

Языки, семантика и исчисления

22 июля 2022 г.

1 Языки

1.1 Эпистемические языки

(\mathcal{EL})	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{CD})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi \mid D_G\varphi$
(\mathcal{PAL})	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{D})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{CD})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G\varphi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G^\psi\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G^\psi\varphi$

Ag – конечное множество агентов, Var – счетное множество пропозициональных переменных, $i \in Ag$, $G \subseteq Ag$, $p \in Var$

1.2 Сокращения

- $\varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\top := \neg\perp$
- $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\hat{K}_i\varphi := \neg K_i\neg\varphi$
- $\perp := p \wedge \neg p$
- $\langle !\varphi \rangle \psi := \neg[!\varphi]\neg\psi$

2 Семантика

2.1 Модель Крипке

$$M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$$

2.2 Ограничения на \sim_i

2.3 Семантика операторов

Базовая логика:

- $M, x \models p$ е.т.е.
- $M, x \models \neg\varphi$ е.т.е.
- $M, x \models \varphi \wedge \psi$ е.т.е.

Статические операторы:

- $M, x \models K_i\varphi$ е.т.е.
- $M, x \models D_G\varphi$ е.т.е.
- $M, x \models C_G\varphi$ е.т.е.
- $M, x \models C_G^\psi\varphi$ е.т.е.

Динамический оператор (публичное обновление)

- $M, x \models [!\varphi]\psi$ е.т.е. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models \psi$

Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, определим обновленную модель

$$M^{!\varphi} = (W^{!\varphi}, (\sim_i^{!\varphi})_{i \in Ag}, V^{!\varphi})$$

где

- $W^{!\varphi} := \{w \in W \mid M, w \models \varphi\}$
- $\sim_i^{!\varphi} := \sim_i \cap (W^{!\varphi} \times W^{!\varphi})$
- $V^{!\varphi}(p) := V(p) \cap W^{!\varphi}$

3 Исчисления

3.1 K_m

Аксиомные схемы:

- Тавтологии КЛВ

$$(K) \quad K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\frac{\varphi}{K_i \varphi}$$

3.2 K'_m

3.3 KT_m

3.4 KB_m

3.5 $K4_m$

3.6 $K5_m$

3.7 $S4_m$

3.8 $S5_m$

3.9 $S5_m C$

- Все тавтологии КЛВ
- Аксиомы S5 для каждого оператора K_i
- $(K_C) C_G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G \varphi \rightarrow C_G \psi)$
- $(fix) C_G \varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge C_G \varphi)$
- $(ind) C_G(\varphi \rightarrow E_G \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow C_G \varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ MP}$$

$$\frac{\varphi}{K_i \varphi}$$

$$\frac{\varphi}{C_G \varphi}$$

3.10 $S5_m C'$

Аксиомные схемы:

1. Все тавтологии КЛВ
2. Аксиомные схемы S5 для оператора K_i
3. $(fix) C_G \varphi \rightarrow E_G(\varphi \wedge C_G \varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ MP}$$

$$\frac{\varphi}{K_i \varphi}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow E_G(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \rightarrow C_G \psi} \text{ ind}_R$$

3.11 $S5_m D$

3.12 $S5_m RC$

3.13 $PAL (= S5_m \Box)$

- Аксиомные схемы $S5_m$
- $[\!|\varphi|]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[\!|\varphi|]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|]\psi)$
- $[\!|\varphi|](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\!|\varphi|]\psi \wedge [\!|\varphi|]\chi)$
- $[\!|\varphi|]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi|]\psi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{[\!|\chi|]\varphi \rightarrow [\!|\chi|]\psi} \text{ RE!}$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\frac{\varphi}{K_i \varphi}$$

3.14 PAL'

В исчислении PAL заменяем правило $RE!$ на следующую аксиомную схему

$$(\text{comp}) \quad [\!|\varphi|][\!|\psi|]\chi \leftrightarrow [\!|(\varphi \wedge [\!|\varphi|]\psi)|]\chi$$

3.15 $PAL-C (= S5_m \Box C)$

$S5_m C + PAL +$

3.16 $PAL-D (= S5_m \Box D)$

3.17 $PAL-RC (= S5_m \Box RC)$