# Сложные случаи: $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$, $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$, $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$

## Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

# Сложные случаи

- Как аксиоматизировать $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$?
- Как связаны $[!\varphi]$ и $C_G\psi$
- Есть ли аксиома редукции для $[!\varphi]\psi$?

# *PALC*

**Утверждение 1**: Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель $M, x$

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p\rangle\neg q$

$\square$

# Пути

**Определение 1.** Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует $G$-путь из $x$ в $y$ (обозначение: $xR_G y$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1} y_1 R_{i_2} \ldots R_{i_n} y_n = y$.

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Упражнение 1**. Докажите, что $\left(\bigcup\limits_{i\in G} R_i^{!\varphi}\right)^+ = R_{G,\varphi}$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i\in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

◀

# Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

**Утверждение 1:** $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

◀

# Публичные объявления и общее знание

**Лемма**

$$\frac{\models \chi \to [!\varphi]\psi \qquad \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(a) \models \chi \to [!\varphi]\psi$, $(b) \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi$ | |
| 2 | $\boxed{M,x}$ $M,x \models \chi$ | $\triangleright\ M,x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M,y \models [!\varphi]\psi)$ |
| 3 | $\boxed{y}$ $xR_{G,\varphi}y$ | $\triangleright\ M,y \models [!\varphi]\psi$ |
| 4 | $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ т.ч. | |
| 5 | $i_1,\ldots,i_n \in G$ и $M,x,y_1,\ldots,y_n \models \varphi$ | из 4 по опр. $xR_{G,\varphi}y$ |
| 6 | $M,x \models \chi \wedge \phi$ | 2, 3 |
| 7 | $M,x \models E_G\chi$ | 1b, 6 по MP |
| 8 | $M,x \models K_{i_1}\chi$ | из 7 т.к. $i_1 \in G$ |
| 9 | $M,y_1 \models \chi$ | из 5, 8 |
| 10 | $\vdots$ | повторяем 6–9 для $y_2,\ldots,y_n$ |
| 11 | $M,y \models \chi$ | из 10 |
| 12 | $M,y \models [!\varphi]\psi$ | 1, 11 |
| 13 | $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M,y \models [!\varphi]\psi)$ | В$\forall \Rightarrow$ 4–12 |
| 14 | $M,x \models [!\varphi]C_G\psi$ | def |
| 15 | $\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi$ | В$\forall \Rightarrow$ 2–14 |

### Упражнение

Переписать предыдущее доказательство в более строгом виде: индукцией по $n$ в пункте $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и далее.

# Исчисление *PALC*

- Аксиомные схемы $S5_m$–$C$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi$
- Правила вывода: *MP*, *NEC* для $K_i$
- Правило вывода:

$$\frac{\chi \to [!\varphi]\psi \qquad (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

# Полнота и корректность

**Теорема о полноте: схема доказательства**

- Замыкание $cl(\varphi)$
- $c(\varphi)$ переопределить
- Лемма об истинности: случай $[!\varphi]C_G\psi$
- Лемма об истинности собирается индукцией по

**Определение**. Замыкание $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_iC_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$
4. если $[!\varphi]p \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to p \in cl_1(\varphi')$
5. если $[!\varphi]\neg\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to \neg[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
6. если $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi \in cl_1(\varphi')$
7. если $[!\varphi]K_i\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to K_i[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
8. если $[!\varphi][!\psi]\chi \in cl_1(\varphi')$, то $[!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in cl_1(\varphi')$
9. если $[!\varphi]C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \in cl_1(\varphi')$ и $\{K_i[!\varphi]C_G\psi \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi)$ и $\psi \neq \neg\ldots\}$

$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_iK_i\psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i\neg K_i\psi \mid \neg K_i\psi \in cl_2(\varphi)\}$

$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi)$ и $\psi \neq \neg\ldots\}$

# Сложность $c(\varphi)$

Определение. Определим функцию сложности $c : \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \mapsto \mathbb{N}$:

1. $c(p) := 1$
2. $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3. $c(\varphi \wedge \psi) = max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4. $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5. $c(C_G\varphi) := c(\varphi) + 1$
6. $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

