Коллоквиум

Вдовец Илья, Войко Андрей и Глебский Никита

10 марта 2023 г.

Содержание

1 Определения

1.1 Вероятностное пространство, вероятностное распределение, примеры.

Вероятностное пространство

Вероятностным пространством называют множество Ω такое, что $\Omega = \{w_0, w_1, ..., w_n\}$, где w_i - элементарный исход.

Вероятностное распределение

Зададим следующее отображение $P : \Omega \to [0,1]$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$. Такое отображение называется вероятностью. Обозначим за p_i величину, равную $P(\omega_i)$. Тогда последовательность $\{p_i\}$ называют вероятностым распределением.

Примеры

1. Найдем вероятность выпадения орла при подбрасывании монеты. Обозначим орла за 1, решку - за 0. Тогда $\Omega = \{0, 1\}$, а $P(1) = P(0) = \frac{1}{2}$.
2. Теперь кидаем кубик. Тогда $\Omega = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Найдем вероятность выпадения четного числа. Тогда $A = \{2,\ 4,\ 6\}$, и $P(A) = \frac{3}{6}$.
3. Теперь подбросили монетку 6 раз. Тогда $\Omega = \{0, 1\}^6$. Пусть событие A - "выпало 3 орла". Тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_6^3}{2^6}$.
4. Теперь подбросили монету n раз. Тогда $\Omega = \{0, 1\}^n$. Рассмотрим следующее событие A - "в i-ом подбрасывании выпал орел". Честно покажем, почему вероятность этого события равна $\frac{1}{2}$. Так как $A = \{(a_1, ..., 1, ..., a_n) : a_i \in [0,1]\}$, то $P(A) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$

1.2 Свойства вероятности. Оценка объединения. Формула включений-исключений для вероятностей. Задача о беспорядках

Свойства вероятности

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$
2. Пусть $A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, тогда $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$

Оценка объединения

Пусть $A_1, A_2, ..., A_s \subseteq \Omega$. Тогда $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_s) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_s)$.

Формула включений-исключений в вероятностном смысле

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ ...\ + P(A_n)\ -\ P(A_1 \cap A_2) -\ ...\ - P(A_{n-1} \cap A_n) +\ ...\ (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$.

Задача о беспорядках

Задача о беспорядках - найти вероятность того, что случайно выбранная перестановка окажется беспорядком.

$\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = \frac{1}{e}$

1.3 Вероятностный метод. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея.

Вероятностный метод

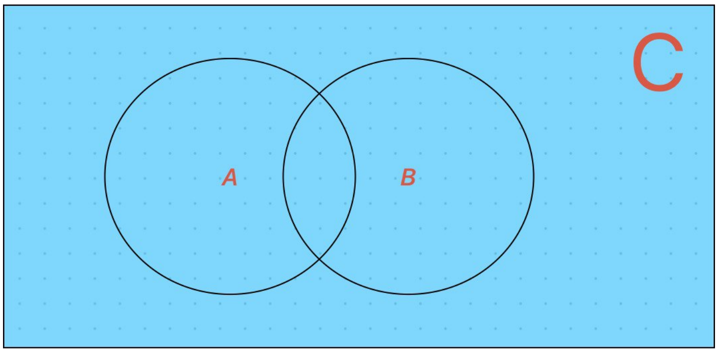
Вероятностный метод - неконструктивный метод доказательства существования математического объекта с заданными свойствами. Если мы можем посчитать вероятность существования объекта и она не равна 0, то из этого как раз таки следует его существование.

Нижняя оценка на числа Рамсея

$R(k, k) > 2^{\frac{k-1}{2}}$

1.4 Условные вероятности, независимые события. Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример).

Условные вероятности



C - это вероятностное пространство.

Пусть $A \subseteq C$ - это событие, которое произошло($P(A) > 0$), $B \subseteq C$ - это событие, которое мы хотим посчитать, при условии того, что событие A уже произошло.

Формула условной вероятности:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Независимые события

Дадим парочку определений, которые нужно отличать.

Несовместные события A и $B \subseteq C$ называются таковыми, если $P(A \cap B) = 0$.

Независимые события A и $B \subseteq C$ называются таковыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Замечание: Если $P(B) > 0$, то независимость A и B равносильна $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$.

Что если я хочу определить независимость большего числа событий? Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq C$ называются независимыми в совокупности, если $\forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$

Пример отличия попарной независимости и независимости в совокупности

Пусть у нас есть тетраэдр и у него три из сторон покрашены в разные цвета - синий, жёлтый и зелёный, а четвёртач сторона покрашена в три цвета сразу. Мы подкидываем этот тетраэдр и смотрим на цвета выпашей стороны(нижней грани). (Равновероятная модель)

Тогда рассмотрим события:

1. A - На грани есть синий цвет.
2. B - На грани есть жёлтый цвет.
3. C - На грани есть зелёный цвет.

Тогда по формулам умножения получаем, что

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

Причём $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Тогда заметно, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ну и тд.

Отсюда, события A,B,C попарно независимы.

Однако, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Поэтому события A,B,C не независимы в совокупности.

1.5 Теорема умножения, формулы Байеса и полной вероятности.

Теорема умножения.

Пусть имеется $A_1,A_2,\ldots,A_n \subseteq C$ - события положительной вероятности. Тогда $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n) \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_{n-2}|A_{n-1} \cap A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_1|\bigcap_{i=2}^{n} A_i)$

Формула Байеса.

Пусть $A,B \subseteq C$ - события положительной вероятности, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

Формула полной вероятности.

Пусть $B_1,B_2,\ldots,B_n \subseteq C$ - это события с положительной вероятностью и $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n = C(B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j)$

Тогда вероятность произвольного события $A \subseteq C$ равна $\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

1.6 Раскраски графов, хроматическое число графа, его свойства. Верхняя оценка на хроматическое число через максимальную из степеней вершин графа. Теорема Брукса.

Для начала введём несколько обозначений, которые будут использоваться:

- $G = (V, E)$ - неориентированный граф без петель и кратных рёбер.
- n - количество рёбер в графе G, $|V|$.
- $deg\ v$ - степень вершины v в G.
- $\Delta(G)$ - максимальная степень в G.
- $\omega(G)$ - размер максимальной клики в G (кликовое число).
- $\alpha(G)$ - число независимости в G, размер максимального независимого множества в G.

Раскраска (правильная) графа G в k цветов - это
$f : V \to \{1, 2, \ldots, k\} : \forall v_1, v_2 \in V : \{v_1, v_2\} \in E \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$

Хроматическое число G - это минимальное число цветов, в которые можно раскрасить G. Обозначение: $\chi(G)$.

Замечание. $\chi(G) = min\{k \in \mathbb{N}|\ V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_k, \forall\ V_i$ - независимое множество$\}$.

Свойства хроматического числа:

1. $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.
2. $\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$.
3. $\chi(G) \leqslant n - \alpha(G) + 1$.
4. $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$. *Следствие:* Если G связен и $\exists w \in V : deg\ w < \Delta(G)$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

   Примеры:

   (a) $G = K_n$(полный граф). Тогда $\chi(G) = n$, $\Delta(G) = n - 1$.
   (b) $G = C_{2s+1}$(нечётный цикл). Тогда $\chi(G) = 3$, $\Delta(G) = 2$.

Теорема Брукса (без доказательства)

Если G - связен и $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, то G "изоморфен" K_n или C_{2s+1}.

Определение изоморфизма графов

Графы $G = (V_1, E_1)$ и $G = (V_2, E_2)$ изоморфны (обозначается как $G_1 \cong G_2$), если $\exists f : V_1 \to V_2$ такая, что:

- f - биекция
- $\forall u, v \in V_1 : \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

1.7 Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Мыцельскиан

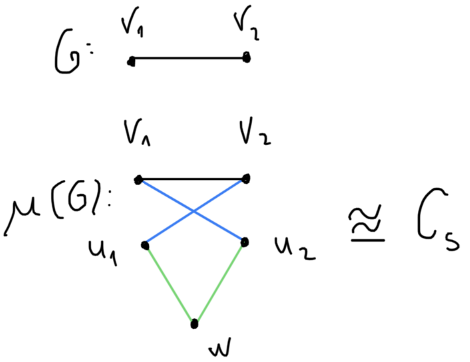
Мыцельсианом для неореинтрированного графа G называют граф $\mu(G)$, построенный следующим способом:

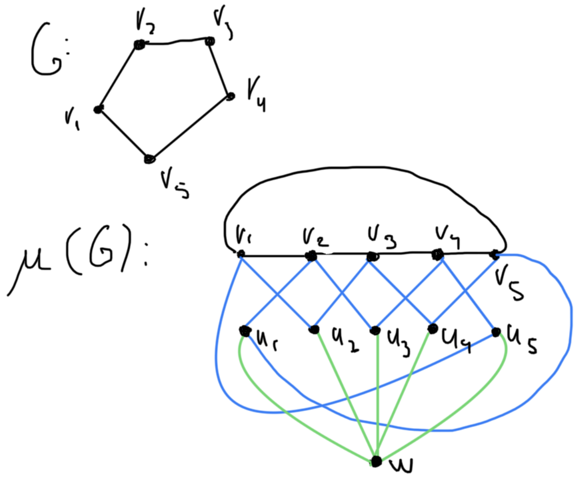
Граф $G \rightarrow \mu(G)$, где $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$

Вершины в $\mu(G)$: $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, w$ - всего $2n+1$ штук.

Рёбра в $\mu(G)$: если $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, то $\{v_i, v_j\}, \{u_i, v_j\}, \{v_i, u_j\} \in E(\mu(G))$. А также $\{w, u_i\} \in E(\mu(G))\ \forall i$.

Примеры:





Теорема Зыкова-Мыцельского

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует граф G: $\omega(G) = 2, \chi(G) = k$.

Конструкция Зыкова-Мыцельского графа. Утверждается, что рассматривая последовательность графов $G_1 = K_2$, $G_2 = \mu(G_1)$, $G_3 = \mu(G_2) = \mu(\mu(G_1)$, $\ldots$, $G_s = \mu(G_{s-1})$, $\ldots$, получим, что G_s не содержит треугольников и $\chi(G_s) = s+1$.

1.8 Теорема Уитни о свойствах хроматического многочлена.

Хроматический многочлен. Функция от числа цветов, возвращающая количество способов раскрасить (естественно правильно) фиксированный граф G в k цветов. Обозначение: $\chi_G(k)$.

Теорема Уитни о хроматическом многочлене и его свойствах

$\chi_G(k)$ - многочлен вида $k^n - a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-r} a_{n-r} k^r$, где $a_i \in \mathbb{N}$, $a_1 = |E(G)|$, r - количество компонент связности.

1.9 Случайная величина. Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Общая формулировка вероятностного метода.

Случайная величина

Пусть имеем $\Omega = \{\omega_1,..., \omega_k\}$ - вероятностное пространство с вероятностным распределением $p_1,..., p_k$ соответственно, причем понятно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Далее, назовем *случайной величиной* функцию $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $Range(f) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Математическое ожидание случайной величины

Сумму $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i p_i$ называют *математическим ожиданием* случайной величины f и обозначают $E[f]$. (см. обозначения в предыдущем определении).

Линейность матожидания

$E[f+g] = E[f] + E[g]$ (f, g - случайные величины).

Общая формулировка вероятностного метода.

