Сложные случаи: $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$, $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$, $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Сложные случаи

- Как аксиоматизировать $\mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$?
- Как связаны $[!\varphi]$ и $C_G\psi$
- Есть ли аксиома редукции для $[!\varphi]\psi$?

PALC

Утверждение 1: Формула $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G[!\varphi]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [!p]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[!p]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle !p\rangle\neg q$

$\square$

Пути

Определение 1. Пусть $M = (W, (R_i)_{i\in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G-путь из x в y (обозначение: $xR_G y$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1} y_1 R_{i_2} \ldots R_{i_n} y_n = y$.

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Упражнение 1. Докажите, что $\left(\bigcup_{i\in G} R_i^{!\varphi}\right)^+ = R_{G,\varphi}$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i\in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i\in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

◀

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$

◀

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

▶

1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup\limits_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$

◀

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

-
  1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
  2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
  3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^* y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
  9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
  10. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \to [!\varphi]\psi \qquad \models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi}{\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi}$$

1	(a) $\models \chi \to [!\varphi]\psi$, (b) $\models (\chi \wedge \varphi) \to E_G\chi$	
2	$\boxed{M,x}\ M, x \models \chi$	$\triangleright\ M, x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y}\ xR_{G,\varphi}y$	$\triangleright\ M, y \models [!\varphi]\psi$
4	$xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$ т.ч.	
5	$i_1, \dots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $xR_{G,\varphi}y$
6	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M, x \models E_G\chi$	1b, 6 по MP
8	$M, x \models K_{i_1}\chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	$\vdots$	повторяем 6–9 для $y_2, \dots, y_n$
11	$M, y \models \chi$	из 10
12	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	B$\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M, x \models [!\varphi]C_G\psi$	def
15	$\models \chi \to [!\varphi]C_G\psi$	B$\forall \Rightarrow$ 2–14

Упражнение

Переписать предыдущее доказательство в более строгом виде: индукцией по n в пункте $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и далее.

Исчисление $PALC$

- Аксиомные схемы $S5_m$–C
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi$
- Правила вывода: MP, NEC для K_i
- Правило вывода:

$$\frac{\chi \rightarrow [!\varphi]\psi \qquad (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi}{\chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi}$$

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание $cl(\varphi)$
- $c(\varphi)$ переопределить
- Лемма об истинности: случай $[!\varphi]C_G\psi$
- Лемма об истинности собирается индукцией по c

Определение. Замыкание $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_i C_G \psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$
4. если $[!\varphi]p \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to p \in cl_1(\varphi')$
5. если $[!\varphi]\neg\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to \neg[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
6. если $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi \in cl_1(\varphi')$
7. если $[!\varphi]K_i\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \to K_i[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
8. если $[!\varphi][!\psi]\chi \in cl_1(\varphi')$, то $[!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in cl_1(\varphi')$
9. если $[!\varphi]C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \in cl_1(\varphi')$ и $\{K_i[!\varphi]C_G\psi \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \ldots\}$

$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$

$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \ldots\}$

Сложность $c(\varphi)$

Определение. Определим функцию сложности $c : \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \mapsto \mathbb{N}$:

1. $c(p) := 1$
2. $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3. $c(\varphi \wedge \psi) = max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4. $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5. $c(C_G\varphi) := c(\varphi) + 1$
6. $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

Лемма

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$ для $\psi \in sub(\varphi)$
- $c([!\varphi]p) > c(\varphi \to p)$
- $c([!\varphi]\neg\psi) > c(\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $c([!\varphi](\psi \wedge \chi)) > c([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $c([!\varphi]K_i\psi) > c(\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- $c([!\varphi][!\psi]\chi) > c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi)$
- $c([!\varphi]C_G\psi) > c([!\varphi]\psi)$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \to K_i C_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \to [!\varphi]K_i C_G\psi$
3. $[!\varphi]K_i C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \to (\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ – замыкание некоторой формулы, $M^{\Phi} = (W^{\Phi}, (R_i^{\Phi})_{i \in Ag}, V^{\Phi})$ – конечная каноническая модель, $X \in W^{\Phi}$ тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^{\Phi}, X \models \varphi'$$

Доказательство

Будем доказывать (возвратной) индукцией по $c(\varphi')$.

Предположение индукции Обозначим $c(\varphi') = n$.

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^{\Phi}, X \models \psi)$$

Шаг индукции Рассмотрим следующие случаи.

