$S5C$: полнота и корректность

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Исчисления $S5C$ и $S5C'$

Теорема о дедуктивной эквивалентности $S5C$ и $S5C'$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C'} \varphi$$

Теорема о корректности исчисления $S5C$ (Упражнение)

$$\vdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \models_{S5C} \varphi$$

Компактность логики

Обозначение

$\Gamma \models_L \varphi := \forall F(F \models L \Rightarrow (F \models \Gamma \Rightarrow F \models \varphi))$

Определение. Компактность логики.

Логика L называется компактной е.т.е. $\Gamma \models_L \bot \Rightarrow \exists \Gamma' \subseteq \Gamma$ т.ч. Γ' – конечно и $\Gamma' \models_L \bot$.
Альтернативное определение: ?

Компактность и сильная полнота

Теорема

Логика является сильно полной е.т.е. она полна и компактна.

Некомпактность $S5C$

Теорема.

Логика $S5C$ не является компактной.

Доказательство.

$X = \{\neg C_{ab}p\} \cup \{E^n_{ab}p \mid n \in \mathbb{N}\}$

1. $X \models_{S5C} \bot$, т.е. X – невыполнимо
2. $X' \not\models_{S5C} \bot$, где $X' \subseteq X$ и X' – конечно

$\square$

Следствие

Логика $S5C$ не является сильно полной.

Полнота (по Крипке) $S5C$

Теорема

Логика $S5C$ является полной (по Крипке), т.е. $\models_{S5C} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$

Замыкание

Обозначение

$\Gamma \subseteq L_{CK}$, определим $\neg\Gamma := \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma$ и φ не начинается с "$\neg$"$\}$. Пример: пусть $\Gamma = \{p, \neg K_i q, r, \neg s\}$, тогда $\neg\Gamma = \{\neg p, \neg r\}$

Определение. Замыкание $cl(\varphi)$. Для $\varphi \in L_{KC}$ определим четыре множества: $cl_1(\varphi) \subset cl_2(\varphi) \subset cl_3(\varphi) \subset cl(\varphi)$.

$cl_1(\varphi)$ – наименьшее множество, замкнутое по следующим правилам:

1. $\varphi \in cl_1(\varphi)$
2. если $\psi \in cl_1(\varphi)$, то $Sub(\psi) \subseteq cl_1(\varphi)$
3. если $C_G\psi \in cl_1(\varphi)$, то $\{K_i C_G \psi \mid i \in G\} \subseteq cl_1(\varphi)$

$cl_2(\varphi) := cl_1(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_1(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \ldots\}$

$cl_3(\varphi) := cl_2(\varphi) \cup \{K_i K_i \psi \mid K_i\psi \in cl_2(\varphi)\} \cup \{K_i \neg K_i \psi \mid \neg K_i \psi \in cl_2(\varphi)\}$

$cl(\varphi) := cl_3(\varphi) \cup \{\neg\psi \mid \psi \in cl_3(\varphi)$ и $\psi \neq \neg \ldots\}$

Утверждение

Для любого $\varphi \in L_{KC}$: $cl(\varphi)$ – конечно

Доказательство.

Упражнение. $\square$

Максимальность и непротиворечивость

Определение

Множество формул $X \in L_{KC}$ называется $S5C$– непротиворечивым е.т.е.

(a) $X \nvdash_{S5C} \perp$

(b) *не существует* $\varphi_1, \dots \varphi_n \in X$ *т. ч.* $\vdash_{S5C} \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$

Упражнение: докажите, что условия (a) и (b) эквивалентны

Обозначение: $\boxed{\Phi = cl(\varphi) \text{ для } \varphi \in L_{KC}}$

Определение.

Будем говорить, что множество $X \subset \Phi$ является Φ-максимальным $S5C$-непротиворечивым е.т.е.

- X — $S5C$–непротиворечиво и
- $\forall Y \in \Phi(X \subset Y \Rightarrow Y \vdash_{S5C} \perp)$.

Конечная каноническая модель

Обозначение

$$\boxed{\#_i X := \{\varphi \mid K_i\varphi \in X\}}$$

Определение. Обозначим $\Phi = cl(\varphi)$ для формулы $\varphi \in L_{KC}$. $M^\Phi = (W^\Phi, (\sim_i^\Phi)_{i \in Ag}, V^\Phi)$ – конечная каноническая модель, где

- $W^\Phi = \{X \subset \Phi \mid X$ – Φ-м.$S5C$-н.м. формул$\}$
- $X \sim_i^\Phi Y := \forall \varphi \in \Phi : K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in Y$ для любого $i \in Ag$
- $X \models p \iff p \in X$

К.М. VS. К.К.М.

Определение

Пусть $X \subseteq L_{CK}, L \in \{K^C_m, S4^C_m, S5^C_m, \dots\}$*, определим* ***множество следствий***

$$[X]_L := \{\varphi \in L_{CK} \mid X \vdash_L \varphi\}$$

Утверждение. $[X]_L$ в к.м. (M^c)

Если $X \in W^c$*, то* $[X]_L \subseteq X$*. Более того:* $[X]_L = X$

Утверждение. $[X]_L$ в к.к.м. (M^Φ)

Если $X \in W^\Phi$*, то не гарантируется, что* $[X]_L \subseteq X$*, но верно, что* $[X]_L \cap \Phi \subseteq X$*. Более того:* $[X]_L \cap \Phi = X$*.*

Схема доказательства

Теорема о корректности и полноте исчисления $S5C$

$$\forall \varphi \in L_{KC} \ \models_{S5} \varphi \iff \vdash_{S5C} \varphi$$

Доказательство.

