

## Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

# Эпистемические языки

---

Языки ( $i \in Ag$ ,  $G \subseteq Ag$ )

( $EL$ )  $p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi$

( $ELE$ )  $p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi$

( $ELD$ )  $p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi$

( $ELC$ )  $p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi$

# Эквивалентность формул

---

## Определение

Будем говорить, что формулы  $\varphi$  и  $\psi$  эквивалентны в классе моделей  $C$  (обозначение: « $\varphi \equiv_C \psi$ ») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение:  $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$ , где  $K$  – класс всех моделей Крипке.

## Примеры

- $(\Box p \wedge \Box(p \rightarrow q)) \equiv \Box(p \wedge q)$
- $\Diamond \Box p \equiv_{S5} \Box p$ , но  $\Diamond \Box p \not\equiv_{S4} \Box p$
- $\Box \Box p \equiv_{S4} \Box p$ , но  $\Box \Box p \not\equiv \Box p$

## Определение

Будем говорить, что формулы  $\varphi$  и  $\psi$  эквивалентны в классе моделей  $C$  (обозначение: « $\varphi \equiv_C \psi$ ») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение:  $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$ , где  $K$  – класс всех моделей Крипке.

## Утверждение

1. Если  $\varphi \equiv_C \psi$  и  $C' \subseteq C$ , то  $\varphi \equiv_{C'} \psi$
2. Если  $\varphi \not\equiv_C \psi$  и  $C \subseteq C'$ , то  $\varphi \not\equiv_{C'} \psi$

# Сравнение языков по выразительной силе

---

## Определение

Модальный язык  $L_2$  является не менее выразительным, чем модальный язык  $L_1$  в классе моделей Крипке  $C$  (обозначение: « $L_1 \sqsubseteq_C L_2$ ») е.т.е.

$$\forall \varphi_1 \in L_1 \exists \varphi_2 \in L_2 : \varphi_1 \equiv_C \varphi_2$$

## Сокращения

- $L_1 \sqsubseteq L_2 := L_1 \sqsubseteq_{All} L_2$ , где  $All$  – класс всех моделей Крипке
- $L_1 \equiv_C L_2 := L_1 \sqsubseteq_C L_2$  и  $L_2 \sqsubseteq_C L_1$
- $L_1 \sqsubset_C L_2 := L_1 \sqsubseteq_C L_2$  и  $L_2 \not\sqsubseteq_C L_1$
- $L_1 \equiv L_2 := L_1 \sqsubseteq L_2$  и  $L_2 \sqsubseteq L_1$
- $L_1 \sqsubset L_2 := L_1 \sqsubseteq L_2$  и  $L_2 \not\sqsubseteq L_1$

# Сравнение эпистемических языков

---

Языки ( $i \in Ag, G \subseteq Ag$ )

$(EL) \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi$

$(EL + E) \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi$

$(EL + D) \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi$

$(EL + C) \quad p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi$

Утверждения.

1.  $EL \equiv EL + E$

2.  $EL \sqsubset EL + D$

3.  $EL \sqsubset EL + C$

# Бисимуляция

---

$$EL \sqsubset ELD$$

---

Пример



# Модальная глубина

---

Определение. «Модальная глубина формулы» ( $md$ )

$md : L_K \mapsto \mathbb{N}$  т.ч.

- $md(p) = 0$
- $md(\neg\varphi) = md(\varphi)$
- $md(\varphi \circ \psi) = \max\{md(\varphi), md(\psi)\}$ , где  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $md(K_i\varphi) = md(\varphi) + 1$

Примеры

- $md(K_a K_b p) = 2$
- $md(K_a K_b (p \rightarrow K_c (K_a p \rightarrow K_b q))) = 4$

# Модальная $n$ -эквивалентность

---

Определение. Ограничение языка до глубины  $n$

$$EL_n = \{\varphi \in EL \mid md(\varphi) \leq n\}$$

Модальная  $n$ -эквивалентность

$$(M, x) \equiv_n (M', x') \iff \forall \varphi \in EL_n : M, x \models \varphi \iff M', x' \models \varphi$$

# Пример

---

$(M_1, x) \equiv_2 (M_2, x)$ , но  $(M_1, x) \not\equiv_3 (M_2, x)$

Как доказать?

# n-бисимуляционные игры

---

## Определение.

$BG_n[(M, x), (M', x')]$ . Игра останавливается после  $n$  раундов. В остальном правила такие же как и для  $BG_\infty[(M, x), (M', x')]$ .

## Определение.

Две модели Крипке эквивалентны в игровом смысле  $((M, x) \stackrel{\cdot}{\leftrightarrow}_n (M, x))$  е.т.е. у  $\exists$ лоизы есть выигрышная стратегия в игре  $BG_n[(M, x), (M', x')]$ .

## Теорема

$$(M, x) \stackrel{\hookrightarrow}{\rightarrow}_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$$

Доказательство.

( $\Rightarrow$ )



# Две последовательности моделей

---

Утверждение

$$(M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)$$

Доказательство.

В силу  $(M_{n+1}, x) \stackrel{\leftarrow}{\rightarrow}_n (M'_{n+1}, x)$ .



$$EL \sqsubset_{S5} ELC$$

---

$EL \sqsubseteq ELC$  – очевидно. Следовательно  $EL \sqsubseteq_{S5} ELC$ . Докажем, что  $ELC \not\sqsubseteq_{S5} EL$ .

$EL \sqsubseteq ELC$  – очевидно. Следовательно  $EL \sqsubseteq_{S5} ELC$ . Докажем, что  $ELC \not\sqsubseteq_{S5} EL$ . Допустим, что найдется  $\varphi^* \in EL$  т.ч.  $\varphi^* \equiv C_{ab}p$ . Докажем, что такое допущение приводит к противоречию. Обозначим,  $md(\varphi^*) = n$ .

$$M_{n+1}, x \models C_{ab}p \quad \varphi^* \equiv C_{ab}p$$

$$\hline M_{n+1}, x \models \varphi^*$$

$$(M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)$$

$$\hline M'_{n+1}, x \models \varphi^*$$

$$M'_{n+1}, x \not\models C_{ab}p \quad \varphi^* \equiv C_{ab}p$$

$$\hline M'_{n+1}, x \not\models \varphi^*$$

$\perp$



# Лаконичность языка

---

$EL = ELE$ , но  $ELE$  более лаконичный (succinct).

Две последовательности формул:

- $\alpha_n := \neg E_{ab}^n p$
- $\beta_1 := \neg(K_a p \wedge K_b p)$
- $\beta_n := \neg(K_a \neg \beta_{n-1} \wedge K_b \neg \beta_{n-1})$

$n$	$\alpha_n$	$\beta_n$
1	$\neg E_{ab} p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p)$
2	$\neg E_{ab}^2 p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p \wedge K_a K_b p \wedge K_b K_a p)$
3	$\neg E_{ab}^3 p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p \wedge K_a K_b p \wedge K_b K_a p \wedge K_b K_a K_b p \wedge K_a K_b K_a p)$