

Сложные случаи: $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$, $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$, $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Сложные случаи

- Как аксиоматизировать $\mathcal{PAL}\text{-}C$?
- Как связаны $[\!|\varphi|]$ и $C_G\psi$
- Есть ли аксиома редукции для $[\!|\varphi|]\psi$?

Утверждение 1: Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p \rangle \neg q$



Пути

Определение 1. Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует **G -путь** из x в y (обозначение: $x \sim_G y$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$.

Определение 2. Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует **G - φ -путь** из x в y (обозначение: $x \sim_{G, \varphi} y$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ и $M, x \models \varphi, M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$.

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Упражнение 1. Докажите, что $\left(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{\!|\varphi|}\right)^+ = \sim_{G,\varphi}$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{|\varphi|})^* y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{|\varphi|})^* y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{|\varphi|})^* y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi}{\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi}$$

1	$(a) \models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi, (b) \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi$	
2	$\boxed{M, x} \quad M, x \models \chi$	$\triangleright M, x \models [!\varphi]C_G \psi \Leftrightarrow \triangleright \forall y (x \sim_{G, \varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y} \quad x \sim_{G, \varphi} y$	$\triangleright M, y \models [!\varphi]\psi$
4	$x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ т.ч.	
5	$i_1, \dots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $x \sim_{G, \varphi} y$
6	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M, x \models E_G \chi$	1b, 6 по MP
8	$M, x \models K_{i_1} \chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	\vdots	повторяем 6–9 для y_2, \dots, y_n
11	$M, y \models \chi$	из 10
12	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y (x \sim_{G, \varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	$\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M, x \models [!\varphi]C_G \psi$	def
15	$\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi$	$\forall \Rightarrow$ 2–14

Упражнение

Переписать предыдущее доказательство в более строгом виде: индукцией по n в пункте $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ и далее.

Исчисление *PALC*

- Аксиомные схемы $S5_m-C$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi$
- Правила вывода: MP , NEC для K_i
- Правило вывода:

$$\frac{\chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi}{\chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi}$$

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание $cl(\varphi)$
- $s(\varphi)$ переопределить
- Случай $[!\varphi]C_G\psi$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \rightarrow K_iC_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow [!\varphi]K_iC_G\psi$
3. $[!\varphi]K_iC_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ – замыкание некоторой формулы, $M^\Phi = (W^\Phi, (R_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – конечная каноническая модель, $X \in W^\Phi$ тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство

Будем доказывать (возвратной) индукцией по $c(\varphi')$.

Предположение индукции Обозначим $c(\varphi') = n$.

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^\Phi, X \models \psi)$$

Шаг индукции Рассмотрим следующие случаи.

Сл.1 $\varphi' = p$

Сл.2 $\varphi' = \neg \varphi$

Сл.3 $\varphi' = \varphi \wedge \psi$

Сл.4 $\varphi' = K_i \varphi$

Сл.5 $\varphi' = C_G \varphi$

Сл.6 $\varphi' = [\varphi] \psi$

Сл.6a $\varphi' = [\varphi] p$

Сл.6b $\varphi' = [\varphi] \neg \psi$

Сл.6c $\varphi' = [\varphi] (\psi \wedge \chi)$

Сл.6d $\varphi' = [\varphi] K_i \psi$

Сл.6e $\varphi' = [\varphi] [\psi] \chi$

Сл.6f $\varphi' = [\varphi] C_G \psi p$

Сл. 6а-6е

- Сл.6а $c(\varphi \rightarrow p) < c([!\varphi]p)$
 $[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow p) \in X \Leftrightarrow M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow p \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]p$
- Сл.6b–d. Упражнение.
- Сл.6е

Случай 6f \Rightarrow

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (X \sim_{G,\varphi} Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$
2	$\boxed{Y} X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$
3	$X \sim_{i_1}^\Phi Y_1 \sim_{i_2}^\Phi \dots \sim_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч. $i_1, \dots, i_n \in G$ и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$	из 2 по опр.
4	$\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$	ПИ
5	$\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по МР
7	$X \sim_{i_1}^\Phi Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	\vdots	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \rightarrow [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$	ПИ
13	$\forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 $\forall Y \Rightarrow$

Случай 6f \Leftarrow

Лемма $(\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \neg \underline{Y}$

Достаточно доказать, для любых $X \in S, Y \in \bar{S}, i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \in S$	9	$X \sim_i^\Phi Y$	
2	$Y \in \bar{S}$	10	$M^\Phi, X \models \varphi$	из 6 по ПИ
3	$\nVdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y} \triangleright \langle \perp \rangle$	11	$\models [! \varphi] C_G \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i [! \varphi] C_G \psi)$	
4	$\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nVdash \perp$	12	$M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow K_i [! \varphi] C_G \psi$	
5	$X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	13	$M^\Phi, X \models K_i [! \varphi] C_G \psi$	
6	$X, \varphi \nVdash \perp$	14	$M^\Phi, Y \models [! \varphi] C_G \psi$	
7	$\varphi \in X$	15	$Y \in S$	
8	$X, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	16	$\langle \perp \rangle$	1, 14

Как быть с RE ?

