

Аспекты неклассических логик: упражнения

В.В. Долгоруков (НИУ ВШЭ)

13 февраля 2022 г.

1 Модальная логика

1.1 Модальные исчисления

Упражнение 1.1. *Какие из следующих принципов следует принять или отвергнуть (с точки зрения интуиции):*

- | | |
|--|---|
| 1. $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$ | 8. $p \rightarrow \Box \Diamond p$ |
| 2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ | 9. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ |
| 3. $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ | 10. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ |
| 4. $\Box p \rightarrow p$ | 11. $\Box(\Box p \rightarrow p)$ |
| 5. $\Box p \rightarrow \Diamond p$ | 12. $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ |
| 6. $\neg \Box \perp$ | 13. $\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$ |
| 7. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ | 14. $\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ |

если модальный оператор « $\Box \dots$ » интерпретировать как (a) «необходимо, что ...», (b) «обязательно, что ...», (c) «всегда будет, что ...», (d) «агент x знает, что ...», (e) «агент x считает, что ...», (f) «существует доказательство, что...», (g) «хорошо, что ...»? Как будет читаться двойственный оператор $\Diamond p := \neg \Box \neg p$ в каждом из этих случаев?

Упражнение 1.2. *Докажите в исчислении K следующие теоремы:*

1. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$
2. $\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$
3. $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
4. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
5. $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$
6. $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Diamond p$
7. $(\Box p \rightarrow \Diamond q) \equiv \Diamond(p \rightarrow q)$
8. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
9. $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow q)) \rightarrow \Diamond q$
10. $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
11. $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
12. $(\Diamond p \wedge \Box q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

Упражнение 1.3 (*). Докажите в исчислении K следующие теоремы:

1. $(\Box p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow (\Box q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r))$
2. $(\Box p \wedge \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Diamond(p \wedge r))$

Упражнение 1.4 (*). Методом индукции докажите, что

$$\vdash_K \Box(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \equiv (\Box \varphi_1 \wedge \dots \wedge \Box \varphi_n) \text{ для любого } n \geq 2$$

Упражнение 1.5. Докажите в исчислении KT следующие теоремы:

1. $\Box \Box p \rightarrow \Box p$
2. $\Box p \rightarrow \Diamond p$
3. $\neg \Box \perp$
4. $\Diamond(p \rightarrow \Box p)$

Упражнение 1.6. Докажите в исчислении $S4$ следующие теоремы:

1. $\Box \Box p \equiv \Box p$
2. $\Diamond \Diamond p \equiv \Diamond p$
3. $\Box^n p \equiv \Box p^1$
4. $\Diamond^n p \equiv \Diamond p$
5. $\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$
6. $\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
7. $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$
8. $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box p$
9. $\Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$

Упражнение 1.7. Докажите, что в $S4$ «четырёхэтажные» модальности $\Box \Diamond \Box \Diamond$ и $\Diamond \Box \Diamond \Box$ редуцируются к более простым.

Упражнение 1.8. В каких логических отношениях находятся следующие модальности в логике $S4$: $\Box \Diamond \Box$, $\Diamond \Box \Diamond$, $\Box \Diamond$, $\Diamond \Box$, \Box , \Diamond ? Докажите.

Упражнение 1.9 (*). Докажите следующие теоремы:

¹Здесь степень означает, что оператор повторяется n раз. Например, $\Box^3 := \Box \Box \Box$.

1. $\vdash_{KT5} p \rightarrow \Box \Diamond p$
2. $\vdash_{KT5} \Box p \rightarrow \Box \Box p$
3. $\vdash_{KT4B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
4. $\vdash_{KB4} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
5. $\vdash_{KB5} \Box p \rightarrow \Box \Box p$
6. $\vdash_{KD4B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
7. $\vdash_{KD5B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
8. $\vdash_{K5} \Box(\Box p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
9. $\vdash_{K5} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\Diamond p \wedge q)$
10. $\vdash_{S5} \Box(\Box p \vee q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$
11. $\vdash_{S5} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond(\Diamond p \wedge q)$
12. $\vdash_{K4} \Box(\Diamond p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
13. $\vdash_{K4} (\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\Box p \wedge q)$
14. $\vdash_{S5} \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

Упражнение 1.10 (*). Докажите следующие теоремы в исчислении S5:

1. $\Box(p \vee \Box q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$
2. $\Box(p \vee \Diamond q) \equiv (\Box p \vee \Diamond q)$
3. $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \equiv (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
4. $\Diamond(p \wedge \Box q) \equiv (\Diamond p \wedge \Box q)$

Упражнение 1.11 ()**. Докажите, что

$$\vdash_{K5} \Box(\Box p \rightarrow p)$$

Упражнение 1.12 ()**. Рассмотрим логику

$$S4.3 = S4 + (\Box(\Box p \vee q) \wedge \Box(p \vee \Box q)) \rightarrow (\Box p \vee \Box q).$$

Докажите, что $\vdash_{S4.3} \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$.

Упражнение 1.13 ()**. Логика Гёделя-Лёба (GL) получается добавлением к исчислению K аксиомной схемы

$$\Box(\Box \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box \varphi.$$

1. Сформулируйте двойственную версию этой схемы.
2. Если в двойственной версии формулы Гёделя-Лёба модальные операторы понимать как временные, то как можно содержательно интерпретировать эту формулу?
3. Найдите доказательство для $\vdash_{GL} \Box \perp \vee \Diamond \Box \perp$
4. Докажите, что $\vdash_{GL} \Box p \rightarrow \Box \Box p^2$

²Начните поиск доказательства со следующей подстановки : $\varphi := p \wedge \Box p$.

1.2 Семантика Крипке

Упражнение 1.14. Какие из следующих формул выполняются в отмеченной модели (M, w_1) ? (см.: Рис. 1).

Упражнение 1.15. Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели M_1 (см.: Рис.2).³

Упражнение 1.16. Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели M_2 (см.: Рис.3).

Упражнение 1.17. Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели M_3 (см.: Рис.4).

