



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

MODELOS DE MARKOV OCULTOS  
Y  
APLICACIONES A LA BIOLOGÍA

XUSHENG ZHENG

Trabajo Fin de Grado

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

**Tutores**

Lidia Fernández Rodríguez

FACULTAD DE CIENCIAS

E.T.S. INGENIERÍAS INFORMÁTICA Y DE TELECOMUNICACIÓN

*Granada, a 27 de febrero de 2023*



---

## ÍNDICE GENERAL

---

1. INTRODUCCIÓN A LAS CADENAS DE MARKOV	7
1.1. Propiedad de Markov . . . . .	7
1.2. Estados de una cadena de Markov . . . . .	12
1.2.1. Estados accesibles y comunicables . . . . .	13
1.2.2. Periodicidad de una cadena de Markov . . . . .	14
1.2.3. Tiempos de transición . . . . .	16
1.2.4. Estados recurrentes y transitorios . . . . .	20
1.3. Comportamiento asintótico de una cadena de Markov . . . . .	23
2. MODELOS OCULTOS DE MARKOV	29
2.1. Extensión a modelos ocultos de Markov . . . . .	29
2.2. Los tres problemas básicos de los HMM . . . . .	31
2.2.1. Solución al problema 1 . . . . .	32
2.2.2. Solución al problema 2 . . . . .	34
2.2.3. Solución al problema 3 . . . . .	38
3. SECCIÓN TERCERA	39
Bibliografía	40



---

## RESUMEN

---

Occaecati expedita cumque est. Aut odit vel nobis praesentium dolorem sed eligendi. Inventore molestiae delectus voluptatibus consequatur. Et cumque quia recusandae fugiat earum repellat porro. Earum et tempora vel voluptas. At sed animi qui hic eaque velit.

Saepe deleniti aut voluptatem libero dolores illum iusto iusto. Explicabo dolor quia id enim molestiae praesentium sit. Odit enim doloribus aut assumenda recusandae. Eligendi officia nihil itaque. Quas fugiat aliquid qui est.

Quis amet sint enim. Voluptatem optio quia voluptatem. Perspiciatis molestiae ut laboriosam repudiandae nihil.



---

## INTRODUCCIÓN A LAS CADENAS DE MARKOV

---

La cadena de Markov fue introducida por el matemático ruso Andréi Márkov en 1906. Desde su definición, se ha utilizado para describir procesos importantes en la teoría de probabilidad. Hoy en día, tiene aplicaciones en campos como la biología, la economía, la química o por ejemplo en algoritmos para Internet (PageRank).

En este capítulo se va a introducir la teoría de cadenas de Markov, avanzado progresivamente hacia las cadenas de Markov ocultas. Las fuentes principales de este capítulo son [11, Capítulo 4], [1, Capítulos 2 y 3] y [9, Capítulo 6].

### 1.1 PROPIEDAD DE MARKOV

Sea  $S$  un conjunto finito de la forma  $\{s_1, \dots, s_N\}$ , definimos un proceso estocástico sobre  $S$  como una sucesión  $\{\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots\}$ , o  $\{\mathcal{X}_t\}_{t=0}^{\infty}$  para abreviar, donde cada  $\mathcal{X}_t$  es una variable aleatoria que toma valores en  $S$ .

A pesar de que el índice  $t$  puede representar cualquiera magnitud, lo más común es que represente el tiempo. En este caso, la noción de “pasado” y “futuro” aparecen de forma natural, esto es, si  $t < t'$ , entonces  $\mathcal{X}_t$  es una variable “pasada” para  $\mathcal{X}_{t'}$ , mientras que  $\mathcal{X}_{t'}$  es una variable “futura” para  $\mathcal{X}_t$ . Sin embargo, esto no sucede siempre así: por ejemplo, si el proceso estocástico corresponde al de la secuencia del genoma de un organismo, el conjunto  $S$  estará formado por los cuatro símbolos para las subunidades de nucleótidos  $\{A, C, G, T\}$  y las secuenciacines tienen un significado más espacial que temporal.

**Definición 1.1.** Un proceso estocástico  $\{\mathcal{X}_t\}_{t=0}^{\infty}$  se dice que posee **la propiedad de Markov**, o que es un **proceso de Markov**, si para todo  $t \geq 1$  y  $(u_0, \dots, u_{t-1}, u_t) \in S^{t+1}$  se tiene que:

$$P[\mathcal{X}_t = u_t | \mathcal{X}_0 = u_0, \dots, \mathcal{X}_{t-1} = u_{t-1}] = P[\mathcal{X}_t = u_t | \mathcal{X}_{t-1} = u_{t-1}] \quad (1.1)$$

Es decir, un proceso con propiedad de Markov es aquel que conocido los estados anteriores, depende únicamente del último.

Por conveniencia, introducimos la notación  $\mathcal{X}_j^k = (\mathcal{X}_j, \mathcal{X}_{j+1}, \dots, \mathcal{X}_k)$  para denotar los estados  $\mathcal{X}_i$  con  $j \leq i \leq k$ . Con esta notación, podemos reescribir la Definición 1.1 como sigue: un proceso estocástico  $\{\mathcal{X}_t\}$  es un **proceso de Markov** si, para todo  $(u_0, \dots, u_{t-1}, u_t) \in \mathbb{S}^{t+1}$  es cierto que:

$$P[\mathcal{X}_t = u_t | \mathcal{X}_0^{t-1} = (u_0, \dots, u_{t-1})] = P[\mathcal{X}_t = u_t | \mathcal{X}_{t-1} = u_{t-1}] \quad (1.2)$$

Tenemos que por definición de probabilidad condicionada, para cualquier proceso estocástico  $\{\mathcal{X}_t\}$  y cualquier secuencia  $(u_0, \dots, u_{t-1}, u_t) \in \mathbb{S}^{t+1}$ :

$$P[\mathcal{X}_0^t = (u_0, \dots, u_t)] = P[\mathcal{X}_0 = u_0] \cdot \prod_{i=0}^{t-1} P[\mathcal{X}_{i+1} = u_{i+1} | \mathcal{X}_0^i = (u_0, \dots, u_i)]$$

Sin embargo, si consideramos un proceso de Markov, entonces la fórmula anterior se reduce a:

$$P[\mathcal{X}_0^t = (u_0, \dots, u_t)] = P[\mathcal{X}_0 = u_0] \cdot \prod_{i=0}^{t-1} P[\mathcal{X}_{i+1} = u_{i+1} | \mathcal{X}_i = u_i] \quad (1.3)$$

En probabilidad, es usual referirse con el nombre **cadena de Markov** a un proceso de Markov  $\mathcal{X}_t$  donde el parámetro  $t$  toma únicamente valores discretos. En este trabajo, pondremos nuestra atención en los casos donde  $t$  toma valores en  $\mathbb{N}_0$ .

En (1.3) vemos la importancia del valor:

$$P[\mathcal{X}_{t+1} = u | \mathcal{X}_t = v]$$

al que podemos identificar como una función de tres variables: el estado “actual”  $v \in \mathbb{S}$ , el estado “siguiente”  $u \in \mathbb{S}$  y el “tiempo actual”  $t \in \mathbb{N}_0$ . Así, teniendo en cuenta que  $\mathbb{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$ , definimos la probabilidad de transición:

$$a_{ij}(t) := P[\mathcal{X}_{t+1} = s_j | \mathcal{X}_t = s_i], \quad \forall t \in \mathbb{N}_0. \quad (1.4)$$

Por tanto,  $a_{ij}(t)$  es la probabilidad de realizar una transición desde el estado actual  $s_i$  al estado siguiente  $s_j$  en el instante  $t$ .

**Definición 1.2.** Sea  $\mathcal{X}_t$  una cadena de Markov, la matriz cuadrada de dimensión  $N$ ,  $A(t) = [a_{ij}(t)]$ , es la **matriz de transición** de  $\mathcal{X}_t$  en el instante  $t$ . Una cadena de Markov es **homogénea** si  $A(t)$  es constante para todo  $t \in \mathbb{N}_0$ , en otro caso, es **no homogénea**.



**Definición 1.3.** Sea  $\mathcal{X}_t$  una cadena de Markov que toma valores en un conjunto finito  $S = \{s_1, \dots, s_N\}$  y sea  $A(t)$  su matriz de transición en el instante  $t$ . Entonces  $A(t)$  es una **matriz estocástica** (por filas) para todo  $t$ , esto es:

$$a_{ij}(t) \in [0, 1], \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad t \in \mathbb{N}_0,$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}(t) = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

**Proposición 1.4.** Sea  $A$  una matriz positiva (cuyos elementos son no negativos, con al menos un elemento estrictamente positivo) de dimensión  $N \times N$ :

1.  $A$  es estocástica si y solo si  $\mathbf{1}$  es un valor propio de  $A^T$  con vector propio (a la izquierda)  $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .
2. si  $A$  es estocástica, entonces para todo valor propio  $\lambda$ , se cumple que  $|\lambda| \leq 1$ .

**Demostración.**

1. Es suficiente con observar que la condición de estocaticidad para una matriz positiva  $A$  es equivalente a que  $\mathbf{1} \cdot A^T = \mathbf{1}$ .
2. Sea  $v = (v_1, \dots, v_N)$  un vector propio asociado (a izquierda pues estamos usando la notación fila) a  $\lambda$ , por ser  $A$  positiva y estocástica, tenemos que:

$$\begin{aligned} |\lambda| \sum_{j=1}^N |v_j| &= \sum_{j=1}^N |\lambda v_j| = \sum_{j=1}^N |(vA)_j| = \sum_{j=1}^N \left| \sum_{i=1}^N a_{ij} v_i \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij} |v_i| = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) |v_i| = \sum_{i=1}^N |v_i| \end{aligned}$$

Puesto que  $\sum_{r=1}^N |v_r| > 0$ , tenemos que  $|\lambda| \leq 1$ . □

**Observación.** De la primera afirmación de la Proposición 1.4, podemos ver que el producto de matrices estocásticas sigue siendo estocástica. En efecto, si  $A, B$  son dos matrices estocásticas entonces  $\mathbf{1} \cdot (AB)^T = \mathbf{1} \cdot B^T \cdot A^T = \mathbf{1} \cdot A^T = \mathbf{1}$ .

Para continuar con los estudios de las cadenas de Markov presentamos el siguiente conjunto:

**Definición 1.5.** El **N-símplex estándar** es el subconjunto de  $\mathbb{R}^{N+1}$  dado por:

$$\Delta^N = \{(t_1, \dots, t_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \sum_{i=1}^{N+1} t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i\}$$

Puesto que para todo  $t$ ,  $\sum_{i=1}^N P[\mathcal{X}_t = s_i] = 1$ , podemos representar estas probabilidades con un vector  $c^t \in \Delta^{N-1}$ , siendo  $c^t = (P[\mathcal{X}_t = s_1], \dots, P[\mathcal{X}_t = s_N])$ .