Пусть $E[f] = c$, при этом имеем Ω и $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Тогда:

- $\exists\, \omega_{min} \in \Omega : f(\omega_{min}) \leqslant c$
- $\exists\, \omega_{max} \in \Omega : f(\omega_{max}) \geqslant c$

1.10 Дисперсия случайной величины. Неравенства Маркова и Чебышёва

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины $f : \Omega \to \mathbb{R}$ - это $D[f] = E([f - E\{f\}]^2)$

Неравенство Маркова

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ - неотрицательная случайная величина и пусть некоторое число $\alpha > 0$. Тогда $P(f \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E[f]}{\alpha}$.

Неравенство Чебышева

Пусть f - произвольная случайная величина, число $\alpha > 0$. Тогда $P(|f - E[f]| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{D[f]}{\alpha^2}$

1.11 Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Независимые случайные величины

Пусть $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ - вероятностное пространство.

Определение: Случайные величины $X,Y : \Omega \to \mathbb{R}$ называются независимыми, если $\forall x,y \in \mathbb{R}$ события $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ и $\{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y\}$ независимы. (напомню, что события A,B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Замечание: $X_1,X_2,...,X_n$ независимы, если $\forall x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_s} \in \mathbb{R}\, P((X_{i_1} = x_{i_1}) \cap (X_{i_2} = x_{i_2}) \cap ... \cap (X_{i_s} = x_{i_s}) = P(X_{i_1} = x_{i_1}) \cdot P((X_{i_2} = x_{i_2}) \cdot ... \cdot P((X_{i_s} = x_{i_s})$

Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин.

Если случайные величины X,Y независимы, то $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

Если случайные величины X,Y независимы, то $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$.

Если $X_1, X_2,..., X_n$ - случайные независимые величины, то

- $E[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = E[X_1] \cdot ... \cdot E[X_n]$
- $D[X_1 + X_2 + ... + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ... + D[X_n]$

1.12 Асимптотическое выражение для вероятности выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты.

Вот представим себе, что мы подбрасываем монетку n раз. Посчитаем P(выпало $\frac{n}{2}$ орлов), что очевидно равно $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$. Вот мы хотим что-то понять про эту вероятность, но для этого нам очень надо уметь оценивать биномиальный коэффициент из числителя.

Формула Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Тогда пеерпишем $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$ через стирлинга и получим, что $\frac{n!}{(\frac{n}{2})! \cdot (\frac{n}{2})! \cdot 2^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{2})^n}{2^n \cdot \sqrt{\pi n} \cdot \sqrt{\pi n} \cdot (\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$.

Получаем, что наша вероятноть при достаточно больших n стремится к 0.

1.13 Верхняя и нижняя оценки произвольного биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$

$(\frac{n}{k})^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant (\frac{ne}{k})^k$

1.14 Неравенство Чернова для случайной величины «число выпавших орлов при n независимых подбрасываниях монетки, с вероятностью p выпадающей орлом».

$\forall \varepsilon \in (0,1) \qquad P(X \geqslant (1+\varepsilon)pn) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$

Неравенство Чернова утверждает, что вероятность того, что число выпавших орлов отклонится от математического ожидания числа орлов не менее, чем в эпсилон раз, не более $e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$

1.15 Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры.

$F = (f_1, f_2, f_3, \ldots,), \ f_i \in \mathbb{C}$ - некоторая бесконечная последовательность комплексных чисел.

Тогда мы ей можем сопоставить "функцию"(строго говоря, по определению это функцией являться не будет):

$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k$.

Стоит воспринимать эту запись как некоторый формальный (степенной) ряд, то есть мы не собираемся ничего туда подставлять (по крайней мере на данный момент). Можно воспринимать $x, x^2, x^3, \ldots$ просто как "картинки".

Тогда $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k$ называют производящей функцией для последовательности F.

Теперь мы хотим определить некоторые арифметические операции для производящих функций:

- Сложение, $+$: $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k, G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k x^k \rightarrow (F+G)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (f_k + g_k) x^k$
- Умножение на скаляр: $F(x), c \in \mathbb{C} \rightarrow (cF)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (cf_k) x^k$

Вместе с операциями сложения и умножения множество производящих функций (обозначается как $\mathbb{C}[[x]]$ образует векторное пространство над $\mathbb{C}$.

Также покажем как происходит **умножение** производящих функций:

$(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) = H(x)$, где $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$

Примечание. $F(x) = G(x) \Leftrightarrow f_i = g_i \, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Давайте выпишем свойства умножения:

1. $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$ - коммутативность.
2. $A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x)) = (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x)$ - ассоциативность.
3. $A(x) \cdot (B(x) + C(x)) = A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x)$ - дистрибутивность.
4. $\exists 1 = (1, 0, 0, \ldots) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$

   $1 \cdot A(x) = A(x)$

   Утверждение. Введём определение константы: $c = (c, 0, 0, \ldots), c(x) = c + 0x + 0x^2 + \ldots$ Тогда $c(x) \cdot A(x) = (cA)(x)$
5. Обратный элемент не всегда существует.

   Определение. Пусть $A(x)$ - производящая функция. Тогда $B(x)$ - обратная к $A(x)$, если $A(x) \cdot B(x) = 1$

   $(B(x) = A(x)^{-1})$

   Примеры:

   $A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ - обратима. Для неё существует обратный: $1 - x$. $A(x)(1-x) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots = 1$

   $B(x) = x$ - необратима, т.к. $xC(x) = 0 + c_0 x + c_1 x^2 + \ldots \neq 1$

1.16 Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница. Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n-го коффициента производящей функции с использованием производных.

По **определению** производная к производящей функции $F = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$ это:

$F'(x) = f_1 + 2f_2 x^2 + 3f_3 x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} k f_k x^{k-1}$

Свойства производных:

1. $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x)$
2. $(cF(x))' = cF'(x) = (cF'(x))(x)$
3. Правило Лейбница: $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x)+F(x)G'(x)$.

Определим подстановку 0:

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, тогда $A(0) = a_0$.

Запишем несколько очевидных свойств:

1. $(A+B)(0) = A(0)+B(0)$
2. $(A\cdot B)(0) = A(0)\cdot B(0)$
3. $(cA)(0) = cA(0)$

Утверждение. $A \to (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Тогда $a_n = \frac{A^{(n)}(x)}{n!}\Big|_{x=0}$ Несложно проверить, взяв производную n раз.

1.17 Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели.

Пусть $A(x)$ - производящая функция для неупорядоченных выборок из S (то есть $a_n =$ количество способов выбрать n элементов из S без учёта порядка). Аналогично $B(x)$ - такая же функция, но для множества T. Будем также считать, что $S \cap T = \emptyset$

Неформальное утверждение. Производящей функцией для количества выборок из $S \cup T$ является функция $A(x)\cdot B(x)$.

Неупорядоченные выборки

Пусть имеем n различных объектов, из которых мы неупорядоченно хотим выбрать k штук.

Рассмотрим n-элементный набор $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ который представим в виде объединения n одноэлеметных множеств, то есть $S = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}$.

Рассмотрим произвольный элемент a_i. Понятно, что для него производящая функция в смысле нашей задачи будет иметь вид: $1+x$. Производящая функция для объединения n объектов будет равна произведению производящих функций каждого из этих объектов. Поэтому искомая функция будем иметь вид:

$$(1+x)(1+x)...(1+x) = (1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot x^i$$

Таким образом, мы получили функцию вида: $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + ... + f_nx^n$, где коэффициент f_i обозначает количество способов выбрать неупорядоченно k элементов из n.

Бином Ньютона

Давайте обобщим формулу бинома Ньютона для целых коэффициентов и получим:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} \cdot x^i$$

Давайте поясним, чему равен коэффициент $\binom{-n}{k}$.

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

Отсюда предыдущая формула переписывается в виде:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \cdot x^i$$

1.18 Числа Фибоначчи: их производящая функция и явная формула (формула Бине)

Производящая функция для чисел Фибоначчи

Производящая функция имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{-1}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Формула Бине

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} \Big)$$

1.19 Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами. Производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами. Явная формула для общего члена последовательности, метод ее вывода

Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами

Пусть имеем некоторую реккурентную последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется, что a_j член выражается через k предыдущих с постоянными коэффициентами. То есть:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n$$

Производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами

Рассмотрим производящую функцию $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$

Тогда $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}(x)$ и $\deg Q = k$, $\deg P \leqslant k - 1$.

Явная формула для общего члена последовательности, метод ее вывода

Мы получили, что $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(1-q_1x)^{r_1}\dots(1-q_nx)^{r_s}} = ... + \frac{A}{(1-q_i\cdot x)^m} + ...$ (разложение в сумму простых дробей (A - это какой-то коэффициент)). Заметим, что слагаемое вида:

$$\frac{A}{(1 - q_i \cdot x)^m}$$

в точности равно:

$$A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} \cdot (-q_i \cdot x)^k$$

Тогда чтобы получить коэффициент при x^n у производящей функции, мы пройдемся по всем элементарным дробям и соберем в сумму все коэфициенты при x^n. Причем итоговый коэффициент будем иметь вид:

$$a_n = q_1 \cdot p_1(n) + ... + q_t \cdot p_t(n)$$

($p_i(n)$ - какой-то многочлен от n, который возникает из-за биномиального коэффициента при q_i^n)

Выражение вида $p_i(n) \cdot q_i^n$ называют квазимногочленом.

1.20 Задача о правильных скобочных последовательностях. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей. Числа Каталана: их производящая функция и явная формула

Задача о правильных скобочных последовательностях

Обозначим правильную скобочную последовательность как **ПСП**.

ПСП - это такая последовательность, которая получается за конечное число шагов по следующим правилам:

1. () - ПСП.

2. Если P - ПСП, то (P) - тоже ПСП.

3. Если P_1 и P_2 - ПСП, то $P_1 + P_2$ - ПСП (под + подразумевается конкатенация).

Обозначим за C_n - число правильныз скобочных последовательностей длины $2n$. Тогда задача о правильных скобочных последовательностях заключается в том, чтобы найти это число C_n

Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей

Число C_{n+1} выражается следующим образом:

$$C_{n+1} = C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot Cn - 2 + ... + C_n \cdot C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k}$$

Числа Каталана: их производящая функция и явная формула

Производящая функция для $C(x)$:

$$C(x) = \frac{1 - (1 - 4x)^{1/2}}{2x}$$

Явная формула для чисел Каталана: $C_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$.

1.21 Комбинаторные игры с полной информацией. Задание игры в виде ориентированного графа.

Задание комбинаторной игры с 2 игроками(будем называть их Макс и Мин, позже поймёте почему), с полной информацией:

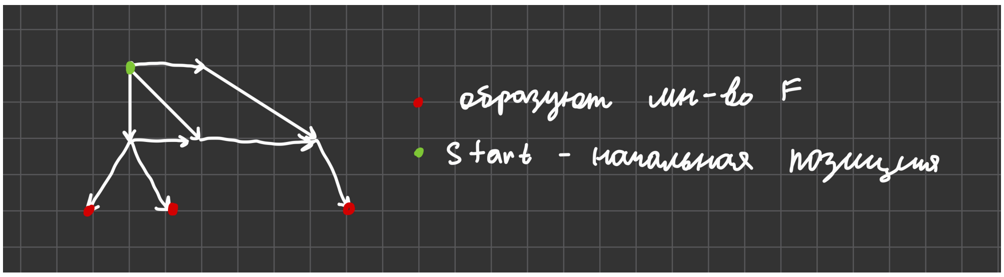
1. Множество позиций S, с указанием, кто ходит в конкретной позиции.

