10 - Suites numériques, groupes

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Divergence et suite extraites

1 Montrer que $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2 Montrer de même que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

2 Une suite complexe

Soit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} z_0 = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C},\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \rho \in \mathbb{R}_+ \\ z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Exprimer z_n sous la forme d'un produit.

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod\limits_{k=1}^{n} \cos(\frac{\theta}{2^k}) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin(\frac{\theta}{2^n})}$.

3 Montrer que z_n admet une limite et la calculer.

3 Irrationalité de e

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$

1 Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2 On admet l'inégalité de Taylor-Lagrange. Celle-ci assure que pour toute fonction $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}\ \in \mathcal{C}^n([a,b])$ et dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$ et telle que $f^{(n+1)}$ est bornée, on a :

$$|f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in]a,b[}(|f^{(n+1)}|)$$

En l'appliquant à la fonction $x \mapsto e^x$ montrer que $u_n \to e$.

3 On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. En considérant $u_q q!q$ et $v_q q!q$ aboutir à une contradiction.

4 Moyenne arithmético-géométrique

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a,\ v_0 = b \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + u_n}{2},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ ainsi que $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.

2 Montrer que ces limites sont égales. On la note $M(a,b)$ et on l'appelle moyenne arithmético-géométrique de a et b.

3 Calculer $M(a,a)$, $M(a,0)$ ainsi que $M(\lambda a, \lambda b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

5 Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive, décroissante qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1 Montrer que $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes.

2 En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note S sa limite.

3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$.

4 Que peut-on dire de la convergence de la suite $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k}}$?

6 Suite sous-additive

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite sous-additive au sens où :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+q} \leq u_p + u_q$$

1 Rappeler la définition de $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $n = qm + r$, $r \in [\![0, q-1]\!]$, la division euclidienne de n par q. Établir une inégalité faisant intervenir u_n, u_q et u_1.

3 Montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ qui vérifie :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ v_{p+q} \leq v_p v_q$$

Que peut-on dire de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

7 Convergence au sens de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

1 Montrer que $u_n \to l \in \mathbb{C} \ \Rightarrow\ v_n \to l \in \mathbb{C}$.

2 Trouver un contrexemple à la réciproque.

3 Supposons que $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\omega_{n+1} - \omega_n \to l \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\omega_n \underset{+\infty}{\sim} ln$.

4 On définit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k}{n^2}$$

Montrer que $w_n \to \frac{l}{2}$.

8 Loi de groupe et géométrie

On donne le procédé de construction suivant. Dans le plan on place $A(1,0)$ et $B(0,1)$. On considère également les points $M_0(x_0,y_0)$ et $M_1(x_1,y_1)$. On place P_0 de la manière suivante :

- $P_0 \in (AB)$.
- (P_0M_0) parallèle à (Ox).

On place Q_0 de la manière suivante :

- (P_0Q_0) et (M_1B) parallèles.
- $Q_0 \in (AM_1)$

On place M_2 de manière à ce que $M_0P_0Q_0M_2$ forme un parallélogramme.

1 Montrer que les coordonnées de Q_0 sont $(1 + x_0y_1, y_0y_1)$.

2 En déduire que M_2 a pour coordonnées $(x_0 + x_1y_0, y_0y_1)$.

3 Montrer que $\mathcal{P}' = \{M(x,y),\ y \neq 0\}$ est un groupe pour la loi $*$ définie par $M_0 * M_1 = M_2$.

9 Un sous groupe d'un groupe abélien

Soit G un groupe abélien. Soit $H = \{g, g \in G \text{ et } \exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 1\}$.

1 Montrer que G est un groupe.

Remarque : cela n'est plus vrai si G n'est pas abélien.

10 Nombres réels et sous groupes

Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$. On note $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$. On note $x_0 = \text{inf} G_+$.

1 Vérifier que x_0 est bien défini.

2 Montrer que si $x_0 = 0$ alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

3 Montrer que si $x_0 \neq 0$ alors $x_0 = \min G_+$, c'est-à-dire $x_0 \in G_+$.

4 Montrer alors que $G = x_0\mathbb{Z}$.

5 Conclure sur la forme des sous-groupes du groupe additif $(\mathbb{R},+)$

11 Ordre d'un élément et commutativité

Soit G un groupe dans lequel tout élément est d'ordre 2, c'est-à-dire que $\forall g \in G,\ g^2 = 1$.

1 Montrer que G est abélien.

2 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes de cardinal 4.