### Лемма

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$ для $\psi \in sub(\varphi)$
- $c([!\varphi]p) > c(\varphi \to p)$
- $c([!\varphi]\neg\psi) > c(\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $c([!\varphi](\psi \wedge \chi)) > c([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $c([!\varphi]K_i\psi) > c(\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- $c([!\varphi][!\psi]\chi) > c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi)$
- $c([!\varphi]C_G\psi) > c([!\varphi]\psi)$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \to K_iC_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \to [!\varphi]K_iC_G\psi$
3. $[!\varphi]K_iC_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$

# Лемма об истинности

**Лемма**

Пусть $\Phi$ – замыкание некоторой формулы, $M^{\Phi} = (W^{\Phi}, (R_i^{\Phi})_{i \in Ag}, V^{\Phi})$ – конечная каноническая модель, $X \in W^{\Phi}$ тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^{\Phi}, X \models \varphi'$$

## Доказательство

Будем доказывать (возвратной) индукцией по $c(\varphi')$.

**Предположение индукции** Обозначим $c(\varphi') = n$.

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^{\Phi}, X \models \psi)$$

**Шаг индукции** Рассмотрим следующие случаи.

- Сл.1 $\varphi' = p$
- Сл.2 $\varphi' = \neg\varphi$
- Сл.3 $\varphi' = \varphi \wedge \psi$
- Сл.4 $\varphi' = K_i\varphi$
- Сл.5 $\varphi' = C_G\varphi$
- Сл.6 $\varphi' = [\varphi]\psi$
  - Сл.6a $\varphi' = [\varphi]p$
  - Сл.6b $\varphi' = [\varphi]\neg\psi$
  - Сл.6c $\varphi' = [\varphi](\psi \wedge \chi)$
  - Сл.6d $\varphi' = [\varphi]K_i\psi$
  - Сл.6e $\varphi' = [\varphi][\psi]\chi$
  - Сл.6f $\varphi' = [\varphi]C_G\psi p$

# Сл. 6a-6e

Сл.6a

$c(\varphi \to p) < c([!\varphi]p)$

$[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \to p) \in X \Leftrightarrow M^\Phi, X \models \varphi \to p \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]p$

Сл.6b–d. Упражнение.

Сл.6e

$[!\varphi][!\psi]\chi \in X \underset{\text{Акс}}{\overset{\Phi}{\Longleftrightarrow}} [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in X \underset{(*)}{\overset{\text{IH}}{\Longleftrightarrow}} M^\Phi, X \models [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi][!\psi]\chi$

$(*)$ $c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$

# Случай 6f$\Rightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $[!\varphi]C_G\psi \in X$ | $\triangleright\ M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall Y(XR_{G,\varphi}Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$ |
| 2 | $\boxed{Y}\ XR^\Phi_{G,\varphi}Y$ | $\triangleright\ M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$ |
| 3 | $XR^\Phi_{i_1}Y_1R^\Phi_{i_2}\dots R^\Phi_{i_n}Y_n = Y$ т.ч. $i_1,\dots,i_n \in G$ и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$ | из 2 по опр. |
| 4 | $\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$ | ПИ |
| 5 | $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$ | по утв. на сл. 10 и $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$ |
| 6 | $K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$ | из 4,5 по MP |
| 7 | $XR^\Phi_{i_1}Y_1$ | из 3 |
| 8 | $[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$ | из 6,7 по опр. |
| 9 | $\vdots$ | повторяем шаги 5–8 для $Y_2$ и т.д. до $Y_n = Y$ |
| 10 | $[!\varphi]C_G\psi \in Y$ | из 9 |
| 11 | $[!\varphi]\psi \in Y$ | из 10, $\vdash C_G\psi \to [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$ |
| 12 | $M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$ | ПИ |
| 13 | $\forall Y(XR^\Phi_{G,\varphi}Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$ | 2–11 В$\forall \Rightarrow$ |