**Teorema 1.6.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov con valores en  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$  y sea  $A(t)$  su matriz de transición en el instante  $t$ . Supongamos que  $\mathcal{X}_0$  se distribuye de acuerdo con  $c^0 = (c_1^0, \dots, c_N^0) \in \Delta^{N-1}$ , esto es:

$$P[\mathcal{X}_0 = s_i] = c_i^0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Entonces para todo  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{X}_t$  se distribuye de acuerdo con:

$$c^t = c^0 A(0) A(1) \cdots A(t-1) \quad (1.5)$$

**Demostración.** Vamos a demostrarlo por inducción. Para  $t = 1$ , por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P[\mathcal{X}_1 = s_j] = \sum_{i=1}^N P[\mathcal{X}_0 = s_i] \cdot P[\mathcal{X}_1 = s_j | \mathcal{X}_0 = s_i] = \sum_{i=1}^N c_i^0 \cdot a_{ij}(0)$$

Esto es, el producto del vector  $c^0$  con la columna  $j$ -ésima de  $A(0)$ . Luego:

$$c^1 = (P[\mathcal{X}_1 = s_1], \dots, P[\mathcal{X}_1 = s_N]) = c^0 A(0)$$

Supongamos cierta (1.5) para  $t-1$ , es decir,  $c^{t-1} = c^0 A(0) A(1) \cdots A(t-2)$ . De nuevo, para  $t$ :

$$P[\mathcal{X}_t = s_j] = \sum_{i=1}^N P[\mathcal{X}_{t-1} = s_i] \cdot P[\mathcal{X}_t = s_j | \mathcal{X}_{t-1} = s_i] = \sum_{i=1}^N c_i^{t-1} \cdot a_{ij}(t-1)$$

que es el producto del vector  $c^{t-1}$  con la columna  $j$ -ésima de  $A(t-1)$ . Aplicando la hipótesis de inducción:

$$c^t = c^{t-1} A(t-1) = c^0 A(0) A(1) \cdots A(t-2) A(t-1) \quad \square$$

**Ejemplo 1.1.** En este ejemplo presentamos una variación del juego de cartas “black-jack”. En este caso, tenemos un dado de cuatro caras con valores 0, 1, 2 y 3, y con probabilidad uniforme en cada lanzamiento. Un jugador lanza el dado de forma repetida y  $\mathcal{X}_t$  representa el valor acumulado tras  $t$  lanzamientos. Si el total es igual a nueve, el jugador gana; en otro caso se considera que pierde. Podemos asumir que el resultado de cada lanzamiento es independiente de los lanzamientos anteriores.

Tenemos entonces que  $\{\mathcal{X}_t\}$  toma valores en el conjunto  $\mathcal{S} := \{0, 1, \dots, 8, W, L\}$  de cardinalidad 11. Sea  $\mathcal{Y}_t$  el resultado del lanzamiento en el instante  $t$ :

$$P[\mathcal{Y}_t = 0] = P[\mathcal{Y}_t = 1] = P[\mathcal{Y}_t = 2] = P[\mathcal{Y}_t = 3] = 1/4$$

Examinemos ahora la variación de  $\mathcal{X}_t$ : puesto que el valor de  $\mathcal{X}_t$  se va acumulando tras cada lanzamiento, tenemos que  $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1} + \mathcal{Y}_t$ . En el caso de que  $\mathcal{X}_{t-1} + \mathcal{Y}_t = 9$ , consideraremos  $\mathcal{X}_t = W$  (ganar), y si  $\mathcal{X}_{t-1} + \mathcal{Y}_t > 9$ , consideraremos  $\mathcal{X}_t = L$  (perder). Si  $\mathcal{X}_t = W$  o  $L$ , consideraremos que el juego está acabado y  $\mathcal{X}_{t+1} = \mathcal{X}_t$ . Estas observaciones se pueden resumir en las siguientes reglas:

- Si  $\mathcal{X}_{t-1} \leq 5$ :

$$\begin{aligned} P[\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1}] &= P[\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1} + 1] = P[\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1} + 2] \\ &= P[\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1} + 3] = 1/4 \end{aligned}$$

- Si  $\mathcal{X}_{t-1} = 6$ :

$$P[\mathcal{X}_t = 6] = P[\mathcal{X}_t = 7] = P[\mathcal{X}_t = 8] = P[\mathcal{X}_t = W] = 1/4$$

- Si  $\mathcal{X}_{t-1} = 7$ :

$$P[\mathcal{X}_t = 7] = P[\mathcal{X}_t = 8] = P[\mathcal{X}_t = W] = P[\mathcal{X}_t = L] = 1/4$$

- Si  $\mathcal{X}_{t-1} = 8$ :

$$\begin{aligned} P[\mathcal{X}_t = 8] &= P[\mathcal{X}_t = W] = 1/4 \\ P[\mathcal{X}_t = L] &= 1/2 \end{aligned}$$

- Si  $\mathcal{X}_{t-1} = W \text{ o } L$ :

$$P[\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_{t-1}] = 1$$

$\{\mathcal{X}_t\}$  es una cadena de Markov pues la distribución de  $\mathcal{X}_t$  depende únicamente del valor de  $\mathcal{X}_{t-1}$  y no de cómo se ha alcanzado dicho valor. Notemos que las probabilidades anteriores no dependen de  $t$ , con lo cual la matriz de transición de  $\mathcal{X}_t$  es una matriz fija y  $\mathcal{X}_t$  es homogénea.

La matriz de transición de  $\mathcal{X}_t$  es entonces una matriz  $11 \times 11$  dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 2/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es natural que el juego comience con el valor inicial igual a cero. Por lo tanto, la distribución de  $\mathcal{X}_0$  está representada por  $c_0 \in \mathbb{R}^{11}$  con un 1 en la primera componente y ceros en el resto. Aplicando repetidamente la fórmula (1.5) obtendremos las distribuciones de  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{X}_2$ , etc. Así, sea  $c_t$  la distribución de  $\mathcal{X}_t$ , tenemos:

$$c_0 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$c_1 = c_0 A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = c_1 A = \begin{pmatrix} 1/16 & 1/8 & 3/16 & 1/4 & 3/16 & 1/8 & 1/16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cabe destacar que si examinamos la distribución  $c_t$ , entonces tenemos que  $P[\mathcal{X}_t \in \{0 \dots 8\}]$  tiende a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto es natural pues el juego terminará eventualmente en victoria (W) o en pérdida (L) y todos los otros estados son transitorios.

## 1.2 ESTADOS DE UNA CADENA DE MARKOV

A partir de ahora, vamos a centrarnos en el estudio de cadenas de Markov cuyas matrices de transición son constantes. En consecuencia, las probabilidades de transición son independientes del instante  $t$ . Nos referiremos a ellas directamente como cadenas de Markov, asumiendo homogeneidad.

Está claro que los estados juegan un papel importante en el estudio de las cadenas de Markov. Para describir con más detalle las propiedades de una cadena de Markov vamos a distinguir los estados que puede tener [1]. Antes de empezar la clasificación, nos interesa saber cómo evoluciona una cadena de Markov tras  $n$  instantes:

**Definición 1.7.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov,  $s_i, s_j \in \mathbb{S}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , denotamos:

$$P_{ij}^{m, m+n} := P[\mathcal{X}_{n+m} = s_j | \mathcal{X}_m = s_i]$$

Si  $n = 0$ :

$$P_{ij}^{m, m} = P[\mathcal{X}_m = s_j | \mathcal{X}_m = s_i] = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

**Teorema 1.8** (Ecuación de Chapman-Kolmogorov). En condiciones anteriores, sea  $r \in \mathbb{N}_0$ :

$$P_{ij}^{m, m+n+r} = \sum_{s_k \in \mathbb{S}} P_{ik}^{m, m+n} P_{kj}^{m+n, m+n+r}$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} P_{ij}^{m, m+n+r} &= P[\mathcal{X}_{m+n+r} = s_j | \mathcal{X}_m = s_i] \\ &= \sum_{s_k \in \mathbb{S}} P[\mathcal{X}_{m+n+r} = s_j | \mathcal{X}_{m+n} = s_k, \mathcal{X}_m = s_i] P[\mathcal{X}_{m+n} = s_k | \mathcal{X}_m = s_i] \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de Markov:

$$P[\mathcal{X}_{m+n+r} = s_j | \mathcal{X}_{m+n} = s_k, \mathcal{X}_m = s_i] = P[\mathcal{X}_{m+n+r} = s_j | \mathcal{X}_{m+n} = s_k] = P_{kj}^{m+n, m+n+r}$$

Por lo tanto:

$$P_{ij}^{m, m+n+r} = \sum_{s_k \in \mathbb{S}} P_{ik}^{m, m+n} P_{kj}^{m+n, m+n+r}$$

□

Notemos que por ser  $\{\mathcal{X}_t\}$  homogénea,  $P_{ij}^{m,m+1}$  es independiente de  $m$ , por lo cual aplicando inductivamente la ecuación de Chapman-Kolmogorov, tenemos que  $P_{ij}^{m,m+n}$  son independientes de  $m$ .

**Definición 1.9.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov,  $s_i, s_j \in \mathbb{S}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}_0$ , definimos las probabilidades de transición en  $n$  pasos como:

$$a_{ij}^{(n)} := P_{ij}^{m,m+n} = P[\mathcal{X}_{m+n} = s_j | \mathcal{X}_m = s_i]$$

Y la matriz de las probabilidades de transición en  $n$  pasos como  $A^{(n)} = [a_{ij}^{(n)}]$ .

**Lema 1.10.** La matriz de transición en  $n$  pasos cumple que  $A^{(n)} = A^n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Por la observación de la Proposición 1.4,  $A^{(n)}$  es estocástica.

**Demostración.** Expresando la ecuación de Chapman-Kolmogorov en forma matricial tenemos que  $A^{(n+r)} = A^{(n)} A^{(r)}$ , por ser  $A^{(1)} = A$ :

$$A^{(n)} = A^{(n-1)} A = A^{(n-2)} A^2 = \dots = A^n \quad \square$$

### 1.2.1 Estados accesibles y comunicables

**Definición 1.11.** El estado  $s_j$  se dice **alcanzable** o **accesible** desde el estado  $s_i$ , representado por  $i \longrightarrow j$ , si existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ . Dos estados,  $s_i$  y  $s_j$ , que son mutuamente alcanzables, se dicen **comunicables**, representado por  $i \longleftrightarrow j$ .

La definición anterior tiene el significado siguiente: si  $s_j$  es accesible desde el estado  $s_i$ , entonces existirá un  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $P[\mathcal{X}_{m+n} = s_j] > 0$  siempre que  $\mathcal{X}_m = s_i$ . Es decir, empezando desde el estado  $s_i$ , hay una probabilidad positiva de que, en un número finito de transiciones, alcancemos el estado  $s_j$ .

**Teorema 1.12.** La propiedad de comunicación,  $\longleftrightarrow$ , es una relación de equivalencia sobre el conjunto de estados  $\mathbb{S}$ .

**Demostración.**

- **Reflexividad:**  $a_{ii}^{(0)} = \delta_{ii} = 1 > 0$ . Por tanto,  $i \longleftrightarrow i$ .
- **Simetría:** si  $i \longleftrightarrow j$ , existen  $n, m \in \mathbb{N}_0$  tales que  $a_{ij}^{(n)}, a_{ji}^{(m)} > 0$ , escogiendo los mismos  $n$  y  $m$ , tenemos que  $j \longleftrightarrow i$ .
- **Transitividad:** sean  $i \longleftrightarrow j$  y  $j \longleftrightarrow k$ :
  - Por ser  $i \longleftrightarrow j$ , existen  $n, m \in \mathbb{N}_0$  tales que  $a_{ij}^{(n)}, a_{ji}^{(m)} > 0$ .
  - Por ser  $j \longleftrightarrow k$ , existen  $r, s \in \mathbb{N}_0$  tales que  $a_{jk}^{(r)}, a_{kj}^{(s)} > 0$ .