- Сл.1 $\varphi' = p$
- Сл.2 $\varphi' = \neg\varphi$
- Сл.3 $\varphi' = \varphi \wedge \psi$
- Сл.4 $\varphi' = K_i\varphi$
- Сл.5 $\varphi' = C_G\varphi$
- Сл.6 $\varphi' = [\varphi]\psi$
  - Сл.6a $\varphi' = [\varphi]p$
  - Сл.6b $\varphi' = [\varphi]\neg\psi$
  - Сл.6c $\varphi' = [\varphi](\psi \wedge \chi)$
  - Сл.6d $\varphi' = [\varphi]K_i\psi$
  - Сл.6e $\varphi' = [\varphi][\psi]\chi$
  - Сл.6f $\varphi' = [\varphi]C_G\psi p$

Сл. 6a-6e

Сл.6a

$c(\varphi \to p) < c([!\varphi]p)$

$[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \to p) \in X \Leftrightarrow M^{\Phi}, X \models \varphi \to p \Leftrightarrow M^{\Phi}, X \models [!\varphi]p$

Сл.6b–d. Упражнение.

Сл.6e

$[!\varphi][!\psi]\chi \in X \underset{\text{Акс}}{\overset{\Phi}{\Longleftrightarrow}} [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in X \underset{(*)}{\overset{\mathrm{IH}}{\Longleftrightarrow}} M^{\Phi}, X \models [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \Leftrightarrow M^{\Phi}, X \models [!\varphi][!\psi]\chi$

$(*)$ $c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$

Случай 6f$\Rightarrow$

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	$\triangleright\ M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright\ \forall Y(XR_{G,\varphi}Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$
2	$\boxed{Y}\ XR^\Phi_{G,\varphi}Y$	$\triangleright\ M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$
3	$XR^\Phi_{i_1}Y_1R^\Phi_{i_2}\dots R^\Phi_{i_n}Y_n = Y$ т.ч. $i_1,\dots,i_n \in G$ и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$	из 2 по опр.
4	$\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$	ПИ
5	$\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \to K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$XR^\Phi_{i_1}Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	$\vdots$	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \to [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$	ПИ
13	$\forall Y(XR^\Phi_{G,\varphi}Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 В$\forall \Rightarrow$

Случай 6f($\Leftarrow$): сборка доказательства

Упражнение

Утверждение. $\vdash \chi \to [!\varphi]\psi$

Достаточно доказать, что $\underline{X} \to [!\varphi]\psi$ для $X \in S$.

1. $M^{\Phi}, X \models [!\varphi]C_G\psi$
2. $M^{\Phi}, X \models [!\varphi]\psi$
3. $c([!\varphi]\psi) < c([!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]\psi \in X$ по П.И.
5. $X \vdash [!\varphi]\psi$
6. $\vdash \underline{X} \to [!\varphi]\psi$

Случай 6f$\Leftarrow$

Лемма $(\chi \wedge \varphi) \to E_G \neg \underline{Y}$

Достаточно доказать, для любых $X \in S, Y \in \overline{S}, i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \in S$		9	$XR_i^{\Phi} Y$	
2	$Y \in \overline{S}$		10	$M^{\Phi}, X \models \varphi$	из 6 по ПИ
3	$\nvdash (\underline{X} \wedge \varphi) \to K_i \neg \underline{Y}$	$\triangleright$«$\perp$»	11	$\models [!\varphi] C_G \psi \to (\varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi)$	
4	$\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nvdash \perp$		12	$M^{\Phi}, X \models \varphi \to K_i [!\varphi] C_G \psi$	
5	$X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \perp$		13	$M^{\Phi}, X \models K_i [!\varphi] C_G \psi$	
6	$X, \varphi \nvdash \perp$		14	$M^{\Phi}, Y \models [!\varphi] C_G \psi$	
7	$\varphi \in X$		15	$Y \in S$	
8	$X, \hat{K}_i \underline{Y} \nvdash \perp$		16	«$\perp$»	1, 14

Аксиомы редукции

- $\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{D} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{D}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{C}$+? $\equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{C}$ +?
- $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}$-$\mathcal{RC}$

Условное общее знание

Определение 3. $M, x \models C_G^{\psi}\varphi$ е.т.е. $\forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i \cap (W \times [\psi]_M))^{+} y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Утверждение: Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G\varphi \equiv C_G^{\top}\varphi$$

Доказательство: упражнение

Определение 2. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G-φ-путь из x в y (обозначение: $xR_{G,\varphi}y$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и $M, x \models \varphi, M, y_1 \models \varphi, \ldots, M, y_n \models \varphi$.

Определение 3. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует G-$\cdot\varphi$-путь из x в y (обозначение: $R_{G,\cdot\varphi}$), если найдутся такие $y_1, \ldots, y_n \in W$ и $i_1, \ldots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\ldots R_{i_n}y_n = y$ и $M, y_1 \models \varphi, \ldots, M, y_n \models \varphi$.

