procesos-estocasticos-unidad1.pdf

Tatianabm

Procesos Estocásticos

4º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

Máster Gestión Deportiva y Análisis del Dato

TEMARIO

UNIDAD DIDACTICA 1

TEMA I. **CADENAS DE MARKOV: EJEMPLOS Y DEFINICIONES**
1. Introducción.
2. Ejemplos. Planteamiento general.
3. Distribución de la cadena.

TEMA II. **CLASIFICACION DE LOS ESTADOS. TEOREMA DE DESCOMPOSICION.**
1. Probabilidades de primera pasada.
2. Clasificación de los estados y estructura de las cadenas de Markov.
3. Estados recurrentes positivos y recurrentes nulos.

TEMA III. **PERIODICIDAD Y DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS**
1. Periodicidad en las cadenas de Markov.
2. Distribuciones estacionarias.

TEMA IV. **COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE UNA CADENA DE MARKOV**
1. Teorema de límite para las cadenas de Markov.
2. Consecuencias del teorema de límite.
3. Algunas cuestiones complementarias.

UNIDAD DIDACTICA 2

TEMA V. **PROCESOS ESTOCASTICOS EN TIEMPO DISCRETO**
1. Introducción. 119
2. Definición de proceso estocástico en tiempo discreto. 119
3. Distribución de un proceso estocástico en tiempo discreto. 122
4. Teorema de Kolmogorov. 123
5. Apéndice: Probabilidad y esperanza condicionada. 128

TEMA VI. **PROCESOS DE MARKOV EN TIEMPO DISCRETO**
1. Introducción. 149
2. Definición de proceso de Markov en tiempo discreto. 149
3. Distribución de un proceso de Markov con probabilidades de transición estacionarias. 153
   a) Probabilidades de transición en n-etapas.
   b) Distribuciones marginales.
   c) Distribuciones conjuntas.
4. Distribuciones estacionarias y distribución límite. 154

TEMA VII. **PROCESOS ESTOCASTICOS EN TIEMPO CONTINUO**
1. Introducción. 181
2. Definición de proceso estocástico en tiempo continuo. 181
3. Distribución de un proceso estocástico y teorema de Kolmogorov. 184
4. Separabilidad de un proceso estocástico. 187

Universidad Villanueva
Estudiantes
Titulación: Propia Fecha: Abril 2023, 9 meses
Horario: V, 16:30-20:30 y S, 10-14 Modalidad: Presencial y online

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

1. INTRODUCCION

Vamos a estudiar en este capítulo sucesiones de variables aleatorias,

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

que sean:

1. Discretas; esto es, que tomen valores dentro de un conjunto finito o numerable E, al que llamaremos espacios de estados.

2. Que verifiquen la condición de Markov:

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall i_0, i_1, \ldots, i, j \in E$$

Tales sucesiones

$$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

se denominan cadenas de Markov en tiempo discreto. Los fundamentos teóricos que permiten su manejo serán expuestos en el capítulo V, y de momento adoptaremos para introducirlas un punto de vista heurístico.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Cómo el presente y futuro del deporte está relacionado con el dato? Descúbrelo - U. Villanueva

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

1 Titulación Propia

2 Abril 2023, 9 meses

3 Presencial y online

Universidad Villanueva

Estudiantes

2. EJEMPLOS. PLANTEAMIENTO GENERAL

Ejemplo 1

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una recta mediante saltos de magnitud -1, 0, 1, con probabilidades q, r, p, respectivamente. Representemos por X_n la posición después del salto n-ésimo y por Z_n el n-ésimo salto; de tal manera que:

$$X_n = X_{n-1} + Z_n,$$

siendo

$$\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

variables aleatorias independientes con distribución común

$$Z_n = \begin{cases} -1 & q \\ 0 & r = 1 - p - q \\ +1 & p \end{cases}$$

El proceso $\{X_n\}$ así definido se conoce como recorrido aleatorio simple y evidentemente es una cadena de Markov en tiempo discreto.

Es un sencillo ejercicio de cálculo de probabilidades obtener que

$$P\{X_n = j|X_0 = 0\} = \sum_{(a,b,c)|a+b+c=n, a-b=j\}} \frac{n!}{a!b!c!} p^a q^b r^c =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{a=\text{máx}(0,j)}^{\left[\frac{n+j}{2}\right]} \frac{n!}{a!(a-j)!\,(n+j-2a)!} p^a q^{a-j} r^{n+j-2a} & \text{si } -n \leqslant j \leqslant n \\ \text{o en caso contrario.} \end{cases}$$

Cantidad que para n grande puede aproximarse, en virtud del teorema central del límite y habida cuenta de que

$$E[X_n] = n(p-q) \qquad \text{y} \qquad V[X_n] = n\{p + q - (p-q)^2\},$$

por

$$P\{j \leqslant X_n \leqslant k|X_0 = 0\} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\{p+q-(p-q)^2\}}} \int_j^k e^{-\frac{[x-n(p-q)]^2}{2n[p+q-(p-q)^2]}} dx$$

Ejemplo 2

N bolas están repartidas entre dos urnas A y B. En cada etapa se escoge al azar una de las N bolas y se cambia de urna. Si designamos por X_n el número

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

de bolas que contiene la urna A después del n-ésimo cambio podemos representar los sucesivos X_n como la posición de una partícula que se mueve a lo largo de los puntos

$$0, 1, 2, \ldots, N$$

de un eje.

Realiza saltos de una unidad a derecha o izquierda, pero ahora las probabilidades de salto dependen del estado del proceso. Concretamente

$$P\{X_{n+1} = i + 1 | X_n = i\} = \frac{N - i}{N} \qquad y \qquad P\{X_{n+1} = i - 1 | X_n = i\} = \frac{i}{N}$$

mientras que en el ejemplo anterior:

$$P\{X_{n+1} = i + 1 | X_n = i\} = p, \qquad P\{X_{n+1} = i | X_n = i\} = 1 - p - q.$$

$$P\{X_{n+1} = i - 1 | X_n = i\} = q.$$

No es difícil creer que el problema de calcular

$$P\{X_n = i | X_0 = 0\}$$

es ahora notablemente más complicado.

Los dos ejemplos anteriores indican que una cadena de Markov es un movimiento no determinístico, sino aleatorio; las variaciones de posición se producen en las sucesivas etapas

$$n \in \mathbb{N} \qquad y \qquad X_n$$

indica la posición después de la n-ésima etapa.

En este sentido los valores

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$$

representan las leyes (probabilísticas) que rigen el movimiento y son en general función de

$$i, j \in E \qquad y \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, impondremos a las cadenas que vamos a estudiar una condición de homogeneidad en el tiempo, suponiendo de las probabilidades anteriores no depende de n. Es decir, que

$$Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = Pr\{X_{m+1} = j | X_m = i\} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Las cadenas que verifican dicha condición se dice que tienen probabilidades de transición estacionarias.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿No te llega para pagar Wuolah Pro? ¿Un año sin anuncios gratis?

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato
¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?
Universidad Villanueva
Estudiantes

Para tener especificada una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias vemos, pues, que es preciso conocer:

1. El espacio de estados E (finito o numerable)

2. $\forall i, j \in E \quad P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = p_{ij}$ (independiente de n) que se llaman probabilidades de transición y que suelen ordenarse en forma de matriz

$$\begin{pmatrix} p_{11}, & p_{12} \cdots & p_{ij} \cdots \\ p_{21}, & p_{22} \cdots & p_{2j} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1}, & p_{i2} \cdots & p_{ij} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = P$$

Naturalmente ha de cumplirse:

$$p_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall i, j \in E \qquad \text{y} \qquad \sum_{j \in E} p_{ij} = 1 \qquad \forall i \in E.$$

Para evitar confusiones observemos que al escribir la matriz hemos convenido en tomar como subíndice de fila el estado de partida y como subíndice de columna el estado de llegada. De ahí que las filas de P sumen 1, mientras que las columnas pueden sumar cualquier cantidad (entre 0 y el número de elementos de E).

En los datos anteriores, E representa donde se mueve el proceso y P cómo se mueve; es evidente que necesitaremos un tercer dato que especifique a partir de dónde se mueve. Es decir, que el tercer dato debe especificar la distribución de X_0.

3. $\forall i \in E \qquad P\{X_0 = i\} = p_i^{(0)}$, que se denomina distribución inicial de la cadena y que expresaremos en forma de vector

$$p^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_i^{(0)}, \ldots).$$

Naturalmente

$$p_i^{(0)} \geqslant 0 \qquad \forall i \in E \qquad \text{y} \qquad \sum_{i \in E} p_i^{(0)} = 1.$$

Ejemplo 3

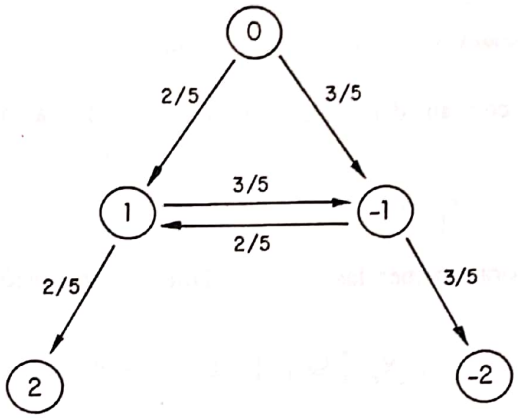
Dos jugadores A y B juegan partidas sucesivas en las que A gana, con probabilidad, 2/5, y B, con probabilidad, 3/5. Inicialmente ambos jugadores están empatados y gana la competición quien consiga dos victorias consecutivas. Si X_n representa la ventaja (o desventaja) de A después de la n-ésima partida, será:

$$E = \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$

Titulación Propia
Abril 2023, 9 meses
Presencial y online
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
Escaneado con CamScanner

$$\begin{array}{c|ccccc} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/5 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 1 & 0 & 3/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = P, \text{ y } p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0)$$

En muchas ocasiones resulta útil una representación gráfica de la matriz de transición del siguiente tipo:



3. DISTRIBUCION DE LA CADENA

Acabamos de afirmar que para una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias, la matriz de transición y la distribución inicial deben determinar cualquier tipo de probabilidades que nos interesen sobre las variables aleatorias

$$\{X_n\}_{n\in N}$$

que componen la cadena. Si ello es cierto podremos, pues, obtener las fórmulas explícitas que expresen, en función de los datos (P y $p^{(0)}$), las probabilidades más características asociadas a las variables

$$\{X_n\}_{n\in N}.$$

a) *Distribución marginal de X_n.*

En primer lugar, vamos a obtener

$$P\{X_n = i\} = p_i^{(n)} \qquad \forall i \in E,$$

que representa la probabilidad de que el instante n la cadena esté en el estado i.

Escaneado con CamScanner
¿Wuolah sin publicidad GRATIS? ¡Clic aquí!
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Para ello basta razonar directamente que habrá de ser.

$$P\{X_n = i\} = \sum_{j \in E} P\{X_{n-1} = j\}\, P\{X_n = i \mid X_{n-1} = j\}$$

es decir,

$$p_i^{(n)} = \sum_{j \in E} p_j^{(n-1)}\, p_{ji}$$

o vectorialmente

$$p^{(n)} = p^{(n-1)}\, P = p^{(n-1)}\, P^2 = \ldots = p^{(0)}\, P^n.$$

b) *Probabilidades de transición en n etapas.*

De acuerdo con su definición, los términos de la matriz de transición proporcionan:

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} \qquad \forall n.$$

Queremos ahora obtener las probabilidades de transición en $n > 1$ etapas; es decir,

$$P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\} = p_{ij}^{(n)}$$

Previamente señalemos que dichas probabilidades pueden agruparse en forma de matriz:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots & p_{1j}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1}^{(n)} & p_{i2}^{(n)} & \cdots & p_{ij}^{(n)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

En cuanto a su determinación, basta simplemente con observar que

$$P_{ij}^{(n+r)} = \sum_{k \in E} P_{kj}^{(n)}\, P_{kj}^{(r)} \qquad \forall i, j \in E$$

es decir, matricialmente:

$$P^{(n+r)} = P^{(n)}\, P^{(r)}.$$

Relación que se conoce con el nombre de ecuación de Chapman-Kolmogorov.

En particular será

$$P^{(n)} = P\, P^{(n-1)} = P^2\, P^{(n-2)} = \ldots = P^n;$$

de manera que la matriz de transición en n etapas coincide con la potencia n-ésima de la matriz de transición.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Observemos de paso que la deducción anterior es válida para cualquier valor de m, y, por tanto, vemos que, efectivamente,

$$P\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\}$$

es independiente de m.

Otra forma de obtener la expresión anterior es considerar

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\}$$

como caso particular de la distribución de X_n cuando la distribución inicial es

$$P\{X_0 = j\} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$$

Así, de acuerdo con el resultado de a) será:

$$(P_{i1}^{(n)}, P_{i2}^{(n)}, \ldots, P_{ij}^{(n)}, \ldots) = (0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)\, P^n \qquad \forall i \in E.$$

Es decir, matricialmente

$$P^{(n)} = IP^n = P^n$$

(siendo I la matriz identidad).

c) *Distribución conjunta de r variables.*

Los resultados anteriores nos permiten expresar ahora la distribución conjunta de r variables cualesquiera de la cadena

$$X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_r},$$

que supondremos ordenadas de manera que sea

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_r.$$

En efecto,

$$P\{X_{n_1} = i_1, X_{n_2} = i_2, \ldots, X_{n_r} = i_r\} = p_{i_1}^{(n_1)}\, p_{i_2 i_3}^{(n_2 - n_1)}\, p_{i_2 i_3}^{(n_3 - n_2)} \ldots p_{i_{r-1} i_r}^{(n_r - n_{r-1})}$$

En el capítulo V demostraremos que si se conoce la distribución conjunta de r variables cualesquiera de un proceso están determinadas todas las probabilidades asociadas al proceso.

Hagamos finalmente un inciso para recordar cómo puede calcularse la potencia n-ésima de una matriz de transición finita, lo cual acabamos de ver da una información importante sobre la cadena.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Participa gratis en todos los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi
WUOLAH PRO

Es sabido que el método más usual en álgebra para calcular la potencia n-ésima de una matriz consiste en utilizar el teorema de Jordan para expresarla en la forma

$$P = H J H^{-1}$$

siendo J una matriz diagonal por cajas formadas por los autovalores de P y H una matriz regular, cuyas columnas son los autovectores de P asociados a los sucesivos autovalores.

Expresada P en la forma anterior es claro que

$$P^n = H J^n H^{-1}$$

y las potencias de J son fácilmente calculables en virtud de su estructura.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

ACTIVIDADES RECOMENDADAS

Trátese de imaginar situaciones, a ser posible reales, cuya evolución pueda representarse mediante una cadena de Markov.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Justificar el resultado dado en el ejemplo 1 del tema, sobre la probabilidad de que la partícula ocupe la posición j, en la etapa n.

2. Se lanza una moneda repetidamente hasta que se presenten dos caras o tres cruces consecutivas. Si sólo interesa el número de lanzamientos necesarios para que el juego termine, plantear una cadena de Markov que describa la situación después de cada lanzamiento.

   Determínese la probabilidad de que el juego termine en, a lo sumo, cuatro lanzamientos.

3. Se tira un dado sucesivamente, para jugar un juego cuyas reglas son las siguientes:

   Supuesto que X_n es el resultado del n-ésimo lanzamiento,

Si X_n =	1	2	3	4	5	6
El jugador gana si X_{n+1} =	2 ó 3	3 ó 5	1, 3 ó 6	3	2 ó 3	3 ó 5
El jugador pierde si X_{n+1} =	4	4 ó 6	2 ó 4	1, 4 ó 6	4	4 ó 6
Se continúa tirando si X_{n+1} =	1, 5 ó 6	1 ó 2	5	2 ó 5	1, 5 ó 6	1 ó 2

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

Plantear la cadena de Markov que describe la evolución del juego.

Simplificarla, de manera a tener una matriz de dimensión, lo menor posible.

