$S5_mC$: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Эпистемическая логика + общее знание

Исчисление $S5_m C$

Аксиомные схемы:

- Тавтологии КЛВ
- Аксиомные схемы $S5$ для каждого оператора K_i
- (K_C) $C_G(\varphi \to \psi) \to (C_G\varphi \to C_G\psi)$
- (fix) $C_G\varphi \to E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$
- (ind) $C_G(\varphi \to E_G\varphi) \to (\varphi \to C_G\varphi)$

Правила вывода: MP, G_K, G_C

Эпистемическая логика + общее знание

Исчисление $S5_m C'$

Аксиомные схемы:

- Тавтологии КЛВ
- Аксиомные схемы $S5$ для каждого оператора K_i
- $\cancel{(K_C)\ C_G(\varphi \to \psi) \to (C_G\varphi \to C_G\psi)}$
- $(fix)\ C_G\varphi \to E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$

Правила вывода: MP, G_K

$$\frac{\varphi \to E_G(\psi \wedge \varphi)}{\varphi \to C_G\psi}\ ind_R$$

Исчисления $S5_mC$ и $S5_mC'$

Теорема о корректности исчисления $S5_mC$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5_mC} \varphi \Rightarrow \models_{S5_mC} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления $S5_mC'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5_mC} \varphi \Rightarrow \models_{S5_mC} \varphi$$

Теорема о дедуктивной эквивалентности $S5_mC$ и $S5_mC'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5_mC} \varphi \iff \vdash_{S5_mC'} \varphi$$

Компактность логики

Обозначение

$\Gamma \models_L \varphi := \forall F(F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$

Определение. Компактность логики.

Логика L называется компактной е.т.е. $\Gamma \models_L \bot \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ т.ч. Γ' – конечно и $\Gamma' \models_L \bot$.
Альтернативное определение: ?

Компактность и сильная полнота

Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

Некомпактность $S5_mC$

Теорема.

Логика $S5_mC$ не является компактной.

Доказательство.

$X = \{\neg C_{ab}p\} \cup \{E^n_{ab}p \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. $X \models_{S5_mC} \bot$, т.е. X – невыполнимо
2. $X' \not\models_{S5_mC} \bot$, где $X' \subseteq X$ и X' – конечно

$\square$

Следствие

Логика $S5_mC$ не является сильно полной.

Полнота (по Крипке) $S5_m C$

Теорема

Логика $S5_m C$ является полной (по Крипке), т.е. $\models_{S5_m C} \varphi \iff \vdash_{S5_m C} \varphi$

Замыкание Фишера-Ладнера

Идея: множество формул, которые могут понадобиться при работе с к.к.м.

Замыкание

Пусть $cl(\varphi)$ наименьшее множество формул, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl(\varphi)$
2. если $\psi \in cl(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subseteq cl(\varphi)$
3. если $\psi \in cl(\varphi)$ и ψ не начинается с отрицания, то $\neg\psi \in cl(\varphi)$
4. если $C_G\psi \in cl(\varphi)$, то $\{K_i C_G \psi \mid i \in G\} \subseteq cl(\varphi)$

Утверждение

Для любого $\varphi \in \mathcal{EL}$-$\mathcal{C}$: $cl(\varphi)$ – конечно

Доказательство.

Упражнение. $\square$

Максимальность и непротиворечивость

Определение

Множество формул $X \in \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}$ называется $S5_mC-$ непротиворечивым е.т.е.

(a) $X \nvdash_{S5_mC} \bot$

(b) *не существует* $\varphi_1, \ldots \varphi_n \in X$ *т. ч.* $\vdash_{S5_mC} \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение: $\boxed{\Phi = cl(\varphi) \text{ для } \varphi \in \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}}$

Определение.

Будем говорить, что множество $X \subset \Phi$ является Φ-максимальным $S5_mC$-непротиворечивым е.т.е.

- X — $S5_mC$–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi(X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5_mC} \bot)$.

Конечная каноническая модель (к.к.м.)