Упражнение 1.18. Найдите формулу, которая различает модели (M_4, w_1) и (M_5, w_1) . См.: Рис.5.

Упражнение 1.19. Найдите формулу, которая различает модели (M_6, w_1) и (M_7, w_1) . См.: Рис.6.

Упражнение 1.20. Постройте модели для следующих формул в логике K :

- | | |
|--|---|
| 1. $\Diamond p \wedge \Diamond q \wedge \neg \Diamond(p \wedge q)$ | 5. $\Box \perp$ |
| 2. $\Box p \wedge \neg \Box \Box p$ | 6. $\Diamond \Box \perp \wedge \neg \Box \perp$ |
| 3. $\Box p \wedge \neg p$ | 7. $\neg \Box \perp \wedge \Box \Box \perp$ |
| 4. $p \wedge \neg \Box p$ | 8. $\Diamond p \wedge \Diamond \Box \perp$ |

Упражнение 1.21. Постройте контрмодели для следующих формул в логике $S4$:

- | | |
|--|---|
| 1. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$ | 4. $\Box \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$ |
| 2. $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ | 5. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$ |
| 3. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ | 6. $\Diamond p \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$ |

Упражнение 1.22 (*). Используя схему Скотта–Леммона, найдите ограничение на достижимость для следующих схем:

³Онлайн-тренажер с аналогичными упражнениями тут:
<http://pacuit.io/modal/tutorial/>.

$$1. \Box p \rightarrow \Box \Box p$$

$$3. \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$$

$$2. \Box \Box p \rightarrow \Box \Box \Box p$$

$$4. \Diamond p \rightarrow \Box p$$

2 Расширения модальной логики

2.1 2D семантика

Упражнение 2.1. Приведите пример интерпретации и выберите высказывание, которое было бы истинно (a) только в одной строке, (b) только в одном столбце, (c) только по диагонали и (d) во всех ячейках таблицы.

2.2 Модальная логика предикатов

Упражнение 2.2. Рассмотрим две формулы:

$$(a) \exists x \Box P(x) \text{ и } (b) \Box \exists x P(x)$$

(1) Какая из них соответствует модальности *de re*, а какая — *de dicto*?
 (2) Если « \Box » интерпретировать как «известно, что...», а « $P(x)$ » как « x — убийца», то в чем заключается содержательное различие между этими формулами? (3) В каком логическом отношении находятся указанные формулы?

Упражнение 2.3. Рассмотрим следующие формулы:

$$1. \Box \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Box P(x)$$

$$5. \Diamond \exists x P(x) \rightarrow \exists x \Diamond P(x)$$

$$2. \forall x \Box P(x) \rightarrow \Box \forall x P(x)$$

$$6. \exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$$

$$3. \Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$$

$$7. \Box \exists x P(x) \rightarrow \exists x \Box P(x)$$

$$4. \forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$$

$$8. \exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$$

Укажите: (a) вхождение модальности *de re* и *de dicto*; (b) какие формулы являются двойственными друг другу; (c) какие из формул являются «формулами Баркан»; (d) какие формулы можно считать логическими законами (с точки зрения интуиции).

Упражнение 2.4 (*). Рассмотрим исчисление FOI_K (к исчислению для классической логики предикатов FOI добавляются аксиомы и пра-

вила вывода минимальной модальной логики K). Докажите в этом исчислении следующие теоремы⁴:

1. $\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$
3. $\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$
2. $\Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$
4. $\Box \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Box P(x)$

Упражнение 2.5. Постройте контрмодели для следующих формул:

1. $\Box \exists x P(x) \rightarrow \exists x \Box P(x)$
2. $\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

Упражнение 2.6. Докажите в исчислении FOI_K

1. $a = b \rightarrow \Box(a = b)$
2. $\Diamond(a \neq b) \rightarrow a \neq b$

Каковы метафизические следствия указанных законов?

Упражнение 2.7. Докажите в исчислении FOI_{KB}

1. $\Diamond(a = b) \rightarrow a = b$
2. $a \neq b \rightarrow \Box(a \neq b)$

Каковы метафизические следствия указанных законов?

Упражнение 2.8 ().** Докажите, что в исчислении FOI_{S5} выводима формула Баркан.

3 Временная логика

3.1 K_t и ее расширения

Упражнение 3.1. Найдите доказательства для следующих теорем:

1. $\vdash_{K_t} H(p \wedge q) \rightarrow Hp$
3. $\vdash_{K_t} FHp \rightarrow GPr$
2. $\vdash_{K_t} G(p \wedge q) \rightarrow (Gp \wedge Gq)$
4. $\vdash_{K_t} PGp \rightarrow HFp$

Упражнение 3.2. Постройте временные модели, которые различаются следующей формулой (в логике K_t):

⁴Подсказка. Используйте следующий закон FOI: $(\exists x Sx \rightarrow Pa) \equiv \forall x (Sx \rightarrow Pa)$, а также правило генерализации: $\vdash A(x) \Rightarrow \vdash \forall x A(x)$

- | | | |
|--|-----------|---------------------------|
| 1. $Fp \wedge \neg Gp$ | 9. HGp | 17. $Fp \wedge \neg GFp$ |
| 2. $Pp \wedge \neg HPp$ | 10. Gp | 18. $GFp \wedge \neg FGp$ |
| 3. $Hp \wedge \neg H(p \wedge q)$ | 11. FGp | 19. $FGp \wedge \neg Gp$ |
| 4. $PFp \wedge \neg Fp$ | 12. GFp | 20. $Gp \wedge \neg HGp$ |
| 5. $PFp \wedge \neg Pp$ | 13. GHp | 21. $HPp \wedge \neg PHp$ |
| 6. $PFp \wedge \neg Pp \wedge \neg Fp$ | 14. Hp | 22. $PHp \wedge \neg Hp$ |
| 7. $Gp \wedge Hp \wedge \neg p$ | 15. PHp | 23. $Hp \wedge \neg GHp$ |
| 8. $p \wedge H\neg p \wedge GPp$ | 16. HPp | 24. $G\perp \vee FG\perp$ |