# Случай 6f$\Leftarrow$

**Лемма $(\chi \wedge \varphi) \to E_G \neg \underline{Y}$**

Достаточно доказать, для любых $X \in S$, $Y \in \overline{S}$, $i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X \in S$ | | 9 | $X R_i^{\Phi} Y$ | |
| 2 | $Y \in \overline{S}$ | | 10 | $M^{\Phi}, X \models \varphi$ | из 6 по ПИ |
| 3 | $\nvdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$ | $\triangleright$«$\bot$» | 11 | $\models [!\varphi] C_G \psi \to (\varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi)$ | |
| 4 | $\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nvdash \bot$ | | 12 | $M^{\Phi}, X \models \varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi$ | |
| 5 | $X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \bot$ | | 13 | $M^{\Phi}, X \models K_i [!\varphi] C_G \psi$ | |
| 6 | $X, \varphi \nvdash \bot$ | | 14 | $M^{\Phi}, Y \models [!\varphi] C_G \psi$ | |
| 7 | $\varphi \in X$ | | 15 | $Y \in S$ | |
| 8 | $X, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \bot$ | | 16 | «$\bot$» | 1, 14 |

# Как быть с *RE*?

$[!\varphi][!\psi]\chi$

# Аксиомы редукции

- $\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{D} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{D}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C}$+? $\equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$ +?
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$

# Условное общее знание

**Определение 3.** $M, x \models C_G^{\psi}\varphi$ е.т.е. $\forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

**Утверждение**: Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G\varphi \equiv C_G^{\top}\varphi$$

Доказательство: упражнение

**Определение 2**. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует $G$-$\varphi$-путь из $x$ в $y$ (обозначение: $xR_{G,\varphi}y$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и $M, x \models \varphi, M, y_1 \models \varphi, \ldots, M, y_n \models \varphi$.

**Определение 3**. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует $G$-$\cdot\varphi$-путь из $x$ в $y$ (обозначение: $R_{G,\cdot\varphi}$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и $M, y_1 \models \varphi, \ldots, M, y_n \models \varphi$.

$M, x \models C_G^{\psi}\varphi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\cdot\psi}y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

# Исчисление для условного общего знания

### Исчисление $S5_m$–$RC$

Аксиомные схемы:

$(S5_K)$ Аксиомные схемы $S5$ для $K_i$

$(K_{RC})$ $C_G^{\chi}(\varphi \to \psi) \to (C_G^{\chi}\varphi \to C_G^{\chi}\psi)$

$(mix_{RC})$ $C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi))$

$(ind_{RC})$ $C_G^{\psi}(\varphi \to E_G(\psi \to \varphi)) \to (E_G(\psi \to \varphi) \to C_G^{\psi}\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ MP \qquad\qquad \frac{\varphi}{K_i\varphi}\ G_K \qquad\qquad \frac{\varphi}{C_G^{\psi}\varphi}\ G_C K$$

# Некоторые полезные теоремы

**Упражнение.**Найдите доказательства для следующих теорем исчисления $S5_m$–$RC$:

1. $C_G^{\psi}\varphi \to E_G(\psi \to \varphi)$
2. $C_G^{\psi}\varphi \to E_G(\psi \to E_G(\psi \to \varphi))$
3. $C_G^{\varphi}\varphi$
4. $C_G^{\psi}\varphi \to C_G^{\psi}C_G^{\psi}\varphi$
5. $C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow C_G^{\psi}(\psi \wedge \varphi)$
6. $C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow C_G^{\psi}(\psi \to \varphi)$

# Полнота $S5_m$-$RC$

Сборка доказательства.

- $\Phi = cl(\varphi)$
- Лемма об истинности: случай $C_G^{\psi}\varphi$

# Замыкание

**Определение.** Замыкание $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi')$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi')$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi')$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_iC_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi')$
4. если $C_G^{\psi}\varphi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_i(\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi) \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$

$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_iK_i\psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i\neg K_i\psi \mid \neg K_i\psi \in cl_2(\varphi)\}$