$M, x \models C_G^{\psi}\varphi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\cdot\psi}y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Исчисление для условного общего знания

Исчисление $S5_m$–RC

Аксиомные схемы:

$(S5_K)$ Аксиомные схемы $S5$ для K_i

(K_{RC}) $C_G^\chi(\varphi \to \psi) \to (C_G^\chi\varphi \to C_G^\chi\psi)$

(mix_{RC}) $C_G^\psi\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \to (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi))$

(ind_{RC}) $C_G^\psi(\varphi \to E_G(\psi \to \varphi)) \to (E_G(\psi \to \varphi) \to C_G^\psi\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ MP \qquad\qquad \frac{\varphi}{K_i\varphi}\ G_K \qquad\qquad \frac{\varphi}{C_G^\psi\varphi}\ G_C K$$

Некоторые полезные теоремы

Упражнение.Найдите доказательства для следующих теорем исчисления $S5_m$–RC:

1. $C_G^{\psi}\varphi \to E_G(\psi \to \varphi)$
2. $C_G^{\psi}\varphi \to E_G(\psi \to E_G(\psi \to \varphi))$
3. $C_G^{\varphi}\varphi$
4. $C_G^{\psi}\varphi \to C_G^{\psi}C_G^{\psi}\varphi$
5. $C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow C_G^{\psi}(\psi \wedge \varphi)$
6. $C_G^{\psi}\varphi \leftrightarrow C_G^{\psi}(\psi \to \varphi)$

Полнота $S5_m$-RC

Сборка доказательства.

- $\Phi = cl(\varphi)$
- Лемма об истинности: случай $C_G^\psi \varphi$

Замыкание

Определение. Замыкание $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi')$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi')$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi')$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_i C_G \psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi')$
4. если $C_G^\psi \varphi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_i(\psi \to (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi) \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^{\psi}\varphi$ $(\Rightarrow)$

1	$C_G^{\psi}\varphi \in X$	$\triangleright\ M^{\Phi}, X \models C_G^{\psi}\varphi \Leftrightarrow\ \triangleright\ \forall Y(X(R^{\Phi}_{G,+\psi})Y \Rightarrow M^{\Phi}, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y}\ X(R^{\Phi}_{G,+\psi})Y$	$\triangleright\ M^{\Phi}, Y \models \varphi$
3	$XR^{\Phi}_{i_1}Y_1R^{\Phi}_{i_2}\ldots R^{\Phi}_{i_n}Y_n = Y$ т.ч.	
4	$\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq G$	
5	$M^{\Phi}, Y_1 \models \psi, \ldots, M^{\Phi}, Y_n \models \psi$	
6	$\psi \in Y_1, \ldots, \psi \in Y_n$	по ПИ
7	$K_{i_1}(\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi)) \in X$	
8	$\psi \to (\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi) \in Y_1$	
9	$\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi \in Y_1$	
10	повторяем до $Y_n = Y$	
11	$\varphi \wedge C_G^{\psi}\varphi \in Y_n$	
12	$\varphi \in Y_n$	
13	$M^{\Phi}, Y \models \varphi$	по ПИ

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^{\psi}\varphi$. ($\Leftarrow$)

- $\underline{X} \to E_G(\psi \to \chi)$
- $\chi \to E_G(\psi \to \chi)$
- $\chi \to (\psi \to \varphi)$

Сл. $\psi' = C_G^{\psi}\varphi$ ($\Leftarrow$) Сборка доказательства

$$\boxed{S := \{X \in W^{\Phi} \mid M^{\Phi}, X \models C_G^{\psi}\varphi\}} \quad \boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}} \quad \boxed{\overline{S} := W^{\Phi} \setminus S}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\underline{X} \to E_G(\psi \to \chi) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\chi \to E_G(\psi \to \bigwedge\{\neg\underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \quad \chi \leftrightarrow \bigwedge\{\neg\underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}}{\chi \to E_G(\psi \to \chi)}}{C_G^{\psi}(\chi \to E_G(\psi \to \chi))} \qquad C_G^{\psi}(\chi \to E_G(\psi \to \chi)) \to (E_G(\psi \to \chi) \to C_G^{\psi}\chi)}{E_G(\psi \to \chi) \to C_G^{\psi}\chi}}{\underline{X} \to C_G^{\psi}\chi} \qquad C_G^{\psi}\chi \to C_G^{\psi}(\psi \wedge \chi)}{\underline{X} \to C_G^{\psi}(\psi \wedge \chi)} \qquad \dfrac{(\psi \wedge \chi) \to \varphi}{C_G^{\psi}(\psi \wedge \chi) \to C_G^{\psi}\varphi}}{\dfrac{\underline{X} \to C_G^{\psi}\varphi}{\dfrac{X \vdash C_G^{\psi}\varphi}{C_G^{\psi}\varphi \in X}}}$$

$\boxed{S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}}$ $\boxed{\overline{S} := W^\Phi \backslash S}$

Утверждение.

$$\vdash \chi \to E_G(\psi \to \bigwedge\{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow \forall i \in G\ \forall X \in S\ \forall Y \in \overline{S} \vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$$

Доказательство.

