Сравнение языков по выразительности

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Эпистемические языки

Языки

$$
\begin{array}{ll}
(\mathcal{EL}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi
\end{array}
\quad (i \in Ag, G \subseteq Ag)
$$

Эквивалентность формул

Определение

Будем говорить, что формулы φ и ψ эквивалентны в классе моделей C (обозначение: «$\varphi \equiv_C \psi$») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение: $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$, где K – класс всех моделей Крипке.

Примеры

- $(\Box p \wedge \Box(p \to q)) \equiv \Box(p \wedge q)$
- $\Diamond\Box p \equiv_{S5} \Box p$, но $\Diamond\Box p \not\equiv_{S4} \Box p$
- $\Box\Box p \equiv_{S4} \Box p$, но $\Box\Box p \not\equiv \Box p$

Определение

Будем говорить, что формулы φ и ψ эквивалентны в классе моделей C (обозначение: «$\varphi \equiv_C \psi$») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение: $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$, где K – класс всех моделей Крипке.

Утверждение

1. Если $\varphi \equiv_C \psi$ и $C' \subseteq C$, то $\varphi \equiv_{C'} \psi$
2. Если $\varphi \not\equiv_C \psi$ и $C \subseteq C'$, то $\varphi \not\equiv_{C'} \psi$

Сравнение языков по выразительной силе

Определение

Модальный язык L_2 является не менее выразительным, чем модальный язык L_1 в классе моделей Крипке C (обозначение: $L_1 \preceq_C L_2$) е.т.е.

$$\forall \varphi_1 \in L_1 \exists \varphi_2 \in L_2 : \varphi_1 \equiv_C \varphi_2$$

Сокращения

- $L_1 \preceq L_2 := L_1 \preceq_K L_2$, где K – класс всех моделей Крипке
- $L_1 \equiv_C L_2 := L_1 \preceq_C L_2$ и $L_2 \preceq_C L_1$
- $L_1 \prec_C L_2 := L_1 \preceq_C L_2$ и $L_2 \not\preceq_C L_1$
- $L_1 \equiv L_2 := L_1 \preceq L_2$ и $L_2 \preceq L_1$
- $L_1 \prec L_2 := L_1 \preceq L_2$ и $L_2 \not\preceq L_1$

Сравнение эпистемических языков

Эпистемические языки

$$
\begin{array}{ll}
(\mathcal{EL}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \\
(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}) & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi
\end{array}
\quad (p \in Var, i \in Ag, G \subseteq Ag)
$$

Утверждение 1.

$\mathcal{EL} \equiv \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E}$

Утверждение

$\mathcal{EL} \preceq \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D}$

Утверждение

$\mathcal{EL} \preceq \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C}$

Бисимуляции

Определение. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ и $M' = (W', (R')_{i \in Ag}, V')$ – модели Крипке, тогда отношение $Z \subseteq W \times W'$ называется **бисимуляцией**, если выполняются следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&(\text{var}) \quad xZx' \Rightarrow M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p \\
&(\text{zig}) \quad (xR_iy \wedge xZx') \Rightarrow \exists y'(x'R'_iy' \wedge yZy') \\
&(\text{zag}) \quad (x'R'_iy' \wedge xZx') \Rightarrow \exists y(xR_iy \wedge yZy')
\end{aligned}
$$

Примеры

$\mathcal{EL} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D}$

Пример

Модальная глубина

Определение. «Модальная глубина формулы» (md)

$md : L_K \mapsto \mathbb{N}$ т.ч.

- $md(p) = 0$
- $md(\neg\varphi) = md(\varphi)$
- $md(\varphi \circ \psi) = max\{md(\varphi), md(\psi)\}$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $md(K_i\varphi) = md(\varphi) + 1$

Примеры

- $md(K_aK_bp) = 2$
- $md(K_aK_b(p \rightarrow K_c(K_ap \rightarrow K_bq)) = 4$

Модальная n-эквивалентность

Определение. Ограничение языка до глубины n

$$EL_n = \{\varphi \in EL \mid md(\varphi) \leq n\}$$

Модальная n-эквивалентность

$$(M, x) \equiv_n (M', x') \iff \forall \varphi \in EL_n : M, x \models \varphi \Leftrightarrow M', x' \models \varphi$$

Пример

$(M_1, x) \equiv_2 (M_2, x)$, но $(M_1, x) \not\equiv_3 (M_2, x)$
Как доказать?

n-бисимуляционные игры

Определение.

$BG_n[(M,x),(M',x')]$. Игра останавливает после n раундов. В остальном правила такие же как и для $BG_\infty[(M,x),(M',x')]$.

Определение.

Две модели Крипке эквивалентны в игровом смысле $((M,x) \leftrightarrows_n (M,x))$ е.т.е. у $\exists$лоизы есть выигрышная стратегия в игре $BG_n[(M,x),(M',x')]$.

Теорема

$$(M, x) \leftrightarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ $\square$

Две последовательности моделей

Утверждение

$(M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)$

Доказательство.

В силу $(M_{n+1}, x) \leftrightarrows_n (M'_{n+1}, x)$. $\square$

$EL \prec_{S5} ELC$

$EL \preceq ELC$ – очевидно. Следовательно $EL \preceq_{S5} ELC$. Докажем, что $ELC \not\preceq_{S5} EL$.

$EL \preceq ELC$ – очевидно. Следовательно $EL \preceq_{S5} ELC$. Докажем, что $ELC \not\preceq_{S5} EL$. Допустим, что найдется $\varphi^* \in EL$ т.ч.$\varphi^* \equiv C_{ab}p$. Докажем, что такое допущение приводит к противоречию. Обозначим, $md(\varphi^*) = n$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{M_{n+1}, x \models C_{ab}p \qquad \varphi^* \equiv C_{ab}p}{M_{n+1}, x \models \varphi^*} \qquad (M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)}{M'_{n+1}, x \models \varphi^*} \qquad \dfrac{M'_{n+1}, x \not\models C_{ab}p \qquad \varphi^* \equiv C_{ab}p}{M'_{n+1}, x \not\models \varphi^*}}{\perp}
$$

Лаконичность языка

$\mathcal{EL} = \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E}$, но $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E}$ более лаконичный, более компактный.
Две последовательности формул:

- $\alpha_n := \neg E^n_{ab} p$
- $\beta_1 := \neg(K_a p \land K_b p)$
- $\beta_n := \neg(K_a \neg\beta_{n-1} \land K_b \neg\beta_{n-1})$

n	α_n	β_n
1	$\neg E_{ab} p$	$\neg(K_a p \land K_b p)$
2	$\neg E^2_{ab} p$	$\neg(K_a p \land K_b p \land K_a K_b p \land K_b K_a p)$
3	$\neg E^3_{ab} p$	$\neg(K_a p \land K_b p \land K_a K_b p \land K_b K_a p \land K_b K_a K_b p \land K_a K_b K_a p)$

Схема сравнения языков по выразительной силе