

# Сложные случаи: PALC, S5CD, PALCD

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

---

## Определение ( $G$ -путь, $x \sim_G y$ )

Пусть  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ . Будем говорить, что существует  $G$ -путь из  $x$  в  $y$  (обозначение:  $x \sim_G y$ ), если найдутся такие  $y_1, \dots, y_n \in W$  и  $i_1, \dots, i_n \in G$ , что  $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ .

## Определение ( $G$ - $\varphi$ -путь)

Пусть  $x, y \in W$ ,  $G \subseteq Ag$ . Будем говорить, что существует  $G$ - $\varphi$ -путь из  $x$  в  $y$  (обозначение:  $x \sim_{G,\varphi} y$ ), если  $x \sim_G y$  и  $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$ .

# Что значит $[\neg\varphi]C_G\psi$ ?

---

## Упражнение

Докажите, что  $(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{\neg\varphi})^* = \sim_{G,\varphi}$

## Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

# Что значит $[\![\varphi]\!]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [\![\varphi]\!]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\![\varphi]\!]\psi)$



# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{\!|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y (x (\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$



# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

---

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{|\varphi|})^* y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

# Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1.  $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{|\varphi|})^* y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
10.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$ ?

Утверждение:  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4.  $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5.  $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6.  $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8.  $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10.  $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



## Утверждение

Формула  $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G[!\varphi]\psi)$  не является общезначимой.

## Доказательство.

Рассмотрим модель  $M, x$

1.  $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2.  $M, x \models p$
3.  $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$ , поскольку  $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p \rangle \neg q$



# Публичные объявления и общее знание

---

Лемма

$$\frac{\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi}{\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi}$$

1	(a) $\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi$ , (b) $\models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi$	
2	$\boxed{M, x} \quad M, x \models \chi$	$\triangleright M, x \models [!\varphi]C_G \psi \Leftrightarrow \triangleright M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G \psi$
3	$M, x \models \varphi$	$\triangleright M, x \models C_G \psi \Leftrightarrow \triangleright \forall y (x \sim_{G, \varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
4	$\boxed{y} \quad x \sim_{G, \varphi} y$	$\triangleright M, y \models [!\varphi]\psi$
5	$x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ т.ч. $i_1, \dots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $x \sim_{G, \varphi} y$
6	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M, x \models E_G \chi$	1b, 6 по MP
8	$M, x \models K_{i_1} \chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	$\vdots$	повторяем 6–9 для $y_2, \dots, y_n$
11	$M, y \models \chi$	из 10
12	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y (x \sim_{G, \varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	$B\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M, x \models [!\varphi]C_G \psi$	$B\Rightarrow$ 3–13
15	$\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi$	$B\forall \Rightarrow$ 2–14

# Исчисление *PALC*

---

- *S5*
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- Аксиомы и правила вывода *S5C*
- Правила вывода: *MP*, *NEC*, *RE!*
- Правило вывода

$$\frac{\chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi}{\chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi}$$

# Полнота и корректность

---

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание
- Случай  $[!\varphi]C_G\psi$

Утверждение:  $\vdash [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$  для  $i \in G$

1.  $C_G\psi \rightarrow K_iC_G\psi$
2.  $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow [!\varphi]K_iC_G\psi$
3.  $[!\varphi]K_iC_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4.  $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма:  $[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow \forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	
2	$\boxed{Y} \quad X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y$	$\triangleright [!\varphi]\psi \in Y$
3	$X \sim_{i_1}^\Phi Y_1 \sim_{i_2}^\Phi \dots \sim_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч. $\varphi \in X, \varphi \in Y_i$ и $i_1, \dots, i_n \in G$	из 2 по опр.
4	$\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
5	$\varphi \in X$	из 3
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по МР
7	$X \sim_{i_1}^\Phi Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	$\vdots$	повторяем шаги 5–8 для $Y_2$ и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \rightarrow [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$\forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 $\forall Y \Rightarrow$



$$[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi$$


---

Что мы уже доказали?

1.  $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$  е.т.е.  $\forall y (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
2.  $[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow \forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$

- 1  $[!\varphi]C_G\psi \in X$
- 2  $\forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$
- 3  $\forall Y (X \sim_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$  по ПИ
- 4  $M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi$

# Условное общее знание

---

## Определение (RC)

$M, x \models C_G^\psi \varphi$  е.т.е.  $\forall y (x (\bigcup_{i \in G} \sim_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

## Утверждение

Общее знание выражимо через условное общее знание:

$$C_G \varphi \equiv C_G^\top \varphi$$

Доказательство: упражнение

# Исчисление для условного общего знания

## Исчисление $S5_mRC$

Аксиомные схемы:

( $S5_K$ ) Аксиомные схемы  $S5$  для  $K_i$

( $K_{RC}$ )  $C_G^X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G^X\varphi \rightarrow C_G^X\psi)$

( $mix_{RC}$ )  $C_G^\psi\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi))$

( $ind_{RC}$ )  $C_G^\psi(\varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow C_G^\psi\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} MP$$

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi} G_K$$

$$\frac{\varphi}{C_G^\psi\varphi} G_{CK}$$

# Аксиома редукции для условного общего знания

---

## Исчисление $S5_m[]$ -RC ( $PAL$ -RC)

$(S5_mRC)$  Аксиомные схемы и правила вывода исчисления  $S5_mRC$

$$(R_{RC}) \quad [!\varphi]C_G^x\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G^{\varphi \wedge [!\varphi]x}[!\varphi]\psi)$$

## Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания:  $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

## Упражнение

Для формулы  $[!p]C_Gq$  найдите эквивалентную, но из языка  $\mathcal{EL}$ -RC.