Полнота *PAL*

Мини-курс «Эпистемическая логика: исчисления и модели»

Виталий Долгоруков, Елена Попова

Международная лаборатория логики, лингвистики и формальной философии НИУ ВШЭ

Летняя школа «Логика и формальная философия»
Факультет свободных искусств и наук
сентябрь 2022

Язык

Язык $\mathcal{PAL}$

$$\varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$$

Семантика языка $\mathcal{PAL}$

Некоторые законы $\mathcal{PAL}$

Исчисление PAL ($S5_m[]$)

Аксиомные схемы:

- $S5$
- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $[!\varphi](\psi \wedge \chi) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $[!\varphi]K_i\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$

Правила вывода: MP, NEC, $RE!$

Корректность *PAL*

$\models [!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$

1. $M, x \models [!\varphi]p$
2. $M, x \models \varphi \Rightarrow M^{!\varphi}, x \models p$

Выразительность

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{EL} & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \\
\mathcal{PAL} & \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi
\end{array}
$$

Утверждение

$\mathcal{EL} \equiv \mathcal{PAL}$

Перевод tr

$$(\mathcal{EL}) \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi$$

$$(\mathcal{PAL}) \quad \varphi, \psi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid K_i\varphi \mid [!\varphi]\psi$$

Определение (Функция перевода $tr : \mathcal{PAL} \mapsto \mathcal{EL}$)

- $tr(p) := p$
- $tr(\neg\varphi) := \neg tr(\varphi)$
- $tr(\varphi \wedge \psi) := tr(\varphi) \wedge tr(\psi)$
- $tr(K_i\varphi) := K_i tr(\varphi)$
- $tr([!\varphi]p) := tr(\varphi \to p)$
- $tr([!\varphi]\neg\psi) := tr(\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $tr([!\varphi](\psi \wedge \chi)) := tr([!\varphi]\psi \wedge [!\varphi]\chi)$
- $tr([!\varphi]K_i\psi) := tr(\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)$
- $tr([!\varphi][!\psi]\chi) := tr([!\varphi]tr([!\psi]\chi))$

Упражнение

- $tr(\varphi \to \psi) = \ldots$
- $tr(\varphi \vee \psi) = \ldots$

Перевод

Примеры

- $tr([!p](q \wedge r)) = tr([!p]q \wedge [!p]r) = tr([!p]q) \wedge tr([!p]r) = (p \to q) \wedge (p \to r)$
- $tr([!p][!q]r) = tr([!p]tr([!q]r)) = tr([!p](q \to r)) = p \to (q \to r)$
- $tr([!p]K_a q) = tr(p \to K_a[!p]q) = tr(p) \to tr(K_a[!p]q) = p \to K_a tr([!p]q) = p \to K_a(p \to q)$

Сложность формулы c

$\varphi \to K_i[!\varphi]\psi$ vs. $[!\varphi]K_i\psi$

Определение (Сложность формулы)

Определим функцию $c : \mathcal{PAL} \mapsto \mathbb{N}$*:*

1. $c(p) := 1$
2. $c(\neg\varphi) := c(\varphi) + 1$
3. $c(\varphi \wedge \psi) = max\{c(\varphi), c(\psi)\} + 1$
4. $c(K_i\varphi) := c(\varphi) + 1$
5. $c([!\varphi]\psi) := (c(\varphi) + 4) \cdot c(\psi)$

Лемма об уменьшении сложности формулы

- $c(\varphi) \geq c(\psi)$ для $\psi \in Sub(\varphi)$
- $c([!\varphi]p) > c(\varphi \to p)$
- $c([!\varphi]\neg\psi) > c(\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
- $c([!\varphi][!\psi]\chi) > c([!\varphi]tr([!\psi]\chi))$

Теорема

$\forall\varphi \in \mathcal{PAL} \vdash_{PAL} \varphi' \leftrightarrow tr(\varphi')$

- Рассмотрим следующие случаи:

$\varphi' = p, \neg\varphi, \varphi \wedge \psi, K_i\varphi, [!\varphi]p, [!\varphi]\neg\psi, [!\varphi](\psi \wedge \chi), [!\varphi]K_i\psi, [!\varphi][!\psi]\chi$

  - Случай $\varphi' = p$. По определению $p \leftrightarrow tr(p)$.

