

Feuille 2.2 - Différentielles d'ordre supérieure

Exercice 1 – Théorème de Schwarz et contre-exemple.

a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 2 – Exemples.

a) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une application différentiable, $a \in U$ et $v \in E$. Montrer que l'application

$$f_{a,v} : t \longmapsto f(a + tv)$$

est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et dérivable en tout point où elle est définie. Calculer la dérivée de $f_{a,v}$ en $t = 0$. On suppose que f est k -fois différentiable en a . Calculer les dérivées successives de $f_{a,v}^{(k)}(0)$.

b) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ une application deux fois différentiable. Montrer que l'application $x \mapsto df(x)(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

c) Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ une application de classe C^∞ , $a \in U$ et $v \in E$. Montrer que l'application $v \mapsto d^k f(a)(v, \dots, v)$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3 – Formules de Taylor. On se place dans le cas d'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^n et on fixe $a \in U$. Dans la suite, lorsque f est suffisamment régulière, on adoptera la notation simplificatrice suivante :

$$D^k f(a)(h)^k = D^k f(a)(h, h, \dots, h)$$

a) Récrire explicitement la précédente expression en utilisant les dérivées partielles k^e de f .

b) On suppose pour cette question que f est de classe C^{k+1} sur U . Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans U . Montrer alors la formule de Taylor avec reste intégral en appliquant la formule correspondante du cas réel à une fonction bien choisie.

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+th)(h)^{k+1} dt$$

c) En supposant f de classe C^k sur U et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h]$ soit inclus dans U , montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(a)(h)^{k-1} = \frac{1}{k!} D^k f(a+\theta h)(h)^k$$

Démontrer de même la formule de Taylor-Young à l'ordre k pour une fonction de n variables.

- d) Expliciter la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de trois variables puis celui à l'ordre 3 d'une fonction de deux variables.

Exercice 4 – Dérivée seconde et développement limité. Soit f une fonction définie sur $U \subset E$ (U ouvert) à valeurs dans F avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $a \in U$.

- a) Montrer que f est continue en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 0 en a . De même, montrer que f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
- b) Trouver une fonction f qui soit $\mathcal{C}^1(U)$, qui admette un développement limité à l'ordre 2 et qui ne soit pas deux fois différentiable en 0.

Exercice 5 – Caractérisation des fonctions convexes. Soient U un ouvert convexe d'un espace vectoriel normé E et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe si pour tous $x, y \in U$ et tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

ie si le graphe de f est sous ses cordes.

- a) On suppose que f est différentiable sur U . Montrer que f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geq df(x)(y - x)$$

pour tous $x, y \in U$ (ie si le graphe est au-dessus de ses tangentes).

- b) On suppose que f est deux fois différentiable sur U . Montrer que f est convexe si et seulement si $d^2f(x)$ est positive (en tant que forme quadratique) pour tout $x \in U$.

Exercice 6 – Un peu d'algèbre.

- a) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . Montrer qu'il existe des fonctions $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ ($1 \leq i \leq n$) telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$$

On souhaite remplacer \mathbb{R}^n par un ouvert U de \mathbb{R}^n , donner des hypothèses sur U pour lesquelles le résultat est toujours valable;

- b) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $h_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ ($1 \leq i, j \leq n$) telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \sum x_i x_j h_{i,j}(x)$$

- c) Montrer que $I = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad f(0) = 0\}$ est un idéal maximal de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ de type fini, principal pour $n = 1$.

Exercice 7 – Théorème de Whitney. Soit F un fermé de \mathbb{R}^n . On va montrer qu'il existe une fonction f de classe C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ dont l'ensemble des zéros est exactement F . On supposera dans la suite que $F \neq \mathbb{R}^n$.

- a) Donner l'exemple d'une fonction de classe C^∞ strictement positive à l'intérieur de la boule unité et nulle partout en dehors.

- b)** Justifier l'existence d'une suite de boules ouvertes $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $F = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ ainsi que d'une suite d'applications $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ telle que chaque ϕ_i s'annule uniquement sur $\mathbb{R}^n \setminus B_i$.
- c)** Déterminer alors une fonction f satisfaisant au problème.