2. Начальная позиция: $start$ и множество позиций F, в которых игра заканчивается.

3. Ходы: $\forall s \in S \to N(s)$ - множество позиций, куда можно попасть из s. Причём, если $s \notin F$, то $N(S) \neq \varnothing$

4. Выигрыш - некая функция $f : F \to R$

Заметим, что игра - это по сути ориентированный граф (см. картинку), причём мы договоримся, что граф ацикличен, чтобы игра не могла длиться вечно. Понятно, что есть игры, в которых может так получиться, что в игре могут быть циклы, но такие моменты обычно оговорены правилами(например, игра в шахматах про ничью в случае повтора хода 3 раза подряд). Это некий технический момент, который понадобится нам.



1.22 Партии и стратегии. Стратегии, гарантирующие выигрыш. Цена игры. Теорема о цене игры.

Партия- это набор v_0,v_1,...,v_k - таких, что $v_i \in S$ и $(v_i$,$v_{i+1}) \in E$(рёбра графа) и v_0 - начальная позиция и $v_k \in F$

Стратегия (для Макса) - это функция g : множество позиций, где ходит Макс $\to$ множество позиций, в которую можно сходить $(s \to v \in N(s))$

Стратегия для Мина строится полность аналогично.

Замечание: В нашем курсе мы будем рассматривать только позиционные стретегии, где стратегия зависит только от текущей позиции, то есть нам не важна история всех позиций до этого, а только с конкретной позиции (заметим, что формально это ничего не нарушает, так как у нас само понятие конкретной позиции может включать в себя уже некую историю игры (см. пример с шахматами выше)).

Мы будем говорить, что стратегия g для игрока Макс (для Мин аналогично) гарантирует выигрыш $c \in R$, если для любой партии v_0,v_1,...,v_k, согласованной с этой стратегией g, Макс получит выигрыш не меньше c, то есть $f(v_k) \geqslant c$

Для Мина будет аналогично, но только $f(v_k) \leqslant c$

Цена игры

Число C называется **ценой игры**, если у Макса и у Мина есть стратегии, гарантирующие выигрыш C.

Теорема о цене игры: У любой описанной выше игры существует единственная цена.

1.23 Беспристрастные игры, N- и P-позиции. Игра ним, ее P-позиции.

Беспристрастная игра - это такая игра, в которой два игрока ходят по очереди и проигрывает тот, кто не может сделать ход (иногда расмматривается, что выигрывает тот, кто не может сделать ход). Соответсвенно есть позиции двух типов: $\{1, -1\}$.

Тогда N**-позиции (выигрышные)** - позиции, в которых выигрывает тот, кто ходит следующим (от слова Next).

P**-позиции (проигрышные)** - позиции, в которых выигрывает тот, кто ходил предыдущим (от слова Previous).

Понятно, что текущая позиция:

- N-позиция, если есть ход в P-позицию.
- P-позиция, если все ходы ведут в N-позиции.

Игра Ним

Есть n кучек камней: $x_1, x_2, \ldots, x_n (x_i > 0)$

Разрешается в свой ход взять любое количество камней, но только из одной кучки (в том числе все камни из кучки). Пригрывает тот, кто не может сделать ход.

Теорема: Каждую из n кучек записываем в двоичной системе счисления:

$x_1 = x_1^{(r)} \ldots x_1^{(1)} x_1^{(0)}$
$x_2 = x_2^{(r)} \ldots x_2^{(1)} x_2^{(0)}$
$\ldots$
$x_n = x_n^{(r)} \ldots x_n^{(1)} x_n^{(0)}$

Далее вычислим побитовый XOR, т.е. суммируем по модулю 2 биты у всех кучек в одном разряде. Получившуюся строку результатов будем называть res.

Наконец, теорема гласит, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - P-позиция $\Leftrightarrow res = 00\ldots0$

1.24 Задача об угадывании числа, ее сложность в адаптивном и неадаптивном случае.

Задача об угадывании числа

Есть числа $1, 2, \ldots, N$. Есть два игрока: Алиса и Боб. Алиса загадывает число, а Боб может задавать вопросы, на которые можно ответить да или нет. Боб задаёт k вопросов. Его цель: точно определить загаданное число.

В адаптивном случае следующие вопросы могут зависеть от ответов на предыдущие. В неадаптивном следующие вопросы не зависят от ответов на предыдущие.

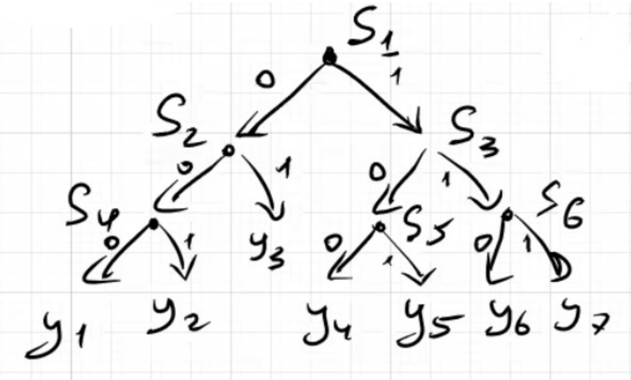
Утверждается, что и в адаптивном, и в неадаптивном случаях необходимо и достаточно задать $\lceil \log_2 N \rceil$ вопросов.

1.25 Модель разрешающих деревьев. Адаптивный и неадаптивный протоколы, сведение адаптивного протокола к неадаптивному.

Разрешающие деревья

Даны X, Y - конечные множества и $f : X \to Y$. Требуется вычислить $f(x)$ при некотором неизвстном входе x. Разрешается задавать вопросы типа $x \in S$ для подмножеств S множества X. Тогда разрешающим деревом будем называть двоичное дерево, каждая промежуточная вершина которого (не лист) помечена некоторым подмножеством $S \subseteq X$. Каждый лист помечен элементом $b \in Y$. Из каждой промежуточной вершин выходят три ребра: одно к корню и два к литьям. Для каждой промежуточной вершины одно из рёбер, ведущих к листьям, помечено единицей, а другое - нулём.

Некоторый конкретный пример разрешающего дерева:



Мы строим путь от корня на каждом шагу переходя по ребру с 1, если ответ положительный, и 0, если ответ отрицательный. Вычисления завершается тогда, когда мы попадаем в лист. Мы говорим, что протокол (по-другому разрешающее дерево) вычисляет функцию f, если для всякого $x \in X$ протокол выдаёт $f(x)$.

Сложностью адаптивного протокола (адаптивным протокол - такой протокол, вопрос в котором может зависеть от предыдущих ответов) называется глубина дерева (несложно убедиться, что она равна количеству вопросов, которое потребуется задать в худшем случае).

Давайте покажем на изображённом выше примере (к задаче об угадывании числа), как переписать адаптивный протокол в неадаптивный. Приведём вопросы, которые мы будем задавать:

1) Верно ли, что $x \in S_1$?

2) Верно ли, что если $x \in S_1$, то $x \in S_3$, а если же $x \notin S_1$, то $x \in S_2$?

3) ...

Вопросы будут получаться большими и громоздкими, однако данное рассуждение работает для любой задачи такого типа (как задача об угадывании числа) и любого адаптивного алгоритма.

1.26 Задача о взвешиваниях: поиск самой тяжелой монеты. Сложность в адаптивном и неадаптивном случае.

Задача о взвешивании. Есть n монет различной массы, ход заключается в сравнении весов двух монет. Наша цель: найти самую тяжёлую монету за как можно меньшее число вопросов k.

Утверждение. Для адаптивной модели необходимо и достаточно $n-1$ взвешивание.

Утверждение. Для неадаптивной модели необходимо и достаточно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ взвешивания.

1.27 Сложность булевой функции. Сложность функции CONN, определяющей связность неориентированного графа на n вершинах.

Для начала определим, что такое сложность протокола для вычисления булевой функции: нам дана $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, причём сам набор $x_1, \dots, x_n$ не дан. Мы можем задавать вопросы вида: верно ли, что $x_i = 0$. Однако есть функции, для которых можно задать меньше вопросов, чтобы вычислить её значение. Тогда сложность протокола - минимальное число вопросов указанного вида, которое нужно задать, чтобы вычислить $f(x_1, \dots, x_n)$.

Решим такую задачу: нужно проверить связность графа. Введём булеву функцию $CONN : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ от $\binom{n}{2}$ переменных, где x_{ij} - есть ребро ли ребро (1), или нет (0). То есть функция $CONN$ принимает граф (множество его рёбер) и выдаёт 1, если он связен, 0 - в противоположном случае.

Утверждение: Сложность функции $CONN$ в модели булевых функций $= \binom{n}{2}$

1.28 Булевы схемы, определение. Задание схемы в виде ациклического ориентированного графа. Схемы-графы для функции XOR и функции голосования. Размер схемы.

Булевы схемы

Вначале введем понятие булевых функций (отображений).

Булевы функции - это такие функции f, что они определены на множестве $\{0,1\}^n$ и принимают значения в множестве $\{0,1\}^k$. То есть из n переменных мы получаем k-элементный вектор из 0 или 1.

Булева схема - последовательность булевых функций $g_1, g_2, ..., g_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, где:

$$g_i = \begin{bmatrix} h_j \cup h_k \\ h_j \cap h_k \\ \neg h_j \end{bmatrix}$$

В свою очередь, $h_j = \begin{bmatrix} x_r,\ r = \{1, ..., n\} \\ g_m,\ m < i \end{bmatrix}$

Случай $h_j = g_m$, $m < i$ означает, что мы можем пользоваться тем, что мы сконструировали ранее.

Задание схемы в виде ациклического ориентированного графа

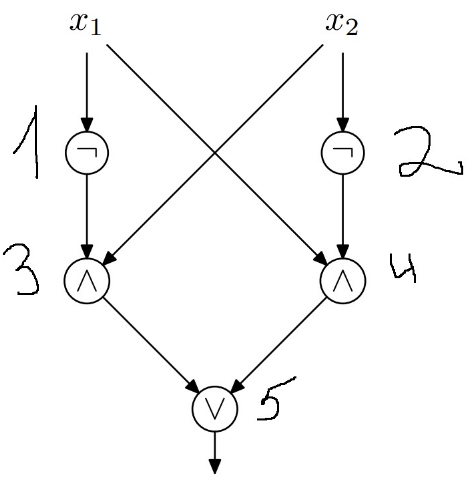
Для начала покажем, как вычисляется XOR. Проделаем следующие операции: $\neg x_1, \neg x_2, \neg x_1 \wedge x_2, \neg x_2 \wedge x_1, (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_1)$.

Для того, чтобы задать схему для XOR в виде графа на каждой итерации будем соединять стрелками две функции g_i и g_j через вершину, в которой стоит операция, применяемая к g_i и g_j.

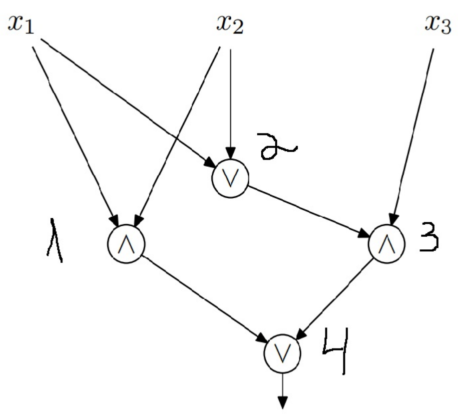
Причем стоит отметить, что такой граф всегда будет ациклическим в силу топологической сортировки (мы просто можем пронумеровать вершины).