Теорема

$\forall \varphi \in \mathcal{PAL} \vdash_{PAL} \varphi' \leftrightarrow tr(\varphi')$

- Рассмотрим следующие случаи:

$\varphi' = p, \neg\varphi, \varphi \wedge \psi, K_i\varphi, [!\varphi]p, [!\varphi]\neg\psi, [!\varphi](\psi \wedge \chi), [!\varphi]K_i\psi, [!\varphi][!\psi]\chi$

- Случай $\varphi' = p$. По определению $p \leftrightarrow tr(p)$.
- Случай $\varphi' = \neg\varphi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$ по IH, поскольку $c(\varphi) < c(\neg\varphi)$

$$\neg\varphi \leftrightarrow \neg tr(\varphi) \leftrightarrow tr(\neg\varphi)$$

Теорема

$\forall \varphi \in \mathcal{PAL} \vdash_{PAL} \varphi' \leftrightarrow tr(\varphi')$

- Рассмотрим следующие случаи:

$\varphi' = p, \neg\varphi, \varphi \wedge \psi, K_i\varphi, [!\varphi]p, [!\varphi]\neg\psi, [!\varphi](\psi \wedge \chi), [!\varphi]K_i\psi, [!\varphi][!\psi]\chi$

- Случай $\varphi' = p$. По определению $p \leftrightarrow tr(p)$.
- Случай $\varphi' = \neg\varphi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$ по IH, поскольку $c(\varphi) < c(\neg\varphi)$

$$\neg\varphi \leftrightarrow \neg tr(\varphi) \leftrightarrow tr(\neg\varphi)$$

- Случай $\varphi' = \varphi \wedge \psi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$, $\psi \leftrightarrow tr(\psi)$

$$(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (tr(\varphi) \wedge tr(\psi)) \leftrightarrow tr(\varphi \wedge \psi)$$

Теорема

$\forall \varphi \in \mathcal{PAL} \vdash_{PAL} \varphi' \leftrightarrow tr(\varphi')$

- Рассмотрим следующие случаи:

$\varphi' = p, \neg\varphi, \varphi \wedge \psi, K_i\varphi, [!\varphi]p, [!\varphi]\neg\psi, [!\varphi](\psi \wedge \chi), [!\varphi]K_i\psi, [!\varphi][!\psi]\chi$

- Случай $\varphi' = p$. По определению $p \leftrightarrow tr(p)$.
- Случай $\varphi' = \neg\varphi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$ по IH, поскольку $c(\varphi) < c(\neg\varphi)$

$$\neg\varphi \leftrightarrow \neg tr(\varphi) \leftrightarrow tr(\neg\varphi)$$

- Случай $\varphi' = \varphi \wedge \psi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$, $\psi \leftrightarrow tr(\psi)$

$$(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (tr(\varphi) \wedge tr(\psi)) \leftrightarrow tr(\varphi \wedge \psi)$$

- Случай $\varphi' = K_i\varphi$. $\varphi \leftrightarrow tr(\varphi)$

$$K_i\varphi \leftrightarrow K_i tr(\varphi) \leftrightarrow tr(K_i\varphi)$$

- Случай $\varphi' = [!\varphi]p$.
- Случай $\varphi' = [!\varphi]\neg\psi$.
- Случай $\varphi' = [!\varphi](\psi \wedge \chi)$.

- Случай $\varphi' = [!\varphi]K_i\psi$. $c(\varphi \to K_i[!\varphi]\psi) < c([!\varphi]K_i\psi)$

$$\vdash_{PAL} [!\varphi]K_i\psi \xleftrightarrow{\text{акс.}} (\varphi \to K_i[!\varphi]\psi) \xleftrightarrow{IH} tr(\varphi \to K_i[!\varphi]\psi)) \xleftrightarrow{def} tr([!\varphi]K_i\psi)$$

- Случай $\varphi' = [!\varphi][!\psi]\chi$
    1. $c([!\psi]\chi) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$
    2. $c([!\varphi]tr([!\psi]\chi)) < c([!\varphi][!\psi]\chi)$
    3. $\vdash_{PAL} [!\psi]\chi \leftrightarrow tr([!\psi]\chi)$ IH из 1

$$\vdash_{PAL} [!\varphi][!\psi]\chi \xleftrightarrow[3]{!RE} [!\varphi]tr([!\psi]\chi) \xleftrightarrow[2]{IH} tr([!\varphi]tr([!\psi]\chi)) \xleftrightarrow{def} tr([!\varphi][!\psi]\chi)$$

◀

Сборка доказательства

Теорема о полноте *PAL*

$\forall \varphi \in \mathcal{PAL}$:

$$\models_{C_{S5}} \varphi \Rightarrow \models_{C_{S5}} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{S5_m} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PAL} tr(\varphi) \Rightarrow \vdash_{PAL} \varphi$$

Лаконичность

$K_i \top$

Другие варианты аксиоматизации *PAL*

PAL_1, PAL_2,PAL_3, Подробнее Wang

Дедуктивная эквивалентность

Утверждение. $\vdash_{PAL_1} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{PAL_2} \varphi$ В силу теоремы о полноте.

Вопрос: Как доказать дедуктивную эквивалентность PAL_1 и PAL_2 непосредственно?

Задача сводится к том, чтобы вывести $COM!$ в PAL_1 и $RE!$ в PAL_2. Как это сделать?
Гипотеза: индукцией по $c(\varphi)$.