

Сложные случаи: $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$, $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$, $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»

Факультет свободных искусств и наук

сентябрь 2022

Сложные случаи

- Как аксиоматизировать $\mathcal{PAL}\text{-}C$?
- Как связаны $[\!|\varphi|]$ и $C_G\psi$
- Есть ли аксиома редукции для $[\!|\varphi|]\psi$?

Утверждение 1: Формула $[\!|\varphi|]C_G\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G[\!|\varphi|]\psi)$ не является общезначимой.

Доказательство.

Рассмотрим модель M, x

1. $M, x \models [\!|p|]C_{ab}q$
2. $M, x \models p$
3. $M, x \not\models C_{ab}[\!|p|]q$, поскольку $M, x \models \hat{K}_a\hat{K}_b\langle\!|p|\rangle\neg q$



Пути

Определение 1. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует **G -путь** из x в y (обозначение: $xR_G y$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $xR_{i_1} y_1 R_{i_2} \dots R_{i_n} y_n = y$.

Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Упражнение 1. Докажите, что $(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^+ = R_{G,\varphi}$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$



Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$

- ▶
- 1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
- 2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$



Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$



Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$



Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$



Что значит $[!\varphi]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [!\varphi]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$



1. $M, x \models [!\varphi]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{!\varphi})^*y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{!\varphi}, y \models \psi) \iff$



Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$



Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$

- 1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
- 2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
- 3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
- 6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
- 9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$

Что значит $[\!|\varphi|]C_G\psi$?

Утверждение 1: $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi$ е.т.е. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



1. $M, x \models [\!|\varphi|]C_G\psi \iff$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, x \models C_G\psi \iff$
3. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(x(\bigcup_{i \in G} R_i^{|\varphi|})^*y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
4. $M, x \models \varphi \Rightarrow \forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
5. $\forall y(M, x \models \varphi \Rightarrow (xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
6. $\forall y((M, x \models \varphi \wedge xR_{G,\varphi}y) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
7. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
8. $\forall y((xR_{G,\varphi}y \wedge M, y \models \varphi) \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi) \iff$
9. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow (M, y \models \varphi \Rightarrow M^{|\varphi|}, y \models \psi)) \iff$
10. $\forall y(xR_{G,\varphi}y \Rightarrow M, y \models [\!|\varphi|]\psi)$



Публичные объявления и общее знание

Лемма

$$\frac{\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \chi}{\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G \psi}$$

1	$(a) \models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi, (b) \models (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi$	
2	$\boxed{M, x} \quad M, x \models \chi$	$\triangleright M, x \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall y(xR_{G, \varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$
3	$\boxed{y} \quad xR_{G, \varphi}y$	$\triangleright M, y \models [!\varphi]\psi$
4	$xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$ т.ч.	
5	$i_1, \dots, i_n \in G$ и $M, x, y_1, \dots, y_n \models \varphi$	из 4 по опр. $xR_{G, \varphi}y$
6	$M, x \models \chi \wedge \phi$	2, 3
7	$M, x \models E_G\chi$	1b, 6 по MP
8	$M, x \models K_{i_1}\chi$	из 7 т.к. $i_1 \in G$
9	$M, y_1 \models \chi$	из 5, 8
10	\vdots	повторяем 6–9 для y_2, \dots, y_n
11	$M, y \models \chi$	из 10
12	$M, y \models [!\varphi]\psi$	1, 11
13	$\forall y(xR_{G, \varphi}y \Rightarrow M, y \models [!\varphi]\psi)$	$B\forall \Rightarrow$ 4–12
14	$M, x \models [!\varphi]C_G\psi$	def
15	$\models \chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi$	$B\forall \Rightarrow$ 2–14

Упражнение

Переписать предыдущее доказательство в более строгом виде: индукцией по n в пункте $xR_{i_1}y_1R_{i_2}\dots R_{i_n}y_n = y$ и далее.

Исчисление *PALC*

- Аксиомные схемы $S5_m-C$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi$
- Правила вывода: MP , NEC для K_i
- Правило вывода:

$$\frac{\chi \rightarrow [!\varphi]\psi \quad (\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G\chi}{\chi \rightarrow [!\varphi]C_G\psi}$$

Полнота и корректность

Теорема о полноте: схема доказательства

- Замыкание $cl(\varphi)$
- $s(\varphi)$ переопределить
- Лемма об истинности: случай $[!\varphi]C_G\psi$
- Лемма об истинности собирается индукцией по