Схемы-графы для функции XOR и функции голосования

Иногда бывает полезн визуализировать булевы схемы в виде ориентированного графа. Приведем такое представление для функции XOR:



Приведем такую же визуализацию для функции MAJ_3:



Размер схемы

Размер схемы - количество функций g_i, требуемых для вычисления функции f (см. определение булевой схемы).

1.29 Верхняя оценка размера схемы для произвольной функции. Существование функций с экспоненциальной схемной сложностью

Верхняя оценка размера схемы для произвольной функции

Пусть имеется функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Тогда такая функция может быть вычислена схемой размера $O(n \cdot 2^n)$.

Существование функций с экспоненциальной схемной сложностью

Для всякого $n > 10$ существует функция $f : 0, 1^n \to 0, 1$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше $\frac{2^n}{10n}$.

1.30 Возведение булевой матрицы в степень, связь с числом путей в графе.

Мы вводим, так называемую модифицированную матрицу смежности:

Мы берём граф G и рассматриваем матрицу $A(G)$ - это матрица n на n, состоит из элементов

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром и } i \neq j \\ 0, \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром и } i \neq j \\ 1, \text{если } i = j \end{cases}$$

У матрицы смежности по диагонали обычно стоят нули, но мы поставим единицы, потому что единицы будут соответствовать петлям. И мы понимаем, чтобы проверить, связен ли граф, надо просто понять, есть ли путь просто вершины u в v какой-то длины и длину эту можно ограничить числом вершин, то есть длина должна быть не больше, чем $n-1$. Но за счёт того, что у нас есть петли мы сможем найти путь длины ровно $n-1$. И вот эта информация как раз и хранится в степенях матрицы $A(G)$

Утверждение: Матрица A^k на позиции a_{ij} содержит количество путей длины k из v_i в v_j.

1.31 Размер и глубина булевых схем. Схемная сложность булевой функции. Верхняя и нижняя оценки для схемной сложности функции XOR. Возможные варианты для размера и глубины функции CONN, определяющей связность неориентированного графа на n вершинах.

Булева схема - последовательность булевых функций $g_1, g_2, ..., g_s : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, где:

$$g_i = \left[\begin{array}{c} h_j \cup h_k \\ h_j \cap h_k \\ \neg h_j \end{array}\right.$$

В свою очередь, $h_j = \left[\begin{array}{c} x_r,\ r = \{1,...,n\} \\ g_m,\ m < i \end{array}\right.$

Случай $h_j = g_m$, $m < i$ означает, что мы можем пользоваться тем, что мы сконструировали ранее.

Определение:Размер схемы - количество функций g_i.

Определение: Схемная сложность функции - минимальное количество элементов в схеме, вычисляющей данную функцию.

Верхняя оценка схемной сложности XOR_n Верхняя оценка на сложность схемы XOR_n - это $5(n-1)$

Нижняя оценка Схемная сложность $XOR_n \geqslant 2n - 1$

Возможные варианты для размера и глубины функции CONN, определяющей связность неориентированного графа на n вершинах. $O(n^3 log_2(n))$ - размер, $O(log_2^2(n))$ - глубина или $O(n^3)$ - размер, но глубина $O(nlog_2(n))$.

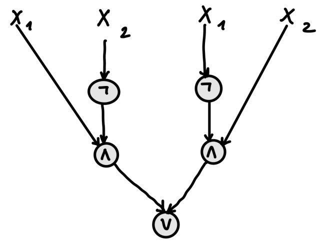
1.32 Булева формула как частный случай булевой схемы. Преобразование булевых схем в булевы формулы с оценкой на размер и глубину.

- x_i - это формула
- Φ - формула, то и $\neg\Phi$ тоже
- Φ_1, Φ_2 - формулы, то и $\Phi_1 \wedge \Phi_2$ и $\Phi_1 \vee \Phi_2$ тоже формулы

Ну и теперь за конечное число шагов можно получить любую формулу.

Формула для $XOR_2 = \neg x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_2 \wedge x_2$

Формулу тоже можно рисовать как граф, тогда получим, что



Чем этот граф отличается от булевой схемы?

Ну на самом деле исходящие степени всех вершин равны 1, ведь в булевой схеме это может быть не так, даже на примере XOR_2 (чуть выше была картинка).

Поэтому формула - это частный случай булевой схемы, она тоже имеет глубину и размер. Между ними имеется связь и оказывается, что любую схему можно переделать в формулу.

Утверждение: Для любой схемы C от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ размера s и глубины d существует эквивалентная ей формула размера не больше, чем $2^s - 1$ и глубины не больше, чем d.

Следствие: Схема глубины d допускает эквивалентную реализацию тоже глубины d и размера не больше, чем 2^d.

2 Доказательства

2.1 Теорема Рамсея. Верхняя оценка чисел Рамсея.

(Спасибо Аскару и команде за прошлый тех, скопировали первые 3 теоремы оттуда)

Кликой называется множество вершин графа, каждая пара которых соединена ребром.

Теорема Рамсея. Для любых k, n найдётся такое число N_0, что в любом графе на $N \geqslant N_0$ вершинах есть или клика размера k, или независимое множество размера n.

Ясно, что если утверждение теоремы справедливо для графов на N вершинах, то оно справедливо и для графов с $N' > N$ вершинами. Обозначим через $R(k,n)$ число Рамсея — минимальное количество вершин, для которого справедлива теорема.

Доказательство:

Будем доказывать индукцией по s, что для любой пары чисел k, n такой, что k + n = s справедливо утверждение теоремы.

База индукции $s = 2$ очевидна: $2 = 1 + 1$ — это единственный способ разложить число 2 в сумму целых положительных слагаемых, а одна вершина является одновременно и кликой, и независимым множеством.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение выполнено для всех пар (k, n) таких, что $k + n = s$.

Докажем его для пары (k, n) такой, что $k + n = s + 1$. По индуктивному предположению утверждение теоремы выполнено для пар $(k - 1, n)$ и $(k, n - 1)$.

Рассмотрим граф на $N_0 = R(k - 1, n) + R(k, n - 1)$ вершине и возьмём какую-то вершину v этого графа.

Вершин в графе за исключением вершины v ровно $N_0 - 1$ штук. Среди них x соседей и y несоседей.

Докажем, что выполняется хотя бы одно из неравенств

$$x \geqslant R(k - 1, n)$$
$$y \geqslant R(k, n - 1)$$

В противном случае выполняются два неравенства

$$x < R(k-1, n)$$
$$y < R(k, n-1)$$

из которых следует $x + y \leqslant R(k-1, n) - 1 + R(k, n-1) - 1 = R(k-1, n) + R(k, n-1) - 2$.

Получаем противоречие

$$N_0 - 1 = x + y \leqslant R(k-1, n) - 1 + R(k, n-1) - 1 = N_0 - 2$$

Поэтому у вершины v есть $R(k-1, n)$ соседей или есть $R(k, n-1)$ несоседей.

Оба случая рассматриваются аналогично.

Первый случай. В индуцированном соседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера $k-1$ или независимое множество размера n. В первом варианте добавление вершины v даёт клику в исходном графе размера k, во втором варианте в исходном графе есть независимое множество размера n.

Второй случай. В индуцированном несоседями вершины v подграфе по предположению индукции найдётся клика размера k или независимое множество размера $n-1$. В первом варианте в исходной графе есть клика размера k, а во втором добавление вершины v даёт независимое множество размера n в исходном графе.

Итак, мы доказали утверждение теоремы и для произвольной пары (k, n), для которой $k + n = s + 1$. Индуктивный переход доказан, и теорема следует из принципа математической индукции.

Оценка сверху. Докажем по индукции $R(k, n) \leqslant C_{n+k-2}^{k-1} = C_{n+k-2}^{n-1}$. Будем опять делать индукцию по $s = n + k$. База очевидна.

Переход, имеем: $R(k-1, n) \leqslant C_{n+k-3}^{k-2}$, $R(k, n-1) \leqslant C_{n+k-3}^{k-1}$, тогда пользуясь $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ получаем, что $R(k, n) \leqslant C_{n+k-3}^{k-2} + C_{n+k-3}^{k-1} = C_{n+k-2}^{k-1}$

2.2 Теорема Холла

Теорема Холла. Если для каждого множества X вершин двудольного графа $G = (L, R, E)$ множество соседей $G(X) \subseteq R$ содержит не меньше вершин, чем X, то в графе G есть паросочетания размера $|L|$

Доказательство:

Полная индукция по количеству элементов в левой доле L.

База индукции. Если в L всего одна вершина x, то у неё есть хотя бы один сосед y в правой доле R по условию теоремы. Получаем паросочетание с ребром $\{x, y\}$.

Шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для всех двудольных графов, в которых левая доля содержит меньше n вершин. Рассмотрим граф $G = (L, R, E)$, для которого выполняются условия теоремы и в L ровно n вершин. Разберём два случая.

Первый случай: в левой доле есть такое множество X, для которого $|X| = |G(X)|$. Выделим из графа два подграфа. Первый, G_1, имеет доли X, $G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Второй, G_2, имеет доли $L \setminus X$, $R \setminus G(X)$ и все рёбра между этими вершинами. Для обоих графов выполняются условия теоремы Холла. Для G_1 это очевидно по построению. Докажем выполнение условий теоремы для графа G_2 от противного. Пусть для подмножества $Z \subseteq L \setminus X$ соседей в $R \setminus G(X)$ меньше, чем вершин в Z. Тогда в графе G соседей у множества $X \cup Z$ меньше $|Z \cup X|$ (ведь множества X и Z не пересекаются, а соседей у X ровно $|X|$).

Итак, для G_1, G_2 выполняются условия теоремы, а количество вершин в них меньше n. Поэтому по предположению индукции в каждом из них есть паросочетание размера левой доли. Объединяя эти два паросочетания, получаем искомое паросочетание в G размера $|L|$.

Второй случай: для каждого $X \subseteq L$ выполняется неравенство $|X| < |G(X)|$.

Выберем вершину $a \in L$ и её соседа $b \in R$ (в этом случае соседей у каждой вершины больше одного, нас устроит любой).

Если в графе $G' = ((L \setminus a), (R \setminus b, E'))$, полученном из G выбрасыванием вершин a, b и инцидентных им рёбер, есть паросочетание P размера $n-1$, то в графе G есть паросочетание размера n: к рёбрам из P добавим ребро $\{a, b\}$.

Если такого паросочетания нет, условие теоремы Холла для G' нарушается в силу индуктивного предположения. Какое-то «особое» множество $X \subseteq L \setminus \{a\}$ имеет мало соседей в $(R \setminus \{b\} : |X| > |G'(X)|$. Но в графе G у множества X есть разве что ещё один сосед b. Поэтому для этого множества выполняется равенство $|X| = |G(X)|$. Это первый случай, который уже рассмотрен выше.

2.3 Теорема Кёнига

Теорема Кёнига В любом двудольном графе максимальный размер паросочетания равен минимальному размеру вершинного покрытия.

