$S5C$: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Исчисления $S5C$ и $S5C'$

Теорема о дедуктивной эквивалентности $S5C$ и $S5C'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C'} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления $S5C$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \models_{S5C} \varphi$$

Компактность логики

Обозначение

$\Gamma \models_L \varphi := \forall F(F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$

Определение. Компактность логики.

Логика L называется компактной е.т.е. $\Gamma \models_L \bot \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ т.ч. Γ' – конечно и $\Gamma' \models_L \bot$.
Альтернативное определение: ?

Компактность и сильная полнота

Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

Некомпактность $S5C$

Теорема.

Логика $S5C$ не является компактной.

Доказательство.

$X = \{\neg C_{ab} p\} \cup \{E^n_{ab} p \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. $X \models_{S5C} \bot$, т.е. X – невыполнимо
2. $X' \not\models_{S5C} \bot$, где $X' \subseteq X$ и X' – конечно

$\square$

Следствие

Логика $S5C$ не является сильно полной.

Полнота (по Крипке) $S5C$

Теорема

Логика $S5C$ является полной (по Крипке), т.е. $\models_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$

Замыкание

Определение. Замыкание $cl(\varphi)$

Для $\varphi \in L_{KC}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subseteq cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_i C_G \psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$

$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \dots\}$

$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$

$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \dots\}$

Пример $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$

φ	$cl_1(\varphi)$	$cl_2(\varphi)$	$cl_3(\varphi)$	$cl(\varphi)$
$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$	$\neg p \wedge C_{ab}q$
		$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$	$\neg(\neg p \wedge C_{ab}q)$
	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p$
	p	p	p	p
	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$	$C_{ab}q$
		$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$	$\neg C_{ab}q$
	q	q	q	q
		$\neg q$	$\neg q$	$\neg q$
	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$	$K_a C_{ab}q$
		$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$	$\neg K_a C_{ab}q$
	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$	$K_b C_{ab}q$
		$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$	$\neg K_b C_{ab}q$
			$K_a K_a C_{ab}q$	$K_a K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a K_a C_{ab}q$
			$K_a \neg K_a C_{ab}q$	$K_a \neg K_a C_{ab}q$
				$\neg K_a \neg K_a C_{ab}q$
			$K_b K_b C_{ab}q$	$K_b K_b C_{ab}q$
				$\neg K_b K_b C_{ab}q$
			$K_b \neg K_b C_{ab}q$	$K_b \neg K_b C_{ab}q$
				$K_b \neg K_b C_{ab}q$

Утверждение

Для любого $\varphi \in L_{KC}$: $cl(\varphi)$ – конечно

Доказательство.

. Упражнение. $\square$

Максимальность и непротиворечивость

Определение

Множество формул $X \in L_{KC}$ *называется* *$S5C$– непротиворечивым* *е.т.е.*

(a) $X \nvdash_{S5C} \bot$

(b) *не существует* $\varphi_1, \ldots \varphi_n \in X$ *т. ч.* $\vdash_{S5C} \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение: $\boxed{\Phi = cl(\varphi) \text{ для } \varphi \in L_{KC}}$

Определение.

Будем говорить, что множество $X \subset \Phi$ является Φ-максимальным $S5C$-непротиворечивым е.т.е.

- X — $S5C$–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi(X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5C} \bot)$.

Конечная каноническая модель

Определение

Обозначим $\Phi = cl(\varphi)$ *для формулы* $\varphi \in L_{KC}$. $M^{\Phi} = (W^{\Phi}, (\sim_i^{\Phi})_{i \in Ag}, V^{\Phi})$ – *конечная каноническая модель, где*

- $W^{\Phi} = \{X \subset \Phi \mid X - \Phi\text{-м.}S5C\text{-н.м. формул}\}$
- $X \sim_i^{\Phi} Y := \forall \varphi \in \Phi : K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$ *для любого* $i \in Ag$
- $X \models p \iff p \in X$

Упражнение

Используя следующее обозначение: $\boxed{\#_i X := \{\varphi \mid K_i\varphi \in X\}}$, переформулировать $X \sim_i^c Y$

к.м. vs. к.к.м.

