

Исчисления K_m , $S4_m$, $S5_m$: корректность и полнота

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Исчисления

Исчисление K_m

Аксиомные схемы:

- Тавтологии КЛВ
- $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{ MP}$$

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi} \text{ G}$$

Расширения K_m

$S4_m$

K_m , к которому добавили следующие аксиомные схемы:

- $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- $K_i\varphi \rightarrow K_iK_i\varphi$

$S5_m$

$S4_m$, к которому добавили:

- $\varphi \rightarrow K_i\hat{K}_i\varphi$

или $S5_m - K_m$, к которому добавили:

- $K_i\varphi \rightarrow \varphi$
- $\neg K_i\varphi \rightarrow K_i\neg K_i$

Вывод

Определение

Выводом ($\vdash_L \varphi$) в исчислении L будем называть последовательность формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \varphi$, в которой каждая формула φ_i ($1 \leq i \leq n$) является подстановочным случаем аксиомной схемы или получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.

Пример

$\vdash K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p$

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$ – тавтология
2. $K_i((p \wedge q) \rightarrow p)$ – из 1 по G
3. $K_i((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p)$ – акс. K
4. $K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p$ – MP 3,4

Пример

$\vdash K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p$

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$ – тавтология
2. $K_i((p \wedge q) \rightarrow p)$ – из 1 по G
3. $K_i((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow (K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p)$ – акс. K
4. $K_i(p \wedge q) \rightarrow K_i p$ – MP 3,4

Упражнение

Докажите, что

$$\frac{(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi}{(K_i \varphi_1 \wedge \cdots \wedge K_i \varphi_n) \rightarrow K_i \psi}$$

Вывод из гипотез (локальный)

Определение

Будем говорить, что φ (локально) **выводится из множества гипотез Γ** в исчислении L ($\Gamma \vdash_L \varphi$), если найдутся $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ т.ч. $\vdash_L (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$

Примеры:

- $p \not\vdash \Box p$
- $\Box p, \Box q \vdash \Box(p \wedge q)$

Полнота и корректность

- $L \in \{K_m, S5_m, S4_m, \dots\}$
- $C \in \{Ref, Eq, Pre, \dots\}$
- (сильная) корректность
 $\Gamma \vdash_L \varphi \Rightarrow \Gamma \models_C \varphi$
- (сильная) полнота
 $\Gamma \models_C \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_L \varphi$

Сборка доказательства

Корректность: упражнение.

$$X \not\vdash_L \varphi \Rightarrow X, \neg\varphi \not\vdash_L \perp \Rightarrow (X \cup \{\neg\varphi\}) \subseteq X' \Rightarrow M^c, X' \models X \text{ и } M^c, X' \models \neg\varphi \Rightarrow \\ (M^c \in \mathcal{C} \Rightarrow X \not\vdash_C \varphi)$$

Максимальность и непротиворечивость

Определение. Пусть $L \in \{K, S4, S5, \dots\}$. Множество формул X будем называть L -непротиворечивым, если: $X \not\vdash_L \perp$.

Определение. Пусть $L \in \{K, S4, S5, \dots\}$. Множество формул X будем называть **максимальным L -непротиворечивым множеством**, если X – непротиворечиво и для любой формулы φ : $\varphi \in X$ или $\neg\varphi \in X$.

Свойства м.L-н.м.

. **Утверждение.** Пусть X – м.L-н.м., тогда

1. $\neg\varphi \in X \Leftrightarrow \varphi \notin X$
2. $\varphi \wedge \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X \text{ и } \psi \in X)$
3. $\varphi \vee \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X \text{ или } \psi \in X)$
4. $\varphi \rightarrow \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X \Rightarrow \psi \in X)$
5. $\varphi \in X \Leftrightarrow X \vdash_L \varphi$
6. $\perp \notin X$

Каноническая модель

Определение. Канонической моделью будем называть следующую структуру $M^c = (W^c, (R_i^c)_{i \in Ag}, V^c)$, где

- $W^c := \{X \subset \mathcal{EL} \mid X \text{ — максимальное L-непротиворечивое множество}\}$
- $XR_i^c Y \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{EL} (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y)$
- $V^c(p) := \{X \in W^c \mid p \in X\}$, т.е. $M^c, X \models p \Leftrightarrow p \in X$

Лемма Линденбаума

Лемма. Пусть X – непротиворечивое множество формул, тогда найдется X' т.ч. $X \subseteq X'$ и X' – м.л.-н.м. формул.