Aplicando entonces la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos que:

- $a_{ik}^{(n+r)} = \sum_{s_l \in S} a_{il}^{(n)} a_{lk}^{(r)} \geq a_{ij}^{(n)} a_{jk}^{(r)} > 0$
- $a_{ki}^{(s+m)} = \sum_{s_l \in S} a_{kl}^{(s)} a_{li}^{(m)} \geq a_{kj}^{(s)} a_{ji}^{(m)} > 0$

Por lo tanto,  $i \longleftrightarrow k$ . □

Como resultado, podemos dividir el conjunto de los estados  $S$  en clases de equivalencias dependiendo de si existen comunicaciones entre los estados. Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.13.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov sobre un conjunto finito  $S$ ,  $\{\mathcal{X}_t\}$  se dice **irreducible** si hay solo una clase de equivalencia sobre  $S$  mediante la relación  $\longleftrightarrow$ .

Es decir, una cadena de Markov es irreducible si todos los estados se comunican unos con otros. Tomando el ejemplo de “blackjack”, podemos apreciar que:

- Un estado  $s_i \in \{0 \dots 8\}$  no es comunicable con un estado  $s_j$  con valor inferior  $\implies a_{ij}^{(n)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, j < i$ .
- Los estados  $W$  y  $L$  no son modificables  $\implies a_{Wi}^{(n)} = a_{Li}^{(n)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, i \in \{0 \dots 8, W \text{ o } L\}$

Por simetría, cada estado es únicamente comunicable consigo mismo. En consecuencia, hay 11 clases de equivalencia en  $S$ , uno por cada estado y la cadena de Markov no es irreducible.

### 1.2.2 Periodicidad de una cadena de Markov

**Definición 1.14.** Sea  $a_{ii}^{(n)}$  la probabilidad de transición en  $n$  pasos al estado  $s_i$  desde  $s_i$ , el periodo  $\lambda(i)$  de un estado  $s_i$  es el máximo común divisor de todos los  $n \in \mathbb{N}$  con  $a_{ii}^{(n)} > 0$ , esto es:

$$\lambda(i) := m.c.d(\{n \in \mathbb{N} \mid a_{ii}^{(n)} > 0\})$$

Si  $a_{ii}^{(n)} = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces definimos  $\lambda(i) := 0$ .

A continuación indicamos que la periodicidad también es una propiedad de clase. Esto es, si el estado  $s_i$  en una clase tiene periodo  $T$ , entonces todos los estados de esa clase tienen periodo  $T$ .

**Teorema 1.15.** Si  $i \longleftrightarrow j$ , entonces  $\lambda(i) = \lambda(j)$ , es decir, el periodo es constante en cada clase de equivalencia.

**Demostración** ([10]). Si  $i = j$  el resultado es trivial. Supongamos que  $i \neq j$ , entonces existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $a_{ij}^{(n)}, a_{ji}^{(m)} > 0$ , por la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$a_{ii}^{(n+m)} = \sum_{s_l \in S} a_{il}^{(n)} a_{li}^{(m)} \geq a_{ij}^{(n)} a_{ji}^{(m)} > 0 \implies \lambda(i) \mid (n+m)$$

Sea  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{jj}^{(s)} > 0$ :

$$a_{ii}^{(n+m+s)} \geq a_{ij}^{(n)} a_{jj}^{(s)} a_{ji}^{(m)} > 0 \implies \lambda(i) \mid (n+m+s)$$

Por lo tanto,  $\lambda(i) \mid s$ , como  $s$  es arbitrario,  $\lambda(i)$  es un divisor común de  $\{n \in \mathbb{N} \mid a_{jj}^{(n)} > 0\}$ , por definición de periodo,  $\lambda(i) \mid \lambda(j)$ . Realizando la misma discusión intercambiando los papeles de  $i$  y  $j$ , obtenemos que  $\lambda(j) \mid \lambda(i)$ , por lo tanto,  $\lambda(i) = \lambda(j)$ .  $\square$

**Definición 1.16.** Un estado  $s_i$  se dice **no periódico** o **aperiódico** si  $\lambda(i) = 1$ .

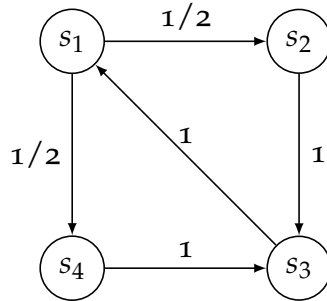
**Definición 1.17.** Una cadena de Markov se llama **no periódica** o **aperiódica** si todos sus estados son aperiódicos. En caso contrario, se dice **periódica**. Si la cadena de Markov es irreducible, entonces podemos hablar de **periodo de la cadena**.

La periodicidad es una propiedad que se puede apreciar muy bien si representamos la cadena de Markov en forma de grafo. Veamos en el siguiente ejemplo [4, Página 16]:

**Ejemplo 1.2.** Sea una cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si representamos el grafo de estados:



Observando este grafo, podemos ver que todos los estados tienen periodo 3. Es más, todos los estados son comunicables entre sí luego la cadena es irreducible. En definitiva, tenemos una cadena de Markov periódica con periodo 3.

1.2.3 *Tiempos de transición*

Al inicio de esta sección habíamos visto las probabilidades de transición en  $n$  pasos del estado  $s_i$  al estado  $s_j$ . El número de transiciones necesarias para ir del estado  $s_i$  al estado  $s_j$ , se denomina *tiempo de transición de  $s_i$  hasta  $s_j$* .

Cuando  $s_i = s_j$ , este tiempo es justo el número de transiciones que se necesita para regresar al estado inicial  $s_i$ . En este caso, este tiempo lo denominaremos *tiempo de recurrencia para el estado  $s_i$* .

**Definición 1.18.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov. La variable aleatoria:

$$\tau_{ij} := \min\{t \in \mathbb{N} \mid \mathcal{X}_t = s_j \text{ dado } \mathcal{X}_0 = s_i\}$$

considerando  $\min \emptyset = \infty$ , representa el tiempo mínimo que la cadena necesita para ir desde  $s_i$  hasta  $s_j$  y se conoce como **tiempo de transición de  $s_i$  hasta  $s_j$** . La variable  $\tau_{ii}$  se llama **tiempo de recurrencia para el estado  $s_i$** .

**Definición 1.19.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov,  $s_i, s_j \in \mathcal{S}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  se define la **probabilidad de tiempo de transición en  $n$  pasos** como la probabilidad de que  $\{\mathcal{X}_t\}$  alcance  $s_j$  en  $n$  pasos partiendo desde  $s_i$ :

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(0)} &:= 0 \\ f_{ij}^{(n)} &:= P[\tau_{ij} = n] = P[\mathcal{X}_n = s_j, \mathcal{X}_r \neq s_j, 1 \leq r \leq n-1 \mid \mathcal{X}_0 = s_i] \end{aligned}$$

Cuando  $i = j$ , hablamos de **probabilidad de tiempo recurrencia en  $n$  pasos**.

Como ya se dijo en la Definición 1.18, los tiempos de transición son variables aleatorias. Sus distribuciones dependen de las probabilidades de transición, en particular,  $f_{ij}^{(n)}$  denota la probabilidad de que el tiempo de transición del estado  $s_i$  al  $s_j$  sea igual a  $n$ . Este tiempo de transición es  $n$  si la primera transición es del estado  $s_i$  a algún estado  $s_k \neq s_j$ , y después el tiempo de transición del estado  $s_k$  al estado  $s_j$  es  $n-1$ .

Por lo tanto, estas probabilidades satisfacen la relación recursiva mostrada en la siguiente proposición:

**Proposición 1.20.** Las probabilidades de tiempo de transición en  $n$  pasos  $f_{ij}^{(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , satisfacen la siguiente relación recursiva:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(1)} &= a_{ij} \\ f_{ij}^{(n)} &= \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} f_{kj}^{(n-1)}, \quad n > 1 \end{aligned}$$



Para  $s_i$  y  $s_j$  fijos, las  $f_{ij}^{(n)}$  son números no negativos tales que  $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$ . Si esta suma es estrictamente menor que 1, significa que una cadena que al inicio se encuentra en el estado  $s_i$  puede no alcanzar nunca el estado  $s_j$ . Cuando la suma sí es igual a 1, las  $f_{ij}^{(n)}$  pueden considerarse como la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria tiempo de transición  $\tau_{ij}$ .

**Definición 1.21.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov, se denomina **probabilidad de tiempo de transición** a la probabilidad de que la cadena alcance  $s_j$  empezando por  $s_i$ , es decir:

$$f_{ij}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$$

Si consideramos la variable aleatoria  $\tau_{ij}$ , entonces la probabilidad de que la cadena nunca alcance  $s_j$ , empezando desde  $s_i$ , es  $P[\tau_{ij} = \infty] = 1 - f_{ij}^*$ . Y está claro que  $f_{ii}^*$  es la probabilidad de que la cadena vuelva por lo menos una vez al estado  $s_i$  empezando por  $s_i$ . Para calcular estas probabilidades, podemos utilizar el siguiente resultado:

**Teorema 1.22.** Las probabilidades de tiempo de transición  $f_{ij}^*$  cumplen la ecuación:

$$f_{ij}^* = a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} f_{kj}^* \quad (1.6)$$

**Demostración.** Por la Proposición 1.20:

$$\begin{aligned} f_{ij}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = a_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = a_{ij} + f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(3)} + \dots \\ &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} f_{kj}^{(1)} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} f_{kj}^{(2)} + \dots \\ &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}^{(n)} = a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} f_{kj}^* \quad \square \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.** Volviendo al ejemplo de “blackjack”, ya vimos que la cadena convergía a  $W$  o  $L$  con probabilidad 1. Calculemos ahora la probabilidad de ganar o de perder dado un estado inicial. Es claro que  $f_{WW}^* = f_{LL}^* = 1$  pues una vez que se gana o se pierde no se modifica más el estado. Por el mismo motivo, tenemos que  $f_{WL}^* = f_{LW}^* = 0$ . Para calcular las otras probabilidades podemos proceder de forma recursiva sobre los posibles valores de mayor a menor y usando (1.6):

$$\begin{aligned} f_{8W}^* &= a_{8W} + \sum_{s_k \neq W} a_{8k} f_{kW}^* = a_{8W} + a_{88} f_{8W}^* + a_{8L} f_{LW}^* \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} f_{8W}^* + \frac{2}{4} f_{LW}^* = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} f_{8W}^* \end{aligned}$$

Despejando tenemos que:

$$f_{8W}^* = \frac{1}{3}$$

De forma similar:

$$\begin{aligned} f_{8L}^* &= a_{8L} + \sum_{s_k \neq L} a_{8k} f_{kL}^* = a_{8L} + a_{88} f_{8L}^* + a_{8W} f_{WL}^* \\ &= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} f_{8L}^* + \frac{1}{4} f_{WL}^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} f_{8L}^* \end{aligned}$$

Despejando:

$$f_{8L}^* = \frac{2}{3}$$

No es de extrañar que  $f_{8W}^* + f_{8L}^* = 1$ , pues el juego siempre acabará ganando o perdiendo. Es más, para cualquier estado inicial  $s_i$ , es cierto que  $f_{iW}^* + f_{iL}^* = 1$ . Para calcular la probabilidad de ganar desde el estado 7:

$$\begin{aligned} f_{7W}^* &= a_{7W} + \sum_{s_k \neq W} a_{7k} f_{kW}^* = a_{7W} + a_{77} f_{7W}^* + a_{78} f_{8W}^* + a_{7L} f_{LW}^* \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} + f_{7W}^* \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} f_{7W}^* \end{aligned}$$

Despejando:

$$f_{7W}^* = \frac{4}{9}$$

Si seguimos, obtenemos la siguiente tabla:

$i$	$f_{iW}^*$	$f_{iL}^*$
8	1/3	2/3
7	4/9	5/9
6	16/27	11/27
5	37/81	44/81
4	121/243	122/243
3	376/729	353/729
2	1072/2187	1115/2187
1	3289/6561	3272/6561
0	9889/19683	9794/19683

Podemos ver que la probabilidad de ganar es mayor o menor dependiendo de cada estado inicial. En particular, el estado 6 ofrece la mejor opción para ganar. Esto se debe a que desde el estado 6 no es posible perder en la siguiente ronda pero sí es posible ganar.