Упражнение 3.3 (*). Постройте временные модели, которые различаются следующей формулой (в логике K_t):

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $Pp \wedge \neg PPp$ | 4. $(p \wedge Hp) \rightarrow FHp$ |
| 2. $Fp \wedge \neg FFp$ | 5. $H\neg p \wedge \neg p \wedge FGp \wedge F\neg p \wedge GP\neg p$ |
| 3. $(p \wedge Gp) \rightarrow PGp$ | 6. $G\neg p \wedge \neg p \wedge PHp \wedge P\neg p \wedge HF\neg p$ |

Упражнение 3.4 (*). Найдите доказательства для следующих теорем логики K_t :

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $GPGp \rightarrow GGPp$ | 3. $HFHp \rightarrow HHPp$ |
| 2. $GPGp \equiv Gp$ | 4. $HFHp \equiv Hp$ |

Упражнение 3.5 (*). Найдите доказательства для следующих теорем логики Q_t :

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1. $Gp \rightarrow GPp$ | 2. $Hp \rightarrow HFp$ |
|-------------------------|-------------------------|

Упражнение 3.6 (**). Рассмотрим логику:

$$K_t + FGp \rightarrow GFp + PHp \rightarrow HHPp$$

Докажите, что $GHp \equiv HGr$ – теорема этой логики.

Упражнение 3.7 (***). Докажите, что

$$K_t + Gp \rightarrow GGPp = K_t + Hp \rightarrow HHPp$$

Упражнение 3.8 (*)**. Рассмотрим следующую логику:

$$Q_t = K_t + (4) + (Lin_F) + (Lin_P) + (Dens) + (NoEnd) + (NoBeg),$$

где:

$$\begin{aligned} (4) & \quad Gp \rightarrow GGp \text{ или } Hp \rightarrow HHp \\ (Lin_F) & \quad (Fp \wedge Fq) \rightarrow (F(p \wedge q) \wedge F(p \wedge Fq) \wedge F(Fp \wedge q)) \\ (Lin_P) & \quad (Pp \wedge Pq) \rightarrow (P(p \wedge q) \wedge P(p \wedge Pq) \wedge P(Pp \wedge q)) \\ (Dens) & \quad GGp \rightarrow Gp \text{ или } HHp \rightarrow Hp \\ (NoEnd) & \quad Gp \rightarrow Fp \\ (NoBeg) & \quad Hp \rightarrow Pp \end{aligned}$$

1. Рассмотрим Таблицу 1, которая описывает редукцию «трехэтажных» модальностей в логике Q_t . В таблице строки соответствуют первому оператору, столбцы — второму и третьему, ячейка — результату редукции. Например, первая ячейка описывает следующую редукцию: $PGH \equiv GH$.

Заметим, что таблица описывает некоторые закономерности. Например, $\circ GH \equiv GH$, где $\circ \in \{G, H, P, F\}$, то есть, если цепочка модальных операторов заканчивается сочетанием GH , то любой оператор, стоящий перед этим сочетанием, может быть удален.

Глядя на эту таблицу, сформулируйте полное правило редукции модальных операторов в логике Q_t .⁵

2. Найдите доказательства для всех теорем, соответствующих описываемым таблицей редукциям: $\vdash_{Q_t} PGHp \equiv GHp$, $\vdash_{Q_t} PFHp \equiv PHp$ и т.д.

	GH	FH	PH	HP	GP	FP	HF	GF	FG	PG
P	GH	PH	PH	HP	P	FP	FP	GF	FG	PG
H	GH	H	PH	HP	HP	FP	HF	GF	FG	HG
F	GH	FH	PH	HP	FP	FP	F	GF	FG	FG
G	GH	GH	PH	HP	GP	FP	GF	GF	FG	G

Таблица 1: Редукция «трехэтажных» модальностей в логике Q_t .

⁵Подсказка-1: попробуйте использовать альтернативную нотацию: $\Box := G$, $\Box^- := H$, $\Diamond := F$, $\Diamond^- := P$; подсказка-2: докажите, что $GH \equiv HG$ и $FP \equiv PF$.

Упражнение 3.9 ().** Найдите доказательства для импликативных теорем в логике Q_t , см.: Рис. 7. Для «отсутствующих» импликаций постройте контрмодели.

Упражнение 3.10 (*). Выразите монадические темпоральные операторы $G\varphi$, $H\varphi$, $F\varphi$, $P\varphi$ через диадические $U\varphi\psi$ и $S\varphi\psi$.⁶

3.2 Логика ветвящегося времени (оккамистская)

Упражнение 3.11. Постройте модели (в логике ветвящегося времени) для следующих формул:

- | | |
|---|---|
| 1. $Fp \wedge \neg \Box Fp$ | 5. $P\Diamond p \wedge \Box G\neg p$ |
| 2. $\Diamond Fp \wedge G\neg p$ | 6. $P\Diamond Fp \wedge \neg p \wedge \Box G\neg p$ |
| 3. $P\Diamond p \wedge \neg \Diamond p$ | 7. $H\Diamond Gp \wedge \neg p \wedge \Box G\neg p$ |
| 4. $P\Diamond p \wedge G\neg p$ | 8. $\neg(\Diamond p \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp))$ |

Упражнение 3.12 (*). Докажите (семантически), что формула

$$P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$$

общезначима.

Упражнение 3.13 (*). Какие из формул общезначимы в логике ветвящегося времени. Докажите.

