Пример.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$. Найти численное решение интеграла.

Данный интеграл можно решить аналитически, поэтому, найдём точное значение данного интеграла, по которому будет проводить сверку.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln|2| - \ln|1| = \ln 2 \approx 0.693147$$

Решим данный интеграл численными методами.

Метод трапеций.

Для примера возьмём $n=4$. Тогда $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

Формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + f(b)\Big) \ominus$$

Рассчитаем значение $f(x)$ в точках x_i:

$f(a) = f(0) = 1$, $x_1 = 0 + 1\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$f(x_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, $x_2 = 0 + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0 + 3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$f(x_3) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$, $f(b) = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$\ominus \frac{1}{4\cdot 2}\left(1 + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(1 + 2\left(\frac{84+70+60}{105}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{214}{105}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{315 + 2\cdot 428}{210}\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1171}{210} \ominus$$

$\ominus \frac{1171}{1680} \approx 0.697023$

Метод Симпсона (парабол).

Для примера возьмём $n=2$. Тогда $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{4}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\left(f(x_2)\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right)\right) \ominus$$

- формула метода парабол.

Найдём значение функции в точках:

$f(a) = f(0) = 1$, $x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$f(x_1) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, $x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, $x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$f(x_3) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}$; $f(b) = f(1) = \frac{1}{2}$

$$\ominus \frac{1}{4 \cdot 3}\left(1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} + 4\left(\frac{4}{5} + \frac{4}{7}\right)\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{28+20}{35}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{9+8}{6} + 4 \cdot \frac{48}{35}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{595+1152}{210}\right) =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1747}{210} = \frac{1747}{2520} \approx 0.693254.$$

Метод Гаусса.

Для $n=4$: По формуле: $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right)$

Для каждой итерации найдём аргумент функции.

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} t_i = \frac{1}{2}(1+t_i)$$

$$i=1: \; f\left(\frac{1}{2}\left(1+(-0.861136)\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}(0.138864)\right) = f(0.069432) =$$

значение из табл 1.

$$= \frac{1}{1+0.069432} \approx 0.935076.$$

$$i=2: \; f\left(\frac{1}{2}(1-0.339981)\right) = f\left(\frac{1}{2}(0.660019)\right) = f(0.3300095)$$

$$= \frac{1}{1+0.3300095} \approx 0.751874$$

$$i=3: \; f\left(\frac{1}{2}(1+0.339981)\right) = f(0.6699905) = \frac{1}{1+0.6699905} \approx$$

$$\approx 0.598806$$

$$i=4: \; f\left(\frac{1}{2}(1+0.861136)\right) = f(0.930568) = \frac{1}{1+0.930568} \approx$$

$$\approx 0.517982$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underset{A_1}{0.347854} \cdot 0.935076 + \underset{A_2}{0.652145} \cdot 0.751874 +$$

$$+ \underset{A_3}{0.652145} \cdot 0.598806 + \underset{A_4}{0.347854} \cdot 0.517982 \Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0.325270 + 0.490331 + 0.390508 + 0.180182\right) =$$

$$= \frac{1}{2} 1.386291 = 0.6931455$$