$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$

# Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^{\psi}\varphi$. ($\Rightarrow$)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $C_G^{\psi}\varphi \in X$ | $\triangleright\ M^{\Phi}, X \models C_G^{\psi}\varphi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall Y(X(R^{\Phi}_{G,+\psi})Y \Rightarrow M^{\Phi}, Y \models \varphi)$ |
| 2 | $\boxed{Y}\ X(R^{\Phi}_{G,+\psi})Y$ | $\triangleright\ M^{\Phi}, Y \models \varphi$ |
| 3 | $XR^{\Phi}_{i_1}Y_1R^{\Phi}_{i_2}\dots R^{\Phi}_{i_n}Y_n = Y$ т.ч. | |
| 4 | $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq G$ | |
| 5 | $M^{\Phi}, Y_1 \models \psi, \dots, M^{\Phi}, Y_n \models \psi$ | |
| 6 | $\psi \in Y_1, \dots, \psi \in Y_n$ | по ПИ |
| 7 | $K_{i_1}(\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi)) \in X$ | |
| 8 | $\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi) \in Y_1$ | |
| 9 | $\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi \in Y_1$ | |
| 10 | повторяем до $Y_n = Y$ | |
| 11 | $\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi \in Y_n$ | |
| 12 | $\varphi \in Y_n$ | |
| 13 | $M^{\Phi}, Y \models \varphi$ | по ПИ |

# Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^{\psi}\varphi$. ($\Leftarrow$)

- $\underline{X} \to E_G(\psi \to \chi)$
- $\chi \to E_G(\psi \to \chi)$
- $\chi \to (\psi \to \varphi)$

**Утверждение.** $\vdash \underline{X} \to E_G(\psi \to \chi)$.

**Доказательство.**

Достаточно доказать, что $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \chi)$ для $i \in G$. Вспомним, что $\chi \leftrightarrow \bigwedge\{\neg\underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}$. Тогда, нам нужно доказать, что $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \bigwedge\{\neg\underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\})$, что эквивалентно $\vdash \underline{X} \to \bigwedge\{K_i(\psi \to \neg\underline{Y}) \mid Y \in \overline{S}\}$. Значит, достаточно доказать, что для $Y \in \overline{S}$: $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg\underline{Y})$. $\square$

**Утверждение**. Пусть $X \in S$, $Y \in \underline{S}$, тогда $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $X \in S, Y \in \underline{S}$ | | 9 | $XR_i^{\Phi} Y$ | 8 по утв. (*) |
| 2 | $M^{\Phi}, X \models C_G^{\psi}\varphi$ | | 10 | $\psi \in Y$ | 8 по утв. (*) |
| 3 | $M^{\Phi}, Y \not\models C_G^{\psi}\varphi$ | | 11 | $X \models K_i(\psi \to C_G^{\psi}\varphi)$ | |
| 4 | $\nvdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$ | $\rhd$ «$\bot$» | 12 | $Y \models \psi \to C_G^{\psi}\varphi$ | |
| 5 | $\underline{X} \nvdash K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$ | | 13 | $Y \models \psi$ | по ПИ |
| 6 | $\underline{X} \nvdash \neg K_i(\psi \to \neg \underline{Y}) \to \bot$ | | 14 | $Y \models C_G^{\psi}\varphi$ | |
| 7 | $\underline{X}, \neg K_i(\psi \to \neg \underline{Y}) \nvdash \bot$ | | 15 | «$\bot$» | |
| 8 | $\underline{X}, \hat{K}_i(\psi \wedge \underline{Y}) \nvdash \bot$ | | 16 | $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$ | |

**Утверждение (*)**. Пусть $X, Y \in W^{\Phi}$, тогда

$$\underline{X}, \hat{K}_i(\varphi \wedge \underline{Y}) \nvdash \perp \Rightarrow (XR_i^{\Phi} Y \text{ и } \varphi \in Y)$$

# Аксиома редукции для условного общего знания

**Исчисление $S5_m[]$-$RC$ ($PAL$-$RC$)**

($S5_mRC$) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления $S5_mRC$

($R_{RC}$) $[!\varphi]C_G^{\chi}\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G^{\varphi\wedge[!\varphi]\chi}[!\varphi]\psi)$

**Упражнение**

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

**Упражнение**

Для формулы $[!p]C_Gq$ найдите эквивалентную, но из языка $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$.

# Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \to K_a \neg p)]C_{ab}\neg p$$

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$
- $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$

$$C^{p}_{ab}\neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]