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $P\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond P\varphi$ | 4. $\Box G\varphi \rightarrow G\Box\varphi$ | 7. $\Diamond\varphi \rightarrow \Box P\Diamond F\varphi$ |
| 2. $\Diamond P\varphi \rightarrow P\Diamond\varphi$ | 5. $\Diamond P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$ | 8. $\Box\varphi \rightarrow \Box P\Diamond F\varphi$ |
| 3. $G\Box\varphi \rightarrow \Box G\varphi$ | 6. $\varphi \rightarrow \Box P\Diamond F\varphi$ | 9. $\Box P\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond P\varphi$ |

Упражнение 3.14 ().** Выведите следующую формулу из аксиом логики $K.t$, аксиом $S5$ для \Box и аксиомы неветвления в прошлое $P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$

$$G\Box\varphi \rightarrow \Box G\varphi$$

⁶Подсказка от У.Х. Одена:

*I'll love you, dear, I'll love you.
Till China and Africa meet,
And the river jumps over the mountain.
And the salmon sing in the street.*

4 Деонтическая логика

Упражнение 4.1. Сформулируйте: (1) парадокс Росса, (2) парадокс Прайора, (3) парадокс «доброго самаритянина», (4) парадокс Чизхолма, (5) закон Канта.

Упражнение 4.2. Постройте доказательство для формулы, соответствующей парадоксу Росса (логика K).

Упражнение 4.3. В каких логических отношениях находятся следующие формулы (KD): Op , $Pp \wedge P\neg p$, $O\neg p$, Pp , $P\neg p$, $Op \vee O\neg p$?

Упражнение 4.4. Осуществите редукцию Андерсона для следующих формул: (1) $Fp \wedge Oq$, (2) $F(p \wedge q) \wedge Pp \wedge Pq$.

5 STIT-логика

Упражнение 5.1. Постройте модели для следующих формул:

1. $[cstit]_ap \wedge \neg[cstit]_bp$
2. $[cstit]_ap \wedge \neg[cstit]_aq$
3. $[cstit]_ap \wedge \neg[dstit]_ap$
4. $[dstit]_ap \wedge \neg[dstit]_a(p \vee q)$
5. $[dstit]_a(p \wedge q) \wedge \neg[dstit]_ap$
6. $\neg[cstit]_ap \wedge \Diamond[cstit]_ap$
7. $[cstit]_{abp} \wedge \neg([cstit]_{ap} \vee [cstit]_{bp})$
8. $Op \wedge \neg O[cstit]_ap$

Упражнение 5.2 (*). Постройте модели для следующих формул:

1. $[cstit]_{abcp} \wedge \neg([cstit]_{abp} \vee [cstit]_{bcp} \vee [cstit]_{acp})$
2. $\neg[cstit]_{abp} \wedge \neg\Diamond[cstit]_ap \wedge \neg\Diamond[cstit]_bp \wedge \Diamond[cstit]_{abp}$
3. $Op \wedge \Diamond[cstit]_ap \wedge \neg O[cstit]_ap$
4. $O[cstit]_{abcp} \wedge \neg(O[cstit]_{abp} \vee O[cstit]_{bcp} \vee O[cstit]_{acp})$

6 Эпистемическая логика

6.1 Эпистемическая логика (статическая)

Упражнение 6.1. Построить модель для следующих формул:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $p \wedge \neg K_a p$ | 3. $K_a p \wedge \neg K_b p$ |
| 2. $K_a p \wedge \neg K_a q$ | 4. $K_a p \wedge \neg K_a q \wedge K_b q \wedge \neg K_b p$ |

Упражнение 6.2. Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

- | | |
|---|--|
| 1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$ | 8. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$ |
| 2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$ | 9. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$ |
| 3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$ | 10. $K_b K_a \varphi \wedge K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a K_b K_a \varphi$ |
| 4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$ | 11. $E_{ab} p \wedge K_a K_b p \wedge \neg K_b K_a p$ |
| 5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$ | 12. $E_{ab} p \wedge \neg K_a K_b p \wedge \neg K_b K_a p$ |
| 6. $K_a \varphi \wedge K_a (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$ | 13. $E_{ab}^2 p \wedge K_a K_b K_a p \wedge \neg K_b K_a K_b p$ |
| 7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$ | 14. $E_{ab}^2 p \wedge \neg K_a K_b K_a p \wedge \neg K_b K_a K_b p$ |

Упражнение 6.3. Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала следующую ситуацию:

1. На столе лежит конверт, в котором возможно лежит письмо (пусть $p :=$ «в конверте лежит письмо»). Ни Аня, ни Борис не знают, есть ли конверт или нет.
2. Аня и Борис вместе открывают конверт.
3. Аня на глазах Бориса открывает конверт, но не показывает его содержимое Борису.
4. Борис вышел в другую комнату, а затем вернулся. За это время Аня могла посмотреть содержимое конверта.
5. Сначала Борис вышел в другую комнату и вернулся, а потом Аня вышла в другую комнату и вернулась. Каждый из них мог открыть конверт.

Упражнение 6.4. Найдите формулы которые различают модели в упражнении 6.3.⁷ Используйте оператор общего знания C_{ab} ⁸.

Упражнение 6.5. Постройте модели, которые бы различались следующей формулой:

1. $B_ap \wedge \neg p$
2. $B_ap \wedge \neg K_ap \wedge p$
3. $\neg B_ap \wedge \neg B_a \neg p$
4. $\neg B_ap \wedge \neg B_a q \wedge B_a(p \rightarrow q)$
5. $\neg K_a q \wedge B_a q \wedge \neg B_ap \wedge \neg B_a \neg p$
6. $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_ap \wedge B_b \neg p$
7. $K_ap \wedge \neg K_a^? q \wedge B_a q \wedge K_b q \wedge \neg K_b^? p \wedge B_b \neg p$
8. $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge \neg B_ap \wedge \neg B_a \neg p \wedge B_b K_ap$
9. $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_ap \wedge B_bp \wedge B_b B_a \neg p$
10. $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_ap \wedge B_bp \wedge B_b(\neg B_a \neg p \wedge \neg B_ap)$
11. $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_ap \wedge B_b \neg p \wedge B_b B_a \neg p \wedge B_a B_bp$
12. $\neg B_a^q p \wedge B_a(q \rightarrow p)$

Упражнение 6.6. Постройте модели для выполнимых формул, для невыполнимых – докажите, что это невозможно:

- | | |
|--|--|
| 1. $E_{abc}\varphi \wedge \neg K_a K_b \varphi$ | 7. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$ |
| 2. $E_{ab}\varphi \wedge \neg E_{ab}^2 \varphi$ | 8. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$ |
| 3. $D_{ab}\varphi \wedge \neg K_a \varphi \wedge \neg K_b \varphi$ | 9. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$ |
| 4. $C_{ab}\varphi \wedge \neg K_c \varphi$ | 10. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$ |
| 5. $E_{ab}^2 \varphi \wedge \neg C_{ab} \varphi$ | 11. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$ |
| 6. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$ | 12. $K_b K_a \varphi \wedge K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a K_b K_a \varphi$ |

⁷Важно, что речь идет именно о модели, а не *отмеченной* модели, то есть, формула должна выполняться в модели целиком (в каждом из миров этой модели).

