

# S5C: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

# Исчисления $S5C$ и $S5C'$

---

Теорема о дедуктивной эквивалентности  $S5C$  и  $S5C'$  (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C'} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления  $S5C$  (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \models_{S5C} \varphi$$

# Компактность логики

---

## Обозначение

$$\Gamma \models_L \varphi := \forall F (F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$$

## Определение. Компактность логики.

Логика  $L$  называется компактной е.т.е.  $\Gamma \models_L \perp \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$  т.ч.  $\Gamma'$  – конечно и  $\Gamma' \models_L \perp$ .

Альтернативное определение: ?

# Компактность и сильная полнота

---

## Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

# Некомпактность $S5C$

---

Теорема.

Логика  $S5C$  не является компактной.

Доказательство.

$$X = \{\neg C_{ab}p\} \cup \{E_{ab}^n p \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1.  $X \models_{S5C} \perp$ , т.е.  $X$  – невыполнимо
2.  $X' \not\models_{S5C} \perp$ , где  $X' \subseteq X$  и  $X'$  – конечно



Следствие

Логика  $S5C$  не является сильно полной.

# Полнота (по Крипке) $S5C$

---

## Теорема

Логика  $S5C$  является полной (по Крипке), т.е.  $\models_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$

# Замыкание

---

## Определение. Замыкание $cl(\varphi)$

Для  $\varphi \in L_{KS}$  определим четыре множества:  $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$ .

$cl_1(\varphi)$  – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1.  $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если  $\psi \in cl_1(\varphi)$ , то  $Sub(\psi) \subseteq cl_1(\varphi)$
3. если  $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$ , то  $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

Пример  $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$

$\varphi$	$cl_1(\varphi)$	$cl_2(\varphi)$	$cl_3(\varphi)$	$cl(\varphi)$
$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$
		$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$
	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$
	$p$	$p$	$p$	$p$
	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$
		$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$
	$q$	$q$	$q$	$q$
		$\neg q$	$\neg q$	$\neg q$
	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$
		$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$
	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$
		$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$
			$K_a K_a C_{ab}q$	$K_a K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a K_a C_{ab}q$
			$K_a \neg K_a C_{ab}q$	$K_a \neg K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a \neg K_a C_{ab}q$
			$K_b K_b C_{ab}q$	$K_b K_b C_{ab}q$
				$\neg K_b K_b C_{ab}q$
			$K_b \neg K_b C_{ab}q$	$K_b \neg K_b C_{ab}q$
				$K_b \neg K_b C_{ab}q$



## Утверждение

Для любого  $\varphi \in L_{KS}$ :  $cl(\varphi)$  – конечно

Доказательство.

Упражнение.



# Максимальность и непротиворечивость

---

## Определение

Множество формул  $X \in L_{KC}$  называется *S5C–непротиворечивым* е.т.е.

- (a)  $X \not\vdash_{S5C} \perp$
- (b) не существует  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X$  т. ч.  $\vdash_{S5C} \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение:  $\Phi = cl(\varphi)$  для  $\varphi \in L_{KC}$

## Определение.

Будем говорить, что множество  $X \subset \Phi$  является  *$\Phi$ -максимальным S5C-непротиворечивым* е.т.е.

- $X$  — S5C–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi (X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5C} \perp)$ .

# Конечная каноническая модель

## Определение

Обозначим  $\Phi = cl(\varphi)$  для формулы  $\varphi \in L_{КС}$ .  $M^\Phi = (W^\Phi, (\sim_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$  – *конечная каноническая модель*, где

- $W^\Phi = \{X \subset \Phi \mid X \text{ — } \Phi\text{-м. S5C-н.м. формул}\}$
- $X \sim_i^\Phi Y := \forall \varphi \in \Phi : K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$  для любого  $i \in Ag$
- $X \models p \iff p \in X$

## Упражнение

Используя следующее обозначение:  $\boxed{\#_i X := \{\varphi \mid K_i \varphi \in X\}}$ , переформулировать  $X \sim_i^c Y$

## K.M. VS. K.K.M.

---

### Определение

Пусть  $X \subseteq L_{CK}$ ,  $L \in \{K_m^C, S4_m^C, S5_m^C, \dots\}$ , определим *множество следствий*

$$[X]_L := \{\varphi \in L_{CK} \mid X \vdash_L \varphi\}$$

Утверждение.  $[X]_L$  в к.м. ( $M^c$ )

Если  $X \in W^c$ , то  $[X]_L \subseteq X$ . Более того:  $[X]_L = X$

Утверждение.  $[X]_L$  в к.к.м. ( $M^\Phi$ )

Если  $X \in W^\Phi$ , то не гарантируется, что  $[X]_L \subseteq X$ , но верно, что  $[X]_L \cap \Phi \subseteq X$ . Более того:  $[X]_L \cap \Phi = X$ .

# Схема доказательства

---

## Теорема о корректности и полноте исчисления $S5C$

$$\forall \varphi \in L_{KC} \quad \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$$

### Доказательство.

( $\Leftarrow$ ) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления  $S5C$

(Упражнение)

( $\Rightarrow$ ) Полнота.

$$\not\models_{S5C} \varphi \Rightarrow \neg \varphi \not\models_{S5C} \perp \Rightarrow \{\neg \varphi\} \subset X \in W^\Phi \Rightarrow M^\Phi, X \models \neg \varphi \Rightarrow (M^\Phi \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Каноничность  $M^\Phi \in S5$
- Лемма об истинности

# Каноничность к.к.м.

---

## Определение

Класс моделей  $S5$ .