Определение. Обозначим $\Phi = cl(\varphi)$ для формулы $\varphi \in \mathcal{EL}$-$\mathcal{C}$.
$M^{\Phi} = (W^{\Phi}, (\sim_i^{\Phi})_{i \in Ag}, V^{\Phi})$ – конечная каноническая модель, где

- $W^{\Phi} = \{X \subset \Phi \mid X$ – Φ-м.$S5_m C$-н.м. формул$\}$
- $X \sim_i^{\Phi} Y := K_i\psi \in X \Leftrightarrow K_i\psi \in Y$ для $K_i\psi \in \Phi$
- $X \models p \iff p \in X$

Обозначение

$K_i X := \{K_i\varphi \mid K_i\varphi \in X\}$

Каноническая модель (M^c) vs. к.к.м. (M^Φ)

- модели или модели

  к.м одна «конкретная» модель

  к.к.м. модель строится по конкретной формуле
- язык

  к.м модель задействует весь модальный язык

  к.к.м. модель задействует только формулы из замыкания Φ
- миры $=$ м.н.м.

  к.м бесконечные множества формул

  к.к.м. конечные множества формул
- достижимость

  к.м определяется универсальным образом для каждой логики

  к.к.м. для каждой логики определяется отдельно
- что можно доказать

  к.м сильная полнота

  к.к.м. слабая полнота $+$ финитная аппроксимируемость

К.м., к.к.м., теория

Определение

Пусть $X \subseteq \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}, L \in \{K^C_m, S4^C_m, S5^C_m, \dots\}$, *определим* ***множество следствий***

$$[X]_L := \{\varphi \in \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \mid X \vdash_L \varphi\}$$

Утверждение. $[X]_L$ **в к.м. (M^c)**

Если $X \in W^c$, *то* $[X]_L \subseteq X$. *Более того:* $[X]_L = X$

Утверждение. $[X]_L$ **в к.к.м. (M^Φ)**

Если $X \in W^\Phi$, *то не гарантируется, что* $[X]_L \subseteq X$, *но верно, что* $[X]_L \cap \Phi \subseteq X$. *Более того:* $[X]_L \cap \Phi = X$.

Схема доказательства

Теорема о корректности и полноте исчисления $S5_mC$

$$\forall\varphi \in \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \ \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5_mC} \varphi$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления $S5_mC$ (Упражнение)
($\Rightarrow$) Полнота.

$$\nvdash_{S5_mC} \varphi \Rightarrow \neg\varphi \nvdash_{S5_mC} \perp \Rightarrow \{\neg\varphi\} \subset X \in W^\Phi \Rightarrow M^\Phi, X \models \neg\varphi \Rightarrow (M^\Phi \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Каноничность $M^\Phi \in S5$
- Лемма об истинности

$\square$

Каноничность к.к.м.

Определение

Класс моделей $S5$.

Лемма

$M^{\Phi} \in S5$, то есть, $\sim_i^{\Phi}$ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ замыкание некоторой формулы M^Φ – к.к.м., $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Докажем индукцией по построению φ'.

БИ $\varphi' = p$

ШИ Сл.1 $\varphi' = \neg\varphi$

Сл.2 $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Сл.3 $\varphi' = K_i\varphi$

Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

БИ, Сл.1, Сл.2

Повторяем доказательства из теоремы о полноте S5

Обозначения:

- $K_i X := \{K_i\psi \mid K_i\psi \in X\}$
- $\neg K_i X := \{\neg K_i\psi \mid \neg K_i\psi \in X\}$

Утверждение.
$(K_i X \cup \neg K_i X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \sim_i^{\Phi} Y$

Сл.2 $\varphi' = K_i\varphi$ $(\Rightarrow)$

1	$K_i\varphi \in X$	$\triangleright\ M^\Phi, X \models K_i\varphi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall Y(X \sim_i^\Phi Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y}\ X \sim_i^\Phi Y$	$\triangleright\ M^\Phi, Y \models \varphi$
3	$K_i\varphi \in Y$	из 1, 2
4	$\varphi \in Y$	из 3 т.к. $\varphi \in \Phi$ и $\vdash K_i\varphi \to \varphi$
5	$M^\Phi, Y \models \varphi$	из 4 по ПИ
6	$\forall Y(X \sim_i^\Phi Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi)$	
7	$M^\Phi, X \models K_i\varphi$	

Сл.2 $\varphi' = K_i\varphi$ ($\Leftarrow$)

1 $K_i\varphi \notin X$ $\qquad \triangleright\ M^\Phi, X \not\models K_i\varphi \Leftrightarrow$