Занумеруем множество всех формул языка $\mathcal{EL} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ Рассмотрим следующее множество:

- $X_1 = X$
- $X_{n+1} = \begin{cases} X_n \cup \{\varphi_{n+1}\}, & \text{если } X_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ непротиворечиво} \\ X_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}, & \text{иначе} \end{cases}$
- $X' = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$

Допустим, что и $X_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$, и $X_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$ – противоречивы. Тогда, $X_n \vdash \neg\varphi_{n+1}$ и $X_n \vdash \varphi_{n+1}$. То есть, X_n – противоречиво.

Лемма об истинности

Лемма

Пусть $X \in W^c$, $\varphi' \in \mathcal{EL}$, тогда $\varphi' \in X \Leftrightarrow M^c, X \models \varphi'$

Докажем индукцией по построению φ' .

База индукции $\varphi' = p$

$$p \in X \Leftrightarrow M^c, X \models p \text{ (по опр.)}$$

Шаг индукции Рассмотрим случаи $\varphi' = \neg\varphi$, $\varphi' = \varphi \wedge \psi$, $\varphi' = K_i\varphi$

$\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ – упражнение

Случай $K_i\varphi \Rightarrow$

1	$K_i\varphi \in X$	$\triangleright M^c, X \models K_i\varphi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (XR_i^c Y \Rightarrow M^c, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y} XR_i^c Y$	$\triangleright M^c, Y \models \varphi$
3	$\varphi \in Y$	1,2
4	$M^c, Y \models \varphi$	3 по ПИ
5	$\forall Y (XR_i^c Y \Rightarrow M^c, Y \models \varphi)$	2-4
6	$M^c, X \models K_i\varphi$	4 по опр.

Случай $K_i\varphi \Leftarrow$

1	$K_i\varphi \notin X$	$\triangleright M^c, X \not\models K_i\varphi \Leftrightarrow \triangleright \exists Y (XR_i^c Y \wedge M^c, Y \not\models \varphi)$
2	$y_0 = \{\psi \mid K_i\psi \in X\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$	$\triangleright \text{«}\perp\text{»}$
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \neg\varphi \vdash \perp$	из 2
4	$\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \varphi$	из 3
5	$\vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$	из 4
6	$\vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \rightarrow K_i\varphi$	из 5 по упр.
7	$X \vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \rightarrow K_i\varphi$	из 6
8	$X \vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n)$	по построению ψ
9	$X \vdash K_i\varphi$	из 7, 8
10	$\neg K_i\varphi \in X$	из 1

Случай $K_i\varphi \Leftarrow$

11	$X \vdash \neg K_i$	из 10
12	« \perp »	9, 11
13	$y_0 \not\vdash \perp$	из 2-12
14	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л. Линденбаума из 13
15	$XR_i^c Y$	из 2
16	$\neg\varphi \in Y$	из 2
17	$\varphi \notin Y$	из 16
18	$M^c, Y \not\models \varphi$	из 17 по ПИ
19	$\exists Y (XR_i^c Y \wedge M^c, Y \not\models \varphi)$	из 15, 18
20	$M^c, X \not\models K_i\varphi$	из 19

Классы моделей

Утверждения.

1. Если $L = KT$, то R^c – рефлексивно
2. Если $L = K4$, то R^c – транзитивно
3. Если $L = KB$, то R^c – симметрично