

Détection de cycle dans un graphe dirigé : conventions de représentations et théorie du problème

LINGI1122 - Méthodes de conception de programmes

SEDDA	Mélanie	2246-11-00
SLUYSMANS	Benoît	6957-11-00
VAN DEN EECKHAUT	Kim	7561-11-00
VICO	Nicolas	???
VOLON	Julien	???

Dans le cadre du cours de méthode de conception de programmes, il nous a été demandé de résoudre le problème suivant : étant donné un graphe dirigé, déterminer si celui-ci contient ou non un cycle. L'algorithme utilisé doit donc ressortir une réponse booléenne.

L'algorithme que nous devons utiliser est le suivant : supprimer du graphe tous les nœuds qui n'ont pas d'arête entrante, ainsi que les arêtes dont ces nœuds sont l'origine. En répétant cette opération, deux cas peuvent survenir : soit il n'y a plus de nœud disponible, et nous pouvons conclure qu'il n'existe pas de cycle dans le graphe de base, soit il ne reste que des nœuds avec au moins une arête entrante, auquel cas il existe au moins un cycle dans le graphe.

1 Conventions de représentations

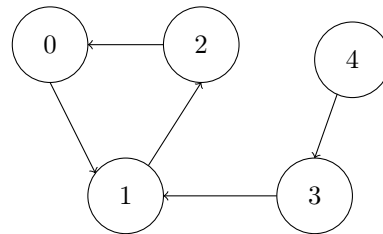
1.1 Présentation de la convention retenue

L'algorithme prend un graphe dirigé en entrée et retourne un booléen, qui indique si le graphe possède un cycle ou non. Il nous faut donc définir une convention de représentation d'un graphe dirigé sur lequel notre algorithme va s'appliquer.

Le graphe sera représenté en utilisant la matrice d'adjacence. Cette matrice est une matrice carrée dont la dimension est égale au nombre de noeuds du graphe. Chaque entrée (i, j) avec $0 \leq i, j \leq n - 1$ indique le nombre d'arêtes allant du noeud i au noeud j .

Nous donnons ici un exemple d'une telle représentation. Le graphe donné ci-dessous sera représenté par le tableau suivant :

	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0



1.2 Motivations

Le fait de représenter un graphe par le tableau à double entrée décrit précédemment possède divers avantages. Ceux-ci sont les suivants :

- **Facilité d'implémentation** : dans l'algorithme à implémenter, les actions principales à effectuer sur le graphe sont de parcourir les noeuds, de déterminer si ils ont des arêtes entrantes et de les supprimer. L'implémentation de ces deux fonctionnalités devient très facile. En effet, pour le parcours des noeuds, il suffit de parcourir le tableau à l'aide de boucles sur ses indices. Pour déterminer si un noeud j n'a aucune arête entrante, il suffit que la somme des éléments de la j ème colonne de la matrice d'adjacence soit nulle. Pour la suppression, il suffit de marquer la ligne et la colonne associées au noeud comme ne devant plus être parcourues.
- **Complexité satisfaisante** : on déduit de ce qui a été dit au point précédent que la recherche d'un noeud sans arêtes entrantes se fait en $O(n^2)$ et que la suppression de celui-ci (ou plus précisément le marquage dans notre cas) se fait en $O(1)$. Ces complexités étant polynomiales, celles-ci sont considérées comme efficaces. De plus, d'autres représentations possibles (listes d'adjacence et liste d'arêtes) ont été considérées et aucune ne donnait une meilleure complexité pour la recherche et la suppression.
- **Marquage** : il a été décidé de marquer la ligne et la colonne associées à un noeud à supprimer au lieu de les supprimer du tableau. En effet, cela évite de devoir recopier le tableau dans un tableau de plus petite taille, ce qui est une opération qui se fait en $O(n^2)$ alors que le marquage se fait en $O(1)$.

2 Théorie du problème

2.1 Définitions

Un **graphe** est un triplet (V, E, ψ) où :

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds ;
- E est un ensemble dont les éléments sont appelés arêtes ;
- ψ est une fonction, dite fonction d'incidence, qui associe à chaque arête un sommet ou une paire de sommets.

On peut représenter un graphe par un diagramme. Plusieurs diagrammes peuvent représenter le même graphe.

Un **graphe dirigé**, ou orienté, est un triplet (V, E, ψ) où :

- V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommets ou noeuds ;
- E est un ensemble dont les éléments sont appelés arêtes ;
- ψ est une fonction, dite fonction d'incidence, qui associe à chaque arête un couple de sommets. Ici, l'ordre au sein du couple de sommets a de l'importance, il signifie qu'un sommet est le noeud de départ de l'arête, l'autre étant le noeud d'arrivée.

Un **parcours** est une suite $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$, où $v_1; v_2; \dots$ sont des sommets, et $e_1; e_2; \dots$ sont des arêtes. La longueur du parcours est son nombre d'arêtes n . Le sommet d'origine est v_0 , le sommet de destination v_n . Les autres sommets sont dits intérieurs. Un parcours est fermé si $v_0 = v_n$.

Un **chemin** est un parcours dont les sommets sont tous distincts.

Un **cycle** est un parcours fermé dont les sommets d'origine et intérieurs sont tous distincts. Un graphe qui ne contient pas de cycle est dit acyclique.