Сложные случаи: PALC, S5CD, PALCD

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Сложные случаи

- $\mathcal{PAL}$ + общее знание

Пути

Определение 1. Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G–путь из x в y (обозначение: $x \sim_G y$), если найдутся такие $y_1, \dots y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$.

Определение 2. Пусть $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G–φ–путь из x в y (обозначение: $x \sim_{G,\varphi} y$), если найдутся такие $y_1, \dots y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_n} y_n = y$ и $x, y_1, \dots, y_n \in [\varphi]_M$.

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Упражнение 1. Докажите, что $\left(\bigcup\limits_{i\in G} \sim_i^{!\varphi}\right)^* = \sim_{G,\varphi}$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge x \sim_{G,\varphi} y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((x \sim_{G,\varphi} y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

◀

PALC

Утверждение 2: Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p\rangle\neg q$

Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \to [!\varphi]\psi \qquad \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

1	$(a) \models \chi \to [!\varphi]\psi$, $(b) \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi$	
2	$\boxed{M,x}\ M,x \models \chi$	$\rhd\ M,x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \rhd\ \forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M,y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y}\ x \sim_{G,\varphi} y$	$\rhd\ M,y \models [!\varphi]\psi$
4	$x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \cdots \sim_{i_n} y_n = y$ т.ч.	
5	$i_1, \ldots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \ldots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $x \sim_{G,\varphi} y$
6	$M,x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M,x \models E_G\chi$	1b, 6 по MP
8	$M,x \models K_{i_1}\chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M,y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	$\vdots$	повторяем 6–9 для $y_2, \ldots, y_n$
11	$M,y \models \chi$	из 10
12	$M,y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M,y \models [!\varphi]\psi)$	В$\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M,x \models [!\varphi]C_G\psi$	def
15	$\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi$	В$\forall \Rightarrow$ 2–14

Исчисление *PALC*

- $S5$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- Аксиомы и правила вывода $S5C$
- Правила вывода: MP, NEC, $RE!$
- Правило вывода

$$\frac{\chi \to [!\varphi]\psi \qquad (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание
- Случай $[!\varphi]C_G\psi$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \to K_iC_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \to [!\varphi]K_iC_G\psi$
3. $[!\varphi]K_iC_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ – замыкание некоторой формулы, $M^\Phi = (W^\Phi, (R_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – конечная каноническая модель, тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство

Будем доказывать индукцией по $c(\varphi')$.

Предположение индукции Обозначим $c(\varphi') = n$.

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^{\Phi}, X \models \psi)$$

Шаг индукции Рассмотрим следующие случаи.

Сл.1 $\varphi' = p$
Сл.2 $\varphi' = \neg\varphi$
Сл.3 $\varphi' = \varphi \wedge \psi$
Сл.4 $\varphi' = K_i\varphi$
Сл.5 $\varphi' = C_G\varphi$
Сл.6 $\varphi' = [\varphi]\psi$

- Сл.6a $\varphi' = [\varphi]p$
- Сл.6b $\varphi' = [\varphi]\neg\psi$
- Сл.6c $\varphi' = [\varphi](\psi \wedge \chi)$
- Сл.6d $\varphi' = [\varphi]K_i\psi$
- Сл.6e $\varphi' = [\varphi][\psi]\chi$
- Сл.6f $\varphi' = [\varphi]C_G\psi p$

Сл. 6a-6e

- Сл.6a $c(\varphi \to p) < c([!\varphi]p)$
  $[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \to p) \in X \Leftrightarrow M^\Phi, X \models \varphi \to p \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]p$
- Сл.6b–d. Упражнение.
- Сл.6e

Случай 6f$\Rightarrow$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	$\triangleright\ M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall Y(X \sim_{G,\varphi} Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$
2	$\boxed{Y}\ X \sim^\Phi_{G,\varphi} Y$	$\triangleright\ M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$
3	$X \sim^\Phi_{i_1} Y_1 \sim^\Phi_{i_2} \cdots \sim^\Phi_{i_n} Y_n = Y$ т.ч. $i_1, \dots, i_n \in G$	из 2 по опр.
	и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$	
4	$\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$	ПИ
5	$\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$X \sim^\Phi_{i_1} Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	$\vdots$	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \to [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$	ПИ
13	$\forall Y(X \sim^\Phi_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 В$\forall \Rightarrow$

Случай 6f$\Leftarrow$

Лемма $(\chi \wedge \varphi) \to E_G \neg \underline{Y}$

Достаточно доказать, для любых $X \in S, Y \in \overline{S}, i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \in S$	
2	$Y \in \overline{S}$	
3	$\nvdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$	$\triangleright$«$\bot$»
4	$\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nvdash \bot$	
5	$X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \bot$	
6	$X, \varphi \nvdash \bot$	
7	$\varphi \in X$	
8	$X, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \bot$	
9	$X \sim_i^{\Phi} Y$	
10	$M^{\Phi}, X \models \varphi$	из 6 по ПИ
11	$\models [!\varphi] C_G \psi \to (\varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi)$	
12	$M^{\Phi}, X \models \varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi$	
13	$M^{\Phi}, X \models K_i [!\varphi] C_G \psi$	
14	$M^{\Phi}, Y \models [!\varphi] C_G \psi$	
15	$Y \in S$	
16	«$\bot$»	1, 14

Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

Упражнение

Для формулы $[!p]C_G q$ найдите эквивалентную, но из языка $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$.

Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \to K_a \neg p)]C_{ab}\neg p$$

- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$
- $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$

$$C_{ab}^{p}\neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]