4. Un combate naval entre barcos A, B y C se desarrolla de la siguiente manera:

En cada unidad de tiempo y simultáneamente cada barco hace un disparo. A, tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de alcanzar su blanco, B tiene probabilidad $\frac{1}{3}$ y C probabilidad $\frac{1}{4}$, y cada barco elige como blanco al más preciso de sus adversarios presentes. Un sólo impacto basta para hundir al barco alcanzado y el combate continúa mientras haya más de un barco en acción.

Plantear la cadena de Markov que describe la evolución de la batalla.

5. Entre cuatro ciudades situadas en los vértices de un cuadrado, un transporte realiza viajes de manera que en cada uno tiene probabilidad p, de ir a la derecha, y probabilidad $q = 1 - p$ de ir a la de la izquierda. Plantear una cadena de Markov que describa la situación del transporte después de cada viaje.

Supuesto que el transporte empieza en una ciudad fija, plantear una cadena de Markov que informe de qué ciudades ha visitado y cuáles le falta por visitar.

6. En una cierta región se ha observado que los días secos y húmedos se suceden, de acuerdo con las siguientes frecuencias:

Si un día es seco, el día siguiente es seco con probabilidad $\frac{1}{2}$, y si un día es húmedo, el día siguiente lo es también con probabilidad $\frac{3}{4}$.

Determínese la probabilidad de que si hoy es húmedo, dentro de n días el clima sea seco; y también la probabilidad de que al cabo de n días haya dos días consecutivos secos, seguidos de uno húmedo.

7. Calcular en el ejercicio 4 la distribución de la duración de la batalla.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Se desea saber la probabilidad de que partiendo de cero, al cabo de n pasos, la partícula ocupe la posición j.

   Si representamos por a, el número de pasos $+1$, por b el número de pasos -1 y por c, el número de pasos nulos entre los n primeros, ha de ser:

$$a + b + c = n \qquad y \qquad a - b = j$$

   Dentro de las n posiciones se pueden ordenar los a saltos positivos los b saltos negativos y los nulos de

$$\binom{n}{a}\binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!b!c!} \text{ maneras}$$

   y la probabilidad de cada ordenación determinada de a saltos positivos, b negativos y c nulos es $p^a q^b r^c$.

   En total

$$P\{x_n = j | x_0 = 0\} = \sum_{\{(a,b,c) a+b+c=n, a-b=j\}} \frac{n!}{a!b!c!} p^a q^b r^c.$$

2. Tras n lanzamientos los resultados obtenidos forman una sucesión de n caras o cruces ordenadas de cualquier forma (o con más precisión, si el lanzamiento n ha sido necesario, es que en la sucesión anterior, no aparecen nunca ni dos caras ni tres cruces consecutivas). Lo único que interesa sobre la sucesión de resultados obtenidos es, en cuantas caras o cruces consecutivas termine.

WUOLAH
Escaneado con CamScanner
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.

Concretamente podemos distinguir en cada momento:

Sucesiones que acaben por ... xc

Sucesiones que acaben por ... cx

Sucesiones que acaben por ... cxx

Sucesiones que acaben por ... xcc

Sucesiones que acaben por ... cxxx

En los dos últimos casos el juego termina. La matriz de transición entre las cinco situaciones que hemos establecido es:

	xc	cx	cxx	xcc	cxxx
xc	0	1/2	0	1/2	0
cx	1/2	0	1/2	0	0
cxx	1/2	0	0	0	1/2
xcc	0	0	0	1	0
cxxx	0	0	0	0	1

El primer lanzamiento dará lugar a una cara o a una cruz, de manera que se puede interpretar que el juego comienza por uno de los dos primeros estados con probabilidad $\frac{1}{2}$ en ambos casos. Esto es que la distribución inicial es $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0\right)$.

Si no interesa siquiera distinguir entre si el juego termina por dos caras o por tres cruces, se pueden agrupar los dos últimos estados en uno sólo, que representaremos por F. En tal caso la matriz queda.

	xc	cx	cxx	F
xc	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
cx	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
cxx	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
F	0	0	0	1

y la distribución inicial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

Enumerando las maneras de acabar en 4 o menos lanzamientos, se tiene:

cc	con	probabilidad	1/4
xxx	"	"	1/8
xcc	"	"	1/8
cxxx	"	"	1/16
cxcc	"	"	1/16
xxcc	"	"	1/16

De manera que la probabilidad de acabar en, a lo sumo, 4 lanzamientos es $\frac{11}{16}$.

Si calculamos el cubo de la matriz de transición, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 0 & 6/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/8 & 5/8 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 6/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y multiplicada por la distribución inicial nos da:

$$(1/8,\ 1/8,\ 1/16,\ 11/16).$$

De manera que la probabilidad de haber llegado al final en cuatro etapas (la inicial y tres más), resulta también por este método 11/16.

(Interprétense directamente los términos del cubo de la matriz de transición).

3. Después de n lanzamientos del dado se pueden presentar una de las siguientes situaciones:

   – Que el jugador haya ganado: estado que representaremos por G.
   – Que el jugador haya perdido: estado que representaremos por P.
   – Que el juego continue, siendo el último resultado el 1, o bien el 2, ... o bien el seis.

Tenemos así ocho estados posibles y entre ellos en los dos primeros el juego se interrumpe. La matriz de transición será pues

	G	P	1	2	3	4	5	6
G	1	0	0	0	0	0	0	0
P	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1/3	1/6	1/6	0	0	0	1/6	1/6
2	1/3	1/3	1/6	1/6	0	0	0	0
3	1/2	1/3	0	0	0	0	1/6	0
4	1/6	1/2	0	1/6	0	0	1/6	0
5	1/3	1/6	1/6	0	0	0	1/6	1/6
6	1/3	1/3	1/6	1/6	0	0	0	0

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

y la distribución inicial

$$(0, 0, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$$

puesto que en la primera jugada el juego no termina y se puede presentar uno cualquiera de los seis resultados del dado.

Para simplificar la matriz, lo primero que se puede observar es que las filas correspondientes a los estados 1 y 5 y las correspondientes a los estados 2 y 6 coinciden. (También puede verse directamente que las reglas del juego son las mismas en dichos casos.) Por consiguiente el par de estados 1 y 5 se pueden considerar como un solo estado, puesto que no hay ninguna razón para distinguir si el resultado ha sido uno u otro. Lo mismo puede decirse de los estados 2 y 6.

Otra observación es que las columnas de los estados 3 y 4 están formadas exclusivamente por ceros; luego los estados 3 y 4 solo pueden presentarse en la primera tirada, lo cual nos permite suprimirlos si, cambiando la distribución inicial consideramos que la evolución empieza a partir de la segunda tirada.

Con las consideraciones anteriores la cadena queda reducida a lo siguiente:

	G	P	1,5	2,6
G	1	0	0	0
P	0	1	0	0
1,5	1/3	1/6	1/3	1/6
2,6	1/3	1/3	1/6	1/6

con distribución inicial

$$\left(\frac{12}{36}, \frac{11}{36}, \frac{8}{36}, \frac{5}{36}\right)$$

que es el producto de la que poníamos antes por la matriz, agrupada de acuerdo con los nuevos estados.

4. Inicialmente los tres barcos están presentes; en esa situación A dispara a B y B y C lo hacen contra A. Tras un disparo puede resultar:

   – A hundido y B no, en cuyo caso quedarán en acción (B,C).

   – B hundido y A no, en cuyo caso quedarán en acción (A,C).

   – Hundidos los dos, en cuyo caso la batalla termina con victoria de C.

   – Ninguno de los dos hundidos, con lo cual continuamos con la situación inicial.

Escaneado con CamScanner
Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

Si en algún momento se da la situación (B,C), cada uno dispara al otro y pueden resultar, tras un disparo, las siguientes situaciones:

– Victoria para B.

– Victoria para C.

– Ambos se hunden mutuamente, (estado que representaremos por 0).

– Ninguno hundido, con lo cual la batalla continua en la situación (B,C).

Tenemos, en definitva, tras analizar análogamente los posibles resultados de la situación (A,C)), el siguiente espacio de estados

$$E = \{ABC, BC, AC, B, C, A, 0\}.$$

La matriz de transición será:

	ABC	BC	AC	B	C	A	0
ABC	1/4	1/4	1/4	0	1/4	0	0
BC	0	1/2	0	1/4	1/6	0	1/2
AC	0	0	3/8	0	1/8	3/8	1/8
B	0	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	0	0
A	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Indiquemos que la primera fila de la matriz se ha calculado de la siguiente manera:

Probabilidad de que fallen los tres $= 1/2\, 2/3\, 3/4 = \frac{1}{4}$.

Probabilidad de que A acierte y B y C fallen $= 1/2\, 2/3\, 3/4 = 1/4$.

Probabilidad de que A falle y B ó C acierten $= 1/2(1/3 + 1/4 - 1/3 \cdot 1/4) = 1/4$.

Probabilidad de que A acierte y B ó C acierten $= 1/2(1/3 + 1/4 - 1/3 \cdot 1/4) = 1/4$.

Las demás filas se obtienen análogamente, y la distribución inicial es, por supuesto, (1,0,0,0,0,0,0,).

5. Llamemos a A, B, C y D a las cuatro ciudades de acuerdo con la figura. Tras cada viaje el transporte puede encontrarse en una de las cuatro ciudades y la matriz de transición es de la forma:

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

	A	B	C	D
A	0	$1-p$	0	p
B	p	0	$1-p$	0
C	0	p	0	$1-p$
D	$1-p$	0	p	0

Obsérvese que falta el dato que proporcione la distribución inicial.

Supuesto en segundo lugar, que el transporte empieza en A, consideremos los estados constituidos por las ciudades que ya ha visitado poniendo en último lugar, aquella en que se encuentra. Es decir, los siguientes estados: A, AB, AD, BA, DA, ABC, ADC, ABD, ACD, ADB, ACB, BDA, BCA, DCA, y un estado final F que represente que el transporte ya ha visitado las cuatro ciudades.

	A	AB	AD	BA	DA	ABC	ADC	ABD	ACD	ADB	ACB	BDA	BCA	DCA	F
A		$1-p$	p												
AB				p		$1-p$									
AD					$1-p$		p								
BA		$1-p$						p							
DA			p							$1-p$					
ABC											p				$1-p$
ADC									$1-p$						p
ABD												$1-p$			p
ACD														$1-p$	
ADB												p			$1-p$
ACB						$1-p$							p		
BDA								p			$1-p$				
BCA											$1-p$				p
DCA									p						$1-p$
F															1

será la matriz de transición.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

6. De acuerdo con los datos, el clima se ajusta a una cadena de Markov de matriz de transición.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} S & H \end{array} \\ \begin{array}{c} S \\ H \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

Calculemos las potencias de P, para ello determinemos los autovalores de P, raíces de la ecuación

$$|P - \lambda I| = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{8}.$$

Luego

$$\lambda_1 = 1 \quad y \quad \lambda_2 = \frac{1}{4};$$

por tanto

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora los autovectores

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{cases} 1/2x_1 + 1/2x_2 = x_1 \\ 1/4x_1 + 3/4x_2 = x_2 \end{cases}; \qquad x_1 = x_2.$$

Así que todos los autovectores asociados a λ_1 son proporcionales al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por otra parte

$$P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{cases} 1/2x_1 + 1/2x_2 = \frac{1}{4}x_1 \\ 1/4x_1 + 3/4x_2 = \frac{1}{4}x_2 \end{cases}; \qquad 2x_2 = -x_1$$

Así que los autovectores asociados a λ_2 son proporcionales al vector $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Luego

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

y por tanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

como puede comprobarse.

En definitiva

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & (1/4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + 2/3(1/4)^n & 2/3 - 2/3(1/4)^n \\ 1/3 - 1/3(1/4)^n & 2/3 + 1/3(1/4)^n \end{pmatrix}.$$

En particular la probabilidad de que, al cabo de n días de un día húmedo el clima sea seco es

$$1/3 - 1/3(1/4)^n.$$

Y la probabilidad de que n días después de un día húmedo haya dos secos y uno húmedo es

$$[1/3 - 1/3(1/4)^n]\, 1/2\, 1/2.$$

7. Si sólo interesa la duración de la batalla y no quién resulte vencedor, podemos agrupar los cuatro estados B, C, A y 0 en un único estado final F. Tendremos pues:

	ABC	BC	AC	F
ABC	1/4	1/4	1/4	1/4
BC		1/2		1/2
AC			3/8	5/8
F				1

Si determinamos $P^{(n)}_{ABCF}$, probabilidad de que empezando en ABC hallamos alcanzado el final en n etapas, ello coincide obviamente, con la probabilidad de que la duración sea menor o igual que n. Es decir, que la función de distribución de la duración es:

$$P\{\text{Duración} \leqslant n\} = P^{(n)}_{ABCF}.$$

Procedamos pues, en primer lugar, a determinar los autovalores de P.

Evidentemente

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3/8,\ \lambda_3 = 1/2,\ \lambda_4 = 1/4.$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

Máster Gestión Deportiva y Análisis del Dato

Cuyos autovectores asociados son:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Luego

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

así que

$$P = H \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3/8 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 1/4 \end{pmatrix} H^{-1}$$

y

$$P^n = H \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (3/8)^n & & \\ & & (1/2)^n & \\ & & & (1/4)^n \end{pmatrix} H^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} (1/4)^n & (1/2)^n - (1/4)^n & 2(3/8)^n - 2(1/4)^n & 1 - 2(3/8)^n - (1/2)^n + 2(1/4)^n \\ 0 & (1/2)^n & 0 & 1 - (1/2)^n \\ 0 & 0 & (3/8)^n & 1 - (3/8)^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual

$$P^{(n)}_{ABC,F} = 1 - 2(3/8)^n - (1/2)^n + 2(1/4)^n.$$

Universidad Villanueva Estudiantes
Titulación: Propia Fecha: Abril 2023, 9 meses
Horario: V, 16:30-20:30 y S, 10-14 Modalidad: Presencial y online

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

TEMA II

CLASIFICACION DE LOS ESTADOS. TEOREMA DE DESCOMPOSICION

ESQUEMA/RESUMEN

1. Probabilidades de primera pasada.
2. Clasificación de los estados y estructura de las cadenas de Markov.
3. Estados recurrentes positivos y recurrentes nulos.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Cómo el presente y futuro del deporte está relacionado con el dato? Descúbrelo - U. Villanueva

1. PROBABILIDADES DE PRIMERA PASADA

Tratamos de obtener ahora la probabilidad de que, empezando en i, la cadena pase por primera vez por el estado j en la etapa n; es decir

$$P\{X_n = j,\ X_r \neq j\ \forall r < n \mid X_0 = i\} = f_{ij}^{(n)}$$

Uno de los motivos por los que nos interesa esta probabilidad es porque permite expresar la probabilidad total de pasar alguna vez por i partiendo de i:

$$f_{ij} = P\{\exists n \text{ tal que } X_n = j \mid X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Dicho de otra manera, consideremos la variable aleatoria N_{ij} = número de la primera etapa en la cual la cadena pasa por j cuando la posición inicial es i; entonces

$$f_{ij}^{(n)} = P\{N_{ij} = n\} \quad \text{y} \quad f_{ij} = P\{N_{ij} < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.$$

Veamos pues qué relación existe entre las $P_{ij}^{(n)}$ y las $f_{ij}^{(n)}$; para ello descompongamos $P_{ij}^{(n)}$ en suma de las diversas posibilidades según cuál sea la primera vez que la cadena pasa por j, esto es

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)}\, p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)}\, p_{jj}^{(n-2)} + \dots + f_{ij}^{(n-1)}\, p_{jj} + f_{ij}^{(n)}$$

BIBLIOTECA

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Nos interesa poder despejar las f en función de las p, pero como ello no es directamente posible introduzcamos las funciones generatrices de probabilidad

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n \quad y \quad F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

y observemos que si es evidente que la sucesión

$$\{f_{ij}^{(n)}\}_{n \in N}$$

determina la función $F_{ij}(s)$ es igualmente cierto que la función $F_{ij}(s)$ determina, por desarrollo en serie, los coeficientes $f_{ij}^{(n)}$.

