Semaine 28 - Déterminants

Valentin De Bortoli
email : valentin.debortoli@gmail.com

1 Déterminant et polynôme

Soit ϕ une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$. On pose ψ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ telle que $\psi(z) = \phi(z)^{-1}$. On suppose de plus que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \phi(z)(i,j) = P_{i,j}(z)$ avec $P_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$.

1 Montrer qu'il existe $Q_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\psi(z)(i,j) = Q_{i,j}(z)$.

2 Déterminant et nombres entiers (1)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1 Montrer que M est inversible (c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $MN = NM = Id$) si et seulement si $|\det(M)| = 1$.

2 Montrer que $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si il existe $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{Z})$ telle que la première ligne de M soit $(a_1, \ldots, a_n)$.

3 Déterminants et nombres entiers (2)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $A + kB \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{Z})$.

1 Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Indication : on pourra utiliser la question 1 de l'exercice précédent.

4 Déterminants de Cauchy

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

1 Calculer $\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \ldots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_1+b_n} & \ldots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$.

Remarque : dans le cas très particulier où $a_i = i$ et $b_j = j$ on parle de déterminant de Hilbert. Que vaut le déterminant dans ce cas ?

5 Déterminants de Van der Monde et Van der Monde généralisé

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ (on les suppose distincts et rangés par ordre croissant).

1 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$.

2 En déduire l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur de Lagrange aux points $(a_1, \dots, a_n)$.

3 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \dots & a_n & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 & 2a_1 & \dots & 2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{2n} & \dots & a_n^{2n} & (2n-1)a_1^{2n} & \dots & (2n-1)a_n^{2n} \end{vmatrix}$.

4 Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déduire de la question précédente l'existence et l'unicité d'un polynôme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$ et $P'(a_i) = f'(a_i)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés les polynômes de Hermite et possèdent, comme les polynômes de Lagrange, de nombreuses propriétés.

6 Transformée de Fourier discrète

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1 Calculer $\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & a+b & a \\ \dots & \dots & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$

2 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On considère $C(a_1, \dots, a_n)$ la matrice circulante associée : $C(a_1, \dots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$

On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $\Lambda_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{nk} \end{pmatrix}$. Montrer que $(\Lambda_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}^n$ qui diagonalise $C(a_1, \dots, a_n)$.

3 En déduire le déterminant de $C(a_1, \dots, a_n)$.

7 Déterminants de Hurwitz

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $a \in \mathbb{C}$.

1 Calculer $\begin{vmatrix} a+\lambda_1 & a & \dots & \dots & a \\ a & a+\lambda_2 & a & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & a+\lambda_{n-1} & a \\ \dots & \dots & \dots & a & a+\lambda_n \end{vmatrix}$.

8 Matrice antisymétrique et déterminant (1)

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Montrer que si n est impair le déterminant de A est nul.

2 Que peut-on dire si n est pair ?

9 Matrice antisymétrique et déterminant (2)

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \det(A + zJ) = \det(A)$.

10 Une équation sur les endomorphismes

On suppose que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose également que $f^3 + f = Id$. On suppose que $\ker f \neq 0$.

1 Montrer que $\dim(\ker f) = 1$.

11 Un déterminant linéaire ?

1 Déterminer tous les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.

Remarque : on pourra commencer par traiter le cas de la dimension 1...

12 Matrice de rang 1 et déterminant

Soit $(A, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que $\mathrm{rg}(H) = 1$.

1 Montrer que $\det(A + H)\det(A - H) \leq (\det(A))^2$.

13 Déterminant par bloc

Soit $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^4$. On suppose que D est inversible et que D commute avec C.

1 Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

2 Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

3 Que peut-on dire si D n'est plus inversible ?

4 En déduire que si $AB = BA$, $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Indication : on pourra penser à introduire $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ et multiplier les n dernières colonnes par i et les n dernière lignes par i.

14 Au signe près...

Soit $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère $\tilde{A} = ((-1)^{i+j} a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1 Que dire du déterminant de $\det(\tilde{A})$ en fonction de $\det(A)$?

15 Divisibilité et déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les coefficients de A appartiennent tous à $\{-1, 1\}$.

1 Montrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

16 Déterminant et maximum

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

1 Que vaut $\det(a_{\max(i,j)})$?

2 Que vaut $\det(\max(i,j))$? $\det(\min(i,j))$?

17 Un dernier calcul...

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

1 Calculer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{vmatrix}$.