⁸Также удобно использовать следующее сокращение: $K_i^? \varphi := K_i \varphi \vee K_i \neg \varphi$.

- | | |
|--|---|
| 13. $C_{ab}p \wedge C_{ac}p \wedge C_{bc}p \wedge \neg C_{abc}p$ | 19. $B_a^+ \varphi \wedge B_a^s \varphi$ |
| 14. $B_a K_a \varphi \wedge B_a \neg \varphi$ | 20. $B_a^+ \varphi \wedge \neg B_a^s \varphi$ |
| 15. $B_a^p r \wedge B_a^q r \wedge \neg B_a^{p \wedge q} r$ | 21. $\neg B_a^+ \varphi \wedge B_a^s \varphi$ |
| 16. $\neg B_a^p r \wedge B_a^{p \wedge q} r$ | 22. $\neg B_a^+ \varphi \wedge \neg B_a^s \varphi \wedge B_a \varphi$ |
| 17. $\neg B_a^\psi \varphi \wedge B_a(\psi \rightarrow \varphi)$ | 23. $B_a^s p \wedge B_a^s q \wedge \neg B_a^s(p \wedge q)$ |
| 18. $B_a^\psi \varphi \wedge \neg B_a(\psi \rightarrow \varphi)$ | 24. $\neg B_a^s p \wedge B_a^s(p \wedge q)$ |

Упражнение 6.7 ().** Вспомните сказку о новом платье короля. Какая формула наилучшим образом описывает эту ситуацию?

Упражнение 6.8 (*)**. Какие аксиомы (из набора $K, T, D, B, 4, 5$) являются корректными для операторов « K_i », « $K_i^?$ », « B_i^+ », « B_i^s », « B_i^ψ »? Докажите. При помощи кругов Эйлера укажите в каких отношениях находятся множества всех моделей, в которых истинна формула $\Box p$, где \Box – один из указанных операторов.

Упражнение 6.9 (*)**. Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала ситуацию аналогичную ситуации в 6.3.5 только с тремя агентами — Аня, Борис и Семен. Агенты выходят по одному, оставшиеся два агента всегда действуют вместе, что является общим знанием для всех троих.

Упражнение 6.10 (*). Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала следующую ситуацию:

Аня рассказала Борису страшный секрет, Борис рассказал его Семену, но попросил Семена не говорить Ане о факте их разговора. Семен рассказал Ане, что Борис попросил не говорить ей о факте его разговора с ним.

Знает ли Аня, что Семен знает, что Борис знает, что Аня знает страшный секрет?

Упражнение 6.11 (*)**. Экономист А. Бранденбургер и математик Х. Кайслер сформулировали интересный парадокс – следующее сочетание доклатических установок невозможно:

«Ann believes that Bob assumes that Ann believes that Bob's assumption is wrong».⁹

⁹См.: Brandenburger A., Keisler H.J. An Impossibility Theorem on Beliefs in Games // Studia Logica. 2006. Vol. 84, № 2. P. 211–240.

Попытайтесь средствами эпистемической и доксатической логики продемонстрировать парадоксальность данного высказывания.

6.2 Динамическая эпистемическая логика

Упражнение 6.12. *При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:*

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1. Папа: «Кто-то из вас знает, чумазый он или нет?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Аня: «Я знаю!»

Борис: «И я знаю!»

Семен: «Ну тогда все понятно: я - ...!»

Чумазый Семен или нет? А Борис и Аня? Как они догадались?

2. Папа: «Кто-то из вас знает, чумазый он или нет?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Дети: «Да!»

Как они догадались?

Упражнение 6.13. *При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:*

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат:

- 15 мая
- 16 мая
- 19 мая
- 17 июня
- 18 июня
- 14 июля
- 16 июля
- 14 августа
- 15 августа
- 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту — месяц.

«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.

«Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю», — возразил Бернард.

На это Альберт ответил: «Тогда я тоже знаю, когда у Шерил День рождения».

Когда же у Шерил день рождения?

Упражнение 6.14 ().** При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

В баре сидят трое логиков. Официантка спрашивает у них : «Все будут пиво?».

Первый логик: «Я не знаю!».

Второй логик: «Я не знаю!».

Третий логик: «Да!».

Как они рассуждали?

Упражнение 6.15 ().** При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

Ведущий объявляет двум незнакомцам Эбби и Барри: «Вы знаете день недели, в который вы родились, но не день недели, в который родился другой. Тем не менее, я могу сказать вам, что вы родились в смежные дни, и что Барри не родился в понедельник.» Затем он продолжает спрашивать Эбби и Барри поочередно, могут ли они вывести, какой день недели другой человек родился и получает такие ответы:

Эбби: «Нет».

Барри: «Нет».

Эбби: «Нет».

Барри: «Нет».

Эбби: «Нет».

В какой день недели родилась Эбби?