Ahora bien la relación anterior permite poner

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(n-1)} + f_{ij}^{(2)} p_{jj}^{(n-2)} + \dots +$$

$$+ f_{ij}^{(n-1)} p_{jj}\} s^n + \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n = F_{ij}(s) P_{jj}(s) + F_{ij}(s)$$

luego

$$F_{ij}(s) = \frac{P_{ij}(s)}{1 + P_{jj}(s)}$$

y tenemos así despejada la función $F_{ij}(s)$ (que determina las probabilidades $f_{ij}^{(n)}$) en función de $P_{ij}(s)$ y $P_{jj}(s)$ (que podemos obtener directamente a partir de

$$\{P_{ij}^{(n)}\}_{n \in N} \quad y \quad \{P_{jj}^{(n)}\}_{n \in N}.$$

Podemos intentar dar una interpretación de las funciones generatrices introducidas; por una parte

$$F_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij} \quad y \quad F'_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} =$$

$$= E[N_{ij}] \text{ si } f_{ij} = 1;$$

Por otra parte,

$$P_{ij}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$$

representa el número esperado de veces que la cadena pasa por j a lo largo de toda la evolución cuando comienza en i. En efecto, definamos la variable aleatoria

$$V_j^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = j \\ 0 & \text{si } X_n \neq j \end{cases};$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿No te llega para pagar Wuolah Pro? ¿Un año sin anuncios gratis?

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato
¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?
Universidad Villanueva
Estudiantes

es claro que

$$P\{V_j^{(n)} = 1 \mid X_0 = i\} = p_{ij}^{(n)}$$

y, por tanto,

$$E[V_j^{(n)} \mid X_0 = i] = p_{ij}^{(n)}$$

Luego si $V_j = \sum_{n=1}^{\infty} V_j^{(n)}$ = número total de veces que la cadena pasa por j a lo largo de la evolución, será

$$E[V_j \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} E[V_j^{(n)} \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1).$$

Volviendo a nuestro problema la expresión obtenida para $F_{ij}(s)$ nos va a resultar muy útil desde un punto de vista teórico, pero en la práctica resulta difícil desarrollarla en serie para obtener los coeficientes $f_{ij}^{(n)}$. El método siguiente es el que se aplica en la práctica: Definamos una nueva cadena

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n & \text{si } X_r \neq j \ \forall r < n \\ j & \text{si } \exists r < n \text{ tal que } X_r = j \end{cases};$$

es claro que

$$\{\tilde{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias

$$\tilde{p}_{ik} = P\{\tilde{X}_1 = k \mid \tilde{X}_0 = i\} = \begin{cases} p_{ik} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \text{ y } k \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \text{ y } k = j \end{cases}$$

(es decir, que la matriz $\tilde{P}$ de la nueva cadena se obtiene sustituyendo en P la fila j por

$$(0, \ldots 0, \overset{j}{1}, 0 \ldots 0).)$$

Además

$$P\{\tilde{X}_n = j \mid \tilde{X}_0 = i\} = P\{\exists r \leqslant n \text{ tal que } X_r = j \mid X_0 = i\},$$

con lo cual

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j, \ \forall r < n \ X_r \neq j \mid X_0 = i\} = P\{\tilde{X}_n = j \mid \tilde{X}_0 = i\} - P\{\tilde{X}_{n-1} =$$

$$= j \mid \tilde{X}_0 = i\} = \tilde{p}_{ij}^{(n)} - \tilde{p}_{ij}^{(n-1)}$$

y el problema de calcular $f_{ij}^{(n)}$ queda reducido al cálculo de probabilidades de transición en n etapas en la nueva cadena de matriz $\tilde{P}$.

Titulación Propia
Abril 2023, 9 meses
Presencial y online
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Reservados todos los derechos. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
Escaneado con CamScanner

2. CLASIFICACION DE LOS ESTADOS Y ESTRUCTURA DE LAS CADENAS DE MARKOV

Vamos a distinguir ahora entre diversos tipos de estados, lo cual nos va a permitir clasificar los estados en varios grupos entre los cuales la matriz de transición tiene que adoptar una configuración determinada.

En primer lugar la probabilidad, f_{jj}, de volver a pasar alguna vez por j partiendo de j puede valer 1 o estrictamente menos que 1 y en base a esto definimos.

$$\begin{cases} \text{Un estado } j \in E \text{ se dice recurrente} \Leftrightarrow f_{jj} = 1 \\ \text{Un estado } j \in E \text{ se dice transitorio} \Leftrightarrow f_{jj} < 1 \end{cases}$$

Por otra parte diremos que i comunica con j ($i \sim j$) si $f_{ij} > 0$; es decir, si hay probabilidad positiva de pasar alguna vez por j partiendo de i.

Fácilmente se pueden caracterizar estas definiciones en otros términos

j es transitorio $\Leftrightarrow P_{jj}(1) < \infty$

j es recurrente $\Leftrightarrow P_{jj}(1) = \infty$

$i \sim j \Leftrightarrow P_{ij}(1) > 0 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Lo cual nos informa de que partiendo de j el número esperado de visitas a j es finito si j es transitorio, mientras que es infinito si j es recurrente.

Analizando más detenidamente la situación vamos a demostrar

Teorema

a) Si j es transitorio es $P_{ij}(1) < \infty \ \forall i \in E$.

b) Si j es recurrente e $i \sim j$ entonces $P_{ij}(1) = \infty$.

c) Si j es recurrente y $j \sim k$ entonces $f_{kj} = 1$, k es recurrente y $f_{jk} = 1$.

d) Si j es recurrente y k es transitorio es $f_{jk} = 0$.

Demostración:

a) $P_{ij}(1) = F_{ij}(1)(1 + P_{jj}(1))$ y es $P_{jj}(1) < \infty$ y $F_{ij}(1) \leqslant 1$, luego $P_{ij}(1) < \infty$.

b) En tal caso $P_{jj}(1) = \infty$ y $F_{ij}(1) > 0$, luego $P_{ij}(1) = \infty$.

c) Si $j \sim k$ es $f_{jk} > 0$; entonces, si fuese $f_{kj} < 1$, con probabilidad $1 - f_{kj} > 0$ partiendo de k no pasaríamos nunca por j. Así que con probabilidad al menos $f_{jk}(1 - f_{kj}) > 0$ saliendo de j no volveríamos a pasar nunca por j; lo cual va en contra de que por ser j recurrente ha de ser $f_{jj} = 1$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Wuolah sin publicidad GRATIS? ¡Clic aquí!

Veamos ahora que k ha de ser recurrente: puesto que $j \sim k$ y $k \sim j$ podemos asegurar que existen N y M tales que

$$p_{jk}^{(N)} > 0 \text{ y } p_{kj}^{(M)} > 0.$$

Podemos poner entonces

$$p_{kk}^{(n)} \geqslant p_{kj}^{(M)} \, p_{jj}^{(n-M-N)} \, p_{jk}^{(N)}$$

$\forall n \geqslant N + M$ (ya que entre todas las maneras de ir desde k hasta k en n etapas estamos considerando sólo la que consiste en ir de k a j en M etapas, realizar un ciclo de $n - M - N$ etapas de j a j, y volver de j a k en N etapas).

Establecida esta acotación tendremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{kk}^{(n)} \geqslant \sum_{n=1}^{N+M} p_{kk}^{(n)} + \sum_{n=N+M+1}^{\infty} p_{kj}^{(M)} \, p_{jj}^{(n-M-N)} \, p_{jk}^{(N)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N+M} p_{kk}^{(n)} + p_{kj}^{(M)} p_{jk}^{(N)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

y como, por ser j recurrente, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ es divergente, también $\sum_{n=1}^{\infty} P_{kk}^{(n)}$ será divergente o lo que es lo mismo k es recurrente.

La última afirmación es clara: k es recurrente y $k \sim j$ luego $f_{jk} = 1$.

d) Se obtiene directamente de c).

En particular según el teorema anterior:

Corolario: Si i y j intercomunican o son ambos transitorios o son ambos recurrentes.

El resultado anterior se puede reinterpretar en el conocido

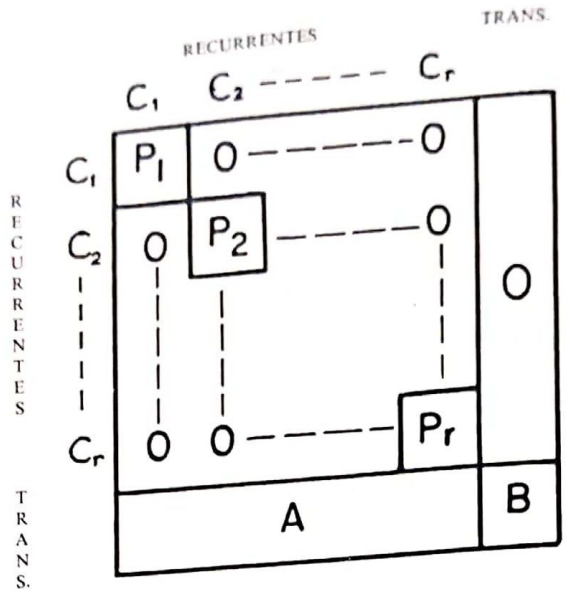
Teorema de descomposición: El espacio de estados E puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos; uno constituido por los estados transitorios y otro por los estados recurrentes. Los estados transitorios son inaccesibles desde los recurrentes. Los estados recurrentes se pueden dividir de manera única en clases de equivalencia establecidas por la relación de equivalencia $i \sim j$ (definida por $f_{ij} > 0$ y $f_{ji} > 0$), de tal manera que si i y j están en la misma clase $f_{ij} = f_{ji} = 1$ y si i y j están en clases distintas $f_{ij} = f_{ji} = 0$.

De acuerdo con este resultado podemos hacer una reordenación de los estados de E (es decir, un reordenación de las filas y columnas de la matriz de transición) que coloque los estados transitorios al final y agrupe los estados de cada una de las clases de equivalencia de los estados recurrentes. Tendremos así, según las afirmaciones anteriores, la siguiente estructura para la matriz de transición de una cadena de Markov:

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!



siendo $C_1, C_2, \ldots, C_r$ cada una de las clases de equivalencia.

Naturalmente ésta es la estructura más compleja que puede presentarse, pero, en general, pueden faltar diversas componentes; es decir, que puede haber cadenas sin estados transitorios, y puede haberlas con todos sus estados transitorios y sin estados recurrentes; los estados recurrentes pueden formar una única clase de equivalencia o varias.

En general llamaremos:

1. Cerrados a los subconjuntos $C \subset E$ tales que cada estado de C comunica exclusivamente con estados de C y, por tanto, no comunica con ningún estado de $E - C$.

2. Irreducibles a los subconjuntos $C \subset E$ tales que cualquier par de estados de C intercomuniquen.

En tales términos el teorema de descomposición divide el conjunto de estados recurrentes en subconjuntos cerrados e irreducibles.

Observemos que si el estado inicial de una cadena de Markov está en un subconjunto cerrado e irreducible, o bien si a lo largo de la evolución se entra en uno de tales subconjuntos, la evolución tiene que proseguir entre los estados de dicho subconjunto y podemos prescindir del resto de la matriz. Por ello los subconjuntos cerrados e irreducibles se llaman a veces subcadenas de la cadena inicial.

3. ESTADOS RECURRENTES POSITIVOS Y RECURRENTES NULOS

Completaremos ahora la división de los estados distinguiendo dos tipos de estados recurrentes

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Participa gratis en todos los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

$$\begin{cases} \text{Un estado recurrente j, se dice recurrente positivo} \\ \Leftrightarrow E[N_{jj}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} < \infty \\ \\ \text{Un estado recurrente j, se dice recurrente nulo} \\ \Leftrightarrow E[N_{jj}] = \infty \end{cases}$$

Es decir que clasificamos los estados recurrentes según que el tiempo medio que la cadena tarde en volver a j partiendo de j sea finito o infinito.

De acuerdo con una observación anterior

$$\begin{cases} j \text{ es recurrente positivo} \Leftrightarrow F'_{jj}(1) < \infty \Leftrightarrow \lim_{s \uparrow 1} \dfrac{1 - F_{jj}(s)}{1 - s} < \infty \\ \\ j \text{ es recurrente nulo} \Leftrightarrow F'_{jj}(1) = \infty \Leftrightarrow \lim_{s \uparrow 1} \dfrac{1 - F_{jj}(s)}{1 - s} = \infty \end{cases}$$

y esto nos va a permitir caracterizar la recurrencia positiva o nula en función de $P_{jj}(s)$, concretamente como

$$F_{jj}(s) = P_{jj}(s) \{1 + P_{jj}(s)\}^{-1}$$

$$\begin{cases} j \text{ es recurrente positivo} \Leftrightarrow \lim_{s \uparrow 1} (1 - s) \{1 + P_{jj}(s)\} > 0 \\ j \text{ es recurrente nulo} \Leftrightarrow \lim_{s \uparrow 1} (1 - s) \{1 + P_{jj}(s)\} = 0 \end{cases}$$

Utilizaremos esta clasificación posteriormente; de momento vamos a demostrar

Teorema

Si i y j son estados recurrentes que intercomunican o son ambos recurrentes positivos o son ambos recurrentes nulos.

Demostración:

Por simetría bastará probar que si j es recurrente positivo también lo es i.

Hemos visto que si

$$i \sim j: \; P_{ii}^{(n)} \geqslant P_{ij}^{(N)} P_{jj}^{(n-N-M)} P_{ji}^{(M)}$$

$\forall n \geqslant N + M$ siendo

$$P_{ij}^{(N)} > 0 \text{ y } P_{ji}^{(M)} > 0$$

WUOLAH
Escaneado con CamScanner
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

entonces

$$(1 - s)\{1 + P_{ii}(s)\} = (1 - s)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n\right\} \geqslant (1 - s)\left\{1 + \sum_{n=1}^{N+M} p_{ii}^{(n)} s^n + \right.$$

$$\left. + s^{N+M} p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(M)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} s^n\right\} \geqslant (1 - s)\{1 + s^{N+M} p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(N)} P_{jj}(s)\} =$$

$$= (1 - s)\{1 + P_{jj}(s)\} s^{N+M} p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(M)} + (1 - s)\{1 - s^{N+M} p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(N)}\}$$

luego

$$\lim_{s \uparrow 1} (1 - s)\{1 + P_{ii}(s)\} \geqslant \lim_{s \uparrow 1} (1 - s)\{1 + P_{jj}(s)\} p_{ij}^{(N)} p_{ji}^{(M)}$$

y como el segundo miembro es positivo también lo será el primero.

En función del resultado anterior se puede afirmar que la recurrencia positiva o nula no es una característica de los estados sino de los subconjuntos cerrados irreducibles establecidos por el teorema de descomposición; es decir, que los estados de una subcadena cerrada e irreducible o son todos recurrentes positivos o todos recurrentes nulos.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

ACTIVIDADES RECOMENDADAS

Clasifíquense los estados y aplíquese el teorema de descomposición a todas las cadenas planteadas en los ejercicios del tema 1.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Una cierta componente de un sistema se comprueba al comienzo de cada día, y si está estropeada se reemplaza por una nueva, igual a la anterior. Se sabe que si la componente lleva i días en servicio tiene progabilidad p_i ($\neq 0$) de continuar funcionando al día siguiente. Sea X_n el número de días que lleva funcionando la componente que está en servicio el día n.

   a) Escribir la matriz de transición de la cadena X_n.

   b) Demostrar que todos los estados son recurrentes, si y sólo si

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i = 0$$

   c) Demostrar que todos los estados de la cadena son recurrentes positivos si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} p_i \right) < \infty$$

   d) Sea T la variable aleatoria igual a la duración en días de la componente, expresar la probabilidad de que $T > i$ en función de las p_i; utilizando lo anterior expresar en términos de T las condiciones de las preguntas b) y c).

2. Se introduce un ratón en una celda elegida al azar del siguiente laberinto.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

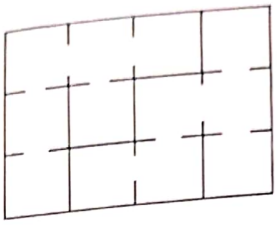
ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO



El ratón se va trasladando aleatoriamente desde cada celda a una de las contiguas.

Plantear la cadena de Markov que describe la posición del ratón después de cada cambio.

Hallar los subconjuntos cerrados e irreducibles, e indicar a qué corresponden sobre el propio laberinto.

