

S5C: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Исчисления $S5C$ и $S5C'$

Теорема о дедуктивной эквивалентности $S5C$ и $S5C'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C'} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления $S5C$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \models_{S5C} \varphi$$

Компактность логики

Обозначение

$$\Gamma \models_L \varphi := \forall F (F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$$

Определение. Компактность логики.

Логика L называется компактной е.т.е. $\Gamma \models_L \perp \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ т.ч. Γ' – конечно и $\Gamma' \models_L \perp$.

Альтернативное определение: ?

Компактность и сильная полнота

Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

Некомпактность $S5C$

Теорема.

Логика $S5C$ не является компактной.

Доказательство.

$$X = \{\neg C_{ab}p\} \cup \{E_{ab}^n p \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. $X \models_{S5C} \perp$, т.е. X – невыполнимо
2. $X' \not\models_{S5C} \perp$, где $X' \subseteq X$ и X' – конечно



Следствие

Логика $S5C$ не является сильно полной.

Полнота (по Крипке) $S5C$

Теорема

Логика $S5C$ является полной (по Крипке), т.е. $\models_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$

Замыкание

Определение. **Замыкание $cl(\varphi)$** . Для $\varphi \in L_{KS}$ определим четыре множества:
 $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subseteq cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

Пример $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$

φ	$cl_1(\varphi)$	$cl_2(\varphi)$	$cl_3(\varphi)$	$cl(\varphi)$
$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$
		$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$
	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$
	p	p	p	p
	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$
		$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$
	q	q	q	q
		$\neg q$	$\neg q$	$\neg q$
	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$
		$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$
	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$
		$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$
			$K_a K_a C_{ab}q$	$K_a K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a K_a C_{ab}q$
			$K_a \neg K_a C_{ab}q$	$K_a \neg K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a \neg K_a C_{ab}q$
			$K_b K_b C_{ab}q$	$K_b K_b C_{ab}q$
				$\neg K_b K_b C_{ab}q$
			$K_b \neg K_b C_{ab}q$	$K_b \neg K_b C_{ab}q$
				$K_b \neg K_b C_{ab}q$

Утверждение

Для любого $\varphi \in L_{KS}$: $cl(\varphi)$ – конечно

Доказательство.

Упражнение. □

Максимальность и непротиворечивость

Определение

Множество формул $X \in L_{KC}$ называется *S5C–непротиворечивым* е.т.е.

- (a) $X \not\vdash_{S5C} \perp$
- (b) не существует $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X$ т. ч. $\vdash_{S5C} \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение: $\Phi = cl(\varphi)$ для $\varphi \in L_{KC}$

Определение.

Будем говорить, что множество $X \subset \Phi$ является *Φ -максимальным S5C-непротиворечивым* е.т.е.

- X — S5C–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi (X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5C} \perp)$.

Конечная каноническая модель

Определение

Обозначим $\Phi = cl(\varphi)$ для формулы $\varphi \in L_{КС}$. $M^\Phi = (W^\Phi, (\sim_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – *конечная каноническая модель*, где

- $W^\Phi = \{X \subset \Phi \mid X \text{ — } \Phi\text{-м. S5C-н.м. формул}\}$
- $X \sim_i^\Phi Y := \forall \varphi \in \Phi : K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$ для любого $i \in Ag$
- $X \models p \iff p \in X$

Упражнение

Используя следующее обозначение: $\boxed{\#_i X := \{\varphi \mid K_i \varphi \in X\}}$, переформулировать $X \sim_i^c Y$

K.M. VS. K.K.M.

Определение

Пусть $X \subseteq L_{CK}$, $L \in \{K_m^C, S4_m^C, S5_m^C, \dots\}$, определим *множество следствий*

$$[X]_L := \{\varphi \in L_{CK} \mid X \vdash_L \varphi\}$$

Утверждение. $[X]_L$ в к.м. (M^c)

Если $X \in W^c$, то $[X]_L \subseteq X$. Более того: $[X]_L = X$

Утверждение. $[X]_L$ в к.к.м. (M^Φ)

Если $X \in W^\Phi$, то не гарантируется, что $[X]_L \subseteq X$, но верно, что $[X]_L \cap \Phi \subseteq X$. Более того: $[X]_L \cap \Phi = X$.

