

# Сложные случаи: $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$ , $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$ , $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

# Сложные случаи

---

- Как аксиоматизировать  $\mathcal{PAL}\text{-}C$ ?
- Как связаны  $[\!|\varphi|]$  и  $C_G\psi$
- Есть ли аксиома редукции для  $[\!|\varphi|]\psi$ ?

**Утверждение 1:** Формула  $[\!|\varphi|]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G[\!|\varphi|]\psi)$  не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель  $M, x$

1.  $M, x \models [\!|p|]C_{ab}q$
2.  $M, x \models p$
3.  $M, x \not\models C_{ab}[\!|p|]q$ , поскольку  $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle\!|p|\rangle\neg q$



# Пути

---

**Определение 1.** Пусть  $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$  – модель Крипке,  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ ,  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ , будем говорить, что существует  **$G$ -путь** из  $x$  в  $y$  (обозначение:  $xR_G y$ ), если найдутся такие  $y_1, \dots, y_n \in W$  и  $i_1, \dots, i_n \in G$ , что  $xR_{i_1} y_1 R_{i_2} \dots R_{i_n} y_n = y$ .

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

---

Упражнение 1. Докажите, что  $(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^+ = R_{G,\varphi}$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$



# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{\!|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$



# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$





# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$



# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$



# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$



# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$



# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$



# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

- 1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
- 2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
- 3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
- 6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 7.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 8.  $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 9.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение 1:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
10.  $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



# Публичные объявления и общее знание

---

Лемма

$$\frac{\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi}{\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi}$$



1	$(a) \models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi, (b) \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi$	
2	$\boxed{M, x} \quad M, x \models \chi$	$\triangleright M, x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall y(xR_{G, \varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y} \quad xR_{G, \varphi}y$	$\triangleright M, y \models [!\varphi]\psi$
4	$xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$ т.ч.	
5	$i_1, \dots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $xR_{G, \varphi}y$
6	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M, x \models E_G\chi$	1b, 6 по MP
8	$M, x \models K_{i_1}\chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	$\vdots$	повторяем 6–9 для $y_2, \dots, y_n$
11	$M, y \models \chi$	из 10
12	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y(xR_{G, \varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	$B\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M, x \models [!\varphi]C_G\psi$	def
15	$\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi$	$B\forall \Rightarrow$ 2–14

## Упражнение

Переписать предыдущее доказательство в более строгом виде: индукцией по  $n$  в пункте  $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$  и далее.

# Исчисление *PALC*

---

- Аксиомные схемы  $S5_m-C$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi$
- Правила вывода:  $MP$ ,  $NEC$  для  $K_i$
- Правило вывода:

$$\frac{\chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi}{\chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi}$$

# Полнота и корректность

---

## Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание  $cl(\varphi)$
- $c(\varphi)$  переопределить
- Лемма об истинности: случай  $[!\varphi]C_G\psi$
- Лемма об истинности собирается индукцией по

**Определение.** **Замыкание**  $cl(\varphi')$ . Для  $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$  определим четыре множества:  $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$ .

$cl_1(\varphi)$  – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1.  $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если  $\psi \in cl_1(\varphi)$ , то  $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi)$
3. если  $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$ , то  $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$
4. если  $[!\varphi]p \in cl_1(\varphi')$ , то  $\varphi \rightarrow p \in cl_1(\varphi')$
5. если  $[!\varphi]\neg\psi \in cl_1(\varphi')$ , то  $\varphi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
6. если  $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \in cl_1(\varphi')$ , то  $[!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi \in cl_1(\varphi')$
7. если  $[!\varphi]K_i\psi \in cl_1(\varphi')$ , то  $\varphi \rightarrow K_i[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
8. если  $[!\varphi][!\psi]\chi \in cl_1(\varphi')$ , то  $[!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in cl_1(\varphi')$
9. если  $[!\varphi]C_G\psi \in cl_1(\varphi')$ , то  $[!\varphi]\psi \in cl_1(\varphi')$  и  $\{K_i[!\varphi]C_G\psi \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

# Сложность $c(\varphi)$

---

Определение. Определим функцию сложности  $c : \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \mapsto \mathbb{N}$ :

