

Полнота *PAL*

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Язык

Язык L_K

$$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$$

Семантика *PAL*

Некоторые законы *PAL*

Исчисление *PAL*

Аксиомные схемы:

- $S5$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$

Правила вывода: MP , NEC , $RE!$

Выразительность

$$\mathcal{L}_K \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi$$

$$\mathcal{L}_{K\Box} \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [\Box]\varphi$$

Утверждение

$$\mathcal{L}_K \equiv \mathcal{L}_{K\Box}$$

Перевод tr

$$\mathcal{L}_K \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi$$

$$\mathcal{L}_{K\Box} \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$$

Определение (Функция перевода $tr : L_{K\Box} \mapsto L_K$)

- $tr(p) := p$
- $tr(\neg\varphi) := \neg tr(\varphi)$
- $tr(\varphi \wedge \psi) := tr(\varphi) \wedge tr(\psi)$
- $tr(K_i\varphi) := K_i tr(\varphi)$
- $tr([!\varphi]p) := tr(\varphi \rightarrow p)$
- $tr([!\varphi]\neg\psi) := tr(\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $tr([!\varphi](\psi \wedge \chi)) := tr([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $tr([!\varphi]K_i\psi) := tr(\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- $tr([!\varphi][!\psi]\chi) := tr([!\varphi]tr([!\psi]\chi))$

Упражнение

- $tr(\varphi \rightarrow \psi) = \dots$
- $tr(\varphi \vee \psi) = \dots$

Перевод

Пример

$$tr([!p](q \wedge r)) \equiv tr([!p]q) \wedge tr([!p]r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$

Сложность формулы c

$\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi$ vs. $[!\varphi]K_i\psi$

Определение (Сложность формулы)

Определим функцию $c : L_K \mapsto \mathbb{N}$:

1. $c(p) := 1$
2. $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3. $c(\varphi \wedge \psi) = \max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4. $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5. $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

Лемма об уменьшении сложности формулы

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$ для $\psi \in Sub(\varphi)$
- $c([\!|\varphi|]p) > c(\varphi \rightarrow p)$
- $c([\!|\varphi|]\neg\psi) > c(\varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|]\psi)$
- $c([\!|\varphi|][\!|\psi|]\chi) > c([\!|\varphi|]tr([\!|\psi|]\chi))$

$$\vdash_{PAL} \varphi' \leftrightarrow tr(\varphi')$$

Случай $\varphi' = [!\varphi]K_i\psi$

$$c(\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi) < c([!\varphi]K_i\psi)$$

$$\vdash_{PAL} [!\varphi]K_i\psi \xleftrightarrow{\text{акс.}} (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi) \xleftrightarrow{IH} tr(\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi) \xleftrightarrow{\text{def}} tr([!\varphi]K_i\psi)$$

Случай $\varphi' = [!\varphi][!\psi]\chi$

1. $c([!\psi]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$
2. $c([!\varphi]tr([!\psi]\chi)) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$
3. $\vdash_{PAL} [!\psi]\chi \leftrightarrow tr([!\psi]\chi)$ IH из 1

$$\vdash_{PAL} [!\varphi][!\psi]\chi \xleftrightarrow{\frac{!RE}{3}} [!\varphi]tr([!\psi]\chi) \xleftrightarrow{\frac{IH}{2}} tr([!\varphi]tr([!\psi]\chi)) \xleftrightarrow{\text{def}} tr([!\varphi][!\psi]\chi)$$

Сборка доказательства

Теорема о полноте *PAL*

$\forall \varphi \in L_{K[]}$:

$$\models_{S5} \varphi \Rightarrow \models_{S5} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{S5} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PAL} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PAL} \varphi$$

Лаконичность

$K_i T$