$\triangleright\ \exists Y (X \sim_i^\Phi Y \wedge M^\Phi, Y \not\models \varphi)$

2 $\neg K_i\varphi \in X$

3 $\vdash \underline{X} \to \neg K_i\varphi$

4 $y_0 = K_i X \cup \neg K_i X \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$ $\qquad \triangleright$ «$\bot$»

5 $K_i X, \neg K_i X \vdash \varphi$

6 $\vdash ((K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \wedge (\neg K_i\chi_1 \wedge \dots \wedge \neg K_i\chi_m)) \to \varphi$

7 $\vdash K_i((K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \wedge (\neg K_i\chi_1 \wedge \dots \wedge \neg K_i\chi_m)) \to K_i\varphi$

8 $\vdash ((K_iK_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_iK_i\psi_n) \wedge (K_i\neg K_i\chi_1 \wedge \dots \wedge K_i\neg K_i\chi_m)) \to K_i\varphi$

9 $\vdash ((K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \wedge (\neg K_i\chi_1 \wedge \dots \wedge \neg K_i\chi_m)) \to K_i\varphi$

10 $\vdash \underline{X} \to ((K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \wedge (\neg K_i\chi_1 \wedge \dots \wedge \neg K_i\chi_m))$

11 $\vdash \underline{X} \to K_i\varphi$

12 «$\bot$»

13 $y_0 = K_iX \cup \neg K_iX \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$

14 $y_0 \subset Y \in W^\Phi$

15 $X \sim_i^\Phi Y$

16 $\neg\varphi \in Y$

17 $\varphi \notin Y$

18 $M^\Phi, Y \not\models \varphi$ ПИ

19 $\exists Y(X \sim_i^\Phi Y \wedge M^\Phi, Y \not\models \varphi)$

20 $M^\Phi, X \not\models K_i\varphi$

Сл.3 $\varphi' = C_G\varphi$

Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, где $X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G\varphi\}$, $\overline{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}$

Сл.3 ($\Leftarrow$) $C_G\varphi \in X \Leftarrow M^\Phi, X \models C_G\varphi$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{\overline{S} := W^c \setminus S}$

$$
\dfrac{\vdash \underline{X} \to \chi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \chi \to E_G(\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}) \qquad \dfrac{\vdash \bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}}{\vdash (\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}) \leftrightarrow \chi}}{\vdash \chi \to E_G\chi}}{\vdash C_G(\chi \to E_G\chi)} \qquad \vdash C_G(\chi \to E_G\chi) \to (\chi \to C_G\chi)}{\vdash \chi \to C_G\chi} \qquad \dfrac{\vdash \chi \to \varphi}{\vdash C_G\chi \to C_G\varphi}}{\vdash \chi \to C_G\varphi}}{\dfrac{\vdash \underline{X} \to C_G\varphi}{\dfrac{X \vdash C_G\varphi}{C_G\varphi \in X}}}
$$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$

Лемма 1 $\vdash \underline{X} \to \chi$

▶ Доказательство: по построению χ (по КЛВ). ◀

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{K_iX := \{K_i\psi \mid K_i\psi \in X\}}$ $\boxed{\neg K_iX := \{\neg K_i\psi \mid \neg K_i\psi \in X\}}$

Утверждение: $\vdash \chi \to \varphi$

Достаточно доказать, что для любого $X \in S \vdash \underline{X} \to \varphi$.

1	$\boxed{X}\ X \in S$	$\triangleright\ \vdash \underline{X} \to \varphi$
2	$M^c, X \models C_G\varphi$	1
3	$M^c, X \models K_i\varphi$ для $i \in G$	2
4	$y_0 := K_iX \cup \neg K_iX \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$	$\triangleright$: «$\bot$»
5	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л.Линд.
6	$X \sim_i^c Y$	по постр. Y
7	$\neg\varphi \in Y$	
8	$M^\Phi, Y \models \varphi$	
9	$\varphi \in Y$	по ПИ
10	«$\bot$»	
11	$y_0 \vdash \bot$	
12	$K_iX \cup \neg K_iX \vdash \varphi$	
13	$X \vdash K_iX \cup \neg K_iX$	по постр.
14	$X \vdash \varphi$	
15	$\vdash \underline{X} \to \varphi$	