3. Aplicar el teorema de descomposición a la siguiente matriz de transición, en la cual se ha representado mediante un asterisco los términos que no son nulos.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A				*	*	*			*			
B			*						*			
C		*							*			
D				*			*			*		
E					*		*	*				
F	*	*				*					*	
G								*				*
H										*		*
I			*						*			
J				*				*				
K										*	*	*
L				*	*		*					

4.

a) Consideremos un recorrido aleatorio simple (ejemplo 1 del tema I) con p $= q = \frac{1}{2}$.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Calcular $P_{00}(1)$; y aplicarlo a demostrar que todos los estados son recurrentes. (Recordar que, según la fórmula de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$).

b) Aplicar la ley fuerte de los grandes números para demostrar que un recorrido aleatorio simple con $p \neq q$ tiene todos sus estados transitorios.

5. En el ejemplo 2 del capítulo 1, si todas las bolas están inicialmente en B, calcular la distribución del tiempo que se tarda en tener por primera vez dos bolas en A.

6. En el ejercicio 6 del capítulo 1 determinar, si hoy es seco, el número esperado de días húmedos entre los m siguientes.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1.

a) Evidentemente la componente que está en servicio el día n, puede llevar funcionando cualquier número de días entre 0 y n. El espacio de estados, conjunto de valores que pueden tomar las X_n, es, por tanto, el conjunto de los números naturales:

$$E = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

La matriz de transición es:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
\hline
0 & 1-p_0 & p_0 & & & & & & \\
1 & 1-p_1 & & p_1 & & & & & \\
2 & 1-p_2 & & & p_2 & & & & \\
3 & 1-p_3 & & & & p_3 & & & \\
4 & 1-p_4 & & & & & p_4 & & \\
5 & 1-p_5 & & & & & & p_5 & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

El sistema evoluciona pues avanzando unidad a unidad; en cada momento la componente puede fallar y el sistema regresa al origen. Puesto que todos los p_i son distintos de cero, desde el cero hay probabilidad positiva de llegar a cualquier estado y, puesto que desde cualquier estado se puede regresar al origen, es claro que todos los estados intercomunican y tendrán, por tanto, todos el mismo carácter.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

b) De acuerdo con la observación anterior, los estados son todos recurrentes si y sólo si lo es el cero. Calculemos, pues, la probabilidad f_{00} de regresar alguna vez al cero.

Es fácil ver que:

$$1 - f_{00} = p_0 p_1 p_2 p_3 \dots p_i \dots = \prod_{i=0}^{\infty} p_i$$

así que $f_{00} = 1$ si y sólo si $\prod_{i=0}^{\infty} p_i = 0$.

(Recordemos que por definición

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i = \lim_{k \to \infty} \left(\prod_{i=0}^{k} p_i \right);$$

así que, por ejemplo, si $p_i = p$ para todo i es

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i = 0;$$

en cambio si, por ejemplo, es

$$p_i = 1 - 1/i^2$$

para $i = 2, 3 \dots$ es

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i > 0.)$$

c) Calculemos el tiempo medio que se tarda en regresar al origen. En primer lugar,

$$f_{00}^{(n)} = p_0 p_1 \dots p_{n-2}(1 - p_{n-1})$$

luego

$$E[N_{00}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = 1 - p_0 + 2p_0(1 - p_1) + 3 p_0 p_1 (1 - p_2)$$

$$+ 4 p_0 p_1 p_2 (1 - p_3) + \dots =$$

$$= 1 + p_0 + p_0 p_1 + p_0 p_1 p_2 + p_0 p_1 p_2 p_3 + \dots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} p_i \right)$$

de manera que $E[N_{00}] < \infty$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} p_i \right) < \infty$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

d) Es claro que

$$P\{T > i\} = p_0 p_1 p_2 \cdots p_{i-1}$$

Por tanto,

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i = \lim_{k \to \infty} \prod_{i=0}^{k-1} p_i = \lim_{k \to \infty} P\{T > k\} = P\{T = \infty\}.$$

Es decir, que todos los estados de la cadena son recurrentes si no hay probabilidad positiva de que la componente dure indefinidamente.

También

$$1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{\infty} p_i \right) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} P\{T > k + 1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{T > k\} = E[T];$$

así que los estados de la cadena son recurrentes positivos si la duración esperada de la componente es finita.

Este ejercicio pone de manifiesto que existen cadenas cuyos estados son todos transitorios, cadenas cuyos estados son todos recurrentes nulos y cadenas cuyos estados son todos recurrentes positivos.

2. Numerando las celdas del laberinto por filas tenemos doce estados, entre los cuales el ratón evoluciona con las siguientes probabilidades:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1/2			1/2							
2	1/3		1/3			1/3						
3		1										
4								1				
5	1/2								1/2			
6		1										
7								1/2			1/2	
8				1/3			1/3					1/3
9					1							
10											1	
11							1/2			1/2		
12								1				

WUOLAH
Escaneado con CamScanner
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.

Analizando las comunicaciones entre celdas, que se corresponden exactamente con la comunicación entre los distintos estados, se ve que los estados {1, 2, 3, 5, 6 y 9} intercomunican y no tienen comunicación con los estados {4, 7, 8, 10, 11, 12}. Son pues dos subconjuntos cerrados e irreducibles que corresponden al hecho de que el laberinto es en realidad la yuxtaposición de dos laberintos incomunicados.

Volviendo a escribir la matriz de transición:

TEMA II

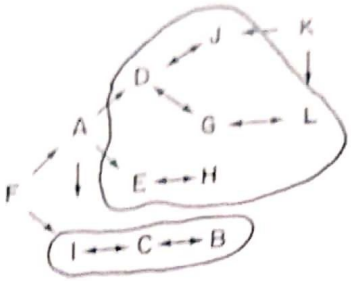
	1	2	3	5	6	9	4	7	8	10	11	12
1		1/2		1/2								
2	1/3		1/3		1/3							
3		1										
5	1/2					1/2						
6		1										
9				1								
4									1			
7									1/2		1/2	
8							1/3	1/3				1/3
10											1	
11								1/2		1/2		
12									1			

3. Representemos gráficamente las relaciones de comunicación que establecen los términos positivos de la matriz.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.



Vemos pues que existen dos subcadenas cerradas e irreducibles:

$$\{D, E, J, G, H, L\} \quad y \quad \{I, C, B\}$$

y tres estados transitorios: A, F, K. Así pues

	D	E	J	G	H	L	I	C	B	A	F	K
D	*		*	*								
E		*		*	*							
J	*				*	*						
G			*			*						
H	*	*		*								
L							*	*				
I							*		*			
C							*	*				
B												
A	*	*					*				*	
F									*	*	*	*
K			*			*						*

4.

a) Expresemos en primer lugar la probabilidad de que partiendo del origen la partícula se encuentre de nuevo en el origen en la etapa n. Para ello, si a y b representan respectivamente el número de saltos de magnitud +1 y −1 entre los n primeros, habrá de ser

$$a + b = n, \quad a = b;$$

luego si n es impar $p_{00}^{(n)} = 0$ mientras que si n es par será

$$p_{00}^{(n)} = \binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}}{\left[\sqrt{2\pi n/2}\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2}\right]^2}\,\frac{1}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

así pues

$$P_{00}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{00}^{(2k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \infty$$

y, por tanto, el estado cero es recurrente.

Ahora bien, todos los estados del recorrido aleatorio simple intercomunican, luego son todos recurrentes.

b) En un recorrido aleatorio simple:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

siendo Z_i variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con

$$E[Z_i] = p - q \text{ y } V[Z_i] = p + q - (p - q)^2.$$

La ley fuerte de los grandes números afirma entonces que

$$P\left\{\forall n \geqslant m \left|\frac{X_n}{n} - (p - q)\right| < \varepsilon\right\} \underset{m\to\infty}{\to} 1$$

es decir que podemos encontrar m suficientemente grande como para que

$$P\left\{\forall n \geqslant m \; n(p - q - \varepsilon) < X_n < n(p - q + \varepsilon)\right\} \geqslant 1 - \alpha$$

Ahora bien si $p - q \neq 0$,

$$\begin{aligned} P\{\forall n \in \mathbb{N} \; X_n \neq 0\} &= P\{\forall n < m \; X_n \neq 0\} \, P\{\forall n \geqslant m \; X_n \neq 0\} \\ &\geqslant P\{\forall n < m \; X_n \neq 0\} \, P\{\forall n \geqslant m \; n(p - q - \varepsilon) \\ &< X_n < n(p - q + \varepsilon)\} \\ &\geqslant P\{\forall n < m \; X_n \neq 0\} \, (1 - \alpha) > 0 \end{aligned}$$

es decir

$$f_{00} = P\{\exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } X_n = 0\} = 1 - P\{\forall n \in \mathbb{N} \; X_n \neq 0\} < 1$$

y, por tanto, el estado cero es transitorio. Como todos los estados intercomunican son todos transitorios.

5. Si inicialmente la urna A está vacía y sólo nos interesa la evolución hasta el momento en que se llegue al estado 2 (dos bolas en A) los únicos estados que va a ocupar la cadena (hasta ese momento) son 0,1 y 2. La matriz de transición entre esos tres estados será:

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

Máster Gestión Deportiva y Análisis del Dato

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & & 1 & \\ 1 & \frac{1}{N} & & 1-\frac{1}{N} \\ 2 & & & 1 \end{array}$$

donde hemos sustituido la fila del estado 2 por (0, 0, 1) de acuerdo con el método expuesto en el párrafo 1 de este tema.

$p_{02}^{(n)}$ representa la probabilidad de haber alcanzado el estado 2 antes de la etapa n, es decir que

$$f_{02}^{(n)} = p_{02}^{(n)} - p_{02}^{(n-1)}$$

Para determinar $p_{02}^{(n)}$ pongamos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{N} & -\sqrt{N} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/\sqrt{N} & \\ & & -1/\sqrt{N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2\sqrt{N} & 1/2 & -1/2 - 1/2\sqrt{N} \\ -1/2\sqrt{N} & 1/2 & -1/2 + 1/2\sqrt{N} \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{N} & -\sqrt{N} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & N^{-\frac{n}{2}} & \\ & & (-1)^n N^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2\sqrt{N} & 1/2 & -1/2 - 1/2\sqrt{N} \\ -1/2\sqrt{N} & 1/2 & -1/2 + 1/2\sqrt{N} \end{pmatrix}$$

y

$$p_{02}^{(n)} = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{N} + 1)(\sqrt{N})^{-n} + \frac{1}{2}(\sqrt{N} - 1)(\sqrt{N})^{-n}(-1)^n =$$

$$= \begin{cases} 1 - (\sqrt{N})^{-n} & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 - (\sqrt{N})^{-n+1} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Universidad Villanueva
Titulación: Propia Fecha: Abril 2023, 9 meses
Horario: V, 16:30-20:30 y S, 10-14 Modalidad: Presencial y online

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

luego

$$f_{02}^{(2k)} = p_{02}^{(2k)} - p_{02}^{(2k-1)} = 1 - (\sqrt{N})^{-2k} - 1 + (\sqrt{N})^{-2k+2} = (\sqrt{N})^{-2k}(N - 1) = \frac{1}{N^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

mientras que

$$f_{02}^{(2k+1)} = p^{(2k+1)} - p_{02}^{(2k)} = 1 - (\sqrt{N})^{-2k} - 1 + (\sqrt{N})^{-2k} = 0.$$

6. Hemos visto que en una cadena de Markov $p_{ij}^{(n)}$ se puede interpretar como el número esperado de visitas a j en la etapa n si el estado inicial es i.

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{m} p_{ij}^{(n)}$$

será el número esperado de visitas a j en las m primeras etapas si el estado de partida es i.

En el ejercicio 6 del capítulo 1, determinamos que

$$P_{SH}^{(n)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

así pues el número esperado de días húmedos entre los m siguientes, dado que hoy es seco, será:

$$\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{2}{3}m - \frac{2}{3}\frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right].$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Cómo el presente y futuro del deporte está relacionado con el dato? Descúbrelo - U. Villanueva

TEMA III

PERIODICIDAD Y DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS

ESQUEMA/RESUMEN

1. Periodicidad en las cadenas de Markov.
2. Distribuciones estacionarias.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

1. PERIODICIDAD EN LAS CADENAS DE MARKOV

Un fenómeno que se presenta frecuentemente en las cadenas de Markov es la periodicidad. Pensemos, por ejemplo, en un recorrido aleatorio simple con $p + q = 1$; en tal caso saliendo de un estado j es claro que sólo podemos volver a estar en j en etapas múltiplos de 2 y se dice entonces que cada estado tiene período 2.

En una situación parecida, si desde cada estado j se puede saltar en cada paso al estado $j + 2$ con probabilidad p y al estado $j - 1$ con probabilidad $1 - p$, vemos claramente que sólo podemos volver a estar en el estado de partida en etapas múltiplos de 3.

Esto nos lleva a la siguiente definición. Un estado recurrente $j \in E$ se dice que tiene periodo $t > 1$ si es

$$t = \text{m.c.d.}\{n \mid p_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

Mientras que si

$$\text{m.c.d.}\{n \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} = 1$$

se dice que el estado j es aperiódico.

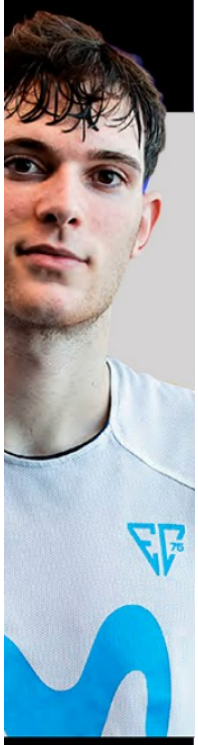
Es importante observar que para conocer el periodo de un estado no basta con conocer los primeros términos de la sucesión $p_{jj}^{(n)}$. Por ejemplo, hemos dicho que en un recorrido aleatorio con $p + q = 1$ cada estado tiene periodo 2; sin embargo, si imponemos que el recorrido se inicia en un estado $j > 0$ y modificamos el comportamiento en el origen haciendo que al llegar al 0 la partícula pueda saltar a 0 con probabilidad q o a 1 con probabilidad p, entonces

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿No te llega para pagar Wuolah Pro? ¿Un año sin anuncios gratis?

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato
¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?
Universidad Villanueva
Estudiantes



Titulación Propia
Abril 2023, 9 meses
Presencial y online

es claro que, llegando a 0, la cadena puede cambiar la paridad del número de saltos necesarios para volver a j, lo cual destruye el período de cada estado j.

Digámoslo de otro modo, en la situación descrita si

$$P_{jj}^{(n)} > 0 \qquad y \qquad n \leqslant 2j$$

es seguro que habrá de ser n múltiplo de 2; sin embargo, para $n > 2j$ esta afirmación deja de ser cierta. Concretamente,

$$P_{jj}^{(1)} = 0,\ P_{jj}^{(2)} > 0,\ P_{jj}^{(3)} = 0,\ \ldots,\ P_{jj}^{(2j-1)} = 0,\ P_{jj}^{(2j)} > 0,$$

pero

$$P_{jj}^{(2j+1)} > 0,\ P_{jj}^{(2j+3)} > 0 \ldots$$

El primer resultado sobre periodicidad que vamos a enunciar es el siguiente.

Teorema

Si dos estados i y j intercomunican, ambos tienen el mismo período.

Demostración: Sea t el período de i; dado que i y j intercomunican, existen N y M tales que

$$p_{ij}^{(N)} > 0 \qquad y \qquad p_{ji}^{(M)} > 0;$$

luego, como

$$p_{ii}^{(N+M)} \geqslant p_{ij}^{(N)}\, p_{ji}^{(M)} > 0,$$

ha de ser

$$N + M = kt.$$

Ahora bien, $\forall n$ tal que $p_{jj}^{(n)} > 0$ será

$$p_{ii}^{(n+N+M)} > 0,$$

y, por tanto,

$$n + N + M = k't;$$

así que $\forall n$ tal que $P_{jj}^{(n)} > 0$ es

$$n = (k' - k)\, t$$

y el período de j tiene que ser divisor de t.

