Исчисления K_m, $S4_m$, $S5_m$: корректность и полнота

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Исчисления

Исчисление K_m

Аксиомные схемы:

- Тавтологии КЛВ
- $K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ \mathrm{MP} \qquad\qquad \frac{\varphi}{K_i\varphi}\ \mathrm{G}$$

Расширения K_m

$S4_m$

K_m, к которому добавили следующие аксиомные схемы:

- $K_i\varphi \to \varphi$
- $K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$

$S5_m$

$S4_m$, к которому добавили:

- $\varphi \to K_i\hat{K}_i\varphi$

или $S5_m$ – K_m, к которому добавили:

- $K_i\varphi \to \varphi$
- $\neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i$

Вывод

Определение

Выводом ($\vdash_L \varphi$) в исчислении L будем называть последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$, в которой каждая формула φ_i $(1 \leq i \leq n)$ является подстановочным случаем аксиомной схемы или получена из предыдущих формул по одному из правил вывода.

Пример

$\vdash K_i(p \wedge q) \to K_i p$

1. $(p \wedge q) \to p$ – тавтология
2. $K_i((p \wedge q) \to p)$ – из 1 по G
3. $K_i((p \wedge q) \to p) \to (K_i(p \wedge q) \to K_i p)$ – акс. K
4. $K_i(p \wedge q) \to K_i p$ – MP 3,4

Пример

$\vdash K_i(p \land q) \to K_i p$

1. $(p \land q) \to p$ – тавтология
2. $K_i((p \land q) \to p)$ – из 1 по G
3. $K_i((p \land q) \to p) \to (K_i(p \land q) \to K_i p)$ – акс. K
4. $K_i(p \land q) \to K_i p$ – MP 3,4

Упражнение

Докажите, что

$$\frac{(\varphi_1 \land \cdots \land \varphi_n) \to \psi}{(K_i\varphi_1 \land \cdots \land K_i\varphi_n) \to K_i\psi}$$

Вывод из гипотез (локальный)

Определение

Будем говорить, что φ **(локально) выводится из множества гипотез** Γ в исчислении L ($\Gamma \vdash_L \varphi$), если найдутся $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$ т.ч. $\vdash_L (\varphi_1 \land \dots \land \varphi_n) \to \varphi$

Примеры:

- $p \nvdash \Box p$
- $\Box p, \Box q \vdash \Box(p \land q)$

Полнота и корректность

- $L \in \{K_m, S5_m, S4_m, \dots\}$
- $C \in \{Ref, Eq, Pre, \dots\}$
- (сильная) корректность
  $\Gamma \vdash_L \varphi \Rightarrow \Gamma \models_C \varphi$
- (сильная) полнота
  $\Gamma \models_C \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_L \varphi$

Сборка доказательства

Корректность: упражнение.

$$X \nvdash_L \varphi \Rightarrow X, \neg\varphi \nvdash_L \bot \Rightarrow (X \cup \{\neg\varphi\}) \subseteq X' \Rightarrow M^c, X' \models X \text{ и } M^c, X' \models \neg\varphi \Rightarrow$$
$$(M^c \in C \Rightarrow \; X \not\models_C \varphi)$$

Макимальность и непротиворечивость

Определение. Пусть $L \in \{K, S4, S5, \dots\}$. Множество формул X будем называть L-**непротиворечивым**, если: $X \nvdash_L \bot$.

Определение. Пусть $L \in \{K, S4, S5, \dots\}$. Множество формул X будем называть **максимальным** L-**непротиворечивым множеством**, если X – непротиворечиво и для любой формулы φ: $\varphi \in X$ или $\neg\varphi \in X$.

Свойства м.L-н.м.