Доказательство:

В одну сторону легко. Если P - паросочетание в двудольном графе $G = (L, R, E)$, то любое вершинное покрытие содержит хотя бы по одному концу каждого ребра паросочетания и поэтому его размер не меньше размера паросочетания. Значит, минимальный размер вершинного покрытия не меньше максимального размера паросочетания. (Факт верен для любых графов)

Теперь в другую сторону (тут уже верно только для двудольных): рассмотрим минимальное по размеру вершинное покрытие $X \sqcup Y, X \subseteq L, Y \subseteq R$, в графе G. Проверим выполнение условия теоремы Холла для ограничения $G_{X,G(X)\setminus Y}$ графа на множество вершин X в левой доле и множество вершины $G(X) \setminus Y$ в правой доле (оставляем в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ только рёбра между указанными вершинами). Пусть $S \subseteq X$.

Множество $(X \setminus S) \sqcup Y \sqcup G_{X,G(X)\setminus Y}(S)$ является вершинным покрытием в G: все рёбра, покрытые вершинами из S, покрыты также либо вершинами из Y, либо соседями вершин из S в правой доле. Поскольку мы выбрали минимальное по размеру вершинное покрытие, $|G_{X,G(X)\setminus Y}(S)| \geqslant |S|$, что и означает выполнение условия теоремы Холла.

Аналогично проверяется выполнение условия теоремы и для графа $G_{L\setminus X,Y}$, полученного ограничением G на вершины $L \setminus X$ в левой доле и Y в правой доле (так как $X \sqcup Y$ - вершинное покрытие исходного графа, $L \setminus X$ входит в множество соседей Y в левой доле).

По теореме Холла в $G_{X,G(X)\setminus Y}$ есть паросочетание размера $|X|$, а в $G_{L\setminus X,Y}$ есть паросочетание размера $|Y|$. Рёбра этих паросочетаний не совпадают по построению. Значит, объединение этих паросочетаний даёт паросочетание размера $|X| + |Y|$ в графе G. Таким образом, размер максимального паросочетания в G не меньше размера минимального вершинного покрытия.

2.4 Вероятностное пространство и распределение. Свойства вероятности. Оценка объединения. Формула включений-исключений для вероятностей. Задача о беспорядках

Свойства вероятности

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ (из определения)
2. Пусть $A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B = \emptyset$, тогда $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$ (суммируем все вероятности исходов из A и вероятности исходов из B, при этом в объединении лежат непересекающиеся исходы, поэтому левая часть равна правой).
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ($A \sqcup \bar{A} = \Omega$, затем от обоих частей берем вероятность и получаем требуемое)
4. Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$ (суммируем вероятность исходов из A и суммируем вероятность исходов из B, но в B исходов больше, отсюда получаем требуемое).

Оценка объединения

Пусть $A_1, A_2,..., A_s \subseteq \Omega$. Тогда $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_s) \leqslant P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_s)$.

Доказательство

По определению $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{x \in A_1 \cup, ..., \cup A_s} P(x) = [\sum\limits_{x \in A_1} P(x_1)] + [\sum\limits_{x \in A_2 \setminus A_1} P(x_2)] + [\sum\limits_{x \in A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)} P(x_3)] + ... + [\sum\limits_{x \in A_s \setminus (A_1 \cup ... \cup A_{s-1})} P(x_s)] \leqslant P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_s)$.

Ч.Т.Д.

Формула включений-исключений для вероятностей

Доказательство

Для начала введем характеристическую функцию $\chi_A : \Omega \to \{0,1\}$.Тогда для множества A такого, что $A \subseteq \Omega$, определим:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Отметим следующие свойства этой функции:

$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$

Положим для начала $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Применим сначала те же рассуждения, которые мы применяли при доказательстве этой формулы ранее для мощностей множеств.

$$\chi_{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n} = \chi_{\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}}} = 1 - \chi_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}} =$$

$$= 1 - \chi_{\overline{A_1}}\chi_{\overline{A_2}}...\chi_{\overline{A_n}} = 1 - (1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2})...(1 - \chi_{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} (-1)^{k+1} \chi_{A_{i_1}} \chi_{A_{i_2}} ... \chi_{A_{i_k}}$$

Далее, перейдя к вероятности, имеем: $P(A) = \sum\limits_{x \in A} P(x) = \sum\limits_{x \in \Omega} P(x) \cdot \chi_A(x)$. Теперь, подставляя вместо A объединение множеств $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ и вместо $\chi_A(x)$ выражение $1 - (1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2})...(1 - \chi_{A_n})$, раскроем скобки и получим следующую красоту:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k})$$

Задача о беспорядках

Посчитать вероятность того, что случайно выбранная перестановка окажется беспорядком.

1. Будем считать её через вероятность дополнения. $P(A_n) = 1 - P(\overline{A_n})$

   То есть $P(\overline{A_n})$ - это вероятность того, что случайно выбранная перестановка оставила на месте **хотя бы** один элемент от 1 до n

   Вероятность "**хотя бы**"очень удобно считать по формуле включений и исключений, введём пару обозначений и так и сделаем.

   Обозначим за $B_i \subseteq \Omega_n$ перестановку, которая оставляет только элемент i на своём месте.

2. $\overline{A_n} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$. Тогда

$$P(\overline{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n}^{n} P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k})$$

   Чему равна вероятность $P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_k})$? То есть это вероятность того, что на $i_1, i_2, \ldots, i_k$ местах ничего не переставилось, а на остальных или переставилось или нет, мы не знаем. Легко понять, что это $\frac{(n-k)!}{n!}$

3. Как теперь зная это можно посчитать искомую вероятность дополнения? Очень просто! Надо понять, что второе суммирование производиться по всем неподвижным точкам, коих k штук. То есть тогда можно записать так:

$$P(\overline{A_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(n-k)!}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}$$

   Окончательно получаем, что $P(A_n) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}$

   Вам этот ряд ничего не напоминает? Конечно же это похоже на e^{-1}(А если не похоже, то напомню факт $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$). Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = \frac{1}{e}$

2.5 Вероятностный метод. Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

Нижняя оценка на диагональные числа Рамсея

Докажем следующую теорему: $R(k,k) > 2^{\frac{k-1}{2}}$.

Доказательство

Рассмотрим $n \leqslant 2^{\frac{k-1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$. Построим граф на n вершинах так, чтобы не было клик и независимых множеств размера k. Возьмем случайный граф. Что это значит? Это значит, что мы рассматриваем следующее вероятностное пространство $\Omega = \{$все графы на множестве вершин 1, 2, ..., n$\}$. Тогда $|\Omega| = 2^{C_n^2}$ (всего ребер в графе на n вершинах C_n^2, а различных подмножеств этих ребер как раз $2^{C_n^2}$). Рассмотрим вероятность события A - "в графе есть клика размера k или независимое множество размера k".

Рассмотрим произвольное подмножество w множества вершин: $w \subset \{1, 2, ..., n\}$, $|w| = k$. Тогда рассмотрим следующее событие A_w - "в графе именно данное фиксированное w является кликой или независимым множеством". Тогда $P(A) = P(\bigcup\limits_{w \subset \{1,\ldots,n\}} A_w)$, причем для таких w выполняется, что $|w| = k$. Воспользуемся оценкой объединения (см. пункт 1.3) и получим: $P(\bigcup\limits_{w \subset \{1,\ldots,n\}} A_w) \leqslant \sum\limits_{w \subset \{1,\ldots,n\}} P(A_w)$, причем $P(A_w) = 2 \cdot \frac{2^{C_n^2 - C_k^2}}{2^{C_n^2}} = 2^{1-C_k^2}$ ($C_n^2 - C_k^2$ - количество ребер в исходном графе без ребер в w; умножаем на 2, потому что w может быть как кликой, так и независимым множеством). Тогда $\sum\limits_{w \subset \{1,\ldots,n\}} P(A_w) = C_n^k \cdot 2^{1-C_k^2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot 2^{1-C_k^2} \leqslant \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-C_k^2} \leqslant \frac{2^{\frac{k \cdot (k-1)}{2}} \cdot 2^{1-C_k^2}}{k!} = \frac{2}{k!} \leqslant \frac{1}{3}$. Эта оценка показывает, что вероятность того, что в графе нет ни клики размера k, ни независимого множества размера k хотя бы $\frac{2}{3}$. Но это как раз означает, что существует граф на n вершинах, в котором нет ни клики размера k, ни независимого множества размера k, поэтому $R(k,k) > 2^{\frac{k-1}{2}}$, что и требовалось доказать. (скорее всего, Вы офигели с этого доказательства, поэтому попробуйте это перечитать под запись от лектора).

Ч.Т.Д.

2.6 Условные вероятности. Теорема умножения, формулы Байеса и полной вероятности. Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример).

Теорема умножения

Пусть имеется $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq C$ - события положительной вероятности. Тогда $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n) \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_{n-2}|A_{n-1} \cap A_n) \cdot \ldots \cdot P(A_1|\bigcap\limits_{i=2}^{n} A_i)$

Более строго это утверждение можно доказать по индукции. Думаю, что такое позорно распиывать.

Формула Байеса

Пусть $A,B \subseteq C$ - события положительной вероятности, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство этого факта делается через выписывание формул для $P(A|B)$ и $P(B|A)$ и выражении одно через другое.

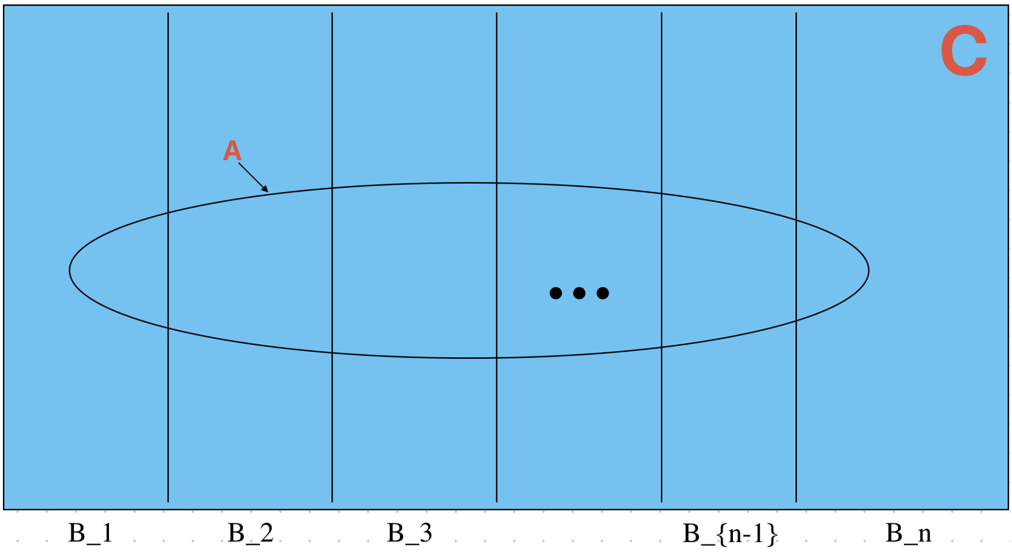
Формула полной вероятности

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n \subseteq C$ - это события с положительной вероятностью и $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \ldots \sqcup B_n = C (B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j)$

Тогда вероятность произвольного события $A \subseteq C$ равна $\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

Доказательство:

1. Сделаем наглядный рисунок, демонстрирующий разбиение вероятностного пространства C на не пересекающиеся множества.