## Лемма

$M^\Phi \in S5$ , то есть,  $\sim_i^\Phi$  – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

# Рефлексивность $\sim_i^\Phi$

1	$\boxed{X} X \in W^\Phi$	$\triangleright X \sim_i^\Phi X \Leftrightarrow \triangleright \forall \varphi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$
2	$\boxed{\varphi} K_i \varphi \in X$	$\triangleright \varphi \in X$
3	$\varphi \in X$	из 2, поскольку $\varphi \in \Phi, \vdash_{S5C} K_i \varphi \rightarrow \varphi$
4	$\forall \varphi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$	$B \forall \Rightarrow (2-3)$
5	$X \sim_i^\Phi X$	4 по опр. $\sim_i^\Phi$
6	$\forall X \in W^\Phi : X \sim_i^\Phi X$	$B \forall (1-5)$

# Лемма об истинности

---

## Лемма

Пусть  $\Phi$  замыкание формулы  $\varphi_0$ ,  $M^\Phi$  – к.к.м.,  $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

## Доказательство.

Докажем индукцией по построению  $\varphi'$ .

БИ  $\varphi' = p$

ШИ Сл.1  $\varphi' = \neg \varphi_1$

Сл.2  $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Сл.3  $\varphi' = K_i \varphi$

Сл.4  $\varphi' = C_G \varphi$





## Сл.4 $\varphi' = C_G \varphi$

---

### Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ , где  $X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G \varphi\}$ ,  $\bar{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\}$

# Сл.4. $(\Leftarrow) C_G\varphi \in X \Leftarrow M^\Phi, X \models C_G\varphi$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\bar{S} := W^c \setminus S$$

$$\vdash \bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \quad \vdash (\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \leftrightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G\chi$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi)$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow C_G\chi)$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash C_G\chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow C_G\varphi$$

$$\underline{X} \vdash C_G\varphi$$

$$C_G\varphi \in X$$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма  $\vdash \underline{X} \rightarrow \chi$

► Доказательство: по построению  $\chi$  (по КЛВ). ◀

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\#_i X := \{\psi \mid K_i \psi \in X\}$$

Лемма:  $\vdash \chi \rightarrow \varphi$

► Достаточно доказать, что для любого  $X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$

1	$\boxed{X} X \in S$		9	$\varphi \in Y$	по п.и.
2	$M^c, X \models C_G \varphi$	$X \in S$	10	$\neg \varphi \in Y$	по постр. $Y$
3	$M^c, X \models K_i \varphi$ для $i \in G$	1	11	« $\perp$ »	6, 7
4	$y_0 := \#_i X \cup \{\neg \varphi\}$	постр.	12	$y_0 \vdash \perp$	
5	$y_0 \not\vdash \perp$	$\triangleright : \text{«}\perp\text{»}$	13	$\#_i X \vdash \varphi$	4
6	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л.Линд.	14	$X \vdash \#_i X$	3
7	$X \sim_i^c Y$	по постр. $Y$	15	$X \vdash \varphi$	5, 6
8	$M^c, Y \models \varphi$	1, 4	16	$\vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$	7

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма:  $\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'})$

► Достаточно доказать, что  $\forall i \in G \forall X \in S \forall Y \in \bar{S} \vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

1	$\boxed{i} \ i \in G$
2	$\boxed{X} \ X \in S$
3	$\boxed{Y} \ Y \in W^\Phi \setminus S$
4	$M^c, X \models C_G \varphi$
5	$M^c, Y \not\models C_G \varphi$
6	$X \not\sim_i^c Y$
7	$\exists \psi : K_i \psi \in X, \psi \notin Y$
8	$\neg \psi \in Y$

2  
3  
из 2,3

9	$Y \vdash \neg \psi$
10	$\vdash \underline{Y} \rightarrow \neg \psi$
11	$\vdash \psi \rightarrow \neg \underline{Y}$
12	$\vdash K_i \psi \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$
13	$X \vdash K_i \psi$
14	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \psi$
15	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

по постр.  $\psi$

Лемма:  $\forall S \subseteq W^c \vdash \bigwedge \{Y \mid Y \in \overline{S}\} \leftrightarrow \bigvee \{X \mid X \in S\}$ , где  $\overline{S} := W^c \setminus S$

► Доказательство собирается из следующих утверждений:

1.  $\forall X, Y \in W^c \text{ т.ч. } X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$
2.  $\vdash \bigvee \{\underline{X} \mid X \in W^c\}$



### Упражнение

Собрать доказательство леммы из утверждений. Подсказка: понадобится только КЛВ.

Утверждение:  $\forall X, Y \in W^\Phi$  т.ч.  $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$

1	$\boxed{X} X \in W^\Phi$	
2	$\boxed{Y} Y \in W^\Phi$	
3	$X \neq Y$	
4	$X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y)$	1 теория множеств
5	$X \cup Y \vdash \perp$	2 по опр. м.н.м
6	$\underline{X}, \underline{Y} \vdash \perp$	3
7	$\vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$	4

Утверждение  $\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$

1	$\not\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$	$\triangleright \text{«}\perp\text{»}$
2	$\not\vdash \underline{X_1} \vee \dots \vee \underline{X_n}, X_i \in W^\Phi$	
3	$\forall X_i \in W^\Phi \not\vdash \underline{X_i}$	
4	$\forall X_i \in W^\Phi \exists \varphi \in X_i \not\vdash \varphi$	
5	$\not\vdash h(X_1) \vee \dots \vee h(X_n)$	$h(X_i) := \varphi$ т.ч. $\varphi \in X_i$ и $\not\vdash \varphi$
6	$\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \not\vdash \perp$	
7	$\{ \neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \} \subseteq X_j \in W^\Phi$	по л. Линд.
8	$h(X_j) \in X_j$	
9	$\neg h(X_j) \in X_j$	
10	$\text{«}\perp\text{»}$	