Определение. **Замыкание** $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$ определим четыре множества:
 $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$
4. если $[!\varphi]p \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \rightarrow p \in cl_1(\varphi')$
5. если $[!\varphi]\neg\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \rightarrow \neg[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
6. если $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi \in cl_1(\varphi')$
7. если $[!\varphi]K_i\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\varphi \rightarrow K_i[!\psi]\varphi \in cl_1(\varphi')$
8. если $[!\varphi][!\psi]\chi \in cl_1(\varphi')$, то $[!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in cl_1(\varphi')$
9. если $[!\varphi]C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $[!\varphi]\psi \in cl_1(\varphi')$ и
 $\{K_i[!\varphi]C_G\psi \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

Сложность $c(\varphi)$

Определение. Определим функцию сложности $c : \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \mapsto \mathbb{N}$:

1. $c(p) := 1$
2. $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3. $c(\varphi \wedge \psi) = \max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4. $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5. $c(C_G\varphi) := c(\varphi) + 1$
6. $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

Лемма

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$ для $\psi \in \text{sub}(\varphi)$
- $c([\!|\varphi|\!]p) > c(\varphi \rightarrow p)$
- $c([\!|\varphi|\!]\neg\psi) > c(\varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi|\!]\psi)$
- $c([\!|\varphi|\!](\psi \wedge \chi)) > c([\!|\varphi|\!]\psi \wedge [\!|\varphi|\!]\chi)$
- $c([\!|\varphi|\!]K_i\psi) > c(\varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi|\!]\psi)$
- $c([\!|\varphi|\!][\!|\psi|\!]\chi) > c([\!|(\varphi \wedge [\!|\varphi|\!]\psi)|\!]\chi)$
- $c([\!|\varphi|\!]C_G\psi) > c([\!|\varphi|\!]\psi)$

Утверждение: $\vdash [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$ для $i \in G$

1. $C_G\psi \rightarrow K_iC_G\psi$
2. $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow [!\varphi]K_iC_G\psi$
3. $[!\varphi]K_iC_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ – замыкание некоторой формулы, $M^\Phi = (W^\Phi, (R_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – конечная каноническая модель, $X \in W^\Phi$ тогда

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство

Будем доказывать (возвратной) индукцией по $c(\varphi')$.

Предположение индукции Обозначим $c(\varphi') = n$.

$$\forall \psi \in \Phi : c(\psi) < n \Rightarrow (\psi \in X \iff M^\Phi, X \models \psi)$$

Шаг индукции Рассмотрим следующие случаи.

Сл.1 $\varphi' = p$

Сл.2 $\varphi' = \neg\varphi$

Сл.3 $\varphi' = \varphi \wedge \psi$

Сл.4 $\varphi' = K_i\varphi$

Сл.5 $\varphi' = C_G\varphi$

Сл.6 $\varphi' = [\varphi]\psi$

Сл.6a $\varphi' = [\varphi]p$

Сл.6b $\varphi' = [\varphi]\neg\psi$

Сл.6c $\varphi' = [\varphi](\psi \wedge \chi)$

Сл.6d $\varphi' = [\varphi]K_i\psi$

Сл.6e $\varphi' = [\varphi][\psi]\chi$

Сл.6f $\varphi' = [\varphi]C_G\psi p$

Сл. 6а-6е

Сл.6а

$$c(\varphi \rightarrow p) < c([!\varphi]p)$$

$$[!\varphi]p \in X \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow p) \in X \Leftrightarrow M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow p \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi]p$$

Сл.6b–d. Упражнение.

Сл.6е

$$[!\varphi][!\psi]\chi \in X \xrightleftharpoons[\text{Акс}]{\Phi} [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \in X \xrightleftharpoons[\text{(*)}]{\text{IH}} M^\Phi, X \models [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi \Leftrightarrow M^\Phi, X \models [!\varphi][!\psi]\chi$$

$$(*) \ c([!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$$

Случай 6f \Rightarrow

1	$[!\varphi]C_G\psi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (XR_{G,\varphi}Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi)$
2	$\boxed{Y} XR_{G,\varphi}^\Phi Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$
3	$XR_{i_1}^\Phi Y_1 R_{i_2}^\Phi \dots R_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч. $i_1, \dots, i_n \in G$ и $M^\Phi, X \models \varphi, M^\Phi, Y_1 \models \varphi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \varphi$	из 2 по опр.
4	$\varphi \in X, \varphi \in Y_1, \dots, \varphi \in Y_n$	ПИ
5	$\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X$	по утв. на сл. 10 и $\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi \in X \in \Phi$
6	$K_{i_1}[!\varphi]C_G\psi \in X$	из 4,5 по MP
7	$XR_{i_1}^\Phi Y_1$	из 3
8	$[!\varphi]C_G\psi \in Y_1$	из 6,7 по опр.
9	\vdots	повторяем шаги 5–8 для Y_2 и т.д. до $Y_n = Y$
10	$[!\varphi]C_G\psi \in Y$	из 9
11	$[!\varphi]\psi \in Y$	из 10, $\vdash C_G\psi \rightarrow [!\varphi]\psi$ и $[!\varphi]\psi \in \Phi$
12	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]\psi$	ПИ
13	$\forall Y (XR_{G,\varphi}^\Phi Y \Rightarrow [!\varphi]\psi \in Y)$	2–11 B $\forall \Rightarrow$