($\Leftarrow$) Корректность. Проверка общезначимости аксиом и правил вывода исчисления $S5C$ (Упражнение)
($\Rightarrow$) Полнота.

$$\nvdash_{S5C} \varphi \Rightarrow \neg\varphi \nvdash_{S5C} \perp \Rightarrow \{\neg\varphi\} \subset X \in W^{\Phi} \Rightarrow M^{\Phi}, X \models \neg\varphi \Rightarrow (M^{\Phi} \in S5 \Rightarrow \not\models_{S5} \varphi)$$

Нужно доказать:

- Каноничность $M^{\Phi} \in S5$
- Лемма об истинности

$\square$

Каноничность к.к.м.

Определение

Класс моделей $S5$.

Лемма 1

$M^\Phi \in S5$, то есть, $\sim_i^\Phi$ – рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Рефлексивность $\sim_i^{\Phi}$

▶

1	$\boxed{X}\ X \in W^{\Phi}$	$\triangleright X \sim_i^{\Phi} X \Leftrightarrow \triangleright \forall \varphi \in \Phi(K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$
2	$\boxed{\varphi} \in \Phi : K_i\varphi \in X$	$\triangleright\ \varphi \in X$
3	$\varphi \in X$	из 2, поскольку $\varphi \in \Phi$, $\vdash_{S5C} K_i\varphi \to \phi$
4	$\forall\varphi(K_i\varphi \in X \Rightarrow \varphi \in X)$	В$\forall \Rightarrow$(2-3)
5	$X \sim_i^{\Phi} X$	4 по опр. $\sim_i^{\Phi}$
6	$\forall X \in W^{\Phi} : X \sim_i^{\Phi} X$	В$\forall$(1-5)

◀

Лемма об истинности

Лемма

Пусть Φ замыкание некоторой формулы M^Φ – к.к.м., $X \in W^\Phi$

$$\forall \varphi' \in \Phi : \varphi' \in X \iff M^\Phi, X \models \varphi'$$

Доказательство.

Докажем индукцией по построению φ'.

БИ $\varphi' = p$

ПИ $\forall \psi \in Sub(\varphi') : \psi \in X \iff M^\Phi, X \models \psi$

ШИ Сл.1 $\varphi' = \neg\varphi$
Сл.2 $\varphi' = \varphi_1 \wedge \varphi_2$
Сл.3 $\varphi' = K_i\varphi$
Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

□

Сл. 3. $\varphi' = K_i\varphi$

Сл.4 $\varphi' = C_G\varphi$

Обозначения

- $\underline{X} := \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$, где $X = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$,
- $S := \{X \in W^\Phi \mid M^\Phi, X \models C_G\varphi\}$, $\overline{S} := W^\Phi \setminus S$
- $\chi := \bigvee\{\underline{X} \mid X \in S\}$

Сл.4. $(\Leftarrow)$ $C_G\varphi \in X \Leftarrow M^{\Phi}, X \models C_G\varphi$

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{\overline{S} := W^c \setminus S}$

$$
\dfrac{
\vdash \underline{X} \to \chi
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\vdash \chi \to E_G\Big(\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}\Big)
\qquad
\dfrac{\vdash \bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'} \leftrightarrow \bigvee_{X' \in S} \underline{X'}}{\vdash \Big(\bigwedge_{Y' \in \overline{S}} \neg \underline{Y'}\Big) \leftrightarrow \chi}
}{\vdash \chi \to E_G\chi}
}{\vdash C_G(\chi \to E_G\chi)}
\qquad
\vdash C_G(\chi \to E_G\chi) \to (\chi \to C_G\chi)
}{\vdash \chi \to C_G\chi}
\qquad
\dfrac{\vdash \chi \to \varphi}{\vdash C_G\chi \to C_G\varphi}
}{\vdash \chi \to C_G\varphi}
}{
\dfrac{\vdash \underline{X} \to C_G\varphi}{\dfrac{X \vdash C_G\varphi}{C_G\varphi \in X}}
}
$$

$$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}} \qquad \boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$$

Лемма 1 $\vdash \underline{X} \to \chi$

▶ Доказательство: по построению χ (по КЛВ). ◀

$\boxed{S := \{X' \in W^c \mid M^c, X' \models C_G\varphi\}}$ $\boxed{\chi := \bigvee\{\underline{X'} \mid X' \in S\}}$ $\boxed{\#_i X := \{\psi \mid K_i\psi \in X\}}$

Лемма: $\vdash \chi \to \varphi$

- Достаточно доказать, что для любого $X \in S \vdash \underline{X} \to \varphi$

1	$\boxed{X}$ $X \in S$	
2	$M^c, X \models C_G\varphi$	$X \in S$
3	$M^c, X \models K_i\varphi$ для $i \in G$	1
4	$y_0 := \#_i X \cup \{\neg\varphi\}$	постр.
5	$y_0 \nvdash \bot$	$\triangleright$: «$\bot$»
6	$y_0 \subseteq Y \in W^c$	по л.Линд.
7	$X \sim_i^c Y$	по постр. Y
8	$M^c, Y \models \varphi$	1, 4
9	$\varphi \in Y$	по п.и.
10	$\neg\varphi \in Y$	по постр. Y
11	«$\bot$»	6, 7
12	$y_0 \vdash \bot$	
13	$\#_i X \vdash \varphi$	4
14	$X \vdash \#_i X$	3
15	$X \vdash \varphi$	5, 6
16	$\vdash \underline{X} \to \varphi$	7

◀