. **Утверждение.** Пусть X – м.L-н.м., тогда

1. $\neg\varphi \in X \Leftrightarrow \varphi \notin X$
2. $\varphi \wedge \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X$ и $\psi \in X)$
3. $\varphi \vee \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X$ или $\psi \in X)$
4. $\varphi \to \psi \in X \Leftrightarrow (\varphi \in X \Rightarrow \psi \in X)$
5. $\varphi \in X \Leftrightarrow X \vdash_L \varphi$
6. $\perp \notin X$

Каноническая модель

Определение. Каноническoй моделью будем называть следующую структуру $M^c = (W^c, (R_i^c)_{i \in Ag}, V^c)$, где

- $W^c := \{X \subset \mathcal{EL} \mid X$ – максимальное L-непротиворечивое множество$\}$
- $XR_i^c Y \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{EL}(K_i \varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y)$
- $V^c(p) := \{X \in W^c \mid p \in X\}$, т.е. $M^c, X \models p \Leftrightarrow p \in X$

Лемма Линденбаума

Лемма. Пусть X – непротиворечивое множество формул, тогда найдется X' т.ч. $X \in\subseteq X'$ и X' - м.L-н.м. формул.

Занумеруем множество всех формул языка $\mathcal{EL} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ Рассмотрим следующее множество:

- $X_1 = X$
- $X_{n+1} = \begin{cases} X_n \cup \{\varphi_{n+1}\}, \text{ если } X_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \text{ непротиворечиво} \\ X_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}, \text{ иначе} \end{cases}$
- $X' = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} X_i$

Допустим, что и $X_n \cup \{\varphi_{n+1}\}$, и $X_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\}$ – противоречивы. Тогда, $X_n \vdash \neg\varphi_{n+1}$ и $X_n \vdash \varphi_{n+1}$. То есть, X_n – противоречиво.

Лемма об истинности

Лемма

Пусть $X \in W^c$, $\varphi' \in \mathcal{EL}$, тогда $\varphi' \in X \Leftrightarrow M^c, X \models \varphi'$

Докажем индукцией по построению φ'.

База индукции $\varphi' = p$

$p \in X \Leftrightarrow M^c, X \models p$ (по опр.)

Шаг индукции Рассмотрим случаи $\varphi' = \neg\varphi$, $\varphi' = \varphi \wedge \psi$, $\varphi' = K_i\varphi$

$\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ – упражнение

Случай $K_i\varphi \Rightarrow$

1	$K_i\varphi \in X$	$\rhd M^c, X \models K_i\varphi \Leftrightarrow \rhd \forall Y(XR_i^c Y \Rightarrow M^c, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y}\ XR_i^c Y$	$\rhd M^c, Y \models \varphi$
3	$\varphi \in Y$	1,2
4	$M^c, Y \models \varphi$	3 по ПИ
5	$\forall Y(XR_i^c Y \Rightarrow M^c, Y \models \varphi)$	2-4
6	$M^c, X \models K_i\varphi$	4 по опр.

Случай $K_i\varphi \Leftarrow$

1	$K_i\varphi \notin X$	$\triangleright\ M^c, X \not\models K_i\varphi \Leftrightarrow \triangleright\ \exists Y(XR_i^c Y \wedge M^c, Y \not\models \varphi)$
2	$y_0 = \{\psi \mid K_i\psi \in X\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	$\triangleright$ «$\bot$»
3	$\psi_1, \dots, \psi_n, \neg\varphi \vdash \bot$	из 2
4	$\psi_1, \dots, \psi_n \vdash \varphi$	из 3
5	$\vdash (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \to \varphi$	из 4
6	$\vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \to K_i\varphi$	из 5 по упр.
7	$X \vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n) \to K_i\varphi$	из 6
8	$X \vdash (K_i\psi_1 \wedge \dots \wedge K_i\psi_n)$	по построению ψ
9	$X \vdash K_i\varphi$	из 7, 8
10	$\neg K_i\varphi \in X$	из 1

Случай $K_i\varphi \Leftarrow$

11	$\quad X \vdash \neg K_i$	из 10
12	$\quad$ «$\bot$»	9, 11
13	$y_0 \nvdash \bot$	из 2-12
14	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л. Линденбаума из 13
15	$XR_i^c Y$	из 2
16	$\neg\varphi \in Y$	из 2
17	$\varphi \notin Y$	из 16
18	$M^c, Y \not\models \varphi$	из 17 по ПИ
19	$\exists Y(XR_i^c Y \wedge M^c, Y \not\models \varphi)$	из 15, 18
20	$M^c, X \not\models K_i\varphi$	из 19

Классы моделей

Утверждения.

1. Если $L = KT$, то R^c – рефлексивно
2. Если $L = K4$, то R^c – транзитивно
3. Если $L = KB$, то R^c – симметрично