

Статистическая физика, Семинар 3. Идеальные квантовые газы

Владислав Дмитриевич Кочев, 2023.

Веб-сайт: <https://vdkochev.github.io>

Электронная почта: vd.kochev@misis.ru, vd.kochev@gmail.com

1. Большой канонический ансамбль (T, V, μ)

Рассматривая систему в формализме канонического ансамбля, состояние a которой описывается набором чисел заполнения $a = \{n_1, n_2, \dots\}$, возникает нетривиальная комбинаторная проблема фиксации $\sum_i n_i = N$ при вычислении статсуммы $Z = \sum_a \exp(-\beta \sum_i n_i \mathcal{E}_i)$. Это иногда можно сделать, но зачастую проще работать в формализме большого канонического ансамбля, т.е. не фиксируя число частиц N (полагая, что оно может меняться и флуктуировать), но фиксируя химический потенциал μ .

Можно показать, что большому каноническому ансамблю соответствует **большое каноническое распределение Гиббса**:

$$\rho_a = \exp(-\beta(\mathcal{E}_a - \mu \mathcal{N}_a)) / Z, \quad \hat{\rho} = \exp(-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})) / Z, \quad (1)$$

где статистическая сумма $Z(T, V, \mu)$:

$$Z = \text{Tr} \exp(-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})) = \sum_a \exp(-\beta(\mathcal{E}_a - \mu \mathcal{N}_a)) = \exp\left(-\frac{\Omega}{T}\right). \quad (2)$$

$$\Omega = -T \ln Z \quad (3)$$

2. Уравнение Гиббса-Дюгеяма

$$N d\mu = -S dT + V dP \quad (4)$$

Если это уравнение подставить в выражения для $d\Omega$ и dG , то получим соотношения:

$$\Omega(T, V, \mu) = -PV, \quad G(T, P, N) = \mu N. \quad (5)$$