Утверждение. Пусть $X, Y \in W^{\Phi}$, тогда $X \not\sim_i^{\Phi} Y \Rightarrow \vdash \underline{X} \to K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \not\sim_i^{\Phi} Y$	$\triangleright \vdash \underline{X} \to K_i \neg \underline{Y}$
2	$\exists \theta \in \Phi : K_i\theta \in X, \theta \notin Y$ или $K_i\theta \in Y, \theta \notin X$	
3	$K_i\theta \in X, \theta \notin Y$	$\triangleright \vdash \underline{X} \to K_i \neg \underline{Y}$
4	$\neg\theta \in Y$	
5	$Y \vdash \neg\theta$	
6	$\vdash \underline{Y} \to \neg\theta$	
7	$\vdash \theta \to \neg\underline{Y}$	
8	$\vdash K_i\theta \to K_i\neg\underline{Y}$	
9	$\vdash \underline{X} \to K_i\theta$	
10	$\vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	
11	$K_i\theta \in Y, \theta \notin X$	$\triangleright \vdash \underline{X} \to K_i \neg \underline{Y}$
12	$\neg\theta \in X$	
13	$\vdash \underline{X} \to \neg\theta$	
14	$\vdash \theta \to \neg\underline{X}$	
15	$\vdash K_i\theta \to K_i\neg\underline{X}$	
16	$\vdash \underline{Y} \to K_i\theta$	
17	$\vdash \underline{Y} \to K_i\neg\underline{X}$	
18	$\vdash \hat{K}_i\underline{X} \to \neg\underline{Y}$	
19	$\vdash K_i\hat{K}_i\underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	
20	$\vdash \underline{X} \to K_i\hat{K}_i\underline{X}$	
21	$\vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	
22	$\vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	

Следствие. Пусть $X, Y \in W^{\Phi}$, тогда $\underline{X}, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \perp \Rightarrow X \sim_i^{\Phi} Y$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$

Лемма: $\vdash \chi \to E_G(\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg\underline{Y'})$

Достаточно доказать, что $\forall i \in G\ \forall X \in S\ \forall Y \in \overline{S}\ \vdash \underline{X} \to K_i \neg\underline{Y}$

1	$\boxed{i}\ i \in G$	
2	$\boxed{X}\ X \in S$	
3	$\boxed{Y}\ Y \in W^\Phi \setminus S$	
4	$M^c, X \models C_G\varphi$	2
5	$M^c, Y \not\models C_G\varphi$	3
6	$X \not\sim_i^c Y$	из 2,3
7	$\vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	по лемме

Лемма: $\forall S \subseteq W^c \vdash \bigwedge\{Y \mid Y \in \overline{S}\} \leftrightarrow \bigvee\{X \mid X \in S\}$, где $\overline{S} := W^c \setminus S$

- Доказательство собирается из следующих утверждений:

1. $\forall X, Y \in W^c$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$
2. $\vdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^c\}$

◀

Упражнение

Собрать доказательство леммы из утверждений. Подсказка: понадобится только КЛВ.

Утверждение: $\forall X, Y \in W^{\Phi}$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$

1	$\boxed{X}\ X \in W^{\Phi}$	
2	$\boxed{Y}\ Y \in W^{\Phi}$	
3	$X \neq Y$	
4	$X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y)$	1 теория множеств
5	$X \cup Y \vdash \bot$	2 по опр. м.н.м
6	$\underline{X}, \underline{Y} \vdash \bot$	3
7	$\vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$	4

Утверждение $\vdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^{\Phi}\}$

1	$\nvdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^{\Phi}\}$	$\triangleright$ «$\perp$»
2	$\nvdash \underline{X_1} \vee \dots \vee \underline{X_n}, X_i \in W^{\Phi}$	
3	$\forall X_i \in W^{\Phi} \nvdash \underline{X_i}$	
4	$\forall X_i \in W^{\Phi} \exists \varphi \in X_i \nvdash \varphi$	
5	$\nvdash h(X_1) \vee \dots \vee h(X_n)$	$h(X_i) := \varphi$ т.ч. $\varphi \in X_i$ и $\nvdash \varphi$
6	$\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \nvdash \perp$	
7	$\{\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n)\} \subseteq X_j \in W^{\Phi}$	по л. Линд.
8	$h(X_j) \in X_j$	
9	$\neg h(X_j) \in X_j$	
10	«$\perp$»	