Упражнение 6.16 (**). При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

Альберт, Бернард и Шерил подружились с Денисом, и захотели узнать, когда у него День Рождения. Денис дал им список из 20 возможных дат:

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| • 17 Февраля 2001 | • 18 Февраля 2004 | • 11 Апреля 2003 |
| • 16 Марта 2002 | • 13 Апреля 2001 | • 14 Июля 2004 |
| • 13 Января 2003 | • 14 Мая 2002 | • 17 Июня 2001 |
| • 19 Января 2004 | • 14 Марта 2003 | • 16 Августа 2002 |
| • 13 Марта 2001 | • 19 Мая 2004 | • 16 Июля 2003 |
| • 15 Апреля 2002 | • 15 Мая 2001 | • 18 Августа 2004 |
| • 16 Февраля 2003 | • 12 Июня 2002 | |

Затем Денис сказал Альберту, Бернарду и Шерил отдельно месяц, день и год рождения соответственно. Между ними состоялся следующий разговор:

Альберт: «Я не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Бернард не знает».

Бернард «Я до сих пор не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Шерил все еще не знает».

Шерил: «Я до сих пор не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Альберт до сих пор не знает».

Альберт: «Теперь я знаю, когда у Денса День Рождения».

Бернард: «Теперь я тоже знаю».

Шерил: «Я тоже знаю».

Итак, когда День Рождения Дениса?

Упражнение 6.17 (**). Составьте новую задачу по типу задачи о Дне Рождения Шерил.

Упражнение 6.18. Опишите результат информационного обновления модели, см.: Рис. 8:

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\mathcal{M}^!p$ | 4. $\mathcal{M}^{!(p \rightarrow q)}$ |
| 2. $\mathcal{M}^!q$ | 5. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |
| 3. $\mathcal{M}^{!(p \wedge q)}$ | 6. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |

Упражнение 6.19. Опишите результат информационного обновления модели, см.: Рис. 9:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\mathcal{M}^!p$ | 2. $\mathcal{M}^!q$ | 3. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ | 4. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |
|---------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------|

Упражнение 6.20 (**). Динамическая эпистемическая логика обладает следующим интересным свойством: для любой формулы динамической эпистемической логики можно найти эквивалентную ей формулу статической эпистемической логики, пользуясь следующими аксиомами редукции:

- $[\!|\varphi|]p \equiv (\varphi \rightarrow p)$, где p – пропозициональная переменная
- $[\!|\varphi|]\neg\psi \equiv \varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|]\psi$
- $[\!|\varphi|](\psi \wedge \chi) \equiv [\!|\varphi|]\psi \wedge [\!|\varphi|]\chi$
- $[\!|\varphi|]K_i\psi \equiv \varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi|]\psi$

Найдите результат редукции для следующих формул:

- | | | |
|-----------------------|---------------------|----------------------------------|
| 1. $[!p](q \wedge r)$ | 3. $[!p](q \vee r)$ | 5. $[!K_ap](q \wedge r)$ |
| 2. $[!K_ap]K_bq$ | 4. $[!p]K_a^?q$ | 6. $[!\neg K_ap]K_b(q \wedge r)$ |

7 Многозначные логики

Упражнение 7.1. Являются ли указанные формулы законами трехзначной логики Лукасевича?

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $\neg(p \wedge \neg p)$ | 4. $p \rightarrow (p \vee \neg p)$ |
| 2. $p \vee \neg p$ | 5. $(p \wedge \neg p) \rightarrow p$ |
| 3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ | 6. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ |

8 Интуиционистская логика

Упражнение 8.1. Какие из указанных формул НЕ являются законами интуиционистской логики высказываний? (Постройте для таких формул контрмодели).

- | | |
|---|---|
| 1. $\neg\neg p \rightarrow p$ | 12. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ |
| 2. $p \rightarrow \neg\neg p$ | 13. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ |
| 3. $p \vee \neg p$ | 14. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ |
| 4. $\neg p \vee \neg\neg p$ | 15. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$ |
| 5. $\neg(p \wedge \neg p)$ | 16. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ |
| 6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ | 17. $(p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ |
| 7. $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ | 18. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ |
| 8. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ | 19. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$ |
| 9. $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$ | 20. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$ |
| 10. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | 21. $(p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ |
| 11. $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ | 22. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ |

Упражнение 8.2 (*). Найдите результат перевода в $S4$ для следующих формул интуиционистской логики высказываний:

1. $\neg p$

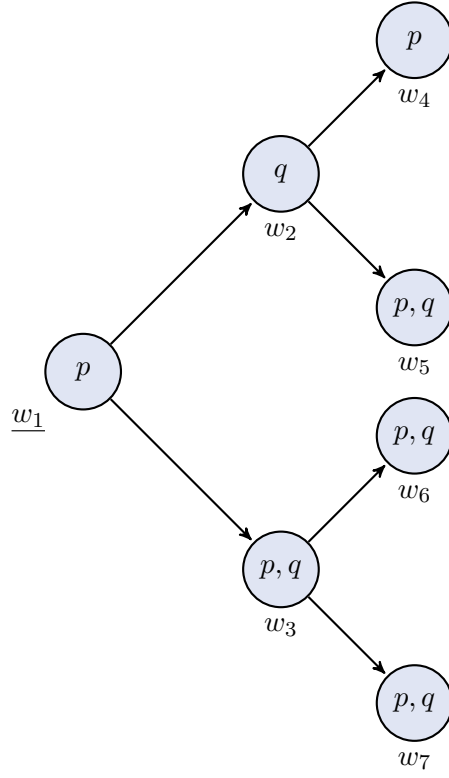
3. $p \wedge \neg q$

5. $p \rightarrow \neg\neg p$

2. $\neg\neg p$

4. $p \rightarrow q$

6. $\neg\neg p \rightarrow p$



- | | | | |
|----------------------------|------------------------------------|---|-------------------------------------|
| 1. p | 10. $\Box(q \rightarrow p)$ | 19. $\Diamond\Diamond(p \rightarrow q)$ | 28. $\Diamond\Box(p \wedge q)$ |
| 2. q | 11. $\Diamond p$ | 20. $\Diamond\Diamond(q \rightarrow p)$ | 29. $\Diamond\Box(p \rightarrow q)$ |
| 3. $p \wedge q$ | 12. $\Diamond q$ | 21. $\Box\Box p$ | 30. $\Diamond\Box(q \rightarrow p)$ |
| 4. $p \rightarrow q$ | 13. $\Diamond(p \wedge q)$ | 22. $\Box\Box q$ | 31. $\Box\Diamond p$ |
| 5. $q \rightarrow p$ | 14. $\Diamond(p \rightarrow q)$ | 23. $\Box\Box(p \wedge q)$ | 32. $\Box\Diamond q$ |
| 6. $\Box p$ | 15. $\Diamond(q \rightarrow p)$ | 24. $\Box\Box(p \rightarrow q)$ | 33. $\Box\Diamond(p \wedge q)$ |
| 7. $\Box q$ | 16. $\Diamond\Diamond p$ | 25. $\Box\Box(q \rightarrow p)$ | 34. $\Box\Diamond(p \rightarrow q)$ |
| 8. $\Box(p \wedge q)$ | 17. $\Diamond\Diamond q$ | 26. $\Diamond\Box p$ | 35. $\Box\Diamond(q \rightarrow p)$ |
| 9. $\Box(p \rightarrow q)$ | 18. $\Diamond\Diamond(p \wedge q)$ | 27. $\Diamond\Box q$ | |

Рис. 1: Модель (\mathcal{M}, w_1)