Simétricamente, t tiene que ser divisor del período de j, y, por tanto, ambos coinciden.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
Escaneado con CamScanner

En virtud de este resultado, el período es una característica común a todos los estados de cada subconjunto cerrado es irreducible de una cadena de Markov y podemos referirnos al hecho de que una de estas subcadenas tenga período t.

Veamos entonces qué estructura establece en una subcadena el tener período t:

Teorema

Si una subcadena cerrada e irreducible $C \subset E$ tiene período t, C puede dividirse de manera única en t subconjuntos

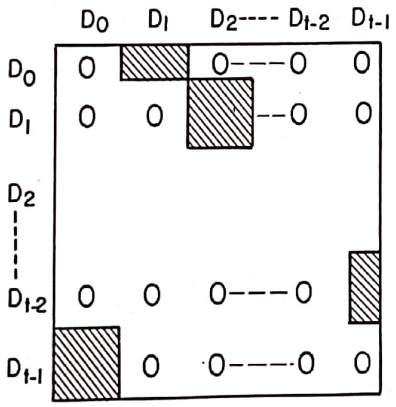
$$D_0, D_1, \ldots, D_{t-1},$$

de tal manera que la evolución se produce cíclicamente pasando en cada etapa de D_r a D_{r+1} y de D_{t-1} a D_0.

Antes de demostrarlo concretemos esta afirmación viendo cuál es la estructura que adopta la matriz de transición; el hecho es que haciendo una reordenación de los estados de la subcadena que agrupe los estados de cada uno de los subconjuntos

$$D_0, D_1, \ldots, D_{t-1},$$

tendremos:



Demostración: Fijemos un estado cualquiera $i \in C$ y definamos

$$D_0 = \{j \in C \mid \exists k \text{ tal que } P_{ji}^{(kt)} > 0\}$$

$$D_1 = \{j \in C \mid \exists k \text{ tal que } P_{ji}^{(kt-1)} > 0\}$$

.
.
.

$$D_{t-1} = \{j \in C \mid \exists k \text{ tal que } P_{ji}^{(kt-t+1)} > 0\}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Escaneado con CamScanner
¿Wuolah sin publicidad GRATIS? ¡Clic aquí!

Es claro, puesto que todos los estados intercomunican, que cada estado $j \in C$ ha de pertenecer a algunos de esos subconjuntos. Y es también evidente que desde estados de D_t, en una etapa, sólo se puede pasar a estados de D_{t+1} (y desde estados de D_{t-1} a estados de D_0).

Queda, pues, únicamente por demostrar que dichos subconjuntos son disjuntos. Efectivamente, si j perteneciese a $D_r \cap D_s$, se podría ir hasta i en $kt - r$ y en $k't - s$ etapas; tendría que ser posible entonces volver de i a j en

$$k_1 t + r \qquad \text{y en} \qquad k_2 t + s$$

etapas, puesto que el periodo de j es t. Combinando ambos hechos se podría ir de j a j en

$$kt - r + k_2 t + s$$

etapas y habría de ser $s - r$ múltiplo de t, lo cual sólo es posible si $s = r$.

2. DISTRIBUCIONES ESTACIONARIAS

Dada una cadena de Markov con espacio de estados E y matriz de transición P, tratamos de estudiar ahora aquellas distribuciones sobre E que tienen la propiedad de que si la posición inicial X_0 se escoge con dicha distribución, la distribución de cualquier variable X_n de la cadena es esa misma. Dichas distribuciones reciben el nombre de distribuciones estacionarias o distribuciones de equilibrio, y recordando que entre las distribuciones de X_n y X_{n-1} la relación es

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} P,$$

llegamos a la siguiente definición:

Una distribución

$$\pi = \{\pi_i\}_{i \in E}$$

sobre E se dice estacionaria respecto de una cadena de Markov de matriz de transición P si $\pi P = \pi$, es decir, si

$$\forall i \in E \qquad \pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j p_{ji}$$

Lo primero que vamos a ver es qué condiciones debe cumplir P para que exista distribución estacionaria. El caso en que P sea irreducible queda resuelto por el siguiente resultado, debido a Levinson:

Teorema

Si P es la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible, entonces existe distribución estacionaria respecto a P si y sólo si la cadena es

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

recurrente positiva. Y en tal caso la distribución estacionaria única es

$$\pi_j = \frac{1}{E[N_{jj}]} = \lim_{s \uparrow 1} (1 - s) \{1 + P_{jj}(s)\}.$$

Demostración:

1.º Veamos que si la cadena es recurrente positiva,

$$\pi_j = \frac{1}{E[N_{jj}]}$$

da lugar a una distribución estacionaria. Desde luego

$$\pi_j > 0 \qquad \forall j \in E,$$

asi que vamos a ver que

$$\sum_{j \in E} \pi_j \leqslant 1$$

y que

$$\sum_{i \in E} \pi_i p_{ij} = \pi_j \qquad \forall j \in E.$$

En efecto, si

$$s < 1, (1 - s) \sum_{k \in E} P_{jk}(s) = (1 - s) \sum_{k \in E} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jk}^{(n)} s^n = (1 - s) \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{k \in E} p_{jk}^{(n)} = s,$$

sustituyendo $P_{jk}(s)$ por su valor resulta:

$$(1 - s) \sum_{k \in E} F_{jk}(s) \{1 + P_{kk}(s)\} = s,$$

y haciendo $s \uparrow 1$, dado que

$$F_{jk}(s) \to 1$$

por ser todos los estados recurrentes obtenemos:

$$\sum_{k \in E} \pi_k \leqslant 1.$$

(En el caso en que E sea finito se cumple la igualdad, pero en general sólo se puede asegurar que el límite de una suma es mayor o igual que la suma de los límites.)

Por otra parte,

$$P_{jk}(s) = sp_{jk} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i \in E} p_{ji}^{(n-1)} p_{ik} \right) s^n =$$

$$= sp_{jk} + s \sum_{i \in E} p_{ik} P_{ji}(s),$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Participa gratis en todos los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

es decir,

$$\frac{1}{s} P_{jk}(s) - p_{jk} = \sum_{i \in E} p_{ik} P_{ji}(s),$$

o bien

$$\frac{1}{s} F_{jk}(s) \{1 + P_{kk}(s)\} - p_{jk} = \sum_{i \in E} p_{ik} F_{ji}(s) \{1 + P_{ii}(s)\}$$

de donde multiplicando por $(1 - s)$ y haciendo $s \uparrow 1$ resulta:

$$\pi_k \geqslant \sum_{i \in E} \pi_i p_{ik}.$$

Ahora bien, como la relación anterior vale para cualquier k,

$$\sum_{k \in E} \pi_k \geqslant \sum_{i \in E} \pi_i \sum_{k \in E} p_{ik} = \sum_{i \in E} \pi_i,$$

luego ha de ser

$$\pi_k = \sum_{i \in E} \pi_i p_{ik} \qquad \forall k \in E.$$

Conclusión:

$$\left\{ \pi_j \Big/ \sum_{i \in E} \pi_i \right\}_{j \in E}$$

es distribución estacionaria.

2.º Supuesto que existe una distribución estacionaria

$$\{V_j\}_{j \in E},$$

cumplirá:

$$V_j \geqslant 0, \sum_{j \in E} V_j = 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i \in E} V_i p_{ij} = V_j;$$

de donde también

$$\sum_{i \in E} V_i p_{ij}^{(n)} = V_j \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora bien,

$$(1 - s) \{1 + P_{jj}(s)\} \sum_{i \in E} V_i F_{ij}(s) = (1 - s) \sum_{i \in E} V_i P_{ij}(s) =$$

$$= (1 - s) \sum_{i \in E} V_i \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = (1 - s) \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{i \in E} V_i p_{ij}^{(n)} = s V_j$$

si hacemos $s \uparrow 1$, resulta

$$\pi_j \lim_{s \uparrow 1} \sum_{i \in E} V_i F_{ij}(s) = V_j,$$

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

o bien puesto que

$$\sum_{i\in E} V_i F_{ij}(s) \leqslant 1 \qquad \forall s \leqslant 1, \qquad \pi_j \geqslant V_j \qquad \forall j \in E.$$

En definitiva, como algún V_j es estrictamente positivo, algún π_j lo es también, y el correspondiente estado será recurrente positivo; y como todos los estados intercomunican todos son recurrentes positivos.

El razonamiento anterior prueba que si existe distribución estacionaria la cadena es recurrente positiva; aplicando la primera parte

$$\{\pi_j\}_{j\in E}$$

satisface entonces

$$\sum_{j\in E} \pi_j \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad \pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij},$$

pero como además

$$\pi_j \geqslant V_j \qquad \forall j \in E$$

sólo puede ser

$$\pi_j = V_j \qquad \forall j \in E.$$

Ello prueba que

$$\sum_{j\in E} \pi_j = 1$$

y que la distribución estacionaria única es

$$\{\pi_j\}_{j\in E}.$$

Disponiendo del resultado anterior es fácil expresar para una cadena cualquiera la condición para que exista distribución estacionaria. Concretamente, aplicando el teorema de descomposición, si la cadena tiene alguna subcadena recurrente positiva ello es condición necesaria y suficiente para que exista alguna distribución estacionaria. En efecto, si $C_1 \subset E$ es recurrente positiva hay una distribución estacionaria

$$\{\pi_j\}_{j\in C_1},$$

respecto a P_1 y la distribución

$$\pi_j = \begin{cases} \pi_j & \forall j \in C_1, \\ 0 & \forall j \in E - C_1, \end{cases}$$

es entonces estacionaria respecto a P.

En caso contrario, si no hay subcadenas recurrentes positivas, no hay distribuciones estacionarias respecto ni a P_1, ..., ni a P_r; en seguida veremos también

BIBLIOTECA GRANADA

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

que si la cadena tiene estados transitorios, T, ninguna distribución estacionaria puede ser tal que

$$\sum_{i \in T} \pi_i > 0.$$

Luego no puede haber distribuciones estacionarias.

La afirmación de que cualquier distribución estacionaria asigna probabilidad cero a los estados transitorios se puede probar observando que, como

$$p_{ij} = 0 \qquad \forall j \in T \qquad \forall i \in E - T,$$

habrá de ser

$$\pi_j = \sum_{i \in T} \pi_i p_{ij} \qquad \forall j \in T.$$

y, por tanto,

$$\pi_j = \sum_{i \in T} \pi_i p_{ij}^{(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sumando en n es claro que, si fuese $\pi_j > 0$, el primer miembro sería divergente y el segundo convergente.

Completando el resultado anterior observemos que, si existen varias subcadenas recurrentes positivas, cada una tiene su distribución estacionaria única; por ello, la cadena constará de tantas distribuciones estacionarias como combinaciones lineales convexas de dichas distribuciones parciales.

Otra observación interesante es que si el conjunto de estados de una cadena de Markov irreducible es finito, la cadena es recurrente positiva. En efecto,

a)

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(1) = \sum_{j \in E} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

pero

$$\sum_{j \in E} P_{ij}(1) = \sum_{j \in E} F_{ij}(1)\,(1 + P_{jj}(1)) \leqslant \sum_{j \in E} (1 + P_{jj}(1)) = \text{número}$$

$$\text{de elementos de } E + \sum_{j \in E} P_{jj}(1).$$

Así que cuando E es finito,

$$\sum_{j \in E} P_{jj}(1) = \infty,$$

luego algún estado ha de ser recurrente, y, por tanto, todos.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

b) Estableciamos antes la identidad

$$(1 - s) \sum_{j \in E} F_{ij}(s) \{1 + P_{jj}(s)\} = s,$$

en el caso finito al tender s hacia 1 resulta

$$\sum_{j \in E} \pi_j = 1,$$

y ha de ser, pues, $\pi_j > 0$ para algún j.

Terminaremos haciendo notar que si una cadena irreducible y recurrente positiva tiene periodo t la distribución estacionaria ha de cumplir:

$$\sum_{j \in D_0} \pi_j = \sum_{j \in D_1} \pi_j = \dots = \sum_{j \in D_{t-1}} \pi_j = \frac{1}{t}.$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Dada una matriz de transición, cuyos términos positivos sean los indicados con un asterisco,

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A					*		*			
B			*	*						
C	*					*				
D						*				*
E		*							*	
F					*		*			
G		*							*	
H	*					*				
I			*					*		
J					*		*			

Comprobar que es irreducible, determinar su período y hallar los subconjuntos

$$D_0, D_1, \ldots, D_{t-1},$$

cuya existencia se demuestra en el tema.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

2. En el ejercicio 1 del tema 2, probar que todos los estados tienen periodo t > 1 si y sólo si

$$p_0 = 1,\ p_i = 1 \qquad \forall i \neq kt - 1$$

y existen dos enteros, k_1 y k_2, primos entre sí, tales que

$$p_{k_1 t - 1} < 1 \qquad \text{y} \qquad p_{k_2 t - 1} < 1.$$

3. Determinar la distribución estacionaria asociada a la cadena de Markov descrita en el ejemplo 2 del tema 1.

4. Probar que en un recorrido aleatorio simple con $p = q$, no existe distribución estacionaria. Concluir que todos los estados son recurrentes nulos.

5. Determinar la distribución estacionaria correspondiente al ejercicio 1 del tema 2, y expresarla en función de T.

6. En el ejercicio 2 del tema 2 determinar cómo se puede situar inicialmente al ratón para que siempre se encuentre con las mismas probabilidades en las distintas celdas. Hallar los tiempos medios de recurrencia de cada estado.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

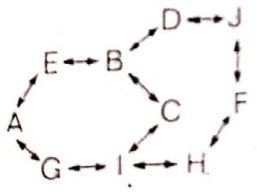
Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Si representamos en un grafo las relaciones de comunicación entre los estados, tenemos:



luego, todos los estados intercomunican y la cadena es irreducible.

Tomemos ahora un estado cualquiera, por ejemplo, A, que queda incluido en D_0; a A se accede desde C y desde H, que formarán, por tanto, parte de D_1; hasta C se llega desde B e I, y hasta H desde I. B e I forman, por tanto, parte de D_2; E y G formarán parte de D_3, puesto que desde ellos se llega a B e I. Como a E y a G se llega desde A, hemos terminado el recuento de clases; F y J tienen que formar parte de D_0 y D de D_1.

En resumen,

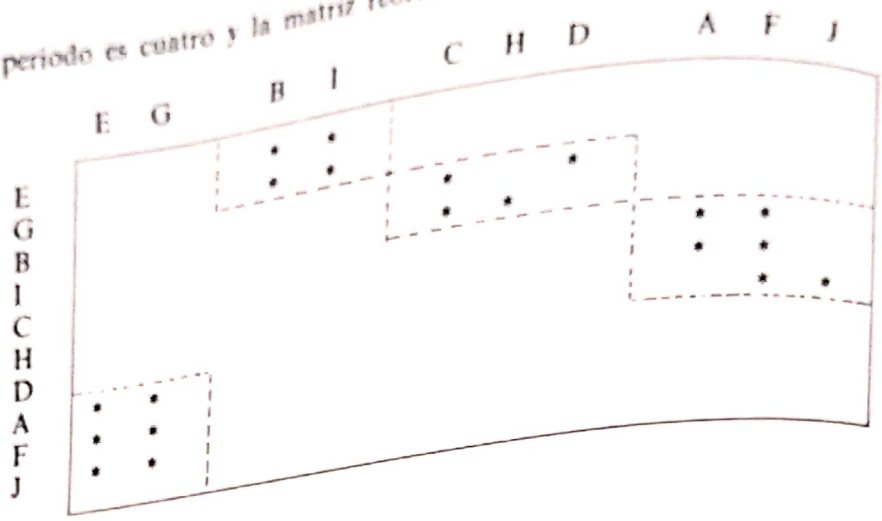
$$D_0 = \{A, F, J\},\ D_1 = \{C, H, D\},\ D_2 = \{B, I\},\ D_3 = \{E, G\};$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.

el periodo es cuatro y la matriz reordenada queda:



2. Puesto que todos los estados intercomunican (excluido el caso trivial en que $p_i = 1\ \forall i$), todos tendrán el mismo período, y basta, pues, ver cuál es la condición necesaria y suficiente para que el estado 0 tenga período $t > 1$.