Схема доказательства

Теорема о корректности и полноте исчисления $S5C$

$$\forall \varphi \in L_{KC} \quad \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$$

Доказательство.

(\Leftarrow) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления $S5C$
(Упражнение)

(\Rightarrow) Полнота.

$$\not\models_{S5C} \varphi \Rightarrow \neg \varphi \not\models_{S5C} \perp \Rightarrow \{\neg \varphi\} \subset X \in W^\Phi \Rightarrow M^\Phi, X \models \neg \varphi \Rightarrow (M^\Phi \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Каноничность $M^\Phi \in S5$
- Лемма об истинности

Каноничность к.к.м.

Определение

Класс моделей $S5$.

Лемма 1

$M^\Phi \in S5$, то есть, \sim_i^Φ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность \sim_i^Φ



1	$\boxed{X} X \in W^\Phi$	$\triangleright X \sim_i^\Phi X \Leftrightarrow \triangleright \forall \varphi \in \Phi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$
2	$\boxed{\varphi} \in \Phi : K_i \varphi \in X$	$\triangleright \varphi \in X$
3	$\varphi \in X$	из 2, поскольку $\varphi \in \Phi, \vdash_{S5C} K_i \varphi \rightarrow \varphi$
4	$\forall \varphi (K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$	$\text{B}\forall \Rightarrow (2-3)$
5	$X \sim_i^\Phi X$	4 по опр. \sim_i^Φ
6	$\forall X \in W^\Phi : X \sim_i^\Phi X$	$\text{B}\forall (1-5)$



Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ замыкание формулы φ_0 , M^Φ – к.к.м., $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство.

Докажем индукцией по построению φ' .

БИ $\varphi' = p$

ШИ Сл.1 $\varphi' = \neg \varphi_1$

Сл.2 $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Сл.3 $\varphi' = K_i \varphi$

Сл.4 $\varphi' = C_G \varphi$



Сл.4 $\varphi' = C_G \varphi$

Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, где $X = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G \varphi\}$, $\bar{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\}$

Сл.4. $(\Leftarrow) C_G\varphi \in X \Leftarrow M^\Phi, X \models C_G\varphi$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\bar{S} := W^c \setminus S$$

$$\vdash \bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \quad \vdash (\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'}) \leftrightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow E_G\chi$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi)$$

$$\vdash C_G(\chi \rightarrow E_G\chi) \rightarrow (\chi \rightarrow C_G\chi)$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow \varphi$$

$$\vdash C_G\chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow \chi$$

$$\vdash \chi \rightarrow C_G\varphi$$

$$\vdash \underline{X} \rightarrow C_G\varphi$$

$$X \vdash C_G\varphi$$

$$C_G\varphi \in X$$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма $1 \vdash \underline{X} \rightarrow \chi$

► Доказательство: по построению χ (по КЛВ). ◀

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

$$\#_i X := \{\psi \mid K_i \psi \in X\}$$

Лемма: $\vdash \chi \rightarrow \varphi$

► Достаточно доказать, что для любого $X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$

1	$\boxed{X} X \in S$		9	$\varphi \in Y$	по п.и.
2	$M^c, X \models C_G \varphi$	$X \in S$	10	$\neg \varphi \in Y$	по постр. Y
3	$M^c, X \models K_i \varphi$ для $i \in G$	1	11	« \perp »	6, 7
4	$y_0 := \#_i X \cup \{\neg \varphi\}$	постр.	12	$y_0 \vdash \perp$	
5	$y_0 \not\vdash \perp$	$\triangleright : \text{«}\perp\text{»}$	13	$\#_i X \vdash \varphi$	4
6	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л.Линд.	14	$X \vdash \#_i X$	3
7	$X \sim_i^c Y$	по постр. Y	15	$X \vdash \varphi$	5, 6
8	$M^c, Y \models \varphi$	1, 4	16	$\vdash \underline{X} \rightarrow \varphi$	7