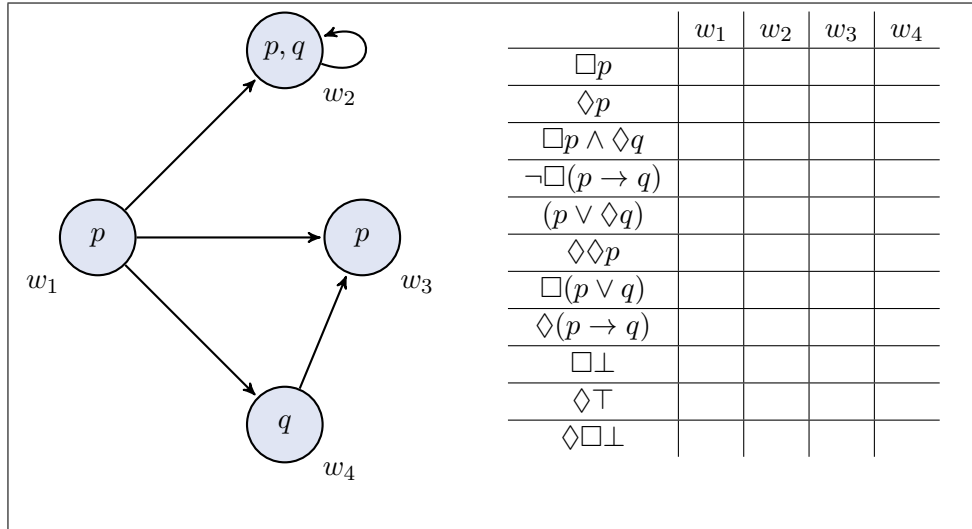


Рис. 2: Модель \mathcal{M}_1

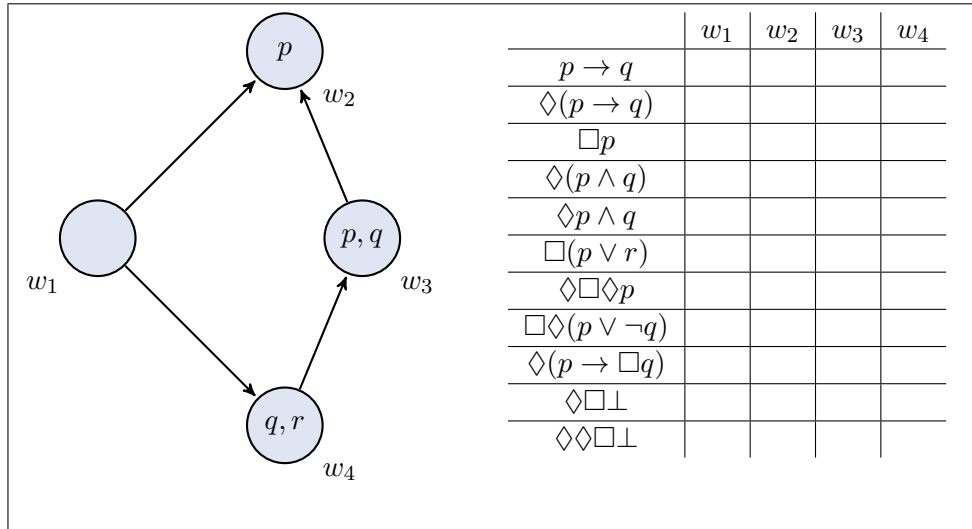


Рис. 3: Модель \mathcal{M}_2

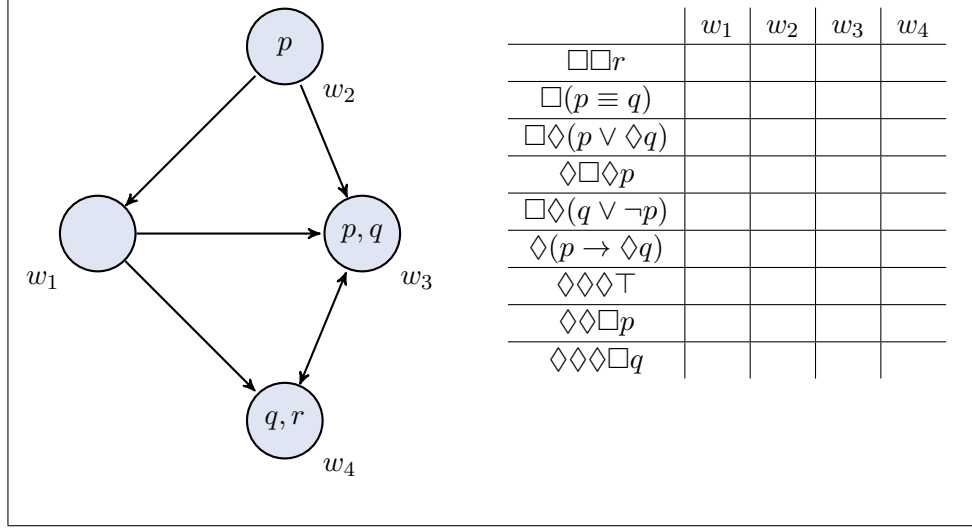


Рис. 4: Модель \mathcal{M}_3

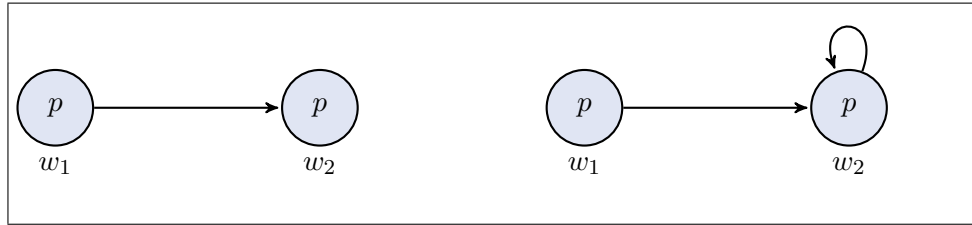


Рис. 5: Модели (\mathcal{M}_4, w_1) и (\mathcal{M}_5, w_1)

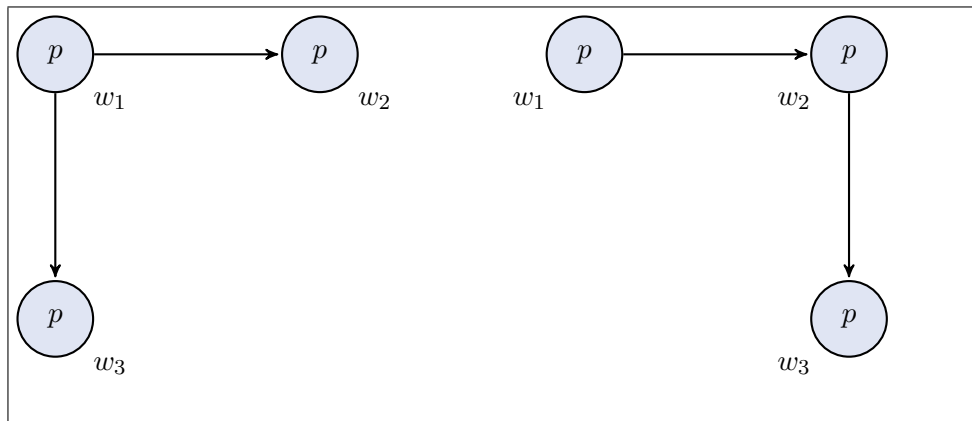


Рис. 6: Модели (\mathcal{M}_6, w_1) и (\mathcal{M}_7, w_1)

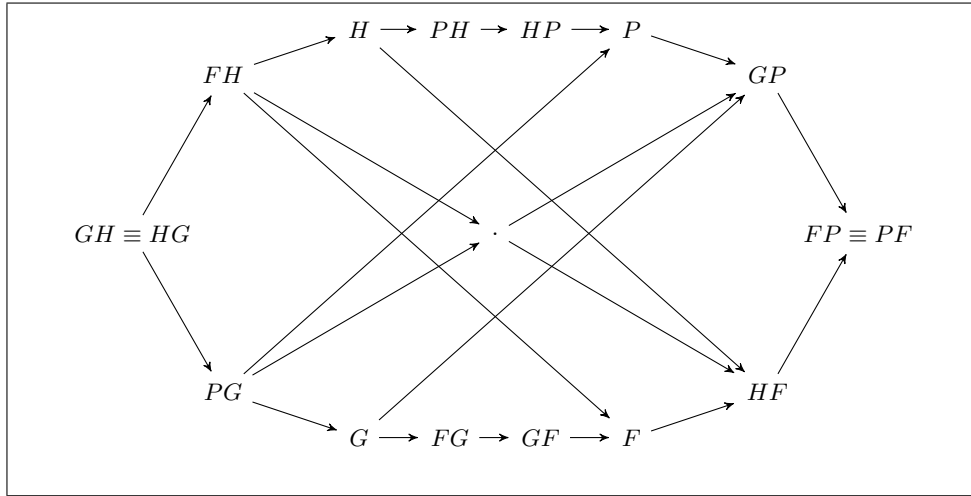


Рис. 7: 15 модальностей логики Q_t .

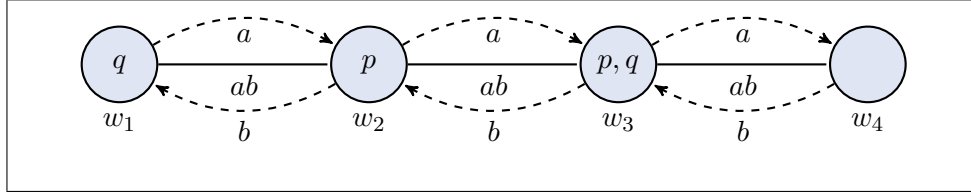


Рис. 8: Информационное обновление

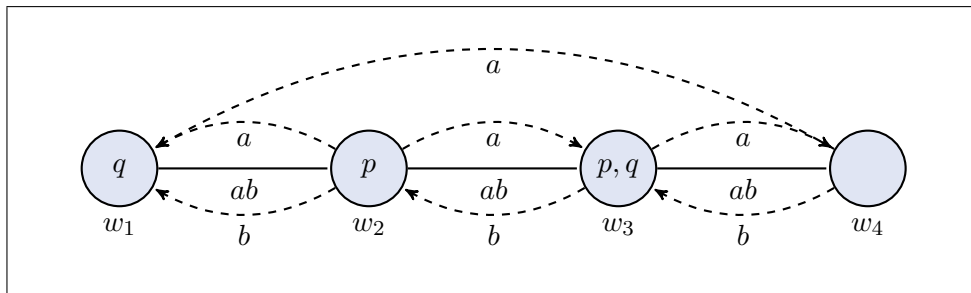


Рис. 9: Информационное обновление