Si

$$p_0 = 1,\ p_i = 1 \qquad \forall i \neq kt - 1,$$

entonces sólo se puede regresar al origen desde estados i, tales que $1 - p_i > 0$; es decir, desde estados de la forma $i = kt - 1$. Llegar al estado i cuesta i etapas al menos, y una más para regresar al origen hacen que sólo se pueda volver a cero en etapas múltiplos de t. El período es, por tanto, múltiplo de t.

Ahora bien, si existen k_1 y k_2 primos entre sí, tales que

$$p_{k_1 t - 1} < 1 \qquad p_{k_2 t - 1} < 1,$$

se puede, efectivamente, volver al origen en $k_1 t$ y en $k_2 t$ etapas. Luego el período es t.

Recíprocamente, si cero tiene período t, para que no se pueda regresar a él salvo en etapas múltiplos de t, ha de ser

$$p_0 = 1 \qquad \text{y} \qquad p_i = 1 \qquad \forall i \neq kt - 1.$$

Por otra parte, para que el período no sea un múltiplo de t, se ha de poder volver al origen en números de etapas múltiplos de t, cuyo máximo común divisor sea t. Es decir, que han de existir k_1 y k_2, tales que

$$p_{k_1 t - 1} < 1 \text{ y } p_{k_2 t - 1} < 1$$

con

$$\text{m.c.d.}(k_1 t,\ k_2 t) = t.$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

3. Escribamos explícitamente la matriz de transición del problema:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & N-2 & N-1 & N \\
\hline
0 & 1/N & 1 & & & & & & & & & & \\
1 & & 2/N & 1-1/N & & & & & & & & & \\
2 & & & & 1-2/N & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & & & \\
j-1 & & & & & & j/N & 1-\frac{j-1}{N} & & & & & \\
j & & & & & & & \frac{j+1}{N} & 1-j/N & & & & \\
j+1 & & & & & & & & & \ddots & & & \\
\vdots & & & & & & & & & & \ddots & & \\
N-1 & & & & & & & & & & & 1-1/N & 1/N \\
N & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}
$$

La distribución estacionaria

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$$

existe y es única, puesto que la cadena es irreducible y recurrente positiva, por ser finita. Ha de satisfacer, por otra parte, el sistema de ecuaciones

$$
\begin{cases}
1/N\,\pi_1 = \pi_0 \\
\pi_0 + \dfrac{2}{N}\pi_2 = \pi_1 \\
\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\pi_1 + \dfrac{3}{N}\pi_3 = \pi_2 \\
\vdots \\
\left(1 - \dfrac{j-1}{N}\right)\pi_{j-1} + \dfrac{j-1}{N}\pi_{j+1} = \pi_j \\
\vdots \\
\dfrac{2}{N}\pi_{N-2} + \pi_N = \pi_{N-1} \\
\dfrac{1}{N}\pi_{N-1} = \pi_N
\end{cases}
\quad \text{, que da} \quad
\begin{cases}
\pi_1 = N\pi_0 \\
\pi_2 = \left(\dfrac{N}{2}\right)\pi_0 \\
\pi_3 = \left(\dfrac{N}{3}\right)\pi_0 \\
\vdots \\
\pi_j = \left(\dfrac{N}{j}\right)\pi_0 \\
\vdots \\
\pi_{N-1} = N\pi_0 \\
\pi_N = \pi_0
\end{cases}
$$

WUOLAH
Escaneado con CamScanner
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.

Como además ha de ser
$$\sum_{i=0}^{N} \pi_i = 1,$$

tenemos
$$1 = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = \pi_0 2^N$$

luego
$$\pi_0 = \frac{1}{2^N} \qquad \text{y} \qquad \pi_j = \binom{N}{j} \frac{1}{2^N}$$

Es decir, que la distribución estacionaria es, en este caso, una distribución binomial de parámetros N y 1/2. Dicho de otro modo, si las bolas se reparten inicialmente al azar entre las dos urnas, el mecanismo descrito hace que en cualquier momento las bolas estén repartidas al azar.

Pueden verse las notables repercusiones físicas de este problema en un artículo de M. Kac, incluido en el libro «La matemática en el mundo moderno», publicado por Scientific American.

4. Si en un recorrido aleatorio simple con $p = q$ existiese distribución estacionaria, habría de ser:
$$\pi_j = p\,\pi_{j+1} + (1 - 2p)\,\pi_j + p\,\pi_{j-1}$$

es decir,
$$p(\pi_{j+1} - 2\pi_j + \pi_{j-1}) = 0,$$

o bien,
$$\pi_j = \frac{\pi_{j+1} + \pi_{j-1}}{2}$$

Las únicas soluciones de la ecuación anterior son de la forma
$$\pi_j = A + Bj$$

Puesto que π_j tiene que ser positivo para cualquier j ha de ser $B = 0$, y, por tanto, π_j es constante. Obviamente es imposible hallar una distribución de probabilidad sobre los enteros cuyos términos sean constantes, así que no existe distribución estacionaria y el teorema de Levinson asegura entonces que la cadena no es recurrente positiva.

Para ver que los estados son efectivamente recurrentes, trataremos de determinar
$$f_{j,0} = p\{\exists n \text{ tal que } X_n = 0 \mid X_0 = j\}$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Para ello supongamos, en primer lugar, que el estado cero es absorbente; es claro que ello no modifica el valor de $f_{j,0}$ para $j \neq 0$, y, en cambio, $f_{00} = 1$.

Ahora bien,

$$f_{j0} = p f_{j+1,0} + (1 - 2p) f_{j,0} + p f_{j-1,0}$$

Es decir,

$$f_{j+1,0} - 2 f_{j,0} + f_{j-1,0} = 0$$

que es la misma ecuación de antes. Por las mismas consideraciones, $f_{j,0}$ ha de ser constante, y como $f_{00} = 1$ llegamos a la conclusión de que

$$f_{j,0} = 1 \qquad \forall j.$$

Volvamos ahora al recorrido aleatorio sin el estado cero adsorbente, será

$$f_{00} = p f_{1,0} + p f_{-1,0} + (1 - 2p) f_{0,0}$$

es decir,

$$2 f_{00} = f_{1,0} + f_{-1,0};$$

y como por el razonamiento anterior

$$f_{1,0} = 1 \qquad \text{y} \qquad f_{-1,0} = 1$$

sigue siendo $f_{00} = 1$. El estado cero es, pues, recurrente y por consiguiente lo son todos.

Los estados del recorrido aleatorio simple con $p = q$ son, pues, recurrentes nulos, es decir, que partiendo de cualquiera de ellos hay seguridad de regresar a él, pero el tiempo medio que se tarda en que se produzca dicho regreso es infinito.

5. La distribución estacionaria existirá si la cadena es recurrente positiva, esto es si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} p_i \right) < \infty$$

o lo que es lo mismo si $E[T] < \infty$.

Caso de que exista la distribución estacionaria, cumplirá:

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p_i)\, \pi_i = \pi_0 \\ p_0\, \pi_0 = \pi_1 \\ p_1\, \pi_1 = \pi_2 \\ \vdots \\ p_i\, \pi_i = \pi_{i+1} \\ \vdots \end{cases} \quad \text{, luego} \quad \begin{cases} \pi_1 = p_0\, \pi_0 = P\{T > 1\}\, \pi_0 \\ \pi_2 = p_0\, p_1\, \pi_0 = P\{T > 2\}\, \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{i+1} = p_0\, p_1\, p_2 \cdots p_i\, \pi_0 = P\{T > i\}\, \pi_0 \\ \vdots \end{cases}$$

y como ha de ser

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

resulta

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} P\{T > k\} = \pi_0\, E[T] = 1$$

Es decir,

$$\pi_0 = \frac{1}{E[T]} \qquad \text{y} \qquad \pi_i = \frac{P\{T > i - 1\}}{E[T]}$$

6. Como vimos, la cadena que describe la posición del ratón después de cada cambio, consta de dos subcadenas cerradas e irreducibles que, puesto que son finitas, son recurrentes positivas. Determinemos la distribución estacionaria de cada una de ellas.

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_5, \pi_6, \pi_9) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_5, \pi_6, \pi_9)$$

es decir
$$\begin{cases} 1/3\, \pi_2 + 1/2\, \pi_5 = \pi_1 \\ 1/2\, \pi_1 + \pi_3 + \pi_6 = \pi_2 \\ 1/3\, \pi_2 = \pi_3 \\ 1/2\, \pi_1 + \pi_9 = \pi_5 \\ 1/3\, \pi_2 = \pi_6 \\ 1/2\, \pi_5 = \pi_9 \end{cases}$$

cuya solución es
$$\begin{cases} \pi_1 = 1/5 \\ \pi_2 = 3/10 \\ \pi_3 = 1/10 \\ \pi_5 = 1/5 \\ \pi_6 = 1/10 \\ \pi_9 = 1/10 \end{cases}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

Máster Gestión Deportiva y Análisis del Dato

puesto que ha de ser

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_9 = 1$$

Por otra parte,

$$(\pi_4, \pi_7, \pi_8, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_4, \pi_7, \pi_8, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12})$$

es decir
$$\begin{cases} 1/3\ \pi_8 = \pi_4 \\ 1/3\ \pi_8 + 1/2\ \pi_{11} = \pi_7 \\ \pi_4 + 1/2\ \pi_7 + \pi_{12} = \pi_8 \\ 1/2\ \pi_{11} = \pi_{10} \\ 1/2\ \pi_7 + \pi_{10} = \pi_{11} \\ 1/3\ \pi_8 = \pi_{12} \end{cases}$$
cuya solución es
$$\begin{cases} \pi_4 = 1/10 \\ \pi_7 = 2/10 \\ \pi_8 = 3/10 \\ \pi_{10} = 1/10 \\ \pi_{11} = 2/10 \\ \pi_{12} = 1/10 \end{cases}$$

Para cualquier λ entre 0 y 1,

$$\lambda(1/5,\ 3/10,\ 1/10,\ 1/5,\ 1/10,\ 1/10) + (1 - \lambda)\,(1/10,\ 2/10,\ 3/10,\ 1/10,\ 2/10,\ 1/10)$$

es distribución estacionaria. Los tiempos de recurrencia son:

$E[N_{1,1}] = 5$, $E[N_{2,2}] = 10/3$, $E[N_{3,3}] = 10$, $E[N_{5,5}] = 5$,

$E[N_{6,6}] = 10$, $E[N_{9,9}] = 10$, $E[N_{4,4}] = 10$, $E[N_{7,7}] = 5$,

$E[N_{8,8}] = 10/3$, $E[N_{10,10}] = 10$, $E[N_{11,11}] = 5$, $E[N_{12,12}] = 10$.

Universidad Villanueva
Estudiantes
Titulación: Propia Fecha: Abril 2023, 9 meses
Horario: V, 16:30-20:30 y S, 10-14 Modalidad: Presencial y online

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH
Escaneado con CamScanner

TEMA IV

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO DE UNA CADENA DE MARKOV

ESQUEMA/RESUMEN

1. Teorema de límite para las cadenas de Markov.
2. Consecuencias del teorema de límite.
3. Algunas cuestiones complementarias.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Cómo el presente y futuro del deporte está relacionado con el dato? Descúbrelo - U. Villanueva

1. TEOREMA DE LIMITE PARA LAS CADENAS DE MARKOV

Vamos a estudiar a continuación el comportamiento de la matriz de transición en n etapas de una cadena de Markov cuando n crece hacia infinito y como consecuencia el comportamiento límite de la distribución marginal de X_n.

Veamos previamente algunos resultados relativos a la periodicidad de los estados.

Lema 1

Si un estado i tiene período t es

$$t = \text{m.c.d.}\ \{n | f_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Demostración:

Hemos visto que

$$P_{ii}^{(n)} = f_{ii}^{(1)} P_{ii}^{(n-1)} + f_{ii}^{(2)} p_{ii}^{(n-2)} + \dots + f_{ii}^{(n-1)} p_{ii} + f_{ii}^{(n)},$$

y por tanto,

$$\{n | f_{ii}^{(n)} > 0\} \subset \{n | p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

siendo, además, evidentemente

$$\text{mín}\{n | f_{ii}^{(n)} > 0\} = \text{mín}\ \{n | p_{ii}^{(n)} > 0\} = s.$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

Llamemos

$$d_N = \text{m.c.d.}\ \{n \leqslant N \mid f_{ii}^{(n)} > 0\} \quad y \quad d'_N = \text{m.c.d.}\ \{n \leqslant N \mid p_{ii}^{(n)} > 0\},$$

es evidente que $d_N = d'_N$ y vamos a probar que si $d_N = d'_N$ entonces

$$d'_{N+1} = d_{N+1}$$

lo cual por inducción establecerá el lema.

Si $d_N = d'_N$ analicemos las distintas posibilidades; puede ser

$$1)\quad f_{ii}^{(N+1)} > 0 \quad y \quad p_{ii}^{(N+1)} > 0,$$

entonces

$$d_{N+1} = d'_{N+1},$$

$$2)\quad f_{ii}^{(N+1)} = 0 \quad y \quad p_{ii}^{(N+1)} = 0,$$

y es válida la misma conclusión

$$3)\quad f_{ii}^{(N+1)} = 0 \quad y \quad p_{ii}^{(N+1)} > 0,$$

en tal caso debe existir v (entre 1, 2, ..., N) tal que

$$f_{ii}^{(v)}\, p_{ii}^{(N+1-v)} > 0;$$

luego d_N divide a v y d'_N divide a $N + 1 - v$. Pero, como $d_N = d'_N$, dicho valor común divide a $N + 1$ y

$$d_{N+1} = d'_{N+1} = d_N.$$

Otra propiedad elemental que conviene recordar es que si $A \subset N$ con m.c.d. $(A) = t$ existe un entero v tal que

$$\forall n \geqslant v$$

$$nt = \sum_{m=1}^{p} c_m a_m$$

con $c_m \in N$ y $a_m \in A$; esta afirmación resulta directamente del teorema de Bezout que permite expresar

$$t = \sum_{m=1}^{p} b_m a_m$$

siendo b_m enteros (positivos o negativos) y $a_m \in A$.

En segundo lugar probaremos el siguiente lema que fue establecido por Erdos, Feller y Pollard y del cual proporcionamos la demostración debida a Chung.

Escaneado con CamScanner

¿No te llega para pagar Wuolah Pro? ¿Un año sin anuncios gratis?

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato
¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?
Universidad Villanueva
Estudiantes

Lema 2

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una distribución sobre N de media μ y definimos

$$p_n = f_1 p_{n-1} + f_2 p_{n-2} + \dots + f_{n-1} p_1 + f_n p_0 \text{ con } p_0 = 1$$

entonces si

$$\text{m.c.d. } \{n | p_n > 0\} = t \text{ se tiene } \lim_{n \to \infty} p_{nt} = \frac{t}{\mu}.$$

Demostración:

Según el lema anterior

$$\text{m.c.d. } \{n | f_n > 0\} = t.$$

Sea

$$r_n = \sum_{\nu=N+1}^{\infty} f_\nu,$$

es entonces

$$r_0 = 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_\nu = \mu \text{ y } r_\nu - r_{\nu-1} = -f_\nu;$$

por tanto

$$p_n = -\sum_{\nu=1}^{n} (r_\nu - r_{\nu-1}) p_{n-\nu},$$

o bien

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu-1} p_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} r_\nu p_{n-1-\nu};$$

es decir que

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu}$$

es independiente de n y vale $r_0 p_0 = 1$ para todo n.

Sea por otra parte

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \sup p_{nt},$$

existe entonces

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty},$$

Titulación Propia
Abril 2023, 9 meses
Presencial y online
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.
WUOLAH
Escaneado con CamScanner

tal que

$$p_{n_k t} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \lambda,$$

lo cual podemos expresar

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \inf p_{n_k t} = \lim_{k \to \infty} \inf \left\{ f_s p_{n_k t - s} + \sum_{\substack{v \geq 1 \\ v \neq s}}^{n_k t} f_v \, p_{n_k t - v} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant f_s \lim_{k \to \infty} \inf p_{n_k t - s} + \sum_{\substack{v \geq 1 \\ v \neq s}}^{\infty} f_v \lim_{k \to \infty} \sup p_{n_k t - v} \leqslant$$

$$\leqslant f_s \lim_{k \to \infty} \inf p_{n_k t - s} + \lambda \sum_{\substack{v \geq 1 \\ v \neq s}}^{\infty} fv$$

ya que $f_v = 0$ salvo para v múltiplo de t. En definitiva

$$\lambda \leqslant f_s \lim_{k \to \infty} \inf p_{n_k t - s} + \lambda(1 - f_s)$$

o bien

$$\lim_{k \to \infty} \inf p_{n_k t - s} \geqslant \lambda$$

$\forall s$ tal que $f_s > 0$; con lo cual

$$\lim_{k \to \infty} p_{n_k t - s} = \lambda$$

$\forall s$ tal que $f_s > 0$.