1.  $c(p) := 1$
2.  $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3.  $c(\varphi \wedge \psi) = \max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4.  $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5.  $c(C_G\varphi) := c(\varphi) + 1$
6.  $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

## Лемма

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$  для  $\psi \in \text{sub}(\varphi)$
- $c([\!|\varphi|\!]p) > c(\varphi \rightarrow p)$
- $c([\!|\varphi|\!]\neg\psi) > c(\varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|\!]\psi)$
- $c([\!|\varphi|\!](\psi \wedge \chi)) > c([\!|\varphi|\!]\psi \wedge [\!|\varphi|\!]\chi)$
- $c([\!|\varphi|\!]K_i\psi) > c(\varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi|\!]\psi)$
- $c([\!|\varphi|\!][\!|\psi|\!]\chi) > c([\!|(\varphi \wedge [\!|\varphi|\!]\psi)|\!]\chi)$
- $c([\!|\varphi|\!]C_G\psi) > c([\!|\varphi|\!]\psi)$

Утверждение:  $\vdash [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$  для  $i \in G$

1.  $C_G\psi \rightarrow K_iC_G\psi$
2.  $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow [!\varphi]K_iC_G\psi$
3.  $[!\varphi]K_iC_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4.  $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$



# Лемма об истинности

---

## Лемма

Пусть  $\Phi$  – замыкание некоторой формулы,  $M^\Phi = (W^\Phi, (R_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$  – конечная каноническая модель,  $X \in W^\Phi$  тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

## Доказательство

Будем доказывать (возвратной) индукцией по  $c(\varphi')$ .

Предположение индукции Обозначим  $c(\varphi') = n$ .

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^\Phi, X \models \psi)$$

Шаг индукции Рассмотрим следующие случаи.

Сл.1  $\varphi' = p$

Сл.2  $\varphi' = \neg\varphi$

Сл.3  $\varphi' = \varphi \wedge \psi$

Сл.4  $\varphi' = K_i\varphi$

Сл.5  $\varphi' = C_G\varphi$

Сл.6  $\varphi' = [\varphi]\psi$

Сл.6a  $\varphi' = [\varphi]p$

Сл.6b  $\varphi' = [\varphi]\neg\psi$

Сл.6c  $\varphi' = [\varphi](\psi \wedge \chi)$

Сл.6d  $\varphi' = [\varphi]K_i\psi$

Сл.6e  $\varphi' = [\varphi][\psi]\chi$

Сл.6f  $\varphi' = [\varphi]C_G\psi p$

## Сл. 6а-6е

---

Сл.6а

$$c(\varphi \rightarrow p) < c([!\varphi]p)$$

$$[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow p) \in X \Leftrightarrow M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow p \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]p$$

Сл.6b–d. Упражнение.

Сл.6е

$$[!\varphi][!\psi]\chi \in X \xLeftrightarrow[\text{Акс}]{\Phi} [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in X \xLeftrightarrow[\text{IH}]{(*)} M^\Phi, X \models [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi][!\psi]\chi$$

$$(*) \ c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$$

## Случай 6f $\Rightarrow$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y(XR_{G,\varphi}Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$
2	$\boxed{Y} XR_{G,\varphi}^\Phi Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$
3	$XR_{i_1}^\Phi Y_1 R_{i_2}^\Phi \dots R_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч. $i_1, \dots, i_n \in G$ и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$	из 2 по опр.
4	$\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$	ПИ
5	$\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$XR_{i_1}^\Phi Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	$\vdots$	повторяем шаги 5–8 для $Y_2$ и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \rightarrow [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$	ПИ
13	$\forall Y(XR_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 B $\forall \Rightarrow$

## Случай 6f $\Leftarrow$

Лемма  $(\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \neg \underline{Y}$