Ahora que conocemos la probabilidad de alcanzar un estado  $s_j$  desde un estado  $s_i$ , nos interesa saber cuánto tarda de media:

**Definición 1.23.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov, el **tiempo de transición medio** del estado  $s_i$  al estado  $s_j$  se define por:

$$\mu_{ij} := E[\tau_{ij}] = \begin{cases} \infty, & \text{si } f_{ij}^* < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}, & \text{si } f_{ij}^* = 1 \end{cases}$$

Para el caso  $i=j$ , se llamará **tiempo medio de recurrencia** para el estado  $s_i$ .

Este tiempo representa el número medio de transiciones que se necesita para pasar de un estado  $s_i$  a otro estado  $s_j$ . Para calcularlo, podemos emplear el siguiente teorema:

**Teorema 1.24.** Supongamos que para todo  $s_k \in \mathcal{S}$ ,  $\mu_{kj} < \infty$ . Entonces, si  $s_i \in \mathcal{S}$ , el tiempo de transición medio  $\mu_{ij}$  satisface la ecuación:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \mu_{kj} \quad (1.7)$$

**Demostración.** Puesto que  $\mu_{ij} < \infty$ , debe ser  $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$ . Por la Proposición 1.20:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= a_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} = a_{ij} + 2f_{ij}^{(2)} + 3f_{ij}^{(3)} + \dots \\ &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} 2f_{kj}^{(1)} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} 3f_{kj}^{(2)} + \dots = a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \sum_{n=2}^{\infty} n f_{kj}^{(n-1)} \\ &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) f_{kj}^{(n)} = a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \sum_{n=1}^{\infty} (n f_{kj}^{(n)} + f_{kj}^{(n)}) \end{aligned}$$

Por hipótesis,  $\mu_{kj} < \infty$ , luego  $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{kj}^{(n)}$  es una serie convergente por ser una serie de términos no negativos y mayorada. De mismo modo, por definición de  $\mu_{kj}$  tenemos que  $f_{kj}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}^{(n)} = 1$  es convergente, y en consecuencia, la serie de sumas de términos es convergente con  $\sum_{n=1}^{\infty} n f_{kj}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (n f_{kj}^{(n)} + f_{kj}^{(n)})$ . Empleando esto:

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n f_{kj}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{kj}^{(n)} \right) = a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} (\mu_{kj} + 1) \\ &= a_{ij} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \mu_{kj} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} = \sum_{s_k \in \mathcal{S}} a_{ik} + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \mu_{kj} \\ &= 1 + \sum_{s_k \neq s_j} a_{ik} \mu_{kj} \end{aligned} \quad \square$$

Los conceptos anteriores son extensibles a subconjuntos de  $S$ . Si tomamos el ejemplo de “blackjack”, podemos considerar el subconjunto  $E = \{W, L\}$ . Si  $\mathcal{X}_t \in E$ , implica que el juego ha terminado. Está claro que desde cualquier estado  $s_i$ ,  $f_{iE}^* = 1$  y  $\mu_{iE} < \infty$ . Podemos reescribir (1.7) como:

$$\mu_{iE} = 1 + \sum_{s_k \notin E} a_{ik} \mu_{kE}$$

Es claro que  $\mu_{WE} = \mu_{LE} = 1$ . Si  $\mathcal{X}_0 = 8$ :

$$\mu_{8E} = 1 + a_{88} \mu_{8E} = 1 + \frac{1}{4} \mu_{8E}$$

Despejando:

$$\mu_{8E} = \frac{4}{3}$$

Para  $\mathcal{X}_0 = 7$ :

$$\mu_{7E} = 1 + a_{77} \mu_{7E} + a_{78} \mu_{8E} = 1 + \frac{1}{4} \mu_{7E} + \frac{1}{4} \frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \mu_{7E}$$

Despejando:

$$\mu_{7E} = \frac{16}{9}$$

Si seguimos procediendo de esta manera, obtenemos la siguiente tabla:

$i$	$\mu_{iE}$	$\approx$
8	$4/3$	1.333
7	$16/9$	1.778
6	$64/27$	2.370
5	$256/81$	3.160
4	$916/243$	3.700
3	$3232/729$	4.433
2	$11200/2187$	5.121
1	$37888/6561$	5.775
0	$126820/19683$	6.443

que representa el número de rondas que se necesitan para terminar el juego iniciando desde cada estado.

#### 1.2.4 Estados recurrentes y transitorios

Vamos a distinguir ahora entre diversos tipos de estados, lo cual nos va a permitir dividir el espacio de estados en varios grupos. Para ello vamos a utilizar la probabilidad de tiempo de transición  $f_{ij}^*$ :

**Definición 1.25.** Un estado  $s_i \in \mathbb{S}$  se dice **recurrente** si y sólo si  $f_{ii}^* = 1$ , en otro caso, se llamará **transitorio**. Si todos los estados son recurrentes, entonces se hablará de una cadena de Markov recurrente, en otro caso, transitoria.

Un estado es transitorio si, después de haber entrado a este estado la cadena puede no regresar nunca a él. Por consiguiente, el estado  $s_i$  es transitorio si y sólo si existe un estado  $s_j \neq s_i$  que es accesible desde  $s_i$  pero no viceversa. Así, si el estado  $s_i$  es transitorio y la cadena alcanza dicho estado, existe una probabilidad positiva de que la cadena se mueva al estado  $s_j$  y no regrese nunca al estado  $s_i$ .

La otra posibilidad es que iniciando en el estado  $s_i$ , la cadena siempre regrese a ese estado. En este caso, decimos que el estado es recurrente.

Estas propiedades también se pueden definir utilizando las probabilidades de transición en  $n$  pasos:

**Proposición 1.26.** Sea  $s_i \in \mathbb{S}$ :

- $s_i$  es recurrente si y sólo si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} = \infty$ .
- $s_i$  es transitorio si y sólo si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} < \infty$ .

**Demostración.** Para demostrarlo, primero veamos la relación que existe entre  $a_{ij}^{(n)}$  y  $f_{ij}^{(n)}$ , recordemos que  $a_{ij}^{(n)}$  es la probabilidad de que se produzca una transición de  $s_i$  a  $s_j$  en  $n$  pasos, lo cual incluye posibles transiciones en los pasos  $1, 2, 3, \dots, n-1$ . De esta forma:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= f_{ij}^{(1)} \\ a_{ij}^{(2)} &= f_{ij}^{(2)} + f_{ij}^{(1)} a_{jj}^{(1)} \\ a_{ij}^{(3)} &= f_{ij}^{(3)} + f_{ij}^{(2)} a_{jj}^{(1)} + f_{ij}^{(1)} a_{jj}^{(2)} \end{aligned}$$

Así, en general:

$$a_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} a_{jj}^{(n-k)} = f_{ij}^{(n)} + f_{ij}^{(n-1)} a_{jj}^{(1)} \dots + f_{ij}^{(1)} a_{jj}^{(n-1)} \quad (1.8)$$

Usando esto:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ f_{ii}^{(n)} + f_{ii}^{(n-1)} a_{ii}^{(1)} \dots + f_{ii}^{(1)} a_{ii}^{(n-1)} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ii}^{(k)} = f_{ii}^* + f_{ii}^* \sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} \end{aligned}$$

Despejando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} = \frac{f_{ii}^*}{1 - f_{ii}^*}$$

Luego esta claro que:

- $s_i$  es recurrente  $\iff f_{ii}^* = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} = \frac{f_{ii}^*}{1 - f_{ii}^*} = \infty$ .
- $s_i$  es transitorio  $\iff f_{ii}^* < 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_{ii}^{(n)} = \frac{f_{ii}^*}{1 - f_{ii}^*} < \infty$ .

Con esta proposición, ya podemos demostrar que las propiedades de recurrencia y transitoriedad son de clase:

**Teorema 1.27.** Sean  $s_i, s_j \in \mathbb{S}$ , si  $s_i$  es recurrente e  $i \longrightarrow j$ , entonces  $f_{ji}^* = 1$ ,  $s_j$  es recurrente y  $f_{ij}^* = 1$ .

La siguiente demostración se debe a [12, Página 38]:

**Demostración.** Si  $i \longrightarrow j$ ,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ . Por 1.8,  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $f_{ij}^{(k)} > 0$ , luego  $f_{ji}^* > 0$ . Si fuese  $f_{ji}^* < 1$ , con probabilidad  $1 - f_{ji}^* > 0$  partiendo desde  $s_j$  no pasaríamos nunca por  $s_i$ . Así que con probabilidad al menos  $f_{ij}^*(1 - f_{ji}^*) > 0$  saliendo de  $s_i$  no volveríamos a pasar nunca por  $s_i$ , lo cual contradice con que  $s_i$  sea recurrente.

Puesto que  $f_{ji}^* > 0$ , existirá  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f_{ji}^{(m)} > 0$ , por (1.8),  $a_{ji}^{(m)} > 0$ , luego también  $j \longrightarrow i$  e  $i \longleftrightarrow j$ .

Veamos ahora que  $s_j$  ha de ser recurrente: puesto que  $i \longleftrightarrow j$ , existen  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $a_{ij}^{(n)} > 0$  y  $a_{ji}^{(m)} > 0$ , para todo  $r \geq m + n$ :

$$a_{jj}^{(r)} \geq a_{ji}^{(m)} a_{ii}^{(r-m-n)} a_{ij}^{(n)}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{jj}^{(r)} \geq \sum_{r=1}^{n+m} a_{jj}^{(r)} + \sum_{r=n+m+1}^{\infty} a_{ji}^{(m)} a_{ii}^{(r-m-n)} a_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{n+m} a_{jj}^{(r)} + a_{ji}^{(m)} a_{ij}^{(n)} \sum_{r=1}^{\infty} a_{ii}^{(r)}$$

Puesto que  $s_i$  es recurrente,  $\sum_{r=1}^{\infty} a_{ii}^{(r)} = \infty$  luego también  $\sum_{r=1}^{\infty} a_{jj}^{(r)} = \infty$ , por la proposición anterior,  $s_j$  es recurrente.

Finalmente,  $f_{ij}^* = 1$  es clara utilizando que  $j \longrightarrow i$ ,  $s_j$  es recurrente y la primera parte de esta demostración.  $\square$

De la demostración, podemos apreciar también que si  $s_i$  es recurrente y  $s_j$  es transitoria entonces no es posible acceder desde  $s_i$  a  $s_j$  ( $i \not\rightarrow j$ ). En consecuencia:

**Corolario 1.28.** Sean  $s_i, s_j \in \mathbb{S}$  con  $i \longleftrightarrow j$ , entonces o son ambos transitorios o son ambos recurrentes.