Aplicando sucesivamente la igualdad anterior tendremos

$$\lim_{k \to \infty} p_{n_k t - q} = \lambda$$

para cualquier número q de la forma

$$\sum_{m=1}^{p} c_m s_m$$

con

$$c_m \in \mathbb{N}, \; f_{s_m} > 0.$$

Luego, en virtud de la observación previa, existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall s \geqslant s_0 \text{ es } \lim_{k \to \infty} p_{n_k t - st} = \lambda$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Wuolah sin publicidad GRATIS? ¡Clic aquí!

Hagamos ahora

$$n = (n_k - s_0)t$$

en la identidad

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu \, p_{n-\nu} = 1$$

y tendremos

$$\sum_{\nu=0}^{(n_k - s_0)t} r_\nu \, p_{(n_k - s_0)t - \nu} = 1,$$

o bien puesto que $p_m = 0$ salvo cuando m es múltiplo de t

$$\sum_{\nu=0}^{(n_k - s_0)} r_{\nu t} \, p_{(n_k - s_0 - \nu)t} = 1;$$

de donde al tender k a infinito resulta

$$\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu t} = 1 \quad \text{o bien} \quad \lambda = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu t}}$$

Observemos por último que como $f_m = 0$ salvo cuando m es múltiplo de t, será

$$r_{\nu t} = \frac{1}{t} \sum_{j=\nu t}^{(\nu+1)t-1} r_j,$$

es decir,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu t} = \frac{1}{t} \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu = \frac{\mu}{t}.$$

Resulta pues $\lambda = \frac{t}{\mu}$; simétricamente probaríamos que

$$\lim_{n \to \infty} \inf p_{nt} = \frac{t}{\mu}$$

y el resultado queda establecido.

El lema anterior permite establecer directamente al teorema del límite de las probabilidades de transición de una cadena de Markov:

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Teorema 6

a) Si i es un estado recurrente y aperiódico:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \pi_i = \frac{1}{E[N_{ii}]} \quad \text{y} \quad \forall j \in E \ \lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = f_{ji}\pi_i$$

b) Si i es un estado recurrente y de período t:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nt)} = t\pi_i = \frac{t}{E[N_{ii}]} \quad \text{(mientras que } p_{ii}^{(m)} = 0 \ \forall m \neq nt)$$

y

$$\forall j \in E \ \lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(nt+r)} = t\pi_i \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(nt+r)} \ \forall r = 1 \dots t$$

c) Si i es un estado transitorio:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ji}^{(n)} = 0 \ \forall j \in E$$

Demostración:

La conclusión c) está incluida para completar el teorema, pero es un hecho que ya conocíamos, puesto que si i es transitorio

$$P_{ji}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(n)}$$

es una serie convergente $\forall j \in E$.

Las primeras afirmaciones de a) y b) resultan directamente de aplicar el lema 2 a la distribución

$$f_n = f_{ii}^{(n)}$$

de media

$$\mu = E[N_{ii}] = \frac{1}{\pi_i}$$

Veamos entonces la segunda afirmación de a); y para ello expresemos

$$p_{ji}^{(n)} = \sum_{v=1}^{n} f_{ji}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} = \sum_{v=1}^{r-1} f_{ji}^{(v)} P_{ii}^{(n-v)} + \sum_{v=r}^{n} f_{ji}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} \ \forall r \leqslant n$$

luego

$$\sum_{v=1}^{r-1} f_{ji}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} \leqslant p_{ji}^{(n)} \leqslant \sum_{v=1}^{r-1} f_{ji}^{(v)} p_{ii}^{(n-v)} + \sum_{v=r}^{n} f_{ji}^{(v)}$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Participa gratis en todos los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

haciendo n tender a infinito:

$$\pi_i \sum_{\nu=1}^{r-1} f_{ji}^{(\nu)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf p_{ji}^{(n)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup p_{ji}^{(n)} \leqslant$$

$$\leqslant \pi_i \sum_{\nu=1}^{r-1} f_{ji}^{(\nu)} + \sum_{\nu=1}^{r} f_{ji}^{(\nu)}$$

y cuando r tiende a infinito

$$\pi_i f_{ji} \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf p_{ji}^{(n)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup p_{ji}^{(n)} \leqslant \pi_i f_{ji}.$$

La segunda afirmación de b) se prueba de la misma manera teniendo en cuenta que $p_{ii}^{(m)} = 0$ salvo cuando m es múltiplo de t, lo cual permite expresar

$$p_{ji}^{(nt+r)} = \sum_{\nu=0}^{n} f_{ji}^{(\nu t+r)} p_{ii}^{(n-\nu)t} \quad \forall r = 1 \dots t.$$

En relación con esta segunda afirmación observemos que:

Si j está en una subcadena distinta de la de i, será $f_{ji} = 0$ y, por tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(nt+r)} = 0,$$

lo cual concuerda con que en dicho caso

$$p_{ji}^{(n)} = 0 \quad \forall n.$$

Si j está en la misma subcadena que i, sabemos que existe un único $r = 1 \dots t$ tal que $p_{ji}^{(m)} = 0$ salvo que $m = nt + r$; luego

$$p_{ji}^{(mt+r)} \underset{m\to\infty}{\to} t\,\pi_i$$

puesto que

$$f_{ji} = 1 \text{ y } f_{ji}^{(m)} = 0$$

salvo para $m = nt + r$.

Si j es transitorio es, en general,

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(nt+r)} \leqslant 1$$

y naturalmente

$$\sum_{r=1}^{t} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ji}^{(nt+r)} = f_{ji}.$$

WUOLAH
Escaneado con CamScanner
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

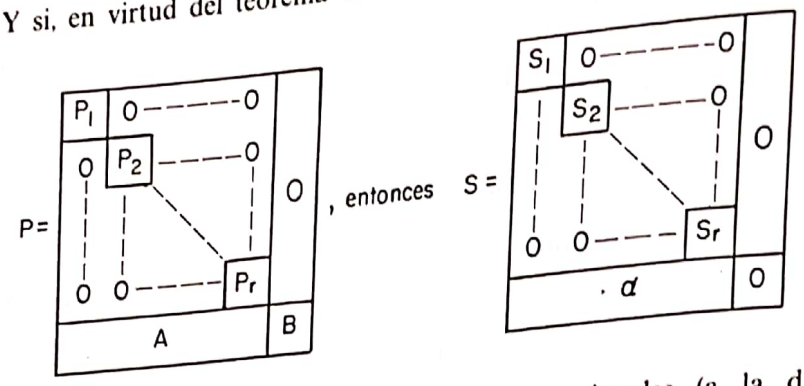
2. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE LIMITE

Veamos ahora algunos resultados complementarios que explicitan el comportamiento asintótico de P^n como consecuencia del teorema de límite. Evitaremos las demostraciones, salvo aquellas que no resulten inmediatas.

Corolario: Si una cadena de Markov tiene todos sus estados aperiodicos, la matriz de transición en n etapas converge término a término hacia una matriz límite:

$$P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S.$$

Y si, en virtud del teorema de descomposición se puede poner:



donde cada S_e es una matriz con todas sus filas iguales (a la distribución estacionaria si P_e es recurrente positiva o a cero si es recurrente nula) de manera que la columna de S_e correspondiente a un estado i tiene todos sus términos iguales a π_i. Mientras α es la matriz cuyo término de lugar (j, i) es $f_{ji}\,\pi_i$. Así que $S = PS = SP$.

Analicemos también qué conclusiones impone el teorema del límite a la distribución marginal de X_n cuando n crece.

Corolario: Si una cadena de Markov tiene todos sus estados aperiódicos

$$p^{(n)} = p^{(0)}\,p^n \underset{n\to\alpha}{\longrightarrow} p^{(0)}S.$$

Cuando P es irreducible,

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}$$

coincide con la distribución estacionaria si P es recurrente positiva y es cero si P es transitoria o recurrente nula; y ello independientemente de $p^{(0)}$. En general:

Si i es recurrente nulo o transitorio:

$$p_i^{(n)} \underset{n\to\alpha}{\longrightarrow} 0$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

Si i es recurrente positivo:

$$p_i^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_i \left\{ \sum_{j\in C} p_j^{(0)} + \sum_{j\in T} p_i^{(0)} f_{ji} \right\}.$$

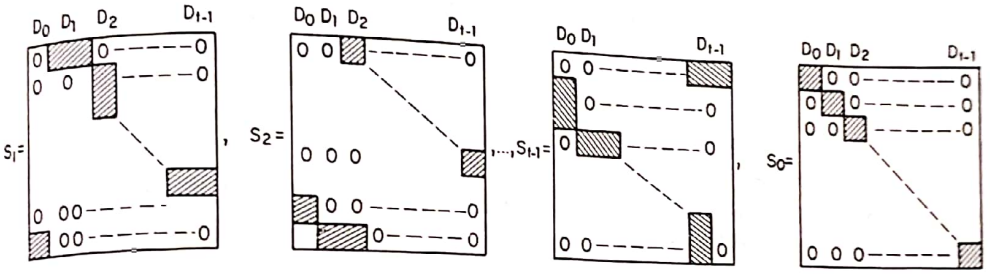
siendo C la subcadena cerrada e irreducible a la que pertenece i.

Los dos corolarios anteriores especifican el comportamiento límite de las cadenas aperiódicas. En el caso periodo podemos afirmar:

Corolario: Si una cadena de Markov irreducible tiene período t es

$$P^{nt} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_0,\ P^{nt+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_1,\ \ldots,\ P^{nt+t-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_{t-1}$$

Y la estructura establecida para las subcadenas irreducibles de período t indica que



hecho que coincide con la afirmación correspondiente del teorema de límite el cual además asegura el término de lugar (j, i), en la única de las t matrices en que no es cero, vale $t\pi_i$.

Naturalmente si una cadena es reducible y sus subcadenas tienen períodos distintos, el comportamiento asintótico es más complejo, pero se puede obtener fácilmente de la siguiente manera:

Sea t el mínimo común múltiplo de los períodos existentes, hallamos P^t (que es una matriz aperiódica) y a partir de ella obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} P^{nt} = S_0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P^{nt+r} = S_0 P^r = P^r S_0$$

para cada r = 1 ... t; hay pues en principio t matrices límites distintas.

Terminaremos enunciando un resultado válido tanto en el caso periódico como en el aperiódico:

Corolario: Si i es un estado recurrente,

$$\forall j \in E\ \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} p_{ji}^{(m)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_{ji}\, \pi_i$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

WUOLAH

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

o matricialmente

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$$

siendo S de la forma descrita en el primer corolario y si P_e tiene período t,

$$S_e = \frac{1}{t}\{S'_0 + S'_1 + \dots + S'_{t-1}\}$$

siendo S'_i las matrices descritas en el corolario anterior.

Los valores $\{\pi_i\}_{i\in E}$, que han aparecido ya en la discusión de las distribuciones estacionarias y en el análisis del comportamiento asintótico de las probabilidades de transición, tienen todavía otra interpretación interesante.

Supongamos que una cadena de Markov inicia su evolución en un estado i recurrente positivo y aperiódico. Llamemos $n_1, n_2, \dots, n_r, \dots$ a las sucesivas etapas en que la cadena vuelve a estar en el estado i; entonces las variables aleatorias

$$n_1,\ n_2 - n_1,\ n_3 - n_2,\ \dots,\ n_r - n_{r-1},\ \dots$$

son independientes (de acuerdo con la condición de Markov) y todas tienen la distribución $f_{ii}^{(n)}$ de media $1/\pi_i$.

Así que en virtud de la ley fuerte de los grandes números:

$$\frac{n_1 + n_2 - n_1 + n_3 - n_2 + \dots + n_r - n_{r-1}}{r} = \frac{n_r}{r}$$

converge casi seguro a $\frac{1}{\pi_i}$, o lo que es lo mismo

$$\frac{r}{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{c\cdot s} \pi_i.$$

Observemos ahora que si consideramos la sucesión de variables aleatorias: R_n, número de veces que la cadena pasa por el estado i en las n primeras etapas, tendremos que

$$n_{R_n} \leqslant k \leqslant n_{R_n} + 1$$

luego

$$\frac{R_n}{n} \leqslant \frac{R_n}{n_{R_n}} \text{ y } \frac{R_n + 1}{n} \geqslant \frac{R_n + 1}{n_{R_n+1}}$$

Los dos segundos miembros de estas desigualdades convergen casi seguro a π_i cuando n tiende a infinito, indicando respectivamente que

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{R_n}{n} \leqslant \pi_i \text{ y } \lim_{n\to\infty} \inf \frac{R_n}{n} \geqslant \pi_i$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

con probabilidad uno. En definitiva

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{c.s.} \pi_i;$$

hecho que asegura que π_i es, con probabilidad uno, la proporción final de tiempo que la cadena ha pasado en el estado i a lo largo de la evolución.

3. ALGUNAS CUESTIONES COMPLEMENTARIAS

a) *Probabilidad de absorción en un subconjunto cerrado*

Hemos definido los subconjuntos cerrados de una cadena de Markov como aquellos subconjuntos C que tienen la propiedad de que, una vez que la cadena ha alcanzado algún estado de C, la evolución continúa siempre entre estados de C.

Supongamos ahora que la evolución empieza en un estado transitorio que comunica con varias subcadenas cerradas e irreducibles de estados recurrentes, es lógico entonces querer calcular la probabilidad de ser absorbido en cada una de las subcadenas con las que comunica. La cosa es sencilla; sea T el conjunto de los estados transitorios y C un subconjunto cerrado e irreducible $\forall j \in T$ sea

$$f_{jc}^{(n)} = P\{X_n \in C \text{ y } X_r \notin C \ \forall r < n \mid X_0 = j\}$$

y

$$f_{jc} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jc}^{(n)} = P\{\exists n \text{ tal que } X_n \in C | X_0 = j\}$$

Tendremos entonces

$$\begin{cases} f_{jc}^{(1)} = \sum_{i \in c} P_{ji} \\ f_{jc}^{(n)} = \sum_{k \in T} P_{jk} f_{kc}^{(n-1)} \ \forall n > 1 \end{cases}$$

sumando en n obtenemos

$$f_{jc} = \sum_{i \in c} P_{ji} + \sum_{k \in T} P_{jk} f_{kc} \ \forall j \in T,$$

lo cual constituye un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas f_{jc}.

Naturalmente en el caso en que C esté compuesto por estados recurrentes f_{jc} es el valor común de f_{ji} $\forall i \in C$ (puesto que en tal caso

$$f_{il} = 1 \ \forall i, l \in C).$$

b) *Tiempos medios de primera pasada*

En una subcadena irreducible de estados recurrentes sabemos que

$$f_{ij} = 1 \ \forall i, j;$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

podemos ahora tras de calcular $E[N_{ij}]$ para $i \neq j$. Para ello observaremos en primer lugar que

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \; \forall n > 1,$$

por tanto

$$E[N_{ij}] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} =$$

$$= f_{ij}^{(1)} + \sum_{k \neq j} p_{ik} \sum_{n=2}^{\infty} n f_{kj}^{(n-1)} = f_{ij}^{(1)} +$$

$$+ \sum_{k \neq j} p_{ik} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) f_{kj}^{(n-1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{kj}^{(n-1)} \right\} = f_{ij}^{(1)} +$$

$$+ \sum_{k \neq j} p_{ik} E[N_{kj}] + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} =$$

$$= \sum_{k \neq j} p_{ik} E[N_{kj}] + \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} E[N_{kj}] + 1$$

y tenemos pues, para j fijo, un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, $E[N_{ij}]$.

c) *Método matricial*

Las propiedades de las cadenas de Markov finitas se pueden obtener a partir de la teoría de matrices. En el capítulo 1 recordamos que toda matriz se puede descomponer $P = HJH^{-1}$.