1. $\vdash \chi \to E_G(\psi \to \bigwedge\{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow$
2. $\forall i \in G \vdash \chi \to K_i(\psi \to \bigwedge\{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow$
3. $\forall i \in G\ \forall X \in S \vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \bigwedge\{\neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow$
4. $\forall i \in G\ \forall X \in S \vdash \underline{X} \to K_i(\bigwedge\{\psi \to \neg \underline{Y} \mid Y \in \overline{S}\}) \Leftrightarrow$
5. $\forall i \in G\ \forall X \in S \vdash \underline{X} \to \bigwedge\{K_i(\psi \to \neg \underline{Y}) \mid Y \in \overline{S}\} \Leftrightarrow$
6. $\forall i \in G\ \ \forall X \in S\ \forall Y \in \overline{S} \vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$

$\boxed{S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}}$ $\boxed{\overline{S} := W^\Phi \setminus S}$

Утверждение. Пусть $X \in S$, $Y \in \overline{S}$, тогда $\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$

1	$X \in S, Y \in \overline{S}$		9	$X R_i^\Phi Y$	8 по утв. (*)
2	$M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$		10	$\psi \in Y$	8 по утв. (*)
3	$M^\Phi, Y \not\models C_G^\psi \varphi$		11	$X \models K_i(\psi \to C_G^\psi \varphi)$	
4	$\nvdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$	$\triangleright$ «$\bot$»	12	$Y \models \psi \to C_G^\psi \varphi$	
5	$\underline{X} \nvdash K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$		13	$Y \models \psi$	по ПИ
6	$\underline{X} \nvdash \neg K_i(\psi \to \neg \underline{Y}) \to \bot$		14	$Y \models C_G^\psi \varphi$	
7	$\underline{X}, \neg K_i(\psi \to \neg \underline{Y}) \nvdash \bot$		15	«$\bot$»	
8	$\underline{X}, \hat{K}_i(\psi \wedge \underline{Y}) \nvdash \bot$		16	$\vdash \underline{X} \to K_i(\psi \to \neg \underline{Y})$	

Утверждение (*). Пусть $X, Y \in W^\Phi$, тогда

$$\underline{X}, \hat{K}_i(\varphi \wedge \underline{Y}) \nvdash \bot \Rightarrow (XR_i^\Phi Y \text{ и } \varphi \in Y)$$

Утверждение $\vdash (\psi \land \chi) \to \varphi$

Достаточно доказать, что $\vdash \underline{X} \to (\psi \to \varphi)$ для $X \in S$.

1	$M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$	
2	$M^\Phi, X \models K_i(\psi \to \varphi)$	для $i \in G$
3	$y_0 = \#_i X \cup \{\psi\} \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$	$\triangleright$ «$\bot$»
4	$y_0 \subset Y \in W^\Phi$	по л.Линденбаума
5	$X R_i^\Phi Y$	по опр R^Φ из 3, 4
6	$M^\Phi, Y \models \psi \to \varphi$	
7	$M^\Phi, Y \models \psi \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi$	
8	$\psi \in Y \Rightarrow \varphi \in Y$	по ПИ
9	$\varphi \in Y$	
10	$\neg\varphi \in Y$	
11	«$\bot$»	
12	$\#_i X \cup \{\psi\} \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$	3–11
13	$\#_i X \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	
14	$\#_i X \vdash \psi \to \varphi$	
15	$X \vdash \#_i X$	по $S5$
16	$X \vdash \psi \to \varphi$	
17	$\vdash \underline{X} \to (\psi \to \varphi)$	

Аксиома редукции для условного общего знания

Исчисление $S5_m[]$-RC (PAL-RC)

($S5_mRC$) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления $S5_mRC$

(R_{RC}) $[!\varphi]C_G^{\chi}\psi \leftrightarrow (\varphi \to C_G^{\varphi\wedge[!\varphi]\chi}[!\varphi]\psi)$

Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

Упражнение

Для формулы $[!p]C_Gq$ найдите эквивалентную, но из языка $\mathcal{EL}$-$\mathcal{RC}$.

Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \to K_a \neg p)]C_{ab}\neg p$$

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$
- $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$

$$C_{ab}^{p}\neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]