Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Эпистемические языки

Языки ($i \in Ag, G \subseteq Ag$)

$$
\begin{array}{ll}
(EL) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \\
(ELE) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi \\
(ELD) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \\
(ELC) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi
\end{array}
$$

Эквивалентность формул

Определение

Будем говорить, что формулы φ и ψ эквивалентны в классе моделей C (обозначение: «$\varphi \equiv_C \psi$») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение: $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$, где K – класс всех моделей Крипке.

Примеры

- $(\Box p \wedge \Box(p \to q)) \equiv \Box(p \wedge q)$
- $\Diamond\Box p \equiv_{S5} \Box p$, но $\Diamond\Box p \not\equiv_{S4} \Box p$
- $\Box\Box p \equiv_{S4} \Box p$, но $\Box\Box p \not\equiv \Box p$

Определение

Будем говорить, что формулы φ и ψ эквивалентны в классе моделей C (обозначение: «$\varphi \equiv_C \psi$») е.т.е.

$$\forall M \in C \forall x \in D(M) : M, x \models \varphi \iff M, x \models \psi$$

Обозначение: $\varphi \equiv \psi := \varphi \equiv_K \psi$, где K – класс всех моделей Крипке.

Утверждение

1. Если $\varphi \equiv_C \psi$ и $C' \subseteq C$, то $\varphi \equiv_{C'} \psi$
2. Если $\varphi \not\equiv_C \psi$ и $C \subseteq C'$, то $\varphi \not\equiv_{C'} \psi$

Сравнение языков по выразительной силе

Определение

Модальный язык L_2 является не менее выразительным, чем модальный язык L_1 в классе моделей Крипке C (обозначение: «$L_1 \sqsubseteq_C L_2$») е.т.е.

$$\forall \varphi_1 \in L_1 \exists \varphi_2 \in L_2 : \varphi_1 \equiv_C \varphi_2$$

Сокращения

- $L_1 \sqsubseteq L_2 := L_1 \sqsubseteq_{All} L_2$, где All – класс всех моделей Крипке

- $L_1 \equiv_C L_2 := L_1 \sqsubseteq_C L_2$ и $L_2 \sqsubseteq_C L_1$
- $L_1 \sqsubset_C L_2 := L_1 \sqsubseteq_C L_2$ и $L_2 \not\sqsubseteq_C L_1$
- $L_1 \equiv L_2 := L_1 \sqsubseteq L_2$ и $L_2 \sqsubseteq L_1$
- $L_1 \sqsubset L_2 := L_1 \sqsubseteq L_2$ и $L_2 \not\sqsubseteq L_1$

Сравнение эпистемических языков

Языки ($i \in Ag, G \subseteq Ag$)

$$
\begin{array}{ll}
(EL) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \\
(EL+E) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi \\
(EL+D) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi \\
(EL+C) & p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi
\end{array}
$$

Утверждения.

1. $EL \equiv EL + E$
2. $EL \sqsubset EL + D$
3. $EL \sqsubset EL + C$

Бисимуляция

$EL \sqsubset ELD$

Пример

Модальная глубина

Определение. «Модальная глубина формулы» (md)

$md : L_K \mapsto \mathbb{N}$ т.ч.

- $md(p) = 0$
- $md(\neg\varphi) = md(\varphi)$
- $md(\varphi \circ \psi) = max\{md(\varphi), md(\psi)\}$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
- $md(K_i\varphi) = md(\varphi) + 1$

Примеры

- $md(K_aK_bp) = 2$
- $md(K_aK_b(p \rightarrow K_c(K_ap \rightarrow K_bq)) = 4$

Модальная n-эквивалентность

Определение. Ограничение языка до глубины n

$$EL_n = \{\varphi \in EL \mid md(\varphi) \leq n\}$$

Модальная n-эквивалентность

$$(M, x) \equiv_n (M', x') \iff \forall \varphi \in EL_n : M, x \models \varphi \Leftrightarrow M', x' \models \varphi$$

Пример

$(M_1, x) \equiv_2 (M_2, x)$, но $(M_1, x) \not\equiv_3 (M_2, x)$
Как доказать?

n-бисимуляционные игры

Определение.

$BG_n[(M,x),(M',x')]$. Игра останавливает после n раундов. В остальном правила такие же как и для $BG_\infty[(M,x),(M',x')]$.

Определение.

Две модели Крипке эквивалентны в игровом смысле $((M,x) \leftrightarrows_n (M,x))$ е.т.е. у $\exists$лоизы есть выигрышная стратегия в игре $BG_n[(M,x),(M',x')]$.

Теорема

$$(M, x) \leftrightarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$$

Доказательство.

$(\Rightarrow)$ $\square$

Две последовательности моделей

Утверждение

$(M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)$

Доказательство.

В силу $(M_{n+1}, x) \leftrightarrows_n (M'_{n+1}, x)$. $\square$

$EL \sqsubset_{S5} ELC$

$EL \sqsubseteq ELC$ – очевидно. Следовательно $EL \sqsubseteq_{S5} ELC$. Докажем, что $ELC \not\sqsubseteq_{S5} EL$.

$EL \sqsubseteq ELC$ – очевидно. Следовательно $EL \sqsubseteq_{S5} ELC$. Докажем, что $ELC \not\sqsubseteq_{S5} EL$. Допустим, что найдется $\varphi^* \in EL$ т.ч.$\varphi^* \equiv C_{ab}p$. Докажем, что такое допущение приводит к противоречию. Обозначим, $md(\varphi^*) = n$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{M_{n+1}, x \models C_{ab}p \qquad \varphi^* \equiv C_{ab}p}{M_{n+1}, x \models \varphi^*} \qquad (M_{n+1}, x) \equiv_n (M'_{n+1}, x)}{M'_{n+1}, x \models \varphi^*} \qquad \dfrac{M'_{n+1}, x \not\models C_{ab}p \qquad \varphi^* \equiv C_{ab}p}{M'_{n+1}, x \not\models \varphi^*}}{\bot}$$

Лаконичность языка

$EL = ELE$, но ELE более лаконичный, более компактный.
Две последовательности формул:

- $\alpha_n := \neg E^n_{ab} p$
- $\beta_1 := \neg(K_a p \wedge K_b p)$
- $\beta_n := \neg(K_a \neg\beta_{n-1} \wedge K_b \neg\beta_{n-1})$

n	α_n	β_n
1	$\neg E_{ab} p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p)$
2	$\neg E^2_{ab} p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p \wedge K_a K_b p \wedge K_b K_a p)$
3	$\neg E^3_{ab} p$	$\neg(K_a p \wedge K_b p \wedge K_a K_b p \wedge K_b K_a p \wedge K_b K_a K_b p \wedge K_a K_b K_a p)$