$[!\varphi][!\psi]\chi$

Аксиомы редукции

- $\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$
- $\mathcal{EL-D} \equiv \mathcal{PAL-D}$
- $\mathcal{EL-C} \prec \mathcal{PAL-C}$
- $\mathcal{EL-C}+? \equiv \mathcal{PAL-C} +?$
- $\mathcal{EL-RC} \equiv \mathcal{PAL-RC}$

Условное общее знание

Определение 3. $M, x \models C_G^\psi \varphi$ е.т.е. $\forall y (x (\bigcup_{i \in G} \sim_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Утверждение: Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G \varphi \equiv C_G^\top \varphi$$

Доказательство: упражнение

Определение 3. Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G - φ -путь из x в y (обозначение: $R_{G,+\varphi}$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$ и $M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$.

$M, x \models C_G^\psi \varphi$ е.т.е. $\forall y (xR_{G,\psi}y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Исчисление для условного общего знания

Исчисление $S5_m-RC$

Аксиомные схемы:

($S5_K$) Аксиомные схемы $S5$ для K_i

(K_{RC}) $C_G^X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G^X\varphi \rightarrow C_G^X\psi)$

(mix_{RC}) $C_G^\psi\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi))$

(ind_{RC}) $C_G^\psi(\varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow C_G^\psi\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} MP$$

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi} G_K$$

$$\frac{\varphi}{C_G^\psi\varphi} G_{CK}$$

Некоторые полезные теоремы

Упражнение. Найдите доказательства для следующих теорем исчисления $S5_m$ -RC:

1. $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)$
2. $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi))$
3. $C_G^\varphi \varphi$
4. $C_G^\psi \varphi \rightarrow C_G^\psi C_G^\psi \varphi$
5. $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \varphi)$
6. $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \rightarrow \varphi)$

Полнота $S5_m$ - RC

Сборка доказательства.

- $\Phi = cl(\varphi)$
- Лемма об истинности: случай $C_G^\psi \varphi$

Замыкание

Определение. К определению Φ добавляем правило

- $C_G^\psi \varphi \in \Phi \Rightarrow \{K_i(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi)) \mid i \in G\} \subset \Phi$

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi. (\Rightarrow)$

1	$C_G^\psi \varphi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (X(R_{G,+}^\Phi)Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y} X(R_{G,+}^\Phi)Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models \varphi$
3	$XR_{i_1}^\Phi Y_1 R_{i_2}^\Phi \dots R_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч.	
4	$\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq G$	
5	$M^\Phi, Y_1 \models \psi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \psi$	
6	$\psi \in Y_1, \dots, \psi \in Y_n$	по ПИ
7	$K_{i_1}(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi)) \in X$	
8	$\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi) \in Y_1$	
9	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_1$	
10	повторяем до $Y_n = Y$	
11	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_n$	
12	$\varphi \in Y_n$	
13	$M^\Phi, Y \models \varphi$	по ПИ

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi$. (\Leftarrow)

- $\underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Утверждение. $\vdash \underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$.

Доказательство.

Достаточно доказать, что $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \chi)$ для $i \in G$. Вспомним, что $\chi \leftrightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}$. Тогда, нам нужно доказать, что $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\})$, что эквивалентно $\vdash \underline{X} \rightarrow \bigwedge \{K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \mid Y \in \overline{S}\}$. Значит, достаточно доказать, что для $Y \in \overline{S}$: $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$. □

Утверждение. Пусть $X \in S$, $Y \in \underline{S}$, тогда $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$

1	$X \in S, Y \in \underline{S}$	9	$XR_i^\Phi Y$	8 по утв. (*)
2	$M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$	10	$\psi \in Y$	8 по утв. (*)
3	$M^\Phi, Y \not\models C_G^\psi \varphi$	11	$X \models K_i(\psi \rightarrow C_G^\psi \varphi)$	
4	$\nmid \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \quad \triangleright \text{«}\perp\text{»}$	12	$Y \models \psi \rightarrow C_G^\psi \varphi$	
5	$\underline{X} \nmid K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$	13	$Y \models \psi$	по ПИ
6	$\underline{X} \nmid \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \rightarrow \perp$	14	$Y \models C_G^\psi \varphi$	
7	$\underline{X}, \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \nmid \perp$	15	$\text{«}\perp\text{»}$	
8	$\underline{X}, \hat{K}_i(\psi \wedge \underline{Y}) \nmid \perp$	16	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$	

Утверждение (*). Пусть $X, Y \in W^\Phi$, тогда

$$\underline{X}, \hat{K}_i(\varphi \wedge \underline{Y}) \not\models \perp \Rightarrow (XR_i^\Phi Y \text{ и } \varphi \in Y)$$

Аксиома редукции для условного общего знания

Исчисление $S5_m[]$ -RC (PAL -RC)

($S5_mRC$) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления $S5_mRC$

$$(R_{RC}) \quad [!\varphi]C_G^x\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G^{\varphi \wedge [!\varphi]x}[!\varphi]\psi)$$

Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

Упражнение

Для формулы $[!p]C_Gq$ найдите эквивалентную, но из языка \mathcal{EL} -RC.

Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \rightarrow K_a \neg p)]C_{ab} \neg p$$

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

- $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$

$$C_{ab}^p \neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]