Vamos a presentar ahora un tipo especial de estado recurrente:

**Definición 1.29.** Un estado  $s_i \in S$  se llamará **absorbente** si  $a_{ii} = 1$ .

Si una cadena de Markov ha alcanzado un estado absorbente  $s_i$ , permanecerá allí para siempre pues  $a_{ij} = 0$  para todo  $s_j \neq s_i$ . En consecuencia la clase de equivalencia  $[s_i]$  estará formado únicamente por  $s_i$ .

Con los resultados anteriores seremos capaces de dividir el espacio de estados  $S$  en dos subconjuntos disjuntos; uno constituido por los estados transitorios y otro por los estados recurrentes. Los estados transitorios son inaccesibles desde los recurrentes. Los estados recurrentes se pueden dividir de manera única en clases de equivalencia mediante la relación de equivalencia  $i \longleftrightarrow j$ . Notemos que si  $s_i$  y  $s_j$  están en clases distintas entonces  $i \not\rightarrow j$  y  $j \not\rightarrow i$  por el Teorema 1.27.

De acuerdo con este resultado, podemos hacer una reordenación de los estados de  $S$  (es decir, una reordenación de las filas y columnas de la matriz de transición) que coloque los estados transitorios al final y agrupe los estados de cada una de las clases de equivalencia de los estados recurrentes. Tendremos así, la siguiente estructura para la matriz de transición de una cadena de Markov:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} P_1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & P_2 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & P_r & \\ \hline & & & R & Q \end{array} \right)$$

donde las submatrices  $P_i$  están asociadas a cada clase de equivalencia,  $R$  proporciona las probabilidades para pasar desde los estados transitorios a los recurrentes y  $Q$  da las probabilidades entre estados transitorios.

### 1.3 COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE UNA CADENA DE MARKOV

Aparte de las definiciones del sección anterior, que nos permiten calcular directamente probabilidades relacionadas con los estados, también nos interesa el comportamiento de una cadena de Markov a largo plazo. Para ello, vamos a estudiar la matriz de transición en  $n$  pasos cuando  $n$  tiende a infinito.

En primer lugar, vamos a presentar una distribución especial:

**Definición 1.30.** Sea  $A$  la matriz de transición de una cadena de Markov  $\{\mathcal{X}_t\}$ , diremos que  $\pi \in \Delta^{N-1}$  es una distribución estacionaria si  $\pi A = \pi$ .

Supongamos que  $\{\mathcal{X}_t\}$  es una cadena de Markov con matriz de transición  $A$ . Hemos visto que, dependiendo de la distribución inicial, el proceso resultante  $\{\mathcal{X}_t\}$  evoluciona de forma distinta a lo largo del tiempo. Pero si existe una distribución

estacionaria  $\pi$  y en un instante  $t'$  se da  $c^{t'} = (P[\mathcal{X}_{t'} = s_1, \dots, \mathcal{X}_{t'} = s_N]) = \pi$ , entonces  $\forall t \in \mathbb{N}, t \geq t', c^t = \pi$ .

Notemos también que  $\pi$  es un vector propio a la izquierda de  $A$  con valor propio 1, que sabemos que siempre existe por la Proposición 1.4. Una distribución estacionaria se puede entender como un punto de equilibrio de la cadena. Es posible que existan varias distribuciones estacionarias pero bajo ciertas condiciones, podemos afirmar que existe una única distribución estacionaria y que la cadena converge hacia ella. Para justificar estas condiciones, necesitamos introducir algunas propiedades de las cadenas irreducible y aperiódicas basadas en contenidos de [3]:

**Proposición 1.31.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov aperiódica, entonces existe  $H \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ii}^{(m)} > 0$  para todo estado  $s_i \in \mathbb{S}$  y todo número natural  $m \geq H$ .

Para demostrarlo utilizaremos el siguiente lema de teoría de números:

**Lema 1.32.** Sea  $D$  un conjunto de enteros no negativos tal que:

1. es cerrado para la suma, es decir, si  $a, b \in D \implies a + b \in D$
2.  $m.c.d(D) = 1$

entonces  $D$  contiene a todos los enteros no negativos salvo un subconjunto finito. En consecuencia, existe  $H \in \mathbb{N}$  tal que para todo número natural  $m \geq H, m \in D$ .

**Demostración.** Véase [3, Páginas 25 y 26]. □

**Demostración** (Proposición 1.31). Para cada estado  $s_i$ , consideramos:

$$D_i = \{n \in \mathbb{N} \mid a_{ii}^{(n)} > 0\}$$

puesto que la cadena es aperiódica, todos los estados son aperiódicos y  $m.c.d(D_i) = 1$ . Sean  $t, s$  elementos de  $D_i$ , luego  $a_{ii}^{(t)} > 0$  y  $a_{ii}^{(s)} > 0$ . Como:

$$a_{ii}^{(t+s)} \geq a_{ii}^{(t)} a_{ii}^{(s)} > 0 \implies t + s \in D_i \implies D_i \text{ es cerrado para la suma}$$

por el lema anterior, existe  $H_i \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall m \geq H_i, m \in D_i$ . Puesto que el espacio de estados  $\mathbb{S}$  es finito, existe  $H = \max\{H_i \mid i \in \{1, \dots, N\}\}$  tal que  $\forall m \geq H, m \in \mathbb{N}, a_{ii}^{(m)} > 0, \forall s_i \in \mathbb{S}$ . □

**Proposición 1.33.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov irreducible y aperiódica, entonces existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij}^{(m)} > 0, \forall s_i, s_j \in \mathbb{S}$  y  $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq M$ .

**Demostración.** Puesto que la cadena es aperiódica, por la Proposición 1.31, existe  $H \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ii}^{(m)} > 0$  para todo estado  $s_i \in \mathbb{S}$  y todo número natural  $m \geq H$ .



Además, como la cadena es irreducible, para todo par de estados  $s_i, s_j$ , existe  $n_{ij} \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij}^{(n_{ij})} > 0$ . Por lo tanto, para  $m \geq H + n_{ij}$ :

$$a_{ij}^{(m)} \geq a_{ii}^{(m-n_{ij})} a_{ij}^{(n_{ij})} > 0$$

Puesto que el espacio de los estados es finito, basta elegir  $M = H + \max\{n_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, N\}\}$ .  $\square$

**Definición 1.34.** Una cadena de Markov  $\{\mathcal{X}_t\}$  es **regular** si su matriz de transición  $A$  es primitiva. Esto es, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $A^k$  tiene sólo elementos estrictamente positivos.

**Corolario 1.35.** Una cadena de Markov es regular si y sólo si es irreducible y aperiódica.

**Demostración.** Si la cadena es irreducible y aperiódica, entonces es regular como consecuencia directa de la Proposición 1.33.

Supongamos que la cadena es regular, existe entonces  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij}^{(k)} > 0, \forall s_i, s_j \in \mathcal{S}$ . En consecuencia, todos los estados son comunicables y la cadena es irreducible. Para demostrar que la cadena es aperiódica basta calcular el periodo de un estado  $s_i$  ahora que sabemos que es irreducible. Notemos que:

$$a_{ii}^{(3k)} = \sum_{s_j \in \mathcal{S}} a_{ij}^{(k)} a_{jj}^{(k)} a_{ji}^{(k)} > 0$$

Por otro lado, puesto que  $\sum_{s_j \in \mathcal{S}} a_{ij}^{(k+1)} = 1$ , existe  $a_{ij}^{(k+1)} > 0$ . Por lo tanto:

$$a_{ii}^{(3k+1)} = \sum_{s_j \in \mathcal{S}} a_{ij}^{(k+1)} a_{jj}^{(k)} a_{ji}^{(k)} > 0$$

Puesto  $m.c.d(3k, 3k+1) = 1$ , tenemos que la cadena es aperiódica.  $\square$

Las anteriores propiedades nos proporcionan una condición suficiente para que exista una única distribución estacionaria, reflejada en el siguiente teorema [5, Página 12]:

**Teorema 1.36.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov irreducible, entonces existe una única distribución estacionaria. Si además la cadena es aperiódica, para cada distribución inicial  $c^0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|c^t - \pi\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|c^0 A^t - \pi\| = 0$$

donde  $\pi$  es la distribución estacionaria asociada a  $\{\mathcal{X}_t\}$ .

Por este teorema, podemos asegurar que si una cadena es irreducible, entonces existe un único punto de equilibrio. Es más, si la cadena es también aperiódica, entonces a largo plazo convergerá hacia dicho equilibrio, sea cual sea la distribución inicial. Para la demostración, necesitamos algunos resultados sobre matrices:

**Definición 1.37.** Dada  $A$  una matriz cuadrada real de dimensión  $N \times N$ , se llama grafo de  $A$  ( $\text{graf}(A)$ ) a la gráfica dirigida sobre  $N$  nodos  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$  tal que si  $a_{ij} > 0$  entonces existe una flecha desde  $\alpha_i$  hacia  $\alpha_j$ .

**Definición 1.38.** Se dice que  $\text{graf}(A)$  está **fuertemente conectado** si para toda pareja de nodos  $\alpha_i, \alpha_j$  existe un camino que los conecta, es decir, se puede ir del nodo  $\alpha_i$  a  $\alpha_j$  en un número finito de pasos.

**Definición 1.39.** Sea  $A$  una matriz cuadrada positiva, se dice que  $A$  es **irreducible** si  $\text{graf}(A)$  está fuertemente conectado.

**Proposición 1.40.** Sea  $\{\mathcal{X}_t\}$  una cadena de Markov irreducible, entonces la matriz de transición asociada  $A$  es una matriz irreducible.

**Demostración.** Por ser la cadena irreducible, para todo par de estados  $s_i, s_j$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_{ij}^{(n)} > 0$ . Aplicando inductivamente la ecuación de Chapman-Kolmogorov, existe al menos una secuencia de productos con  $n$  términos  $a_{ik} \cdots a_{lj} > 0$ . En consecuencia, para todo par de nodos  $\alpha_i, \alpha_j$  existe un camino que los conecta.  $\square$

**Teorema 1.41.** Sea  $A$  una matriz irreducible, entonces:

1. Existe un valor propio positivo y simple  $\lambda_1$  tal que para todo valor propio  $\lambda$ , se tiene que  $\lambda_1 \geq \lambda$ .
2. Existe un único vector propio asociado a  $\lambda_1$  con todos los componentes estrictamente positivos.
3. Todos los valores propios con módulo igual a  $\lambda_1$  son simples.

**Demostración.** Véase [9, Página 263, Teorema 7.13].  $\square$

Con el anterior teorema y la Proposición 1.4, tenemos que para una cadena de Markov irreducible el vector propio asociado a 1 es único y por lo tanto existe una única distribución estacionaria. Además, por el teorema, sabemos que cada componente de la distribución estacionaria es estrictamente positivo. Para probar la segunda parte del Teorema 1.36 necesitamos algunos resultados más:

**Teorema 1.42** (Teorema de Perron-Frobenius). Sea  $A$  una matriz primitiva, entonces:

1.  $A$  tiene un valor propio  $\lambda_1$  real, estrictamente positivo y dominante, esto es:

$$|\lambda_i| < \lambda_1, \quad \forall \lambda_i \in \sigma(A) \setminus \{\lambda_1\}$$

y  $\rho(A) = \lambda_1$ .

2. Se puede tomar un vector propio  $v_1$  asociado al valor propio  $\lambda_1$  con todos los componentes estrictamente positivos.

