Semaine 5 - Uniforme continuité, lipschitzianité, comparaison de fonctions

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Uniforme continuité et borne affine

1 Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de l'uniforme continuité, $\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (x,y) \in I^2 \implies |x-y| \leq \eta,\ |f(x)-f(y)| \leq \epsilon$. Soit $z_0 \in I$. On définit $Z = \{z_k, k \in \mathbb{Z}\}$, où $z_k = z_0 + k\eta$. Soit $x \in I$ on note $z_x = z_0 + k\eta \in Z$ l'élément de $Z \cap [\min(z_0,x), \max(z_0,x)] \subset I$ le plus proche de x. On a $x = z_0 + (k+k_x)\eta$ avec $|k_x| \leq 1$. On suppose k positif la démonstration est identique si $k < 0$. On a alors,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(z_0)| &\leq |f(x)-f(z_x)| + |f(z_x)-f(z_0)| \\
&\leq \epsilon + k\epsilon \\
&\leq \epsilon\left((1-k_x)+(k+k_x)\right) \\
&\leq 2\epsilon + \frac{x-z_0}{\eta} \\
&\leq \epsilon(2-\frac{z_0}{\eta}) + \frac{\epsilon}{\eta}x
\end{aligned}$$

Donc en posant $\alpha = \frac{\epsilon}{\eta}$ et $\beta = \epsilon(2-\frac{z_0}{\eta}) + |f(z_0)|$ on obtient la propriété voulue.

2 Il est évident que $x \mapsto \alpha|x| + \beta$ est bornée sur I borné. La propriété découle sur f.

2 Ensemble de k-lipschitzianité

Soit $(x,y) \in I$.

1 A est non vide car f est lipschitzienne.
Soit k_1 et k_2 dans A et $k \in [k_1,k_2]$. $\exists \delta > 0,\ k = \delta k_1 + (1-\delta)k_2$,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= \delta|f(x)-f(y)| + (1-\delta)|f(x)-f(y)| \\
&\leq \delta k_1|x-y| + (1-\delta)k_2|x-y| \\
&\leq k|x-y|
\end{aligned}$$

Donc A est un intervalle.
De plus A est borné inférieurement par 0 donc par la propriété de la borne inférieure, $\exists B \in \mathbb{R}_+,\ A = [B,+\infty[$ ou $A =]B,+\infty[$. La question est maintenant de savoir si $B \in A$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A qui tend vers B. On a,

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x)-f(y)| \leq a_n|x-y| \\
&\lim_{n\to+\infty} |f(x)-f(y)| \leq \lim_{n\to+\infty} a_n|x-y| \\
&|f(x)-f(y)| \leq B|x-y|
\end{aligned}$$

Donc $B \in A$ et $A = [B,+\infty[$.

3 Théorème de Picard

1 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &\leq \sum_{j=1}^{p} |x_{n+j} - x_{n+j-1}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} k^{n+j-1} |x_1 - x_0| \\
&\leq k^n |x_1 - x_0| \sum_{j=0}^{p-1} k^j \\
&\leq k^n |x_1 - x_0| \frac{1-k^p}{1-k} \\
&\leq k^n |x_1 - x_0| \frac{1}{1-k}
\end{aligned}$$

En prenant n assez grand le terme de droite est aussi petit que l'on veut et donc la suite est de Cauchy.

2 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc admet une limite, l. Par continuité de f, $f(x_n) \rightarrow f(l)$. Mais $f(x_n) = x_{n+1} \rightarrow l$. Donc par unicité de la limite, $l = f(l)$ et f admet un point fixe.

4 Limite et uniforme continuité

1 Soit $\epsilon > 0$. Par définition de l'uniforme continuité, $\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = n\eta$. Il existe $N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, |f(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Soit $x \in [N, +\infty[$. $|f(x)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$. Donc on peut conclure que f tend vers 0 en $+\infty$.