2. Тогда $A = (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \sqcup \ldots \sqcup (A \cap B_n)$, откуда $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

   Ч.Т.Д.

Независимость событий в совокупности, отличие от попарной независимости событий (приведите явный пример)

Пусть у нас есть тетраэдр и у него три из сторон покрашены в разные цвета - синий, жёлтый и зелёный, а четвёртая сторона покрашена в три цвета сразу. Мы подкидываем этот тетраэдр и смотрим на цвета выпашей стороны(нижней грани). (Равновероятная модель)

Тогда рассмотрим события:

1. A - На грани есть синий цвет.
2. B - На грани есть жёлтый цвет.
3. C - На грани есть зелёный цвет.

Тогда по формулам умножения получаем, что

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

Причём $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Тогда заметно, что $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ну и тд.

Отсюда, события A,B,C попарно независимы.

Однако, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Поэтому события A,B,C не независимы в совокупности.

2.7 Примеры использования условной вероятности: тест на выявление болезни и эквивалентность двух подходов задания равномерного распределения на ребрах регулярного графа.

Пример про болезни.

Предположим есть болезнь и мы хотим знать болен ли человек или нет. Существует 2 теста: дешёвый(менее точный) и дорогой(более точный). Мы можем отправить человека сначала на дешёвое тестирование. Если тест показал положительный результат, то отправляем его на дорогое тестирование, которое почти гарантированно может дать точный результат, иначе отправляем его сразу домой. **Хотим понять с какой вероятностью мы отпустим больного человека домой.**

Решение:

1. Пусть B - событие 'человек болен', A - событие 'дешёвый тест показал 'не болен' ', тогда нужно посчитать $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$. Давайте посчитаем искомую вероятность через две другие: $P(\overline{A}|B)$ и $P(B|\overline{A})$.

2. Заметим, что $P(B|\overline{A})$ мы знаем, потому что это в точности то, что нам выдаёт дорогой тест, но как же посчитать $P(\overline{A}|B)$? По формуле Байеса!

   Окей. Осталось понять, как считать искомую вероятность, зная $P(\overline{A}|B)$.

3. Заметим, что $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)}{P(B)} = 1$. Это легко увидеть, так как сумма вероятностей несовместных событий есть вероятность объединения этих событий. Получаем в числителе $P(B)$.

4. Ну и всё, зная $P(A|B)$, находим искомую вероятность по той же формуле Байеса.

Пример о распределении на рёбрах графа.

Предположим у нас есть граф $G = (V,E), |V| = n$,
$\forall v \in V,\ deg(v) = d($ G - регулярный граф, потому что степень каждой вершины константа.)

Мы хотим случайно выбрать ребро этого графа. Есть несколько способов это сделать:

1. Равновероятно выбрать из множества рёбер.

2. Сначала равновероятно выбрать вершину этого графа, а потом равновероятно выбрать ребро, смежное этой вершине.

Формально это разные конструкции, но с точки зрения распределения на рёбрах это эквивалентные построения, давайте покажем это.

В случае 1:

$P(e) = \frac{1}{\frac{nd}{2}} = \frac{2}{nd}$ (по лемме о рукопожатиях, так как сумма степеней вершин есть удвоенное число рёбер)

В случае 2:

Пусть B_i - событие 'была выбрана i-ая вершина' , тогда $P(e) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(e|B_i) \cdot P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(e|B_i) \cdot \frac{1}{n}$

Тут надо подумать, когда $P(e|B_i)$ не ноль. Ну она не ноль только при двух конкретных i. Поэтому $P(e) = \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{nd}$

2.8 Мыцельскиан графа. Пример Зыкова–Мыцельского графа без треугольников со сколь угодно большим хроматическим числом.

Теорема Зыкова-Мыцельского

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует граф G: $\omega(G) = 2, \chi(G) = k$.

Доказательство:

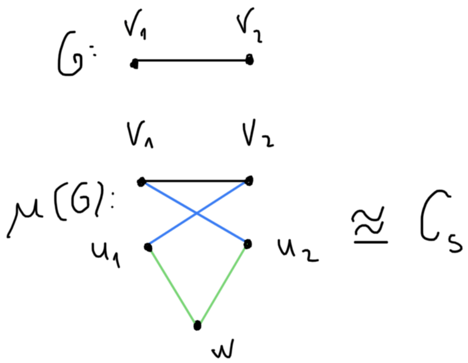
Мыцельскиан

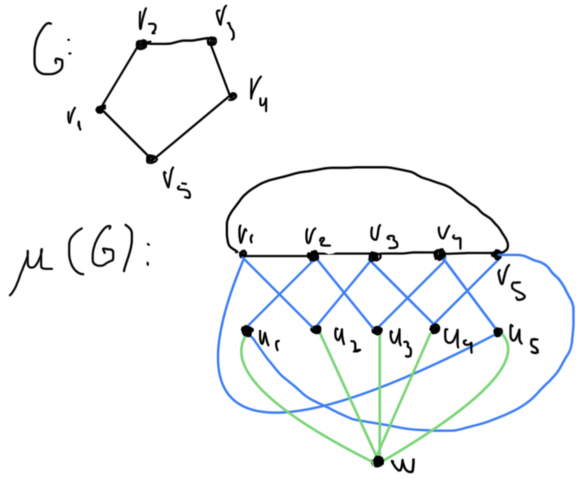
Граф $G \ \to \mu(G)$, где $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$

Вершины в $\mu(G)$: $v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_n, w$ - всего $2n + 1$ штук.

Рёбра в $\mu(G)$: если $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, то $\{v_i, v_j\}, \{u_i, v_j\}, \{v_i, u_j\} \in E(\mu(G))$. А также $\{w, u_i\} \in E(\mu(G))\ \forall i$.

Примеры:





Утверждается, что рассматривая последовательность графов $G_1 = K_2$, $G_2 = \mu(G_1)$, $G_3 = \mu(G_2) = \mu(\mu(G_1)$, …, $G_s = \mu(G_{s-1})$, …, получим, что G_s не содержит треугольников и $\chi(G_s) = s+1$.

1. Докажем, что G_s не содержит треугольников:

   Пусть s - минимальное такое число ($\geqslant 3$), что в $G_s = \mu(G_{s-1})$ есть треугольник. По построению могут образовывать лишь вершины v_i, v_j, u_l (именно такой набор, потому что две вершины u не могут быть в треугольнике, так как не соединены ребром; w также не может - иначе две вершины u должны быть соединены ребром) причём $l \neq i, j$ по построению.

   Раз в $G_s = \mu(G_{s-1})$ есть ребро $\{u_l, v_i\}$, то в исходном графе G_{s-1} было ребро $\{v_i, v_l\}$. Аналогично, если в $G_s = \mu(G_{s-1})$ есть ребро $\{u_l, v_j\}$, то в исходном графе G_{s-1} было ребро $\{v_j, v_l\}$. Но в G_{s-1} есть и ребро $\{v_i, v_j\}$, значит рёбра $\{v_i, v_l\}$, $\{v_j, v_l\}$, $\{v_i, v_j\}$ образую треугольник в графе G_{s-1}. Противоречие, потому что s оказалось не минимальным таким числом.

2. Докажем, что $\chi(G_s) = s+1$ индукцией по s:

   База проверена выше.

   Переход $s-1 \to s$.

   Известно, что $\chi(G_{s-1}) = s$, нужно доказать, что $\chi(G_s) = \chi(\mu(G_{s-1})) = s+1$

   Можно считать, что $s \geqslant 3$. Тогда покрасим u_i в $(s+1)$-й цвет, w в 1-й цвет, а v_i уже покрашены в s первых цветов. Покажем что меньшим числом мы не обойдёмся.

   Нам известно, что $\chi(\mu(G_{s-1})) \geqslant s$, т.к. G_{s-1} содержится в $\chi(\mu(G_{s-1}))$ как подграф. Покажем, что ровно s цветами мы не обойдёмся.

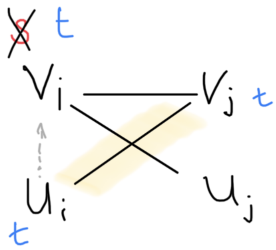
   От противного: пусть $\chi(\mu(G_{s-1})) = s$. Будем считать, что w покрашена в s-ый цвет. Тогда среди u_i нет цвета s (потому что w соединена со всеми u_i ребром). Но по предположению индукции цвет s должен найтись среди вершин v_i (их нельзя было покрасить меньшим чем s кол-вом цветов). Тогда есть некоторое количество вершин v_j цвета s. Перекрасим их в цвета по такому правилу: v_j красится в цвет, который имеет вершина u_j (для наглядности можно смотреть на пример 2 выше). Утверждается, что у нас получилась правильная раскраска вершин подграфа $G_{s-1}(v_1, \ldots, v_n)$ в $s-1$ цвет.

   Замечание. Несмотря на популярное заблуждение, раскраска в k цветов всё ещё будет называться таковой, даже если мы не использовали все цвета. То есть раскраской в 4 цвета может называться и двухцветная раскрасака (два цвета могут просто не использоваться).

   Продолжим. Докажем, что получилась именно правильная раскраска вершин подграфа $G_{s-1}(v_1, \ldots, v_n)$ в $s-1$ цвет.

   От противного: пусть после этого перекрашивания пусть соединены ребром какие-то одноцветные v_i и v_j (пусть их цвета - t). То есть до перекрашивания ровно одна из них была цвета s (понятно, что не обе, т.к. это была бы неправильная раскраска всего графа). НУО v_i была цвета s, а v_j была покрашена в какой-то цвет t. Мы не знаем, какого цвета в Мыцельскиане была u_j, но точно знаем, что u_i была цвета t, потому что мы в него перекрасили v_i по нашему правилу. Противоречие, т.к. в Мыцельскиане есть одноцветное ребро $\{u_i, v_j\}$. Значит раскраска все-таки правильная и подграф $G_{s-1}(v_1, \ldots, v_n)$ красится в $s-1$ цвет, и наступает противоречие уже с индукционным предположением, т.к. $\chi(G_{s-1}) = s$. Значит s цветами обойтись не получится.

   То есть $\chi(G_s) > s \Rightarrow \chi(G_s) \geqslant s+1$, а как раскрасить в $s+1$ цвет мы показали выше. Переход доказан, значит $\chi(\mu(G_{s-1})) = s+1$ ■



Чем интересен граф Зыкова-Мыцельского? Смотрите: если мы знаем, что у графа бесконечно большое кликовое число, то можем сказать, что и хроматическое число графа бесконечно большое (оно как минимум равно кликовому). Однако обратное неверно. Мы построили граф, в котором при бесконечно большом хроматическом числе кликовое число равно 2.

2.9 Теорема Уитни о свойствах хроматического многочлена.

Утверждение. $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G\cdot uv}(k)$, если $\{u, v\} \in E(G)$.

Доказательство:

Удалим $\{u, v\}$. Теперь посчитаем кол-во способ раскрасить $G - uv$:

1. u и v раскрашены в разные цвета. Тогда нам ничего не мешает вернуть ребро $\{u, v\}$ и раскраска останется правильной. Тогда очевидна биекция: таких раскрасок ровно столько же, сколько у графа G.
2. u и v раскрашены в один цвет. Тогда рассмотрим граф со стянутыми вершинами u и v в одну. Тогда любая его раскраска соотвествует правильной раскраске исходного графа, где u и v раскрашены в один цвет (точнее почти правильной, "неправильным" будет только ребро $\{u, v\}$). И наоборот. Вспоминаем, что ребра $\{u, v\}$ уже нет, тогда устанавливаем биекцию: таких раскрасок ровно столько же, сколько у графа $G \cdot uv$.