**Demostración.** Véase [9, Página 199, Teoremas 5.12 y 5.13]. □

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 1.43.** Sea  $A$  una matriz primitiva de dimensión  $N \times N$ ,  $\lambda_1$  su valor propio real, estrictamente positivo y dominante, y  $v_1$  vector propio asociado a  $\lambda_1$ . Entonces, sea  $X_0$  un vector de dimensión  $N$  con todos los componentes no negativos y al menos un componente estrictamente positivo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|X_0 A^n\|_1} X_0 A^n = \frac{1}{\|v_1\|_1} v_1$$

**Demostración.** Véase [9, Página 201, Teorema 5.19]. □

Si una cadena de Markov es irreducible y aperiódica, sabemos que es regular. Por lo tanto, usando el corolario anterior (pues  $c^0 \in \Delta^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$ ) tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\|c^0 A^t\|_1} c^0 A^t = \frac{1}{\|\pi\|_1} \pi$$

Puesto que para todo  $t$ ,  $c^t = c^0 A^t \in \Delta^{N-1}$  y  $\pi \in \Delta^{N-1}$ , sus normas tienen valor 1. Así, hemos probado la segunda afirmación del Teorema 1.36. Veamos en el siguiente ejemplo [2, Página 102] la utilidad del Teorema 1.36:

**Ejemplo 1.4.** Supongamos que una ciudad tiene tres cadenas de supermercados  $\{A, B, C\}$ . Considerando un determinado periodo de tiempo, observamos que, por diferentes razones como el precio, la calidad, etc, algunos habitantes deciden cambiar de cadena.

Para estudiar este cambio a largo plazo, se utiliza la cadena  $\{\mathcal{X}_t\}$  = la cadena de supermercado escogida por el cliente en el día  $t$ . Se supone también que la proporción de clientes que cambian de supermercado al día es constante con la siguiente matriz de transición:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Está claro que la cadena es regular pues la matriz de transición sólo contiene elementos positivos, el vector propio asociado a 1 es:

$$\pi = (0,45 \quad 0,35 \quad 0,2)$$

Lo cual nos indica que a largo plazo, el 45 % de los clientes se quedarán en el supermercado  $A$ , el 35 % en el supermercado  $B$  y el 20 % en el supermercado  $C$ .

Notemos que para este resultado no ha sido necesario saber cual es la proporción de clientes que acuden a cada supermercado en el momento del que se inicia el estudio. Para comprobar la previsión anterior, podemos suponer una distribución inicial alejada de la distribución estacionaria:

$$c^0 = (0,1 \quad 0,2 \quad 0,7)$$

Tras 5 días:

$$c^5 = c^0 A^5 = (0,3995 \quad 0,3848 \quad 0,2156)$$

Tras 14 días:

$$c^{14} = c^0 A^{14} = (0,44937 \quad 0,3506 \quad 0,20003)$$

---

## MODELOS OCULTOS DE MARKOV

---

En este capítulo, estudiaremos un tipo especial de proceso estocástico llamado modelo oculto de Markov (HMM). Empezaremos introduciendo estos modelos, para después seguir discutiendo sobre los problemas y algoritmos que conllevan. En adelante, utilizaremos la abreviatura HMM para referirnos a los modelos ocultos de Markov.

Este capítulo se basa principalmente en [6], [7] y [8].

### 2.1 EXTENSIÓN A MODELOS OCULTOS DE MARKOV

Hasta ahora hemos considerado cadenas de Markov en las cuales cada estado es un evento observable (o material). Este modelo es demasiado restrictivo para aplicar a numerosos problemas en los cuales no podemos observar directamente los acontecimientos que nos interesan. Para estudiar estos problemas extendemos el concepto de modelo de Markov para incluir los casos en los que la observación es una función probabilística del estado. Como resultado, obtenemos un proceso estocástico conjunto formado por una cadena de Markov homogénea que no es observable (es decir, oculto) pero que produce una serie de consecuencias perceptibles mediante otro proceso estocástico. Es decir, tendremos una cadena  $\{\mathcal{X}_t\}_{t=0}^{\infty}$  que representa los sucesos ocultos y un proceso  $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=0}^{\infty}$  que representa las consecuencias observadas de  $\{\mathcal{X}_t\}$ .

Para aclarar esta idea, consideramos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 2.1.** Un guardia de seguridad trabaja en una instalación subterránea, sin conexión con el exterior. Cada día, no puede saber si está lloviendo o no, pero por las mañanas ve llegar al director con o sin paraguas.

En este caso,  $\mathcal{X}_t$  indica si llueve o no en el día  $t$  e  $\mathcal{Y}_t$  indica si el director lleva o no paraguas. Está claro que  $\mathcal{Y}_t$  es consecuencia directa de  $\mathcal{X}_t$  y asumiendo que la posibilidad de llover en un día determinado depende únicamente del tiempo del día anterior, tenemos que  $\{\mathcal{X}_t\}$  es una cadena de Markov homogénea.

Una representación común de la estructura de HMM es la siguiente:



Figura 1: Estructura de un HMM

La representación anterior y el Ejemplo 2.1 nos da una idea de lo que es un HMM. Para concretarlo, damos la siguiente definición:

**Definición 2.1.** Sean  $\{\mathcal{X}_t\}_{t=0}^{\infty}$  e  $\{\mathcal{Y}_t\}_{t=0}^{\infty}$  procesos estocásticos que toman valores en conjuntos finitos  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$  y  $\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_M\}$  respectivamente. El proceso conjunto  $\{(\mathcal{X}_t, \mathcal{Y}_t)\}$  es un modelo de Markov oculto si:

- $\{\mathcal{X}_t\}$  es una cadena de Markov homogénea.
- $P[\mathcal{Y}_t = y_t | \mathcal{X}_0 = x_0, \dots, \mathcal{X}_t = x_t, \mathcal{Y}_0 = y_0, \dots, \mathcal{Y}_{t-1} = y_{t-1}] = P[\mathcal{Y}_t = y_t | \mathcal{X}_t = x_t]$ , es decir, la observación en el instante  $t$  depende únicamente del estado que se encuentra en dicho momento.

En distintas fuentes, en lugar de dar una definición explícita de HMM nombran los elementos que lo caracterizan. Puesto que son de enorme importancia, vamos a presentarlos a continuación. Un HMM se caracteriza por:

1. El conjunto de estados  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_N\}$  que, a pesar de no ser observables, suelen conllevar un significado físico del problema.
2. El conjunto de posibles observaciones  $\mathbb{V} = \{v_1, \dots, v_M\}$  que corresponden a las salidas materiales del sistema.
3. La matriz de transición  $A$  asociada a  $\{\mathcal{X}_t\}$  con:

$$a_{ij} = P[\mathcal{X}_{t+1} = s_j | \mathcal{X}_t = s_i]$$

4. Una matriz  $B \in [0, 1]^{N \times M}$  estocástica con:

$$b_{jk} = P[\mathcal{Y}_t = v_k | \mathcal{X}_t = s_j] \text{ para todo } t \geq 0$$

Para reducir la confusión, en adelante utilizaremos la notación  $b_j(k)$  para referirnos a estas probabilidades.

5. Una distribución inicial  $\pi \in \Delta^{N-1}$  tal que:

$$P[\mathcal{X}_0 = s_i] = \pi_i$$

Es frecuente (véase [6]) utilizar la notación:

$$\lambda = (A, B, \pi) \tag{2.1}$$

para representar un HMM.

## 2.2 LOS TRES PROBLEMAS BÁSICOS DE LOS HMM

A partir de los conceptos anteriores, podemos identificar 3 entidades: el modelo, la secuencia de observaciones o de salidas y la secuencia de estados. Existen 3 problemas básicos de interés que involucran a estas entidades [11]:

1. Dado un HMM, ¿cuál es la probabilidad de observar una secuencia particular de salidas?
2. Dado un HMM y una secuencia de salidas, ¿cuál es la secuencia de estados más probable para generar dichas salidas?
3. Dada una secuencia de salidas y conociendo el espacio de estados, ¿cuál es el HMM que maximiza la probabilidad de observar dichas salidas?

El **problema 1** es un problema de evaluación donde calculamos la probabilidad de observar una secuencia de salidas. También nos permite conocer si el modelo se ajusta a dicha secuencia. Esto puede ser útil, por ejemplo, si estamos considerando varios modelos posibles. En ese caso, la solución del **problema 1** nos permitiría elegir el modelo que más se ajuste a las observaciones.

En el Ejemplo 2.1, un problema podría ser calcular la probabilidad de que el director lleve paraguas dos días seguidos y no en el tercero.

El **problema 2** es donde intentamos cubrir la parte oculta del modelo, es decir, a encontrar la secuencia “correcta” de estados. Está claro que en realidad no existe una secuencia “correcta”. Por ello, utilizaremos criterios de optimalidad para resolver este problema de la mejor manera posible.

En el Ejemplo 2.1, si se observa el paraguas en los dos primeros días y no en el tercero, parece lógico pensar que ha llovido en esos dos primeros días y no en el tercero. Veremos que es efectivamente así resolviendo este problema mediante el algoritmo de Viterbi.

En el **problema 3** pretendemos optimizar los parámetros del modelo dada una secuencia de salidas. La secuencia de observaciones usada para ajustar los parámetros se suele denominar secuencia de entrenamiento. El entrenamiento de HMM es importante, pues así podemos adaptar los parámetros a los datos percibidos. Y a partir de los resultados, podemos formular mejores modelos para describir fenómenos reales.

Como ejemplo, consideramos un problema de reconocimiento de voz, una de las aplicaciones más conocidas de HMM. Podemos utilizar las soluciones del **problema 3** para entrenar un HMM  $\lambda_0$  (usando la notación (2.1)) que reconoce la pronunciación del “no” y otro HMM  $\lambda_1$  que reconoce la pronunciación del “sí”. Entonces, dada la pronunciación de una palabra desconocida, podemos usar la solución del **problema 1** para determinar si la palabra se asemeja más al “sí” o al “no”.

En las siguientes subsecciones vamos a intentar solucionar estos problemas siguiendo principalmente la metodología descrita en [6]. Notemos que, por ser  $\{\mathcal{X}_t\}$  homogénea

e  $\mathcal{Y}_t$  depende únicamente del estado en el instante  $t$ , el instante en el que se comienza a observar las salidas es indiferente. Por lo tanto, podemos suponer siempre que las observaciones inician en el instante  $t = 0$ .

