Сложные случаи: PALC, S5CD, PALCD

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

PALC

Утверждение

Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p\rangle\neg q$

□

Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \to [!\varphi]\psi \qquad \models (\chi \land \varphi) \to E_G\chi}{\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

Публичные объявления и общее знание

Докажем по индукции.

- $M, x \models \chi$
- $(\chi \wedge \varphi) \to E_G \chi$
- $x(\bigcup\limits_{i \in G} \sim_i^{!\varphi})^* y$
- $x \sim_{i_1}^{!\varphi} y_1 \sim_{i_2}^{!\varphi} \cdots \sim_{i_{n-1}}^{!\varphi} y_{n-1} \sim_{i_n}^{!\varphi} y_n = y$ т.ч. $\{i_1, \ldots i_n\} \subseteq G$
- БИ $M, x \models \chi$
- ПИ $M, y_{n-1} \models \chi$
- $M, y_{n-1} \models \varphi$
- $M, y_{n-1} \models E_G \chi$
- $M, y_{n-1} \models K_{i_n} \chi$
- $M, y_n \models \chi$

Публичные объявления и общее знание

1	$\models (a)\ \chi \to [!\varphi]\psi, (b)\ \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi$	
2	$\boxed{M,x}\ M,x \models \chi$	$\triangleright M,x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright M,x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi},x \models C_G\psi$
3	$M,x \models \varphi$	$\triangleright M^{!\varphi},x \models C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall y(x(\bigcup_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi},y \models \psi)$
4	$\boxed{y}\ x(\bigcup_{i\in G} \sim_i^{!\varphi})^* y$	$\triangleright M^{!\varphi},y \models \psi$
5	$M,y \models \chi$	по утв. на слайде 4 из 1b 2, 4
6	$M,y \models [!\varphi]\psi$	из 1a, 5
7	$M,y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi},y \models \psi$	из 7 по опр.
8	$M,y \models \varphi$	из 5
9	$M^{!\varphi},y \models \psi$	8,9 MP
10	$M^{!\varphi},x \models C_G\psi$	4–9
11	$M,x \models [!\varphi]C_G\psi$	3–10
12	$\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi$	2–11

Исчисление PALC

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание
- Случай $[!\varphi]C_G\psi$

Определение

Определение (G–путь, $x \sim_G y$)

Пусть $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$. Будем говорить, что существует G–путь из x в y (обозначение: $x \sim_G y$), если найдутся такие $y_1, \dots y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $x \sim_{i_1} y_1 \sim_{i_2} \cdots \sim_{i_n} y_n = y$.

Определение (G–φ–путь)

Пусть $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$. Будем говорить, что существует G–φ–путь из x в y (обозначение: $x \sim_{G,\varphi} y$), если $x \sim_G y$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$.

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение

$M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(x \sim_{G,\varphi} y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \to K_iC_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \to [!\varphi]K_iC_G\psi$
3. $[!\varphi]K_iC_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма: $[!\varphi]C_G\psi \in X \Rightarrow \forall Y(X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	
2	$\boxed{Y}\ X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y$	$\triangleright\ [!\varphi]\psi \in Y$
3	$X \sim^{\Phi}_{i_1} Y_1 \sim^{\Phi}_{i_2} \cdots \sim^{\Phi}_{i_n} Y_n = Y$ т.ч. $\varphi \in X, \varphi \in Y_i$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$	из 2 по опр.
4	$\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
5	$\varphi \in X$	из 3
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$X \sim^{\Phi}_{i_1} Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$	
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \to [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$\forall Y(X \sim^{\Phi}_{G,\varphi} Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 В$\forall \Rightarrow$