Итого: $\chi_{G-uv}(k) = \chi_G(k) + \chi_{G\cdot uv}(k)$ ■

Теорема Уитни о хроматическом многочлене и его свойствах

$\chi_G(k)$ - многочлен вида $k^n - a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-r}a_{n-r}k^r$, где $a_i \in \mathbb{N}$, $a_1 = |E(G)|$, r - количество компонент связности.

Доказательство:

Полная индукция по числу рёбер в графе.

База очевидна: если 0 рёбер, то граф - независимое множество, $\chi_G(k) = k^n$ (см. пример выше).

Переход.

$\chi_G(k) = \chi_{G-uv}(k) - \chi_{G\cdot uv}(k)$, если $\{u, v\} \in E(G)$ по доказанному выше утверждению. Кол-во рёбер в графах $G - uv$ и $G \cdot uv$ меньше чем в G, поэтому по индукционному предположению для их хроматических многочленов верны все свойства.

Будем считать, что в $|E(G)| = m$

В графе $G-uv$ при удалении одного ребра количество компонент связности может или не измениться, или увеличиться на 1.

В графе $G \cdot uv$ при склеивании двух вершин количество компонент связности не меняется.

$\chi_{G-uv}(k)$ выглядит как $k^n - (m-1)k^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-r-1}b_{n-r-1}k^{r+1} + (-1)^{n-r}b_{n-r}k^r$. При этом имеем в виду, что b_{n-r}-й коэффициент может быть равен 0 в случае увеличения количества компонент на 1. Будем считать 0 как положительным, так и отрицательным.
$\chi_{G\cdot uv}(k)$ выглядит как $k^{n-1} - c_1k^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-r-1}c_{n-r-1}k^r$

При вычитании многочлена с натуральными коэф-ми из многочлена с натуральными коэф-ми очевидно, что получится также многочлен с натуральными коэф-ми. Старший коэф-т при k^n действительно будет 1. Коэф-т при k^{n-1} будет равен $m-1+1 = m$. Теперь проверим, что будет знакочередование: в многочлене $\chi_{G-uv}(k)$ коэф-ты знакочередуются и можно заметить, что в вычитаемом многочлене $\chi_{G\cdot uv}(k)$ при симметричных степенях знаки противоположны. Поэтому при вычитании из отрицательного коэф-та положительного он будет оставаться отрицательным, а при вычитании из положительного коэф-та отрицательного он будет оставаться положительным ■

Как с помощью хроматического многочлена найти хроматическое число? Нужно просто подставлять вместо k натуральные числа. Получим:

$\chi_G(1) = \chi_G(2) = \ldots = \chi_G(\chi(G)-1) = 0$ - то есть до какого-то натурального будет получаться значение 0, а первое натуральное m при котором многочлен равен ненулевому числу $\chi_G(m)$ и будет $\chi(G)$.

2.10 Математическое ожидание случайной величины, линейность матожидания. Задача о днях рождения. Общая формулировка вероятностного метода. Пример применения вероятностного метода для поиска разреза графа величины более половины числа ребер

Математическое ожидание случайной величины

Вывод формулы для матожидания

Пусть имеем $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_k\}$ - вероятностное пространство с вероятностным распределением $p_1,...,p_k$ соответственно, причем понятно, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Далее, назовем *случайной величиной* функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и на $\omega_1,\omega_2,...,\omega_k$ f принимает значения $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Предположим, что выбор случайного элемента из Ω повторяется n раз. Если n достаточно большое, то случайная величина f примет значение a_1 примерно $p_1 \cdot n$ раз, значение a_2 — примерно $p_2 \cdot n$ раз, и так далее, значение a_k — примерно $p_k \cdot n$ раз. Подсчитаем теперь примерное среднее арифметическое значений случайной величины f в этих экспериментах:

$$\frac{a_1p_1n + a_2p_2n + ... + a_kp_kn}{n} = a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_kp_k$$

Такую сумму $\sum\limits_{i=1}^{k} f(\omega_i)p_i$ называют *математическим ожиданием* случайной величины f и обозначают $E[f]$.

математическим ожиданием случайной величины f и обозначают $E[f]$.

Линейность матожидания

Лемма: $E[f+g] = E[f] + E[g]$ (f, g - случайные величины).

Доказательство: $E[f+g] = \sum\limits_{i=1}^{k}(f+g)(\omega_i)p_i = \sum\limits_{i=1}^{k} f(\omega_i)p_i + \sum\limits_{i=1}^{k} g(\omega_i)p_i = E[f] + E[g]$.

Ч.Т.Д.

Задача о днях рождения

Дано: $n = 28$ - количество людей, случайная величина f - число пар людей, у которых день рождения в один и тот же день.

Утверждается: $E[f] > 1$.

Доказательство:

Для начала поймем, что $\Omega = \{1,2,...,365\}^n$ (распределение равновероятно). Теперь делаем финт ушами и вводим следующую функцию:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ый человек и } j\text{-ый человек родились в один день} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Тогда $f = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 28} g_{ij}$. Тогда $E[f] = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 28} E[g_{ij}]$. Заметим, что $E[g_{ij}] = 1 \cdot P$, где P - вероятность того, что два человека с номерами i и j, родились в один день. Она равна $\frac{365^{n-1}}{365^n} = \frac{1}{365}$. И, наконец, $E[f] = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{365}$ (для тех, кто не понял, откуда взялся множитель с n, то кол-во пар равно $\frac{n(n-1)}{2}$). Так как $n = 28$, то $E[f] = \frac{378}{365} > 1$.

Ч.Т.Д.

Общая формулировка вероятностного метода

Лемма: Пусть $E[f] = c$, при этом имеем Ω и $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Тогда:

- $\exists\ \omega_{min} \in \Omega : f(\omega_{min}) \leqslant c$
- $\exists\ \omega_{max} \in \Omega : f(\omega_{max}) \geqslant c$

Доказательство:

По определению $E[f] = p_1f(\omega_1) + p_2f(\omega_2) + ... + p_kf(\omega_k)$.

Пойдем от противного. Пусть $f(\omega_i) \geqslant c\ \forall i$, то $E[f] > c(p_1 + p_2 + ... + p_k) = c$. Получили противоречие с условием леммы, следовательно, $\exists\ \omega_{min} \in \Omega : f(\omega_{min}) \leqslant c$. Для второго случая доказательство аналогично.

Ч.Т.Д.

Пример применения вероятностного метода для поиска разреза графа величины более половины числа ребер

Теорема: Пусть $|V| = 2n$ - чётное число вершин графа(аналогично можно доказать и для нечётного числа вершин). Тогда в G существует разрез не меньше, чем $\frac{|E|n}{2n-1}$.

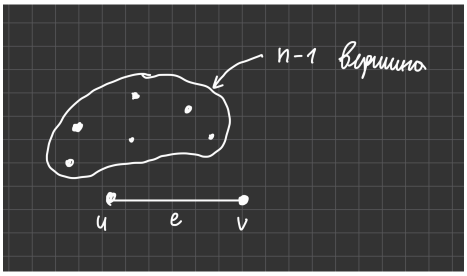
Доказательство:

1. Пусть $\Omega = \{S \subseteq V||S| = n\}$ - наше вероятностное пространство и все события равновероятны, тогда понятно, что $|\Omega| = \binom{2n}{n}$.

   Пусть f - случайная величина и $f : \Omega \to \mathbb{R}$ и $f(S) = |E(S, V/S)|$. То есть она разрезу ставит в соответствие его величину. Тогда давайте воспользуемся вероятностным методом, как мы доказывали предыдущую теорему, и просто посчитаем $E[f]$.

2. Давайте зададим индикаторную функцию $g_e = \begin{cases} 1, \text{ если ребро в разрезе, то есть } e \in E(S, V/S) \\ 0, \text{ если ребро не лежит в разрезе} \end{cases}$

   Тогда $f = \sum\limits_{e \in E} g_e$, а значит, что $E[f] = \sum\limits_{e \in E} P(g_e = 1)$. Посчитаем, чему равна вероятность того, что ребро входит в разрез графа. Чтобы осознать это давайте сделаем поясняющий рисунок.

   Вероятность того, что ребро e попадёт в разрез, означает, что мы сможем разделить множество вершин из $2n$ вершин на 2 непересекающихся подмножества вершин по n вершин в каждом, причём вершины соединённые ребром e лежат в разных подмножествах. Давайте посмотрим, сколькими способами мы можем это сделать. Понятно, что я могу посчитать количество способов выбрать одно такое подмножество на n вершинах, тогда второе задаётся однозначно.

   Вот пусть у меня есть вершины u и v и они соеденены ребром e, тогда зафиксировав вершину u мы получим, что количество способов дополнить её до множества размером n, причём, чтобы v не лежало в нём, равно $\binom{2n-2}{n-1}$(если до сих пор не понятно, то прочитайте вдумчиво, что я тут понаписал). Но данное количество способов надо домножить на 2, потому что в самом начале я мог зафиксировать не вершину u, а вершину v. Итого количество подходящих разбиений множества для того, чтобы ребро e попало в разрез равно $2\binom{2n-2}{n-1}$.

   Понятно, что всего разбиений множества из $2n$ вершин на 2 подмножества из n вершин это $\binom{2n}{n}$.

   Итого, $P(g_e = 1) = \frac{2\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{2 \cdot (2n-2)! \cdot n! \cdot n!}{(n-1)! \cdot (n-1)! \cdot (2n)!} = \frac{2 \cdot n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$

3. Значит, $E[f] = \sum\limits_{e \in E} P(g_e = 1) = \dfrac{|E|n}{2n-1}$. Тогда по лемме о вероятностном методе(прочитайте прошлую лекцию, если не понятно, о чём я) получаем, что существует разрез в графе величиной $\frac{|E|n}{2n-1}$

Ч.Т.Д.

Упражнение: Если $V = 2n + 1$, то существует разрез в графе величиной не меньше, чем $\frac{|E|(n+1)}{2n+1}$

2.11 Дисперсия случайной величины. Неравенства Маркова и Чебышёва. Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия независимых случайных величин

Дисперсия случайной величины

Дисперсия случайной величины $f : \Omega \to \mathbb{R}$ - это $D[f] = E([f - E\{f\}]^2)$

Утверждение: $D[f] = E[f^2] - (E[f])^2$

Доказательство:

$D[f] = E([f - E\{f\}]^2) = E(f^2 - 2fE[f] + (E[f])^2) = E[f^2] + E(-2fE[f]) + E\{(E[f])^2\} = E[f^2] - 2E[f]E[f] + (E[f])^2 = E[f^2] - (E[f])^2$

Ч.Т.Д.

Неравенства Маркова

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ - неотрицательная случайная величина и пусть некоторое число $\alpha > 0$. Тогда $P(f \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E[f]}{\alpha}$.

Доказательство:

Жестко идем по определению: $E[f] = p_1 f(\omega_1) + p_2 f(\omega_2) + ... + p_k f(\omega_k)$. Дальше хотим сделать следующее:

$$f(\omega_i) = \begin{cases} 0, \text{ если } f(\omega_i) < \alpha \\ \alpha, \text{ если } f(\omega_i) \geqslant \alpha \end{cases}$$

При такой замене для исходного выражения выполнится следующее неравенство:

$$E[f] = p_1 f(\omega_1) + p_2 f(\omega_2) + ... + p_k f(\omega_k) \geqslant \alpha(p_{i1} + p_{i2} + ... + p_{ij}) = \alpha P(f \geqslant \alpha)$$

Ч.Т.Д.