Определение

Пусть $X \subseteq L_{CK}, L \in \{K_m^C, S4_m^C, S5_m^C, \dots\}$, *определим множество следствий*

$$[X]_L := \{\varphi \in L_{CK} \mid X \vdash_L \varphi\}$$

Утверждение.$[X]_L$ в к.м. (M^c)

Если $X \in W^c$, *то* $[X]_L \subseteq X$. *Более того:* $[X]_L = X$

Утверждение. $[X]_L$ в к.к.м. (M^Φ)

Если $X \in W^\Phi$, *то не гарантируется, что* $[X]_L \subseteq X$, *но верно, что* $[X]_L \cap \Phi \subseteq X$. *Более того:* $[X]_L \cap \Phi = X$.

Схема доказательства

Теорема о корректности и полноте исчисления $S5C$

$$\forall \varphi \in L_{KC} \ \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления $S5C$ (Упражнение)

($\Rightarrow$) Полнота.

$$\nvdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \neg\varphi \nvdash_{S5C} \bot \Rightarrow \{\neg\varphi\} \subset X \in W^{\Phi} \Rightarrow M^{\Phi}, X \models \neg\varphi \Rightarrow (M^{\Phi} \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Каноничность $M^{\Phi} \in S5$
- Лемма об истинности

Каноничность к.к.м.

Определение

Класс моделей $S5$.

Лемма

$M^{\Phi} \in S5$, то есть, $\sim_i^{\Phi}$ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность $\sim_i^\Phi$

1	$\boxed{X}\ X \in W^\Phi$	$\rhd\ X \sim_i^\Phi X \Leftrightarrow \rhd\ \forall\varphi(K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$
2	$\boxed{\varphi}\ K_i\varphi \in X$	$\rhd\ \varphi \in X$
3	$\varphi \in X$	из 2, поскольку $\varphi \in \Phi$, $\vdash_{S5C} K_i\varphi \to \phi$
4	$\forall\varphi(K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$	В$\forall \Rightarrow$(2-3)
5	$X \sim_i^\Phi X$	4 по опр. $\sim_i^\Phi$
6	$\forall X \in W^\Phi : X \sim_i^\Phi X$	В$\forall$(1-5)

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ замыкание формулы φ_0, M^Φ – к.к.м., $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство.

Докажем индукцией по построению φ'.

БИ $\varphi' = p$

ШИ Сл.1 $\varphi' = \neg\varphi_1$

Сл.2 $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

Сл.3 $\varphi' = K_i\varphi$

Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

$\square$

Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, где $X = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G\varphi\}$, $\overline{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}$

Сл.4. (⇐) $C_G\varphi \in X \Leftarrow M^\Phi, X \models C_G\varphi$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{\overline{S} := W^c \setminus S}$

$$
\dfrac{\vdash \underline{X} \to \chi \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdash \chi \to E_G(\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}) \qquad \dfrac{\vdash \bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}}{\vdash (\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}) \leftrightarrow \chi}}{\vdash \chi \to E_G\chi}}{\vdash C_G(\chi \to E_G\chi)} \qquad \vdash C_G(\chi \to E_G\chi) \to (\chi \to C_G\chi)}{\vdash \chi \to C_G\chi} \qquad \dfrac{\vdash \chi \to \varphi}{\vdash C_G\chi \to C_G\varphi}}{\vdash \chi \to C_G\varphi}}{\dfrac{\vdash \underline{X} \to C_G\varphi}{\dfrac{X \vdash C_G\varphi}{C_G\varphi \in X}}}
$$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$

Лемма $\vdash \underline{X} \to \chi$

▶ Доказательство: по построению χ (по КЛВ). ◀

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{\#_i X := \{\psi \mid K_i\psi \in X\}}$