Достаточно доказать, для любых  $X \in S, Y \in \bar{S}, i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \in S$	9	$XR_i^\Phi Y$	
2	$Y \in \bar{S}$	10	$M^\Phi, X \models \varphi$	из 6 по ПИ
3	$\nVdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y} \triangleright \langle \perp \rangle$	11	$\models [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$	
4	$\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nVdash \perp$	12	$M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi$	
5	$X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	13	$M^\Phi, X \models K_i[!\varphi]C_G\psi$	
6	$X, \varphi \nVdash \perp$	14	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]C_G\psi$	
7	$\varphi \in X$	15	$Y \in S$	
8	$X, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	16	$\langle \perp \rangle$	1, 14

# Как быть с $RE$ ?

---

$[!\varphi][!\psi]\chi$

# Аксиомы редукции

---

- $\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$
- $\mathcal{EL-D} \equiv \mathcal{PAL-D}$
- $\mathcal{EL-C} \prec \mathcal{PAL-C}$
- $\mathcal{EL-C}+? \equiv \mathcal{PAL-C} +?$
- $\mathcal{EL-RC} \equiv \mathcal{PAL-RC}$

# Условное общее знание

---

**Определение 3.**  $M, x \models C_G^\psi \varphi$  е.т.е.  $\forall y (x (\bigcup_{i \in G} R_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

**Утверждение:** Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G \varphi \equiv C_G^\top \varphi$$

Доказательство: упражнение



**Определение 2.** Пусть  $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$  – модель Крипке,  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ , будем говорить, что существует  **$G$ - $\varphi$ -путь** из  $x$  в  $y$  (обозначение:  $xR_{G,\varphi}y$ ), если найдутся такие  $y_1, \dots, y_n \in W$  и  $i_1, \dots, i_n \in G$ , что  $xR_{i_1}y_1R_{i_2} \dots R_{i_n}y_n = y$  и  $M, x \models \varphi, M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$ .

**Определение 3.** Пусть  $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$  – модель Крипке,  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ , будем говорить, что существует  **$G$ - $\cdot\varphi$ -путь** из  $x$  в  $y$  (обозначение:  $R_{G,\cdot\varphi}$ ), если найдутся такие  $y_1, \dots, y_n \in W$  и  $i_1, \dots, i_n \in G$ , что  $xR_{i_1}y_1R_{i_2} \dots R_{i_n}y_n = y$  и  $M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$ .

$M, x \models C_G^\psi \varphi$  е.т.е.  $\forall y (xR_{G,\cdot\psi}y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

# Исчисление для условного общего знания

## Исчисление $S5_m\text{-}RC$

Аксиомные схемы:

( $S5_K$ ) Аксиомные схемы  $S5$  для  $K_i$

( $K_{RC}$ )  $C_G^X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G^X\varphi \rightarrow C_G^X\psi)$

( $mix_{RC}$ )  $C_G^\psi\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi))$

( $ind_{RC}$ )  $C_G^\psi(\varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow C_G^\psi\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} MP$$

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi} G_K$$

$$\frac{\varphi}{C_G^\psi\varphi} G_{CK}$$

# Некоторые полезные теоремы

---

**Упражнение.** Найдите доказательства для следующих теорем исчисления  $S5_m$ -RC:

1.  $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)$
2.  $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi))$
3.  $C_G^\varphi \varphi$
4.  $C_G^\psi \varphi \rightarrow C_G^\psi C_G^\psi \varphi$
5.  $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \varphi)$
6.  $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \rightarrow \varphi)$

# Полнота $S5_m$ - $RC$

---

Сборка доказательства.

- $\Phi = cl(\varphi)$
- Лемма об истинности: случай  $C_G^\psi \varphi$

# Замыкание

**Определение.** Замыкание  $cl(\varphi')$ . Для  $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$  определим четыре множества:  $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$ .

