

# Языки, семантика и исчисления

19 июля 2022 г.

## 1 Языки

### 1.1 Эпистемические языки

$(\mathcal{EL})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{E})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid E_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{D})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{CD})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G\varphi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{PAL})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{D})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{CD})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G\varphi \mid D_G\varphi$
$(\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid C_G^\psi\varphi$
$(\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC})$	$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi \mid C_G^\psi\varphi$

$Ag$  – конечное множество агентов,  $Var$  – счетное множество пропозициональных переменных,  $i \in Ag$ ,  $G \subseteq Ag$ ,  $p \in Var$

### 1.2 Сокращения

- $\varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\top := \neg\perp$
- $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $\hat{K}_i\varphi := \neg K_i\neg\varphi$
- $\perp := p \wedge \neg p$
- $\langle !\varphi \rangle \psi := \neg[!\varphi]\neg\psi$

## 2 Семантика

### 2.1 Модель Крипке

$$M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$$

## 2.2 Ограничения на $\sim_i$

## 2.3 Семантика операторов

Базовая логика:

- $M, x \models p$  е.т.е.
- $M, x \models \neg\varphi$  е.т.е.
- $M, x \models \varphi \wedge \psi$  е.т.е.

Статические операторы:

- $M, x \models K_i\varphi$  е.т.е.
- $M, x \models D_G\varphi$  е.т.е.
- $M, x \models C_G\varphi$  е.т.е.
- $M, x \models C_G^\psi\varphi$  е.т.е.

Динамический оператор (публичное обновление)

- $M, x \models [!\varphi]\psi$  е.т.е.  $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models \psi$

Пусть  $M = (W, (\sim_i)_{i \in Ag}, V)$  – модель Крипке, определим обновленную модель

$$M^{!\varphi} = (W^{!\varphi}, (\sim_i^{!\varphi})_{i \in Ag}, V^{!\varphi})$$

где

- $W^{!\varphi} := \{w \in W \mid M, w \models \varphi\}$
- $\sim_i^{!\varphi} := \sim_i \cap (W^{!\varphi} \times W^{!\varphi})$
- $V^{!\varphi}(p) := V(p) \cap W^{!\varphi}$

## 3 Исчисления

### 3.1 $K_m$

- Тавтологии КЛВ
- $K_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_i\varphi \rightarrow K_i\psi)$

**3.2**  $K'_m$

**3.3**  $KT_m$

**3.4**  $KB_m$

**3.5**  $K4_m$

**3.6**  $K5_m$

**3.7**  $S4_m$

**3.8**  $S5_m$

**3.9**  $S5_mC$

**3.10**  $S5_mC'$

**3.11**  $S5_mD$

**3.12**  $S5_mRC$

**3.13**  $PAL (= S5_m[])$

- Аксиомные схемы и правила вывода  $S5$
- $[\!|\varphi|]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[\!|\varphi|]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|]\psi)$
- $[\!|\varphi|](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([\!|\varphi|]\psi \wedge [\!|\varphi|]\chi)$
- $[\!|\varphi|]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi|]\psi)$
- Правила вывода: RE!

**3.14**  $PAL-C (= S5_m[]C)$

**3.15**  $PAL-D (= S5_m[]D)$

**3.16**  $PAL-RC (= S5_m[]RC)$