

S5C: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Исчисления $S5C$ и $S5C'$

Теорема о дедуктивной эквивалентности $S5C$ и $S5C'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C'} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления $S5C$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \models_{S5C} \varphi$$

Компактность логики

Обозначение

$$\Gamma \models_L \varphi := \forall F (F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$$

Определение. Компактность логики.

Логика L называется компактной е.т.е. $\Gamma \models_L \perp \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ т.ч. Γ' – конечно и $\Gamma' \models_L \perp$.

Альтернативное определение: ?

Компактность и сильная полнота

Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

Некомпактность $S5C$

Теорема.

Логика $S5C$ не является компактной.

Доказательство.

$$X = \{\neg C_{ab}p\} \cup \{E_{ab}^n p \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. $X \models_{S5C} \perp$, т.е. X – невыполнимо
2. $X' \not\models_{S5C} \perp$, где $X' \subseteq X$ и X' – конечно



Следствие

Логика $S5C$ не является сильно полной.

Полнота (по Крипке) $S5C$

Теорема

Логика $S5C$ является полной (по Крипке), т.е. $\models_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$

Замыкание $cl(\varphi)$

Определение. Замыкание

Пусть $cl : ELC \mapsto \mathcal{P}(ELC)$ функция т.ч. $cl(\varphi)$ – наименьшее множество, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $Sub(\varphi) \subseteq cl(\varphi)$
2. если $\psi \in cl(\varphi)$ и ψ не начитается с \neg , то $\neg\psi \in cl(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl(\varphi)$, то $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl(\varphi)$

Пример

- $cl(C_{ab}p) = \{p, \neg p, C_{ab}p, \neg C_{ab}p, K_a C_{ab}p, \neg K_a C_{ab}p, K_b C_{ab}p, \neg K_b C_{ab}p\}$

Утверждение

Для любого $\varphi \in ELC$: $cl(\varphi)$ – конечно

Максимальность и непротиворечивость

Определение

Множество формул $X \in L_{KC}$ называется *S5C–непротиворечивым* е.т.е.

- (a) $X \not\vdash_{S5C} \perp$
- (b) не существует $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X$ т. ч. $\vdash_{S5C} \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение: $\Phi = cl(\varphi)$ для $\varphi \in L_{KC}$

Определение.

Будем говорить, что множество $X \subset \Phi$ является *Φ -максимальным S5C-непротиворечивым* е.т.е.

- X — S5C–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi (X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5C} \perp)$.

Конечная каноническая модель

Определение

Обозначим $\Phi = cl(\varphi)$ для формулы $\varphi \in L_{КС}$. $M^\Phi = (W^\Phi, (\sim_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – *конечная каноническая модель*, где

- $W^\Phi = \{X \subset \Phi \mid X \text{ — } \Phi\text{-м. S5C-н.м. формул}\}$
- $X \sim_i^\Phi Y := \forall \varphi \in \Phi : K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$ для любого $i \in Ag$
- $X \models p \iff p \in X$

Упражнение

Используя следующее обозначение: $\boxed{\#_i X := \{\varphi \mid K_i \varphi \in X\}}$, переформулировать $X \sim_i^c Y$

Схема доказательства

Теорема о корректности и полноте исчисления $S5C$

$$\forall \varphi \in L_{KC} \quad \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$$

Доказательство.

(\Leftarrow) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления $S5C$

(Упражнение)

(\Rightarrow) Полнота.

$$\not\models_{S5C} \varphi \Rightarrow \neg \varphi \not\models_{S5C} \perp \Rightarrow \{\neg \varphi\} \subset X \in W^\Phi \Rightarrow M^\Phi, X \models \neg \varphi \Rightarrow (M^\Phi \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Лемма об истинности
- Каноничность $M^\Phi \in S5$

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ замыкание формулы φ_0 , M^Φ – к.к.м., $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство.

Докажем индукцией по построению φ' .

БИ $\varphi' = p$

ШИ Сл.1 $\varphi' = \neg \varphi_1$

Сл.2 $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Сл.3 $\varphi' = K_i \varphi$

Сл.4 $\varphi' = C_G \varphi$



Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, где $X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G\varphi\}$, $\bar{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\}$

Сл.4. $(\Leftarrow) C_G\varphi \in X \Leftarrow M^\Phi, X \models C_G\varphi$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\bar{S} := W^c \setminus S$$

$$\vdash \bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \quad \vdash (\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \leftrightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G\chi$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi)$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow C_G\chi)$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash C_G\chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow C_G\varphi$$

$$X \vdash C_G\varphi$$

$$C_G\varphi \in X$$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма $\vdash \underline{X} \rightarrow \chi$

► Доказательство: по построению χ (по КЛВ). ◀

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\#_i X := \{\psi \mid K_i \psi \in X\}$$