Случай $6f(\Leftarrow)$: сборка доказательства

Утверждение. $\vdash \chi \rightarrow [!\varphi]\psi$

Достаточно доказать, что $\underline{X} \rightarrow [!\varphi]\psi$ для $X \in S$.

1. $M^\Phi, X \models [!\varphi]C_G\psi$
2. $M^\Phi, X \models [!\varphi]\psi$
3. $c([!\varphi]\psi) < c([!\varphi]C_G\psi)$
4. $[!\varphi]\psi \in X$ по П.И.
5. $X \vdash [!\varphi]\psi$
6. $\vdash \underline{X} \rightarrow [!\varphi]\psi$

Случай 6f \Leftarrow

Лемма $(\chi \wedge \varphi) \rightarrow E_G \neg \underline{Y}$

Достаточно доказать, для любых $X \in S, Y \in \bar{S}, i \in G \vdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y}$

1	$X \in S$	9	$XR_i^\Phi Y$	
2	$Y \in \bar{S}$	10	$M^\Phi, X \models \varphi$	из 6 по ПИ
3	$\nVdash (\underline{X} \wedge \varphi) \rightarrow K_i \neg \underline{Y} \triangleright \langle \perp \rangle$	11	$\models [!\varphi]C_G\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi)$	
4	$\underline{X}, \varphi, \neg K_i \neg \underline{Y} \nVdash \perp$	12	$M^\Phi, X \models \varphi \rightarrow K_i[!\varphi]C_G\psi$	
5	$X, \varphi, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	13	$M^\Phi, X \models K_i[!\varphi]C_G\psi$	
6	$X, \varphi \nVdash \perp$	14	$M^\Phi, Y \models [!\varphi]C_G\psi$	
7	$\varphi \in X$	15	$Y \in S$	
8	$X, \hat{K}_i \underline{Y} \nVdash \perp$	16	$\langle \perp \rangle$	1, 14

Как быть с RE ?

$[!\varphi][!\psi]\chi$

Аксиомы редукции

- $\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$
- $\mathcal{EL-D} \equiv \mathcal{PAL-D}$
- $\mathcal{EL-C} \prec \mathcal{PAL-C}$
- $\mathcal{EL-C}+? \equiv \mathcal{PAL-C} +?$
- $\mathcal{EL-RC} \equiv \mathcal{PAL-RC}$

Условное общее знание

Определение 3. $M, x \models C_G^\psi \varphi$ е.т.е. $\forall y (x (\bigcup_{i \in G} R_i \cap (W \times [\psi]_M))^+ y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Утверждение: Общее знание выразимо через условное общее знание:

$$C_G \varphi \equiv C_G^\top \varphi$$

Доказательство: упражнение

Определение 2. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует **G - φ -путь** из x в y (обозначение: $xR_{G,\varphi}y$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2} \dots R_{i_n}y_n = y$ и $M, x \models \varphi, M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$.

Определение 3. Пусть $M = (W, (R_i)_{i \in Ag}, V)$ – модель Крипке, $x, y \in W$, $G \subseteq Ag$, будем говорить, что существует **G - $\cdot\varphi$ -путь** из x в y (обозначение: $R_{G,\cdot\varphi}$), если найдутся такие $y_1, \dots, y_n \in W$ и $i_1, \dots, i_n \in G$, что $xR_{i_1}y_1R_{i_2} \dots R_{i_n}y_n = y$ и $M, y_1 \models \varphi, \dots, M, y_n \models \varphi$.

