Эпистемическая логика с дистрибутивным знанием

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Исчисление $K_m D$

1. Аксиомные схемы K для K_i
2. Аксиомные схемы K для D_G
3. $K_i \varphi \leftrightarrow D_i \varphi$
4. $D_G \varphi \to D_{G'} \varphi$, где $G \subseteq G'$
5. Правило Гёделя для G

Каноническая модель: первое приближение

Каноническая модель

Каноническая достижимость: $XR^c_G Y := \forall \varphi \in \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D} : D_G\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$

Но! Не гарантируется, что $R^c_G = \bigcap\limits_{i \in G} R^c_i$

Распутывание модели в дерево (tree unraveling)

Пример с одной модальностью. Пути: $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$, $\langle w \rangle$, $\langle x, a, y \rangle$, $\langle x, a, y, b, w \rangle$ и т.д.

Каноническая псевдомодель $\to$ каноническая модель

Мы будем понимать K_i как синоним для D_i

Определение. **Каноническая псевдомодель** $M^c = (W^c, R^c_{G_1}, \dots, R^c_{G_n}, V^c)$, где

- $\emptyset \neq G_i \subseteq Ag$
- $W^c = \{X \mid X - \text{м.н.м.}\}$
- $XR^c_G Y \Leftrightarrow \forall\varphi(D_G\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y)$
- $V^c(p) = \{X \in W^c \mid p \in X\}$, то есть, $X \models p \Leftrightarrow p \in X$

Определение. Последовательность $\langle X_1, G_1, X_2, \dots, G_{n-1}, X_n \rangle$ т.ч. $X_1, \dots, X_n \in W^c$, $\emptyset \neq G_i \subseteq Ag$, $X_i R^c_{G_i} X_{i+1}$ будем называть **каноническим путем**.

Определение. Пусть $\vec{X} = \langle X_1, G_1, X_2, \dots, G_{n-1}, X_n \rangle$, тогда $last(\vec{X}) = X_n$.

Определение. $\vec{X} \hat{R}_G \vec{Y} \Leftrightarrow \vec{Y} = \langle \vec{X}, G, Y \rangle$. для некотороко $Y \in W^C$. То есть, $\vec{Y}$ продолжает $\vec{X}$ на G-ребро.

Каноническая модель

Определение. $\vec{M} = (\vec{W}, (\vec{R}_i)_{i \in Ag}, \vec{V})$ – каноническая модель, где

- $\vec{W} = \{\vec{X} \mid \vec{X}$ – путь на $W^c\}$
- $\vec{X}\vec{R}_i\vec{Y} \Leftrightarrow \exists G(i \in G \wedge \vec{x}\hat{R}_G\vec{y})$
- $\vec{V}(p) = \{\vec{X} \in \vec{W} \mid p \in last(\vec{X})\}$, то есть, $\vec{M}, \vec{X} \models p \Leftrightarrow p \in last(\vec{X})$

Лемма об истинности

Случай $D_G\varphi$

$$\vec{M}, \vec{X} \models D_G\varphi \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\forall \vec{Y}(\vec{X}(\bigcap_{i \in G} \vec{R}_i)\vec{Y} \Rightarrow \vec{M}, \vec{Y} \models \varphi) \overset{\text{п.и.}}{\Longleftrightarrow}$$
$$\forall \vec{Y}(\vec{X}(\bigcap_{i \in G} \vec{R}_i)\vec{Y} \Rightarrow \varphi \in last(\vec{Y})) \overset{\text{лема}}{\Longleftrightarrow}$$
$$D_G\varphi \in last(\vec{X})$$

Лемма. $D_G\varphi \in last(\vec{X}) \iff \forall \vec{Y}(\vec{X}(\bigcap_{i\in G} \vec{R}_i)\vec{Y} \Rightarrow \varphi \in last(\vec{Y}))$

Утверждение. $\vec{X}(\bigcap\limits_{i\in G} \vec{R}_i)\vec{Y} \iff \exists G'(G \subseteq G' \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y})$

$$\vec{X}(\bigcap\limits_{i\in G} \vec{R}_i)\vec{Y} \overset{(1)}{\iff} \forall i \in G : \vec{X}\vec{R}_i\vec{Y} \overset{(2)}{\iff} \forall i \in G \exists G'(i \in G' \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y}) \overset{(3)}{\iff}$$
$$\exists G' \forall i \in G(i \in G' \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y}) \overset{(4)}{\iff} \exists G'(G \subseteq G' \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y})$$

- (1) по опр. $\bigcap$
- (2) по опр. $\vec{X}\vec{R}_i\vec{Y}$
- (4) по опр. $\subseteq$
- ($3\Leftarrow$) в силу $\exists x \forall y R(x,y) \to \forall y \exists x R(x,y)$
- ($3\Rightarrow$) нужно использовать следующие факты:
  - $\neg(\vec{X}\hat{R}_G\vec{Y} \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y})$ для $G \neq G'$
  - $\forall x \forall y(x \neq y \to \neg(Px \wedge Py)) \to (\forall x \exists y(xRy \wedge Py) \to \exists y \forall x(xRy \wedge Py))$ (Упражнение)

(⇒)

1	$D_G\varphi \in last(\vec{X})$	
2	$\neg\forall\vec{Y}(\vec{X}(\bigcap\limits_{i\in G}\vec{R}_i)\vec{Y} \Rightarrow \varphi \in last(\vec{Y}))$	▷ «⊥»
3	$\vec{X}(\bigcap\limits_{i\in G}\vec{R}_i)\vec{Y}$	из 1
4	$\varphi \notin last(\vec{Y})$	
5	$G \subseteq G' \wedge \vec{X}\hat{R}_{G'}\vec{Y}$	по утв.
6	$last(\vec{X})R^c_{G'}last(\vec{Y})$	из 7 по опр $\hat{R}$
7	$D_{G'}\varphi \in last(\vec{X})$	
8	$\varphi \in last(\vec{Y})$	из 1, 10
9	«⊥»	5, 11
10	$\forall\vec{Y}(\vec{X}(\bigcap\limits_{i\in G}\vec{R}_i)\vec{Y} \Rightarrow \varphi \in last(\vec{Y}))$	2-12 КЛВ

$(\Leftarrow)$