Лемма: $\vdash \chi \rightarrow \varphi$

► Достаточно доказать, что для любого $X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$

| | | | | | |
|---|--|--|----|--|---------------|
| 1 | $\boxed{X} X \in S$ | | 9 | $\varphi \in Y$ | по п.и. |
| 2 | $M^c, X \models C_G \varphi$ | $X \in S$ | 10 | $\neg \varphi \in Y$ | по постр. Y |
| 3 | $M^c, X \models K_i \varphi$ для $i \in G$ | 1 | 11 | « \perp » | 6, 7 |
| 4 | $y_0 := \#_i X \cup \{\neg \varphi\}$ | постр. | 12 | $y_0 \vdash \perp$ | |
| 5 | $y_0 \not\vdash \perp$ | $\triangleright : \text{«}\perp\text{»}$ | 13 | $\#_i X \vdash \varphi$ | 4 |
| 6 | $y_0 \subseteq Y \in W^c$ | по л.Линд. | 14 | $X \vdash \#_i X$ | 3 |
| 7 | $X \sim_i^c Y$ | по постр. Y | 15 | $X \vdash \varphi$ | 5, 6 |
| 8 | $M^c, Y \models \varphi$ | 1, 4 | 16 | $\vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$ | 7 |

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма: $\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'})$

► Достаточно доказать, что $\forall i \in G \forall X \in S \forall Y \in \bar{S} \vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

$$1 \quad \boxed{i} \quad i \in G$$

$$2 \quad \boxed{X} \quad X \in S$$

$$3 \quad \boxed{Y} \quad Y \in W^\Phi \setminus S$$

$$4 \quad M^c, X \models C_G \varphi$$

$$5 \quad M^c, Y \not\models C_G \varphi$$

$$6 \quad X \not\sim_i^c Y$$

$$7 \quad \exists \psi : K_i \psi \in X, \psi \notin Y$$

$$8 \quad \neg \psi \in Y$$

2

3

из 2,3

$$9 \quad Y \vdash \neg \psi$$

$$10 \quad \vdash \underline{Y} \rightarrow \neg \psi$$

$$11 \quad \vdash \psi \rightarrow \neg \underline{Y}$$

$$12 \quad \vdash K_i \psi \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$$

$$13 \quad X \vdash K_i \psi \quad \text{по постр. } \psi$$

$$14 \quad \vdash \underline{X} \rightarrow K_i \psi$$

$$15 \quad \vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$$

Лемма: $\forall S \subseteq W^c \vdash \bigwedge \{Y \mid Y \in \overline{S}\} \leftrightarrow \bigvee \{X \mid X \in S\}$, где $\overline{S} := W^c \setminus S$

► Доказательство собирается из следующих утверждений:

1. $\forall X, Y \in W^c \text{ т.ч. } X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$
2. $\vdash \bigvee \{\underline{X} \mid X \in W^c\}$



Упражнение

Собрать доказательство леммы из утверждений. Подсказка: понадобится только КЛВ.

Утверждение: $\forall X, Y \in W^\Phi$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$

| | | |
|---|---|-------------------|
| 1 | $\boxed{X} X \in W^\Phi$ | |
| 2 | $\boxed{Y} Y \in W^\Phi$ | |
| 3 | $X \neq Y$ | |
| 4 | $X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y)$ | 1 теория множеств |
| 5 | $X \cup Y \vdash \perp$ | 2 по опр. м.н.м |
| 6 | $\underline{X}, \underline{Y} \vdash \perp$ | 3 |
| 7 | $\vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$ | 4 |

Утверждение $\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$

| | | |
|----|--|---|
| 1 | $\not\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$ | $\triangleright \text{«}\perp\text{»}$ |
| 2 | $\not\vdash \underline{X_1} \vee \dots \vee \underline{X_n}, X_i \in W^\Phi$ | |
| 3 | $\forall X_i \in W^\Phi \not\vdash \underline{X_i}$ | |
| 4 | $\forall X_i \in W^\Phi \exists \varphi \in X_i \not\vdash \varphi$ | |
| 5 | $\not\vdash h(X_1) \vee \dots \vee h(X_n)$ | $h(X_i) := \varphi$ т.ч. $\varphi \in X_i$ и $\not\vdash \varphi$ |
| 6 | $\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \not\vdash \perp$ | |
| 7 | $\{ \neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \} \subseteq X_j \in W^\Phi$ | по л. Линд. |
| 8 | $h(X_j) \in X_j$ | |
| 9 | $\neg h(X_j) \in X_j$ | |
| 10 | $\text{«}\perp\text{»}$ | |

Каноничность к.к.м.

Определение

Класс моделей $S5$.

Лемма

$M^\Phi \in S5$, то есть, \sim_i^Φ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность \sim_i^Φ

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\boxed{X} X \in W^\Phi$ | $\triangleright X \sim_i^\Phi X \Leftrightarrow \triangleright \forall \varphi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$ |
| 2 | $\boxed{\varphi} K_i \varphi \in X$ | $\triangleright \varphi \in X$ |
| 3 | $\varphi \in X$ | из 2, поскольку $\varphi \in \Phi, \vdash_{S5C} K_i \varphi \rightarrow \varphi$ |
| 4 | $\forall \varphi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$ | $B \forall \Rightarrow (2-3)$ |
| 5 | $X \sim_i^\Phi X$ | 4 по опр. \sim_i^Φ |
| 6 | $\forall X \in W^\Phi : X \sim_i^\Phi X$ | $B \forall (1-5)$ |