$M, x \models C_G^\psi \varphi$ е.т.е. $\forall y (xR_{G,\cdot\psi}y \Rightarrow M, y \models \varphi)$

Исчисление для условного общего знания

Исчисление $S5_m-RC$

Аксиомные схемы:

($S5_K$) Аксиомные схемы $S5$ для K_i

(K_{RC}) $C_G^X(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (C_G^X\varphi \rightarrow C_G^X\psi)$

(mix_{RC}) $C_G^\psi\varphi \leftrightarrow E_G(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi))$

(ind_{RC}) $C_G^\psi(\varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow C_G^\psi\varphi)$

Правила вывода:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} MP$$

$$\frac{\varphi}{K_i\varphi} G_K$$

$$\frac{\varphi}{C_G^\psi\varphi} G_{CK}$$

Некоторые полезные теоремы

Упражнение. Найдите доказательства для следующих теорем исчисления $S5_m$ -RC:

1. $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi)$
2. $C_G^\psi \varphi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \varphi))$
3. $C_G^\varphi \varphi$
4. $C_G^\psi \varphi \rightarrow C_G^\psi C_G^\psi \varphi$
5. $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \varphi)$
6. $C_G^\psi \varphi \leftrightarrow C_G^\psi(\psi \rightarrow \varphi)$

Полнота $S5_m$ -RC

Сборка доказательства.

- $\Phi = cl(\varphi)$
- Лемма об истинности: случай $C_G^\psi \varphi$

Замыкание

Определение. Замыкание $cl(\varphi')$. Для $\varphi' \in \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi') \subset cl_2(\varphi') \subset cl_3(\varphi') \subset cl(\varphi')$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi')$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi')$, то $Sub(\psi) \subset cl_1(\varphi')$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_i C_G\psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi')$
4. если $C_G^\psi\varphi \in cl_1(\varphi')$, то $\{K_i(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi\varphi)) \mid i \in G\} \subset cl_1(\varphi')$

$$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

$$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i \psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$$

$$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi) \text{ и } \psi \neq \neg \dots\}$$

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi (\Rightarrow)$

1	$C_G^\psi \varphi \in X$	$\triangleright M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi \Leftrightarrow \triangleright \forall Y (X(R_{G,+}^\Phi)Y \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi)$
2	$\boxed{Y} X(R_{G,+}^\Phi)Y$	$\triangleright M^\Phi, Y \models \varphi$
3	$XR_{i_1}^\Phi Y_1 R_{i_2}^\Phi \dots R_{i_n}^\Phi Y_n = Y$ т.ч.	
4	$\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq G$	
5	$M^\Phi, Y_1 \models \psi, \dots, M^\Phi, Y_n \models \psi$	
6	$\psi \in Y_1, \dots, \psi \in Y_n$	по ПИ
7	$K_{i_1}(\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi)) \in X$	
8	$\psi \rightarrow (\varphi \wedge C_G^\psi \varphi) \in Y_1$	
9	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_1$	
10	повторяем до $Y_n = Y$	
11	$\varphi \wedge C_G^\psi \varphi \in Y_n$	
12	$\varphi \in Y_n$	
13	$M^\Phi, Y \models \varphi$	по ПИ

Лемма об истинности: Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi. (\Leftarrow)$

- $\underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$
- $\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Сл. $\psi' = C_G^\psi \varphi \ (\Leftarrow)$ Сборка доказательства

$$S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\} \quad \chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\} \quad \bar{S} := W^\Phi \setminus S$$

$$\frac{\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \quad \chi \leftrightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}}{\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)}$$

$$\frac{\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)}{C_G^\psi(\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi))}$$

$$C_G^\psi(\chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (E_G(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow C_G^\psi \chi)$$

$$\underline{X} \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \chi)$$

$$E_G(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow C_G^\psi \chi$$

$$\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \chi$$

$$C_G^\psi \chi \rightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \chi)$$

$$(\psi \wedge \chi) \rightarrow \varphi$$

$$\underline{X} \rightarrow C_G^\psi(\psi \wedge \chi)$$

$$C_G^\psi(\psi \wedge \chi) \rightarrow C_G^\psi \varphi$$

$$\underline{X} \rightarrow C_G^\psi \varphi$$

$$X \vdash C_G^\psi \varphi$$

$$C_G^\psi \varphi \in X$$

$$S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\} \quad \chi := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\} \quad \bar{S} := W^\Phi \setminus S$$

Утверждение.

$$\vdash \chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \Leftrightarrow \forall i \in G \forall X \in S \forall Y \in \bar{S} \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$$

Доказательство.