5 Produit et équivalent

1 Un changement de variable en $y = 1 - x$ nous permet de nous ramener à la limite de $\ln(1-y)\ln(y)$ en 0^+. Or $\ln(1-y) \underset{0^+}{\sim} -y$ donc $\ln(1-y)\ln(y) \underset{0^+}{\sim} -y\ln(y) \rightarrow 0$.

6 Fonction décroissante et équivalent

1 $2f(x+1) \leq f(x) + f(x+1) \leq 2f(x)$ donc $\frac{f(x)+f(x+1)}{2} \leq f(x) \leq \frac{f(x)+f(x+1)}{2}$. Par le théorème d'encadrement puisque les termes de gauche et de droite tendent vers 0 on en déduit que f tend vers 0 en $+\infty$.

2 On conjecture que l'équivalent est $x \mapsto \frac{1}{2x}$. On c alcule $r(x) = x(2f(x) - \frac{1}{x})$ qui doit tendre vers 0 en $+\infty$. On a donc,

$$x(f(x) + f(x+1)) - 1 \leq x(2f(x) - \frac{1}{x}) = 2xf(x) - 1 \leq x(f(x) + f(x-1)) - 1$$

$x(f(x) + f(x+1)) \rightarrow 1$ et $x(f(x) + f(x-1)) \sim \frac{x}{x-1} \rightarrow 1$. On a donc prouvé que $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

7 Calcul de limites (1)

1 Pour $x \geq e$ on a $\ln(x) \geq 1$ donc $x^{\ln(x)} \geq x$ puisque $e \geq 1$. Ainsi, $\frac{x^{\ln(x)}}{\ln(x)} \geq \frac{x}{\ln(x)} \rightarrow +\infty$.

2 On a $\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)^{\frac{\ln(x)}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(x)^2}{x} - \frac{\ln(\ln(x))}{x}\right) \rightarrow 1$.

3 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln(2x) = \ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1)\right) \sim \frac{1}{2}(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1)$. Le dernier terme est borné donc quand on divise par $\ln(2x)$ on trouve bien que $\ln(2x) \sim \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Il est facile de montrer que $\ln(2x) \sim \ln(x)$ et on conclut que la limite de l'expression originale est 1.

8 Calcul de limites (2)

1 $(x+1)e^x - xe^{x+1} = xe^x(1-e) - e^x$. e^x est négigeable devant xe^x en $+\infty$ et donc puisque $e \geq 1$ on obtient que la limite est $-\infty$.

2 $x \mapsto (x+1)\ln(x) - x\ln(x+1) = x\ln(\frac{x}{x+1}) + \ln(x) = -x\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln(x) \to +\infty$.

9 Quelques considérations sur l'exponentielle

1 Une étude de fonction permet de montrer que $\ln(1+x) \geq x$ sur $\mathbb{R}_+$. En appliquant cette inégalité en $\frac{x}{n}$ et en passant à l'exponentielle (qui est une fonction croissante...), on peut conclure.

2 $(1+\frac{x}{n})^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right)$, mais $\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ et donc $n\ln(1+\frac{x}{n}) \to x$ et on conclut.

10 Logarithme, exponentielle et équivalent

1 $e^f \sim e^g \Leftrightarrow \frac{e^f - e^g}{e^g} \to 0 \Leftrightarrow e^{f-g} - 1 \to 0 \Leftrightarrow f - g \to 0$. On a donc $e^f \sim e^g$ si et seulement si $f - g \to 0$. De la même manière $\ln(f) \sim \ln(g)$ si et seulement si $\frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln(g)} \to 0$. On ne peut pas vraiment aller plus loin.

2 $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$ et $a = +\infty$ convient pour le premier contre-exemple. Pour le second, $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ et $a = +\infty$ convient.

3 On opère le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$ et on est ramené à étudier $\ln(\sin(y))$ autour de 0. $\sin(y) \sim y$ et en vertu de la première question on peut passer au logarithme. Donc $\ln(\cos(x)) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \ln(\frac{\pi}{2} - x)$.

Remarque : la morale de cet exercice est la suivante, **les équivalents se comportent mal avec la composition sauf cas très particuliers.**