### 2.2.1 Solución al problema 1

Queremos calcular la probabilidad de secuencia de observación concreta,  $O = (O_0, O_1, \dots, O_r)$  conocido el modelo. La forma más directa de hacerlo es mediante enumeración de todas las posibles secuencias de estados de longitud  $r + 1$ . Consideramos una de ellas:

$$Q = (q_0, q_1, \dots, q_r) \in S^{r+1}$$

siendo  $q_0$  el estado inicial. Para facilitar la escritura, introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{Y}_k^l := (\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_{k+1}, \dots, \mathcal{Y}_{l-1}, \mathcal{Y}_l)$$

Por lo tanto, la probabilidad de secuencia de observación dada la secuencia de estados  $Q$  es:

$$P[\mathcal{Y}_0^r = O | \mathcal{X}_0^r = Q] = \prod_{t=0}^r P[\mathcal{Y}_t = O_t | \mathcal{X}_t = q_t]$$

donde aplicamos la independencia entre las observaciones. Por lo tanto:

$$P[\mathcal{Y}_0^r = O | \mathcal{X}_0^r = Q] = b_{q_0}(O_0) \cdot b_{q_1}(O_1) \cdots b_{q_r}(O_r)$$

Y la probabilidad de dicha secuencia de estados  $Q$  se puede calcular como:

$$P[\mathcal{X}_0^r = Q] = \pi_{q_0} \cdot a_{q_0 q_1} \cdot a_{q_1 q_2} \cdots a_{q_{r-1} q_r}$$

Es claro que:

$$P[\mathcal{Y}_0^r = O, \mathcal{X}_0^r = Q] = P[\mathcal{Y}_0^r = O | \mathcal{X}_0^r = Q] \cdot P[\mathcal{X}_0^r = Q]$$

Y la probabilidad de  $O$  se puede obtener sumando esta probabilidad mediante todas las posibles secuencias de estados:

$$\begin{aligned} P[\mathcal{Y}_0^r = O] &= \sum_{Q \in S^{r+1}} P[\mathcal{Y}_0^r = O | \mathcal{X}_0^r = Q] \cdot P[\mathcal{X}_0^r = Q] \\ &= \sum_{(q_0, q_1, \dots, q_r) \in S^{r+1}} \pi_{q_0} \cdot b_{q_0}(O_0) \cdot a_{q_0 q_1} \cdot b_{q_1}(O_1) \cdots a_{q_{r-1} q_r} \cdot b_{q_r}(O_r) \end{aligned}$$

Esta manera de calcular, involucra un orden de  $2 \cdot (r + 1) \cdot N^{(r+1)}$  operaciones, puesto que existen  $N^{(r+1)}$  posibles secuencias de estados, y para cada una de estas secuencias hay que realizar  $2 \cdot (r + 1)$  cálculos. Esto hace imposible calcular esta probabilidad, pues incluso para un modelo de 5 estados, si se quiere calcular la probabilidad de una secuencia con 100 observaciones ( $r = 99$ ) se necesitarían  $2 \cdot 100 \cdot 5^{100} \approx 10^{72}$  operaciones. Afortunadamente, existe una forma más eficiente de resolver **problema 1** y es mediante el conocido como **algoritmo de avance-retroceso**.



**Definición 2.2.** Definimos la **variable de avance**  $\alpha_t(i)$  como la probabilidad de observar la secuencia parcial  $(O_0, O_1, \dots, O_t)$  y que el estado en el instante  $t$  sea  $s_i$ :

$$\alpha_t(i) = P[\mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t), \mathcal{X}_t = s_i]$$

En el instante inicial  $t = 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\alpha_0(i) = P[\mathcal{Y}_0 = O_0, \mathcal{X}_0 = s_i] = P[\mathcal{Y}_0 = O_0 | \mathcal{X}_0 = s_i] \cdot P[\mathcal{X}_0 = s_i] = b_i(O_0) \cdot \pi_i$$

Suponiendo que conocemos las  $\alpha_t(i)$  para todo  $i$ , podemos calcular fácilmente  $\alpha_{t+1}(j)$ , que es la probabilidad de observar  $(O_0, O_1, \dots, O_{t+1})$  y  $\mathcal{X}_{t+1} = s_j$ . Puesto que queremos que  $\mathcal{X}_{t+1} = s_j$ , primero calculamos la probabilidad de mantener la misma secuencia parcial actualizado el estado, esto no es más que la suma de las variables de avance en  $t$  multiplicados por las probabilidades de transición:

$$\begin{aligned} P[\mathcal{Y}_0^r = O] &= \sum_{Q \in \mathbb{S}^{r+1}} P[\mathcal{Y}_0^r = O | \mathcal{X}_0^r = Q] \cdot P[\mathcal{X}_0^r = Q] \\ &= \sum_{(q_0, q_1, \dots, q_r) \in \mathbb{S}^{r+1}} \pi_{q_0} \cdot b_{q_0}(O_0) \cdot a_{q_0 q_1} \cdot b_{q_1}(O_1) \cdots a_{q_{r-1} q_r} \cdot b_{q_r}(O_r) \end{aligned}$$

Dado que  $\mathcal{Y}_{t+1}$  depende únicamente de  $\mathcal{X}_{t+1}$ , una vez conocida la suma anterior:

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1}(j) &= P[\mathcal{Y}_0^{t+1} = (O_0, \dots, O_t, O_{t+1}), \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \\ &= P[\mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t), \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \cdot P[\mathcal{Y}_{t+1} = O_{t+1} | \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \\ &= \left( \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \right) \cdot b_j(O_{t+1}) \end{aligned}$$

Luego podemos calcular las variables de avance de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1}(j) &= \left( \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) \cdot a_{ij} \right) \cdot b_j(O_{t+1}), & 0 \leq t \leq r-1 \\ & & 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (2.2)$$

Finalmente, notemos que:

$$P[\mathcal{Y}_0^r = O] = \sum_{i=1}^N P[\mathcal{Y}_0^r = O, \mathcal{X}_r = s_i] = \sum_{i=1}^N \alpha_r(i) \quad (2.3)$$

Si revisamos el cálculo de las variables de avance  $\alpha_t(j)$ , podemos ver que para cada estado se necesita  $2N$  operaciones en una etapa  $t > 0$ , puesto que hay  $N$  estados, podemos concluir que el cálculo de todas las variables de avance requiere un orden de  $2rN^2$  operaciones. Si  $N = 5$  y  $r = 99$ , necesitaríamos alrededor de 5000 operaciones usando el algoritmo de avance, en comparación con  $10^{72}$  operaciones que requiere en el cálculo directo.

La parte de retroceso del algoritmo no es necesario para resolver **problema 1**, pero va a ser usada en la solución al **problema 3**, así que vamos a presentarla aquí.

**Definición 2.3.** Definimos la **variable de retroceso**  $\beta_t(i)$  como la probabilidad de observar la secuencia parcial  $(O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r)$  condicionada a que en el instante  $t$ , el estado sea  $s_i$ . Es decir:

$$\beta_t(i) = P[\mathcal{Y}_{t+1}^r = (O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_t = s_i]$$

Puesto que la secuencia de salidas acaba en  $O_r$ ,  $\beta_r(i)$  no se puede determinar usando la definición anterior. En este caso, se define:

$$\beta_r(i) = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

De forma similar a las variables de avance, podemos calcular  $\beta_t(i)$  en base a  $\beta_{t+1}(j)$ . Puesto que conocemos éstos últimos, solo tenemos que preocuparnos por  $O_{t+1}$ . De nuevo, dado que  $\mathcal{Y}_t$  depende únicamente de  $\mathcal{X}_t$ :

$$\begin{aligned} P[\mathcal{Y}_{t+1}^r = (O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_{t+1} = s_j] &= \\ &= P[\mathcal{Y}_{t+1} = O_{t+1} | \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \cdot P[\mathcal{Y}_{t+2}^r = (O_{t+2}, O_{t+3}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \\ &= b_j(O_{t+1}) \cdot \beta_{t+1}(j) \end{aligned}$$

Además, puesto que  $\mathcal{X}_{t+1}$  depende de  $\mathcal{X}_t$ :

$$\begin{aligned} \beta_t(i) &= P[\mathcal{Y}_{t+1}^r = (O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_t = s_i] \\ &= \sum_{j=1}^N P[\mathcal{X}_{t+1} = s_j | \mathcal{X}_t = s_i] \cdot P[\mathcal{Y}_{t+1}^r = (O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_{t+1} = s_j] \\ &= \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(O_{t+1}) \cdot \beta_{t+1}(j) \end{aligned}$$

Luego también podemos calcular las variables de retroceso de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \beta_t(i) &= \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot b_j(O_{t+1}) \cdot \beta_{t+1}(j), & 0 \leq t \leq r-1 \\ & & 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (2.4)$$

Para cada estado, se necesita  $3N - 1$  operaciones en una etapa con  $0 \leq t \leq r - 1$ . Dado que existen  $N$  estados, se requiere un orden de  $3rN^2$  operaciones para calcular todas las variables de retroceso.

Veremos en los siguientes apartados, que las variables de avance y de retroceso serán usadas para resolver los **problemas 2 y 3**.

### 2.2.2 Solución al problema 2

A diferencia del **problema 1** donde podemos dar una solución exacta, existen varias maneras de resolver **problema 2**, donde queremos encontrar una secuencia de estados

“óptima” dada una secuencia de observaciones. En primer lugar, debemos definir lo que es una secuencia de estados óptima. Existen varios criterios de optimalidad, una de ellas, se trata de escoger estados que son más probables individualmente. Con este criterio se pretende maximizar el número estimado de estados individuales correctos. Para implementar esta solución al **problema 2**, definimos la siguiente variable:

$$\gamma_t(i) = P[\mathcal{X}_t = s_i | \mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r)]$$

que es la probabilidad de que el estado en el instante  $t$  sea  $s_i$  condicionado a observar la secuencia de salidas completa  $O = (O_0, O_1, \dots, O_r)$ .

**Proposición 2.4.**  $\gamma_t(i)$  se puede expresar en función de las variables de avance y de retroceso:

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t(j) \cdot \beta_t(j)}$$

**Demostración.** Por definiciones de las variables:

$$\begin{aligned} \alpha_t(i) \cdot \beta_t(i) &= \\ &= P[\mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t), \mathcal{X}_t = s_i] \cdot P[\mathcal{Y}_{t+1}^r = (O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_r) | \mathcal{X}_t = s_i] \\ &= P[\mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r), \mathcal{X}_t = s_i] \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_t(i) \cdot \beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t(j) \cdot \beta_t(j)} &= \frac{P[\mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r), \mathcal{X}_t = s_i]}{\sum_{j=1}^N P[\mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r), \mathcal{X}_t = s_j]} \\ &= \frac{P[\mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r), \mathcal{X}_t = s_i]}{P[\mathcal{Y}_0^r = (O_0, O_1, \dots, O_r)]} \end{aligned}$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada tenemos la igualdad del enunciado.  $\square$

Usando estas variables, podemos definir los estados más probables individualmente dada la secuencia de observaciones  $O$ :

**Definición 2.5.** Sea  $O = (O_0, O_1, \dots, O_r)$ , definimos el estado más probable individualmente en el instante  $t$  como:

$$q_t = \arg \max_{1 \leq i \leq N} \{\gamma_t(i)\} = \{s_i \in \mathbb{S} \mid \forall s_j \in \mathbb{S} : \gamma_t(j) \leq \gamma_t(i)\} \quad (2.5)$$

A pesar de que (2.5) maximiza el número estimado de estados correctos, puede haber problemas con la secuencia de estados resultante. Por ejemplo, si existen estados inalcanzables desde una de ellas, la secuencia de estados “óptima” puede ser inválida.

Esto se debe a que la solución proporcionada por (2.5) sólo determina los estados más probables en cada instante, sin tener en cuenta la probabilidad de existencia de la secuencia resultante en ningún momento.

Una posible solución a este problema es modificar el criterio. Se puede considerar secuencias de estados que maximizan el número estimado de parejas  $(q_t, q_{t+1})$  o de tripleta  $(q_t, q_{t+1}, q_{t+2})$  de estados correctas. Estos criterios pueden ser razonables para ciertas aplicaciones concretas, pero el criterio más utilizado es el de encontrar la secuencia  $Q = (q_0, q_1, \dots, q_r)$  que maximiza  $P[\mathcal{X}_0^r = Q | \mathcal{Y}_0^r = O]$ . Lo cual es equivalente a maximizar  $P[\mathcal{X}_0^r = Q, \mathcal{Y}_0^r = O]$ .