1. $\vdash \chi \rightarrow E_G(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \Leftrightarrow$
2. $\forall i \in G \vdash \chi \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \Leftrightarrow$
3. $\forall i \in G \forall X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \bigwedge \{\neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \Leftrightarrow$
4. $\forall i \in G \forall X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\bigwedge \{\psi \rightarrow \neg \underline{Y} \mid Y \in \bar{S}\}) \Leftrightarrow$
5. $\forall i \in G \forall X \in S \vdash \underline{X} \rightarrow \bigwedge \{K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \mid Y \in \bar{S}\} \Leftrightarrow$
6. $\forall i \in G \forall X \in S \forall Y \in \bar{S} \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$

$$S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi\}$$

$$\underline{X} := \bigvee \{\underline{X} \mid X \in S\}$$

$$\overline{S} := W^\Phi \setminus S$$

Утверждение. Пусть $X \in S$, $Y \in \underline{S}$, тогда $\vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$

$$1 \quad X \in S, Y \in \underline{S}$$

$$2 \quad M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$$

$$3 \quad M^\Phi, Y \not\models C_G^\psi \varphi$$

$$4 \quad \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \quad \triangleright \text{«}\perp\text{»}$$

$$5 \quad \underline{X} \not\models K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$$

$$6 \quad \underline{X} \not\models \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \rightarrow \perp$$

$$7 \quad \underline{X}, \neg K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y}) \not\models \perp$$

$$8 \quad \underline{X}, \hat{K}_i(\psi \wedge \underline{Y}) \not\models \perp$$

$$9 \quad XR_i^\Phi Y \quad 8 \text{ по утв. (*)}$$

$$10 \quad \psi \in Y \quad 8 \text{ по утв. (*)}$$

$$11 \quad X \models K_i(\psi \rightarrow C_G^\psi \varphi)$$

$$12 \quad Y \models \psi \rightarrow C_G^\psi \varphi$$

$$13 \quad Y \models \psi \quad \text{по ПИ}$$

$$14 \quad Y \models C_G^\psi \varphi$$

$$15 \quad \text{«}\perp\text{»}$$

$$16 \quad \vdash \underline{X} \rightarrow K_i(\psi \rightarrow \neg \underline{Y})$$

Утверждение (*). Пусть $X, Y \in W^\Phi$, тогда

$$\underline{X}, \hat{K}_i(\varphi \wedge \underline{Y}) \not\models \perp \Rightarrow (XR_i^\Phi Y \text{ и } \varphi \in Y)$$

Утверждение $\vdash (\psi \wedge \chi) \rightarrow \varphi$

Достаточно доказать, что $\vdash \underline{X} \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ для $X \in S$.

1	$M^\Phi, X \models C_G^\psi \varphi$		10	$\neg \varphi \in Y$	
2	$M^\Phi, X \models K_i(\psi \rightarrow \varphi)$	для $i \in G$	11	« \perp »	
3	$y_0 = \#_i X \cup \{\psi\} \cup \{\neg \varphi\} \not\models \perp$	\triangleright « \perp »	12	$\#_i X \cup \{\psi\} \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$	3–11
4	$y_0 \subset Y \in W^\Phi$	по л.Линденбаума	13	$\#_i X \cup \{\psi\} \vdash \varphi$	
5	$XR_i^\Phi Y$	по опр R^Φ из 3, 4	14	$\#_i X \vdash \psi \rightarrow \varphi$	
6	$M^\Phi, Y \models \psi \rightarrow \varphi$		15	$X \vdash \#_i X$	по S5
7	$M^\Phi, Y \models \psi \Rightarrow M^\Phi, Y \models \varphi$		16	$X \vdash \psi \rightarrow \varphi$	
8	$\psi \in Y \Rightarrow \varphi \in Y$	по ПИ	17	$\vdash \underline{X} \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	
9	$\varphi \in Y$				

Аксиома редукции для условного общего знания

Исчисление $S5_m[]$ -RC (PAL -RC)

($S5_mRC$) Аксиомные схемы и правила вывода исчисления $S5_mRC$

$$(R_{RC}) \quad [!\varphi]C_G^x\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow C_G^{\varphi \wedge [!\varphi]x}[!\varphi]\psi)$$

Упражнение

Сформулируйте аксиому редукции для общего знания: $[!\varphi]C_G\psi \leftrightarrow ?$

Упражнение

Для формулы $[!p]C_Gq$ найдите эквивалентную, но из языка \mathcal{EL} -RC.

Сравнение языков по выразительной силе

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C}$

$$[!(\neg p \rightarrow K_a \neg p)] C_{ab} \neg p$$

- $\mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC} \equiv \mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{RC}$

- $\mathcal{PAL}\text{-}\mathcal{C} \prec \mathcal{EL}\text{-}\mathcal{RC}$

$$C_{ab}^p \neg K_a p$$

Подробнее: [vanDitmarsch2008]