$cl_1(\varphi)$  – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1.  $\varphi \in cl_1(\varphi')$
2. если  $\psi \in cl_1(\varphi')$ , то  $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi')$
3. если  $C_G\psi \in cl_1(\varphi')$ , то  $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi')$
4. если  $C_G^\psi\varphi \in cl_1(\varphi')$ , то  $\{K_i(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi)) \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

# Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi (\Rightarrow)$

1	$C_G^\psi \varphi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (X(R_{G,+}^\Phi)Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y} X(R_{G,+}^\Phi)Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models \varphi$
3	$XR_{i_1}^\Phi Y_1 R_{i_2}^\Phi \dots R_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч.	
4	$\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq G$	
5	$M^\Phi, Y_1 \models \psi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \psi$	
6	$\psi \in Y_1, \dots, \psi \in Y_n$	по ПИ
7	$K_{i_1}(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi)) \in X$	
8	$\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi) \in Y_1$	
9	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_1$	
10	повторяем до $Y_n = Y$	
11	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_n$	
12	$\varphi \in Y_n$	
13	$M^\Phi, Y \models \varphi$	по ПИ

## Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi. (\Leftarrow)$

---

- $\underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

# Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi \ (\Leftarrow)$ Сборка доказательства

$$S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\} \quad \chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\} \quad \bar{S} := W^\Phi \setminus S$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \quad \chi \leftrightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}}{\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)} \\
 \frac{C_G^\psi(\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)) \quad C_G^\psi(\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow C_G^\psi \chi)}{E_G(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow C_G^\psi \chi} \\
 \frac{\underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi) \quad E_G(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow C_G^\psi \chi}{\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \chi} \\
 \frac{\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \chi \quad C_G^\psi \chi \rightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \chi) \quad (\psi \wedge \chi) \rightarrow C_G^\psi \varphi}{C_G^\psi(\psi \wedge \chi) \rightarrow C_G^\psi \varphi} \\
 \frac{\underline{X} \rightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \chi) \quad C_G^\psi(\psi \wedge \chi) \rightarrow C_G^\psi \varphi}{\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \varphi} \\
 \frac{\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \varphi \quad X \vdash C_G^\psi \varphi}{C_G^\psi \varphi \in X} \quad C_G^\psi \varphi \in \Phi
 \end{array}$$



**Утверждение.**

$$\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow$$

Доказательство.

1.  $\forall i \in G: \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\})$
2.  $\forall i \in G: \underline{X} \rightarrow K_i(\bigwedge \{\psi \rightarrow \neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\})$
3.  $\forall i \in G: \underline{X} \rightarrow \bigwedge \{K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \mid Y \in \overline{S}\}$
4.  $\forall i \in G \forall Y \in \overline{S}: \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$

**Утверждение.** Пусть  $X \in S$ ,  $Y \in \underline{S}$ , тогда  $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$

1	$X \in S, Y \in \underline{S}$	9	$XR_i^\Phi Y$	8 по утв. (*)
2	$M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$	10	$\psi \in Y$	8 по утв. (*)
3	$M^\Phi, Y \not\models C_G^\psi \varphi$	11	$X \models K_i(\psi \rightarrow C_G^\psi \varphi)$	
4	$\nmid \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \quad \triangleright \text{«}\perp\text{»}$	12	$Y \models \psi \rightarrow C_G^\psi \varphi$	
5	$\underline{X} \nmid K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$	13	$Y \models \psi$	по ПИ
6	$\underline{X} \nmid \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \rightarrow \perp$	14	$Y \models C_G^\psi \varphi$	
7	$\underline{X}, \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \nmid \perp$	15	$\text{«}\perp\text{»}$	
8	$\underline{X}, \hat{K}_i(\psi \wedge \underline{Y}) \nmid \perp$	16	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$	

Утверждение (\*). Пусть  $X, Y \in W^\Phi$ , тогда

$$\underline{X}, \hat{K}_i(\varphi \wedge \underline{Y}) \not\models \perp \Rightarrow (XR_i^\Phi Y \text{ и } \varphi \in Y)$$

# Аксиома редукции для условного общего знания

---

## Исчисление $S5_m[]$ -RC ( $PAL$ -RC)

( $S5_mRC$ ) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления  $S5_mRC$

$$(R_{RC}) \quad [!\varphi]C_G^x\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G^{\varphi \wedge [!\varphi]x}[!\varphi]\psi)$$

## Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания:  $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

## Упражнение

Для формулы  $[!p]C_Gq$  найдите эквивалентную, но из языка  $\mathcal{EL}$ -RC.

# Сравнение языков по выразительной силе

---

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \rightarrow K_a \neg p)] C_{ab} \neg p$$

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

- $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$

$$C_{ab}^p \neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]