Una técnica formal para encontrar dicha secuencia  $Q$  existe, se basa en métodos de programación dinámica y se llama algoritmo de Viterbi. En primer lugar definimos:

$$\begin{aligned} \delta_t(i) &:= \max_{(q_0, q_1, \dots, q_{t-1}) \in \mathcal{S}^t} P[\mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, q_1, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t)] \\ &= \max_{(q_0, q_1, \dots, q_{t-1}) \in \mathcal{S}^t} P[\mathcal{X}_0^t = (q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, s_i), \mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t)] \end{aligned}$$

En cada instante,  $\delta_t(i)$  nos proporciona la probabilidad de la secuencia de estados más probable  $(q_0, q_1, \dots, q_{t-1}, q_t)$  de longitud  $t + 1$  con  $q_t = s_i$ , habiendo además observado  $(O_0, \dots, O_t)$ .

En el instante inicial  $t = 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ :

$$\delta_0(i) = P[\mathcal{X}_0 = s_i, \mathcal{Y}_0 = O_0] = P[\mathcal{X}_0 = s_i] \cdot P[\mathcal{Y}_0 = O_0 | \mathcal{X}_0 = s_i] = b_i(O_0) \cdot \pi_i$$

Notemos que cada  $\delta_t(i)$  con  $t > 0$  se puede calcular recursivamente en función de  $\delta_{t-1}(j)$ ,  $1 \leq j \leq N$ . La idea principal [7] de la recursión es que la secuencia más probable de estados hasta llegar a  $\mathcal{X}_t = s_i$  está compuesta por la secuencia más probable  $(q_0, q_1, \dots, q_{t-1})$  con  $q_{t-1}$  igual a un cierto estado  $s_j$  y la transición de  $s_j$  a  $s_i$ . Esta idea se puede observar con la Figura 2.

Por lo tanto, tenemos que hallar las secuencias más probables hasta  $t - 1$  y ver desde cuál se obtiene la probabilidad máxima dando un paso más:

$$\begin{aligned} \delta_t(i) &= \max_{(q_0, \dots, q_{t-1}) \in \mathcal{S}^t} P[\mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^t = (O_0, \dots, O_t)] \\ &= \max_{(q_0, \dots, q_{t-1}) \in \mathcal{S}^t} (P[\mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^{t-1} = (O_0, \dots, O_{t-1})] \\ &\quad \cdot P[\mathcal{Y}_t = O_t | \mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^{t-1} = (O_0, \dots, O_{t-1})]) \end{aligned}$$

Aplicando que  $\mathcal{Y}_t$  depende únicamente de  $\mathcal{X}_t$ :

$$\begin{aligned} \delta_t(i) &= \max_{(q_0, \dots, q_{t-1}) \in \mathcal{S}^t} P[\mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^{t-1} = (O_0, \dots, O_{t-1})] \\ &\quad \cdot P[\mathcal{Y}_t = O_t | \mathcal{X}_t = s_i] \end{aligned}$$

Aplicando la idea de recursión:

$$\begin{aligned}
 & \max_{(q_0, \dots, q_{t-1}) \in \mathbb{S}^t} P[\mathcal{X}_0^{t-1} = (q_0, \dots, q_{t-1}), \mathcal{X}_t = s_i, \mathcal{Y}_0^{t-1} = (O_0, \dots, O_{t-1})] \\
 &= \max_{j=1, \dots, N} (P[\mathcal{X}_t = s_i | \mathcal{X}_{t-1} = s_j] \cdot \max_{(q_0, \dots, q_{t-2}) \in \mathbb{S}^t} P[\mathcal{X}_0^{t-2} = (q_0, \dots, q_{t-2}), \\
 & \quad \mathcal{X}_{t-1} = s_j, \mathcal{Y}_0^{t-1} = (O_0, \dots, O_{t-1})]) \\
 &= \max_{j=1, \dots, N} (a_{ji} \cdot \delta_{t-1}(j))
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\delta_t(i) = \max_{j=1, \dots, N} (a_{ji} \cdot \delta_{t-1}(j)) \cdot b_i(O_t) \quad (2.6)$$

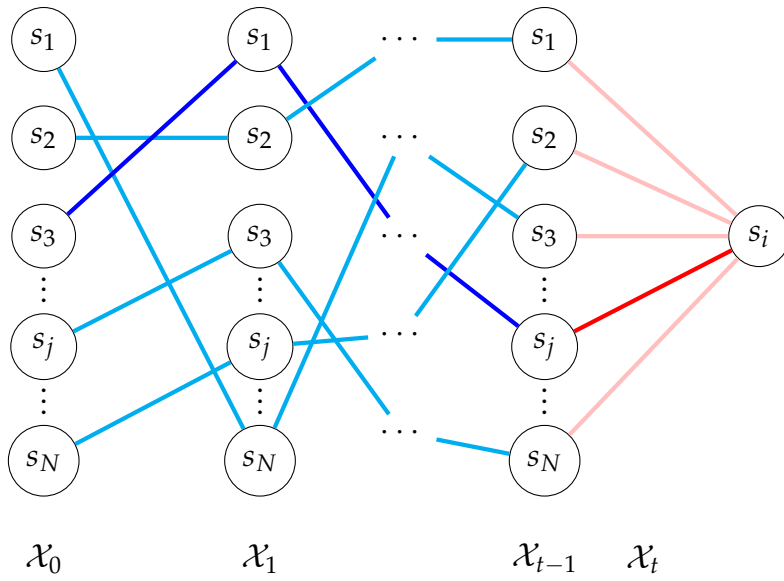


Figura 2: Recursión de algoritmo de Viterbi

Para llevar la traza de los estados que maximizan (2.6), definimos  $\psi_t(i)$  como el estado en el instante  $t - 1$  que maximiza  $\delta_t(i)$ . Resumiendo:

- En el instante inicial:

$$\begin{aligned}
 \delta_0(i) &= b_i(O_0) \cdot \pi_i, & 1 \leq i \leq N \\
 \psi_0(i) &= 0.
 \end{aligned}$$

- Aplicando recursión:

$$\begin{aligned}
 \delta_t(i) &= \max_{j=1, \dots, N} (a_{ji} \cdot \delta_{t-1}(j)) \cdot b_i(O_t), \\
 \psi_t(i) &= \arg \max_{j=1, \dots, N} (a_{ji} \cdot \delta_{t-1}(j)), & 1 \leq t \leq r \\
 & & 1 \leq i \leq N
 \end{aligned}$$

- Finalmente:

$$P^* = \max_{i=1,\dots,N} \delta_r(i)$$

$$q_r^* = \arg \max_{i=1,\dots,N} \delta_r(i)$$

- Para encontrar la secuencia de estados óptimo:

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*), \quad t = r-1, r-2, \dots, 0$$

Notemos que el esquema recursivo del algoritmo de Viterbi es similar al del algoritmo de avance. La mayor diferencia se encuentra en que, en este caso, se toma el máximo en lugar de calcular una sumatoria.

### 2.2.3 Solución al problema 3

---

## SECCIÓN TERCERA

---

El siguiente código es un ejemplo de coloreado de sintaxis e inclusión directa de código fuente en el texto usando minted.

---

```
-- From the GHC.Base library.
class Functor f where
    fmap      :: (a -> b) -> f a -> f b

    -- | Replace all locations in the input with the same value.
    -- The default definition is @'fmap' . 'const'@, but this may be
    -- overridden with a more efficient version.
    (<$)      :: a -> f b -> f a
    (<$)      = fmap . const

-- | A variant of '<*>' with the arguments reversed.
(<*>) :: Applicative f => f a -> f (a -> b) -> f b
(<*>) = liftA2 (\a f -> f a)

-- Don't use \$ here, see the note at the top of the page

-- | Lift a function to actions.
-- This function may be used as a value for `fmap` in a `Functor` instance.
liftA :: Applicative f => (a -> b) -> f a -> f b
liftA f a = pure f <*> a
-- Caution: since this may be used for `fmap`, we can't use the obvious
-- definition of liftA = fmap.

-- | Lift a ternary function to actions.
liftA3 :: Applicative f => (a -> b -> c -> d) -> f a -> f b -> f c -> f d
liftA3 f a b c = liftA2 f a b <*> c

{-# INLINABLE liftA #-}
{-# SPECIALISE liftA :: (a1->r) -> IO a1 -> IO r #-}
{-# SPECIALISE liftA :: (a1->r) -> Maybe a1 -> Maybe r #-}
{-# INLINABLE liftA3 #-}
```

```

{-# SPECIALISE liftA3 :: (a1->a2->a3->r) -> IO a1 -> IO a2 -> IO a3 -> IO r #-}
{-# SPECIALISE liftA3 :: (a1->a2->a3->r) ->
    Maybe a1 -> Maybe a2 -> Maybe a3 -> Maybe r #-}

-- | The 'join' function is the conventional monad join operator. It
-- is used to remove one level of monadic structure, projecting its
-- bound argument into the outer level.
join :: (Monad m) => m (m a) -> m a
join x = x >>= id

```

---

Vivamus fringilla egestas nulla ac lobortis. Etiam viverra est risus, in fermentum nibh euismod quis. Vivamus suscipit arcu sed quam dictum suscipit. Maecenas pulvinar massa pulvinar fermentum pellentesque. Morbi eleifend nec velit ut suscipit. Nam vitae vestibulum dui, vel mollis dolor. Integer quis nibh sapien.



---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Barbosa Correa, R. (2016). *Procesos estocásticos con aplicaciones*.
- [2] Domínguez García, J. L., & García Planas, M. I. (2015). *Introducción a la teoría de matrices positivas: aplicaciones*.
- [3] Klappenecker, A. Apuntes de csce-658 randomized algorithms. [https://people.engr.tamu.edu/andreas-klappenecker/csce658-s19/markov\\_chains.pdf](https://people.engr.tamu.edu/andreas-klappenecker/csce658-s19/markov_chains.pdf). Accedido el 10-01-2023.
- [4] Marin Diazaraque, J. M. Cadenas de markov. <https://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf>. Accedido el 02-01-2023.
- [5] Pérez Lázaro, J. Cadenas de markov (en tiempo discreto, con estados discretos). <https://www.unirioja.es/cu/franpere/ModyOptfiles/Tema6.pdf>. Accedido el 04-01-2023.
- [6] Rabiner, L. R. (1989). A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition. 2.
- [7] Ruiz Reina, J. L., Martín Mateos, F. J., & Graciani Díaz, C. Apuntes de modelos ocultos de markov de ampliación de inteligencia artificial. <https://www.cs.us.es/cursos/aia-2019/temas/tema-Markov.pdf>. Accedido el 10-01-2023.
- [8] Russell, S., & Norvig, P. (2009). *Artificial Intelligence A Modern Approach*, chap. 15, (pp. 566–583).
- [9] Salinelli, E., & Tomarelli, F. (2013). *Discrete Dynamical Models*. Springer.
- [10] Siegrist, K. (2022). *Probability, Mathematical Statistics, and Stochastic Processes*. LibreTexts. Accedido el 12-02-2023.  
URL [https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability\\_Theory/Probability\\_Mathematical\\_Statistics\\_and\\_Stochastic\\_Processes\\_\(Siegrist\)/16:\\_Markov\\_Processes/16.05:\\_Periodicity\\_of\\_Discrete-Time\\_Chains](https://stats.libretexts.org/Bookshelves/Probability_Theory/Probability_Mathematical_Statistics_and_Stochastic_Processes_(Siegrist)/16:_Markov_Processes/16.05:_Periodicity_of_Discrete-Time_Chains)
- [11] Vidyasagar, M. (2011). *Hidden Markov Processes: Theory and Applications to Biology*.
- [12] Vélez Ibarrola, R. (1991). *Procesos estocásticos*.