Лемма: Пусть $X, Y \in W^\Phi$, тогда $\underline{X}, \hat{K}_i \underline{Y} \not\vdash \perp \Rightarrow X \sim_i^\Phi Y$

1	$\underline{X}, \hat{K}_i \underline{Y} \not\vdash \perp$	7	$\vdash \underline{Y} \rightarrow \neg \theta$
2	$\not\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$	8	$\vdash \theta \rightarrow \neg \underline{Y}$
3	$\underline{X} \not\sim_i^\Phi \underline{Y} \quad \triangleright \text{«}\perp\text{»}$	9	$\vdash K_i \theta \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$
4	$\theta \in \Phi : K_i \theta \in X, \theta \notin Y \quad \text{из 3}$	10	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \theta$
5	$\neg \theta \in Y$	11	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$
6	$Y \vdash \neg \theta$	12	$\text{«}\perp\text{»} \quad 2, 11$

$$S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G \varphi\}$$

$$\chi := \bigvee \{\underline{X'} \mid X' \in S\}$$

Лемма: $\vdash \chi \rightarrow E_G(\bigwedge_{Y' \in \bar{S}} \neg \underline{Y'})$

► Достаточно доказать, что $\forall i \in G \forall X \in S \forall Y \in \bar{S} \vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

1	$\boxed{i} i \in G$		9	$Y \vdash \neg \psi$	
2	$\boxed{X} X \in S$		10	$\vdash \underline{Y} \rightarrow \neg \psi$	
3	$\boxed{Y} Y \in W^\Phi \setminus S$		11	$\vdash \psi \rightarrow \neg \underline{Y}$	
4	$M^c, X \models C_G \varphi$	2	12	$\vdash K_i \psi \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$	
5	$M^c, Y \not\models C_G \varphi$	3	13	$X \vdash K_i \psi$	по постр. ψ
6	$X \not\sim_i^c Y$	из 2,3	14	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \psi$	
7	$\exists \psi : K_i \psi \in X, \psi \notin Y$		15	$\vdash \underline{X} \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$	
8	$\neg \psi \in Y$				

Лемма: $\forall S \subseteq W^c \vdash \bigwedge \{Y \mid Y \in \overline{S}\} \leftrightarrow \bigvee \{X \mid X \in S\}$, где $\overline{S} := W^c \setminus S$

► Доказательство собирается из следующих утверждений:

1. $\forall X, Y \in W^c \text{ т.ч. } X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$
2. $\vdash \bigvee \{\underline{X} \mid X \in W^c\}$



Упражнение

Собрать доказательство леммы из утверждений. Подсказка: понадобится только КЛВ.

Утверждение: $\forall X, Y \in W^\Phi$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$

1	$\boxed{X} X \in W^\Phi$	
2	$\boxed{Y} Y \in W^\Phi$	
3	$X \neq Y$	
4	$X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y)$	1 теория множеств
5	$X \cup Y \vdash \perp$	2 по опр. м.н.м
6	$\underline{X}, \underline{Y} \vdash \perp$	3
7	$\vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$	4

Утверждение $\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$

1	$\not\vdash \bigvee \{ \underline{X} \mid X \in W^\Phi \}$	$\triangleright \text{«}\perp\text{»}$
2	$\not\vdash \underline{X_1} \vee \dots \vee \underline{X_n}, X_i \in W^\Phi$	
3	$\forall X_i \in W^\Phi \not\vdash \underline{X_i}$	
4	$\forall X_i \in W^\Phi \exists \varphi \in X_i \not\vdash \varphi$	
5	$\not\vdash h(X_1) \vee \dots \vee h(X_n)$	$h(X_i) := \varphi \text{ т.ч. } \varphi \in X_i \text{ и } \not\vdash \varphi$
6	$\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \not\vdash \perp$	
7	$\{ \neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \} \subseteq X_j \in W^\Phi$	по л. Линд.
8	$h(X_j) \in X_j$	
9	$\neg h(X_j) \in X_j$	
10	$\text{«}\perp\text{»}$	