Ahora bien, el hecho de que la matriz P sea de términos positivos y que la suma de sus filas sea uno, impone una serie de condiciones a la descomposición de Jordan que se conocen como teorema de Perron-Frobenius.

— Si P es la matriz de una cadena de Markov irreducible

1.º Tiene el autovalor 1 y es simple.

2.º Cualquier autovalor de P es de módulo menor o igual que 1.

3.º P tiene período t si y sólo si P tiene autovalores de módulo 1 que son las t raíces t-ésimas de la unidad.

— Si la matriz P es de la forma

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

con $A \neq 0$ los autovalores de B son de módulo estrictamente menor que 1.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad. Reservados todos los derechos.

De acuerdo con lo anterior si P es irreducible y tiene periodo t la matriz canónica de Jordan es:

$$
\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & e^{i\frac{2\pi}{t}} & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & e^{i\frac{2\pi}{t}(t-1)} & & & & & \\
 & & & & \lambda_{t+1} & 1 & & & \\
 & & & & & \lambda_{t+1} & 1 & & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & \lambda_{t+1} \\
 & & & & & & & & & \lambda_r & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & \lambda_r & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & \lambda_r
\end{bmatrix}
$$

Siendo $\lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_r$ los autovalores de P de módulo estrictamente menor que 1 no necesariamente distintos.

Es fácil ver que las potencias de las cajas tienden a cero cuando n crece y las potencias de $e^{i\frac{2\pi}{t}k}$ se comportan como funciones periódicas de n. A partir de ello es fácil recomponer el comportamiento asintótico de las potencias de una matriz de transición irreducible. El caso reducible se puede tratar también haciendo uso de la segunda parte del teorema anterior.

No haremos ningún hincapié en estas cuestiones, puesto que las hemos obtenido anteriormente por métodos distintos.

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. Hallar el comportamiento asintótico de las potencias de las matrices de transición

a)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$S = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 1/5 & 2/5 & 2/5 & & & & \\ 1/3 & 0 & 2/3 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & & & & \\ \hline & & & 3/4 & 1/4 & & \\ & & & 1/6 & 5/6 & & \\ \hline 0 & 2/8 & 1/8 & 2/8 & 0 & 1/8 & 2/8 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.

BBVA Ábrete la Cuenta Online de BBVA y llévate 1 año de Wuolah PRO
cómo??

1/6
Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

ventajas PRO

Di adiós a la publi en los apuntes y en la web

Acumula tickets para los sorteos

Descarga carpetas completas

estudia sin publi WUOLAH PRO

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \hline 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

2. En el ejemplo 3 del tema 1, determinar las probabilidades de los posibles resultados de la competición y el número medio de partidas necesarias para que la competición termine.

3. En el ejercicio 3 del tema 1, determinar las probabilidades de ganar y perder y hallar el número medio de lanzamientos antes del final.

4. Inicialmente una empresa tiene dos máquinas iguales; a lo largo de una jornada de trabajo, cada máquina tiene probabilidad $\frac{1}{4}$ de averiarse. Las máquinas averiadas durante el día son enviadas a reparar al final de la jornada y devueltas en funcionamiento al cabo de 24 horas.

   a) ¿Cuál es la distribución del número de máquinas que la empresa tiene disponibles al comienzo de la jornada n?

   b) ¿Cuál es la proporción límite de días que la empresa se encuentra sin maquinaria? Y ¿cuál es a la larga el número medio de máquinas que trabajan al principio de cada día?

   c) ¿Cuál es el número medio de averías sufridas en los n primeros días?

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOCOMPROBACION

1. a)

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 16/60 & 34/60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/9 & 11/45 & 29/45 \\ 1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/12 & 7/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 37/120 & 83/120 & & & & & \\ 49/180 & 131/180 & & & & & \\ & & 19/30 & 11/30 & & & \\ & & 43/72 & 29/72 & & & \\ & & & & 1/8 & 2/8 & 5/8 \\ & & & & 1/6 & 16/60 & 34/60 \\ & & & & 1/9 & 11/45 & 29/45 \end{pmatrix}$$

El período es, desde luego, 3 y como era previsible, el cubo tiene tres subcadenas cerradas e irreducibles cuyas distribuciones estacionarias son

$$\left(\frac{98}{347}, \frac{249}{347}\right), \left(\frac{215}{347}, \frac{132}{347}\right), \left(\frac{44}{347}, \frac{87}{347}, \frac{216}{347}\right)$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

respectivamente. Por tanto:

$$S_0 = \begin{bmatrix} \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \\ \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \\ & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \\ & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \\ & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \\ \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \end{bmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

$$S_2 = \begin{bmatrix} & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ & & & & \frac{44}{347} & \frac{87}{347} & \frac{216}{347} \\ \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \\ \frac{98}{347} & \frac{249}{347} & & & & & \\ & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \\ & & \frac{215}{347} & \frac{132}{347} & & & \end{bmatrix}$$

son los tres límites distintos de las potencias p^{3n}, p^{3n+1} y p^{3n+2} respectivamente.

Directamente se puede obtener el mismo resultado calculando la estacionaria asociada a

$$P: \left(\frac{98}{1.041}, \frac{249}{1.041}, \frac{215}{1.041}, \frac{132}{1.041}, \frac{44}{1.041}, \frac{87}{1.041}, \frac{216}{1.041}\right);$$

según el teorema del límite, sus términos multiplicados por el periodo 3 y colocados en los lugares convenientes dan los tres comportamientos límites.

b) La cadena consta de dos subcadenas cerradas e irreducibles cuyas distribuciones estacionarias son

$$\left(\frac{10}{29}, \frac{9}{29}, \frac{10}{29}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

respectivamente.

Hay además dos estados transitorios, A y B, y tenemos que determinar pues, las probabilidades de absorción en las subcadenas 1 y 2:

$$\begin{cases} f_{A1} = 3/8 + 1/8 f_{A1} + 2/8 f_{B1} \\ f_{B1} = 2/5 + 1/5 f_{A1} + 1/5 f_{B1} \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} f_{A1} = 8/13, f_{A2} = 5/13 \\ f_{B1} = 17/26, f_{B2} = 9/26 \end{cases}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?

Máster Gestión Deportiva y Análisis del Dato

Luego la matriz límite, que en este caso es única, es:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{10}{29} & \frac{9}{29} & \frac{10}{29} & & & & \\ \frac{10}{29} & \frac{9}{29} & \frac{10}{29} & & & & \\ \frac{10}{29} & \frac{9}{29} & \frac{10}{29} & & & & \\ & & & 2/5 & 3/5 & & \\ & & & 2/5 & 3/5 & & \\ \frac{80}{377} & \frac{72}{377} & \frac{80}{377} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & 0 & 0 \\ \frac{170}{754} & \frac{153}{754} & \frac{170}{754} & \frac{9}{65} & \frac{27}{130} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ 1/9 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ 1/27 & 1/9 & 1/3 & 1/9 & 10/27 & 1/27 \end{bmatrix}$$

Universidad Villanueva
Estudiantes
Titulación: Propia Fecha: Abril 2023, 9 meses
Horario: V, 16:30-20:30 y S, 10-14 Modalidad: Presencial y online

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Escaneado con CamScanner

$$P^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ \frac{28}{81} & \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{10}{27} & \frac{10}{81} & \frac{1}{81} \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \frac{28}{243} & \frac{28}{81} & \frac{1}{27} & \frac{10}{81} & \frac{91}{243} & \frac{1}{243} \end{bmatrix}$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ \frac{28}{729} & \frac{28}{243} & \frac{28}{81} & \frac{91}{243} & \frac{91}{729} & \frac{1}{729} \end{bmatrix}$$

P^6 es la matriz elevada al mínimo común múltiplo de los períodos y tiene cinco subcadenas cerradas e irreducibles (en realidad 5 estados absorbentes).

Determinemos el límite de las potencias sucesivas de P^6; para ello lo único a determinar son las probabilidades de alcanzar desde el estado transitorio A, cada uno de los cinco estados absorbentes.

Escaneado con CamScanner

¿Cómo el presente y futuro del deporte está relacionado con el dato? Descúbrelo - U. Villanueva

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

$$f_{A1} = \frac{28}{729} + \frac{1}{729} f_{A1} \qquad f_{A1} = \frac{28}{728}$$

$$f_{A2} = \frac{28}{243} + \frac{1}{729} f_{A2} \qquad f_{A2} = \frac{84}{728}$$

$$f_{A3} = \frac{28}{81} + \frac{1}{729} f_{A3} \qquad f_{A3} = \frac{252}{728}$$

$$f_{A4} = \frac{91}{243} + \frac{1}{729} f_{A4} \qquad f_{A4} = \frac{273}{728}$$

$$f_{A5} = \frac{91}{729} + \frac{1}{729} f_{A5} \qquad f_{A5} = \frac{91}{728}.$$

Luego el límite de p^{6n} es S_0 y a partir de ella se obtienen los límites S_i de p^{6n+i}

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ \frac{28}{728} & \frac{84}{728} & \frac{252}{728} & \frac{273}{728} & \frac{91}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \frac{252}{728} & \frac{28}{728} & \frac{84}{728} & \frac{91}{728} & \frac{273}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ \frac{84}{728} & \frac{252}{728} & \frac{28}{728} & \frac{273}{728} & \frac{91}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \frac{28}{728} & \frac{84}{728} & \frac{252}{728} & \frac{91}{728} & \frac{273}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \frac{252}{728} & \frac{28}{728} & \frac{84}{728} & \frac{91}{728} & \frac{273}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ \frac{84}{728} & \frac{252}{728} & \frac{28}{728} & \frac{273}{728} & \frac{91}{728} & 0 \end{bmatrix}$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿No te llega para pagar Wuolah Pro? ¿Un año sin anuncios gratis?

Máster en Gestión Deportiva y Análisis del Dato
¿De qué manera está el presente y futuro del deporte relacionado con el dato?
Universidad Villanueva
Estudiantes

2. El estado cero podría suprimirse cambiando la distribución inicial por (0,1/5, 2/5,0), pero vamos a resolverlo tal y como está planteado.

Hemos de determinar en primer lugar $f_{0,-2}$ y $f_{0,2}$, pongamos pues,

$$\begin{cases} f_{0,-2} = 3/5\, f_{-1,-2} + 2/5\, f_{1,-2} \\ f_{-1,-2} = 3/5 + 2/5\, f_{1,2} \\ f_{1,2} = 3/5\, f_{-1,-2} \end{cases}$$

de donde

$$f_{-1,-2} = 15/19 \qquad f_{1,-2} = 9/19$$

y, por tanto,

$$f_{0,-2} = 63/95$$

Como los estados -2 y 2 forman cada uno una subcadena cerrada e irreducible y $-1, 0, 1$, son estados transitorios

$$f_{02} + f_{0-2} = 1,$$

de manera que

$$f_{0,2} = 32/95.$$

Para hallar el número medio de partidas que dura la competición, agrupemos los estados -2 y 2 en un solo estado F, con lo que la matriz de transición queda

	F	-1	0	1
F	1			
-1	3/5	0	0	2/5
0	0	3/5	0	2/5
1	2/5	3/5	0	0

El mismo razonamiento empleado en el texto permite poner

$$\begin{cases} E[N_{0F}] = 3/5\, E[N_{-1,F}] + 2/5\, E[N_{1,F}] + 1 \\ E[N_{1F}] = 3/5\, E[N_{-1,F}] + 1 \\ E[N_{-1,F}] = 2/5\, E[N_{1,F}] + 1 \end{cases}$$

de donde

$$E[N_{1,F}] = \frac{40}{19},\ E[N_{-1,F}] = \frac{35}{19} \quad \text{y} \quad E[N_{0,F}] = \frac{56}{19}.$$

Titulación Propia
Abril 2023, 9 meses
Presencial y online
Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
Escaneado con CamScanner

3. Utilicemos la matriz reducida y determinemos

$$f_{(1,5),G} \quad y \quad f_{(2,6),G}$$

será

$$\begin{cases} f_{(1,5),G} = 1/3 + 1/3\, f_{(1,5),G} + 1/6\, f_{(2,6),G} \\ f_{(2,6),G} = 1/3 + 1/6\, f_{(2,6),G} + 1/6\, f_{(2,6),G}. \end{cases}$$

de donde

$$f_{(1,5),G} = \frac{12}{19} \quad y \quad f_{(2,6),G} = \frac{10}{19}.$$

Teniendo en cuenta la distribución inicial, la probabilidad total de ganar será:

$$\frac{12}{36} + \frac{8}{36}\frac{12}{19} + \frac{5}{36}\frac{10}{19} = \frac{187}{342}$$

y, por tanto, la probabilidad de perder $\frac{155}{342}$.

Determinemos ahora lo que dura la partida desde los estados (1,5) y (2,6)

$$E[N_{(1,5),F}] = 1/3\, E[N_{(1,5),F}] + 1/6\, E[N_{(2,6),F}] + 1$$

$$E[N_{(2,6),F}] = 1/6\, E[N_{(1,5),F}] + 1/6\, E[N_{(2,6),F}] + 1$$

de donde

$$E[N_{(1,5),F}] = \frac{36}{19} \quad y \quad E[N_{(2,6),F}] = \frac{30}{19}.$$

El número mínimo de lanzamientos en los que se puede acabar la partida es 2 y en ese momento hay probabilidad 8/36 de que la situación sea (1,5) y probabilidad 5/36 de que la situación sea (2,6). La duración total es, pues:

$$2 + \frac{8}{36}\frac{36}{19} + \frac{5}{36}\frac{30}{19} = \frac{301}{114}.$$

4. En un día cualquiera la empresa puede tener dos, una o ninguna máquina en funcionamiento. La matriz de transición entre los tres estados será:

	2	1	0
2	9/16	6/16	1/16
1	3/4	1/4	0
0	1	0	0

y la distribución inicial (1,0,0)

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

¿Wuolah sin publicidad GRATIS? ¡Clic aquí!

a) Descompongamos

$$\begin{pmatrix} 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & -8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1/4 & \\ & & 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16/25 & 8/25 & 1/25 \\ 4/25 & -3/25 & -1/25 \\ 1/25 & -2/25 & 1/25 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$p_{22}^{(n)} = \frac{16}{25} + \frac{8}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

$$p_{21}^{(n)} = \frac{8}{25} - \frac{6}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{25}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

$$p_{20}^{(n)} = \frac{1}{25} - \frac{2}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{25}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

que representan las probabilidades de que al comienzo de la jornada n haya 2, 1 y 0 máquinas funcionando respectivamente.

b) La distribución límite es, por tanto,

$$\left(\frac{16}{25}, \frac{8}{25}, \frac{1}{25}\right),$$

lo cual puede obtenerse también resolviendo el sistema:

$$(\pi_2, \pi_1, \pi_0) \begin{pmatrix} 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_2, \pi_1, \pi_0)$$

El término $\pi_0 = \frac{1}{25}$ representa la proporción límite de días que la empresa tiene las dos máquinas en reparación. En cuanto al número medio de máquinas que trabajan un día cualquiera, será en el límite

$$2\,\frac{16}{25} + \frac{8}{25} = \frac{8}{5}.$$

c) El número de averías que se produzcan el día n, dependerá de cómo empiece el día:

— Si se empieza con dos máquinas, el número medio de averías será

$$2\,\frac{1}{16} + \frac{6}{16} = \frac{1}{2}.$$

Reservados todos los derechos.
No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

— Si se empieza con una máquina, el número medio de averias será 1/4.

— Si se empieza sin máquinas no puede haber averias.

Luego, el dia n, el número medio de averias será:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{16}{25}+\frac{8}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{25}\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{8}{25}-\frac{6}{25}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{2}{25}\left(\frac{1}{16}\right)^n\right]=\frac{2}{5}$$

$$+\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

y en los n primeros dias:

$$\frac{2}{5}n+\frac{1}{10}\sum_{m=1}^{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^m.$$

Escaneado con CamScanner

Llévate 1 año de WUOLAH PRO con BBVA. ¿Cómo? ¡+Info aquí!

No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
Reservados todos los derechos.