Сложные случаи: PALC, S5CD, PALCD

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Определение (G–путь, $x \sim_G y$)

Пусть $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$. Будем говорить, что существует G–путь из x в y (обозначение: $x \sim_G y$), если найдутся такие $y_1, \ldots y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \cdots \sim_{i_n} y_n = y$.

Определение (G–φ–путь)

Пусть $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$. Будем говорить, что существует G–φ–путь из x в y (обозначение: $x \sim_{G,\varphi} y$), если найдутся такие $y_1, \ldots y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что 1) $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \cdots \sim_{i_n} y_n = y$ и 2) $M, x, y_1, \ldots, y_n \models \varphi$.

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Упражнение

Докажите, что $\left(\bigcup_{i\in G} \sim_i^{!\varphi}\right)^* = \sim_{G,\varphi}$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \land x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \land x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \land M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

◀

PALC

Утверждение

Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p\rangle\neg q$

$\square$

Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \to [!\varphi]\psi \qquad \models (\chi \land \varphi) \to E_G\chi}{\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

1	(*a*) $\models \chi \to [!\varphi]\psi$, (*b*) $\models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi$	
2	$\boxed{M, x}$ $M, x \models \chi$	$\triangleright\ M, x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y}$ $x \sim_{G,\varphi} y$	$\triangleright\ M, y \models [!\varphi]\psi$
4	$x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \cdots \sim_{i_n} y_n = y$ т.ч.	
	$i_1, \ldots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \ldots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $x \sim_{G,\varphi} y$
5	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
6	$M, x \models E_G\chi$	1b, 6 по MP
7	$M, x \models K_{i_1}\chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
8	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
9	$\vdots$	повторяем 6–9 для $y_2, \ldots, y_n$
10	$M, y \models \chi$	из 10
11	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
12	$\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	В$\forall \Rightarrow$ 4–12
13	$M, x \models [!\varphi]C_G\psi$	def
14	$\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi$	В$\forall \Rightarrow$ 2–14

Исчисление $PALC$

- $S5$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- Аксиомы и правила вывода $S5C$
- Правила вывода: MP, NEC, RE!
- Правило вывода

$$\frac{\chi \to [!\varphi]\psi \qquad (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание
- Случай $[!\varphi]C_G\psi$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \to K_i C_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \to [!\varphi]K_i C_G\psi$
3. $[!\varphi]K_i C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма: $[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow \forall Y(X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	
2	$\boxed{Y}$ $X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y$	$\triangleright$ $[!\varphi]\psi \in Y$
3	$X \sim^{\Phi}_{i_1} Y_1 \sim^{\Phi}_{i_2} \cdots \sim^{\Phi}_{i_n} Y_n = Y$ т.ч. $\varphi \in X, \varphi \in Y_i$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$	из 2 по опр.
4	$\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
5	$\varphi \in X$	из 3
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$X \sim^{\Phi}_{i_1} Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	$\vdots$	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \to [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$\forall Y(X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 В$\forall$ $\Rightarrow$

$[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi$

Что мы уже доказали?

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
2. $[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow \forall Y(X \sim^\Phi_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	
2	$\forall Y(X \sim^\Phi_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	
3	$\forall Y(X \sim^\Phi_{G,\varphi} Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$	по ПИ
4	$M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi$	

Условное общее знание

Определение (RC)

$$M, x \models C_G^{\psi}\varphi \text{ е.т.е. } \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$$

Утверждение

Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G\varphi \equiv C_G^{\top}\varphi$$

Доказательство: упражнение

Исчисление для условного общего знания

Исчисление $S5_m RC$

Аксиомные схемы:

$$
\begin{aligned}
&(S5_K) && \text{Аксиомные схемы } S5 \text{ для } K_i \\
&(K_{RC}) && C_G^{\chi}(\varphi \to \psi) \to (C_G^{\chi}\varphi \to C_G^{\chi}\psi) \\
&(mix_{RC}) && C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi)) \\
&(ind_{RC}) && C_G^{\psi}(\varphi \to E_G(\psi \to \varphi)) \to (E_G(\psi \to \varphi) \to C_G^{\psi}\varphi)
\end{aligned}
$$

Правила вывода:

$$
\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ MP \qquad\qquad \frac{\varphi}{K_i\varphi}\ G_K \qquad\qquad \frac{\varphi}{C_G^{\psi}\varphi}\ G_C K
$$

Аксиома редукции для условного общего знания

Исчисление $S5_m[]\text{-}RC$ ($PAL\text{-}RC$)

($S5_mRC$) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления $S5_mRC$

(R_{RC}) $[!\varphi]C_G^{\chi}\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G^{\varphi\wedge[!\varphi]\chi}[!\varphi]\psi)$

Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

Упражнение

Для формулы $[!p]C_Gq$ найдите эквивалентную, но из языка $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$.

Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \to K_a \neg p)] C_{ab} \neg p$$

- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$
- $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$

$$C^p_{ab} \neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]