Лемма: $\vdash \chi \to \varphi$

- Достаточно доказать, что для любого $X \in S \vdash \underline{X} \to \varphi$

1	$\boxed{X}\ X \in S$	
2	$M^c, X \models C_G\varphi$	$X \in S$
3	$M^c, X \models K_i\varphi$ для $i \in G$	1
4	$y_0 := \#_i X \cup \{\neg\varphi\}$	постр.
5	$\mid\ y_0 \nvdash \bot$	$\rhd$: «$\bot$»
6	$\mid\ y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л.Линд.
7	$\mid\ X \sim_i^c Y$	по постр. Y
8	$\mid\ M^c, Y \models \varphi$	1, 4
9	$\mid\ \varphi \in Y$	по п.и.
10	$\mid\ \neg\varphi \in Y$	по постр. Y
11	$\mid\ $«$\bot$»	6, 7
12	$y_0 \vdash \bot$	
13	$\#_i X \vdash \varphi$	4
14	$X \vdash \#_i X$	3
15	$X \vdash \varphi$	5, 6
16	$\vdash \underline{X} \to \varphi$	7

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$

Лемма: $\vdash \chi \to E_G(\bigwedge\limits_{Y' \in \overline{S}} \neg\underline{Y'})$

- Достаточно доказать, что $\forall i \in G\ \forall X \in S\ \forall Y \in \overline{S}\ \vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$

1	$\boxed{i}\ i \in G$	
2	$\boxed{X}\ X \in S$	
3	$\boxed{Y}\ Y \in W^\Phi \setminus S$	
4	$M^c, X \models C_G\varphi$	2
5	$M^c, Y \not\models C_G\varphi$	3
6	$X \not\sim_i^c Y$	из 2,3
7	$\exists\psi : K_i\psi \in X, \psi \notin Y$	
8	$\neg\psi \in Y$	
9	$Y \vdash \neg\psi$	
10	$\vdash \underline{Y} \to \neg\psi$	
11	$\vdash \psi \to \neg\underline{Y}$	
12	$\vdash K_i\psi \to K_i\neg\underline{Y}$	
13	$X \vdash K_i\psi$	по постр. ψ
14	$\vdash \underline{X} \to K_i\psi$	
15	$\vdash \underline{X} \to K_i\neg\underline{Y}$	

Лемма: $\forall S \subseteq W^c \vdash \bigwedge\{Y \mid Y \in \overline{S}\} \leftrightarrow \bigvee\{X \mid X \in S\}$, где $\overline{S} := W^c \setminus S$

- Доказательство собирается из следующих утверждений:
  1. $\forall X, Y \in W^c$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$
  2. $\vdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^c\}$

◀

Упражнение

Собрать доказательство леммы из утверждений. Подсказка: понадобится только КЛВ.

Утверждение: $\forall X, Y \in W^{\Phi}$ т.ч. $X \neq Y \vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$

1	$\boxed{X}\ X \in W^{\Phi}$	
2	$\boxed{Y}\ Y \in W^{\Phi}$	
3	$X \neq Y$	
4	$X \subset (X \cup Y), Y \subset (X \cup Y)$	1 теория множеств
5	$X \cup Y \vdash \perp$	2 по опр. м.н.м
6	$\underline{X}, \underline{Y} \vdash \perp$	3
7	$\vdash \neg(\underline{X} \wedge \underline{Y})$	4

Утверждение $\vdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^{\Phi}\}$

1	$\nvdash \bigvee\{\underline{X} \mid X \in W^{\Phi}\}$	$\triangleright$ «$\bot$»
2	$\nvdash \underline{X_1} \vee \dots \vee \underline{X_n}, X_i \in W^{\Phi}$	
3	$\forall X_i \in W^{\Phi} \nvdash \underline{X_i}$	
4	$\forall X_i \in W^{\Phi} \exists \varphi \in X_i \nvdash \varphi$	
5	$\nvdash h(X_1) \vee \dots \vee h(X_n)$	$h(X_i) := \varphi$ т.ч. $\varphi \in X_i$ и $\nvdash \varphi$
6	$\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n) \nvdash \bot$	
7	$\{\neg h(X_1), \dots, \neg h(X_n)\} \subseteq X_j \in W^{\Phi}$	по л. Линд.
8	$h(X_j) \in X_j$	
9	$\neg h(X_j) \in X_j$	
10	«$\bot$»	