Неравенство Чебышева

Пусть f - произвольная случайная величина, число $\alpha > 0$. Тогда $P(|f - E[f]| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{D[f]}{\alpha^2}$

Доказательство:

Рассмотрим случайную величину $g = (f - E[f])^2$. По неравенству Маркова:

$$P(g \geqslant \alpha^2) \leqslant \frac{E[g]}{\alpha^2}$$

Так как $P(g \geqslant \alpha^2) = P(|f - E[f]| \geqslant \alpha)$ и $E[g] = D[f]$ (из определения дисперсии), то:

$$P(|f - E[f]| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{D[f]}{\alpha^2}$$

Ч.Т.Д.

Независимые случайные величины

Теорема: Если случайные величины X,Y независимы, то $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

Доказательство:

1. По определению $E[X] = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x), E[Y] = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y = y)$.
2. Тогда $E[X] \cdot E[Y] = (\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)) \cdot (\sum\limits_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y = y)) = \sum\limits_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) = \sum\limits_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP((X = x) \cap (Y = y))$.
   Положим $xy = z$, тогда это равно $\sum\limits_{z \in (XY)(\Omega)} z \cdot P(X \cdot Y = z) = E[X \cdot Y]$

Ч.Т.Д.

Следствие: Если случайные величины X,Y независимы, то $D[X + Y] = D[X] + D[Y]$.

Доказательство:

По определению $D[X] = E[X^2] - (E[X])^2$, тогда $D[X + Y] = E[(X + Y)^2] - (E[X + Y])^2 = E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X])^2 - 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2 = E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X])^2 - 2E[XY] - (E[Y])^2 = E[X^2] + E[Y^2] - (E[X])^2 - (E[Y])^2 = D[X] + D[Y]$

(пользовались тем фактом, что $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$)

Ч.Т.Д.

Упражнение: Если $X_1, X_2, ..., X_n$ - случайные независимые величины, то

- $E[X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n] = E[X_1] \cdot ... \cdot E[X_n]$
- $D[X_1 + X_2 + ... + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ... + D[X_n]$

2.12 Формула Стирлинга (без доказательства). Вероятность выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты, ее асимптотика. Верхняя и нижняя оценки произвольного биномиаль ного коэффициента $\binom{n}{k}$.

Формула Стирлинга(без доказательства): $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Вероятность выпадения ровно половины орлов при бросании честной монеты, ее асимптотика

Вот представим себе, что мы подбрасываем монетку n раз. Посчитаем $P(\text{выпало } \frac{n}{2} \text{ орлов})$, что очевидно равно $\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}$. Вот мы хотим что-то понять про эту вероятность, но для этого нам очень надо уметь оценивать биномиальный коэффициент из числителя.

Давайте выпишем пару очевидных оценок: $\frac{2^n}{n+1} \leqslant \binom{n}{\frac{n}{2}} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Правая оценка верна просто потому что это сумма положитльных чисел и туда входит наш биномиальный коэффициент, поэтому очевидно, а правая оценка получена путём рассмотра строки в треугольнике Паскаля и замечанием того, что наш рассматриваемый биномиальный коэффициент стоит ровно посередине нашей строки Паскаля, поэтому он среди всех в этой строке самый большой. Всего элементов в строке $n+1$, ну и сумма их равна 2^n, поэтому это не что иное, как неравенство о среднем арифметическом и максимумом из всех чисел.

Давайте взглянем теперь на наш биномиальный коэффициент по-другому. $\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{(\frac{n}{2})! \cdot (\frac{n}{2})!}$. Именно поэтому мы хотим оценить факториалы.

Влспользуемся формулой Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Вернёмся обратно к нашей вероятности и попробуем посмотреть, что с ней творится на $+\infty$.

1. Вспомним fun fact с матана. $f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$.

2. Тогда требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(\frac{n}{2})! \cdot (\frac{n}{2})! \cdot 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{2^n \cdot \sqrt{\pi n} \cdot \sqrt{\pi n} \cdot (\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}} \cdot (\frac{n}{2e})^{\frac{n}{2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}} = 0$.

   Получаем, что наша вероятноть при достаточно больших n стремится к 0.

Верхняя и нижняя оценки произвольного биномиального коэффициента $\binom{n}{k}$.

Лемма: а)$(\frac{n}{k})^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant (\frac{ne}{k})^k$, б)$\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant (\dfrac{en}{k})^k$ (этого не просили доказать, но оно будет нужно в доказательстве неравенства Чернова)

Доказательство:

1. Докажем сначала пункт а) и его правую оценку.

   Мини лемма: $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-1}{b-1}$ при $a \geqslant b \geqslant 1$.

   Доказательство: Перемножим крест на крест и получим, что $a(b-1) \leqslant b(a-1) \implies a \geqslant b$, что верно. **Ч.Т.Д.**

   Тогда так как $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-k+1)}$, то в силу мини леммы получаем, что $\binom{n}{k} \geqslant (\frac{n}{k})^k$

2. Теперь докажем в левую оценку пункта а), однако для этого понадобится сначала доказать пункт б).

   Доказательство:

   Заметим, что $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \dfrac{t^i}{t^k}$, где $t \in (0,1]$. Тогда можно вынести $\frac{1}{t^k}$ за сумму и получим $\frac{1}{t^k} \cdot (1+t)^n$

   Пусть теперь $t = \frac{k}{n}$, тогда $\frac{(1+t)^n}{t^k} = \frac{n^k}{k^k} \cdot (1+\frac{k}{n})^n$. Ну итеперь ещё один fun fact с матана, что $e^k \geqslant (1+\frac{k}{n})^n$, поэтому в итоге $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant \dfrac{n^k}{k^k} \cdot e^k = (\dfrac{en}{k})^k$

   Ч.Т.Д.

3. Ну и для полного завершения доказательства осталось заметить, что $\binom{n}{k} \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leqslant (\dfrac{en}{k})^k$, тем самым мы доказали и левую оценку пункта а).

Ч.Т.Д.

2.13 Неравенство Чернова: верхняя оценка на вероятность того, что число выпавших орлов при n независимых подбрасываниях монетки (с вероятностью p выпадающей орлом) превышает ожидаемое число орлов в $(1+\varepsilon)$ раз, где $\varepsilon \in (0,1)$.

Лемма: $e^x \geqslant 1+x$(не думаю, что на колке попросят доказывать, но тут просто надо перенести всё в одну сторону и исследовать функцию на мононотонность и точки экстремума, взяв производную, и всё получится)

Теорема (Неравенство Чернова):

$\forall\varepsilon \in (0{,}1) \qquad P(X \geqslant (1+\varepsilon)pn) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$

Неравенство Чернова утверждает, что вероятность того, что число выпавших орлов отклонится от математического ожидания числа орлов не менее, чем в эпсилон раз, не более $e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$

Доказательство:

1. Рассмотрим случайную величину $Y = e^{tX}$, где $t > 0$. Тогда перепишем неравенство Чернова в терминах случайной величины Y и запишем неравенство Маркова(если хз, что оно, то прочитайте бля уже лекцию) для левой части неравенства.

   $P(Y \geqslant e^{t(1+\varepsilon)pn}) \leqslant \frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\varepsilon)pn}}$

2. Посчитаем мат. ожидание по определению для каждой возможной последовательности орлов и решек: $E[e^{tX}] = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot e^{tk} = (e^tp+(1-p))^n$. Свернём по биному Ньютона.

3. Значит, $\frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\varepsilon)pn}} = \frac{(e^tp+(1-p))^n}{e^{t(1+\varepsilon)pn}}$

   Оценим числитель: $(e^tp+(1-p))^n = (1+\frac{pn(e^t-1)}{n})^n \leqslant e^{pn(e^t-1)}$

   Итого, $\frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\varepsilon)pn}} \leqslant \frac{e^{pn(e^t-1)}}{e^{t(1+\varepsilon)pn}} = e^{np(e^t-1-t(1+\varepsilon))}$

4. Мы хотим сделать оценку как можно более точную, поэтому надо подобрать такой t, чтобы $e^{np(e^t-1-t(1+\varepsilon))}$ был минимален.

   Давайте рассмотрим функцию $g(t) = e^t-1-t(1+\varepsilon) \implies g'(t) = e^t-(1+\varepsilon) \implies t = \ln(1+\varepsilon)$. Можно убедится, что полученная точка - это точка минимума. Подставим вместо t её и получим, что $e^{np(\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)(1+\varepsilon))}$.

   Так как $ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}-... = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\varepsilon^k}{k}$

   Тогда $(1+\varepsilon)ln(1+\varepsilon) = (1+\varepsilon)(\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}-...) = \varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^3}{6}+\frac{\varepsilon^4}{12}-\frac{\varepsilon^5}{20}+... = \varepsilon+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\varepsilon^k}{k(k-1)} \geqslant \varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^3}{6} \geqslant \varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{6} \geqslant \varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{3}$

5. Окончательно получаем, что $\frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1+\varepsilon)pn}} \leqslant e^{np(\varepsilon-\ln(1+\varepsilon)(1+\varepsilon))} \leqslant e^{np(\varepsilon-(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{3})} = e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$

Ч.Т.Д.

2.14 Производящие функции, определение. Их сложение и умножение на скаляр. Произведение производящих функций, основные свойства арифметических операций. Обратимые производящие функции, примеры. Формальное дифференцирование производящих функций, свойства производной, правило Лейбница. Подстановка нуля в производящую функцию, вычисление n-го коффициента производящей функции с использованием производных.

$F = (f_1, f_2, f_3, \dots,),\ f_i \in \mathbb{C}$ - некоторая бесконечная последовательность комплексных чисел.

Тогда $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_kx^k$ называют производящей функцией для последовательности F.

Теперь мы хотим определить некоторые арифметические операции для производящих функций:

- Сложение, $+$: $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_kx^k, G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_kx^k \to (F+G)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(f_k+g_k)x^k$
- Умножение на скаляр: $F(x), c \in \mathbb{C} \to (cF)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(cf_k)x^k$

Вместе с операциями сложения и умножения множество производящих функций (обозначается как $\mathbb{C}[[x]]$ образует векторное пространство над $\mathbb{C}$. Проверка аксиом векторного пространства предоставляется читателю в качестве упражнения.

Также покажем как происходит умножение производящих функций:

Интуитивно (это важно) умножение можно выполнить таким образом:

$(F \cdot G)(x) = (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots)(g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots) = f_0g_0 + (f_1g_0 + f_0g_1)x + (f_2g_0 + f_1g_1 + f_0g_2)x^2 + \ldots + (\sum_{k=0}^{n} f_kg_{n-k})x^n + \ldots$. Однако это лишь некоторый способ понять суть умножения, а так оно формально задаётся **определением:**

$(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) = H(x)$, где $h_n = \sum_{k=0}^{n} f_kg_{n-k}$

Теперь мы можем показать, что выполняются некоторые привычные свойства умножения.

Утверждение. $A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x)) = (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x)$.

Примечание. $F(x) = G(x) \Leftrightarrow f_i = g_i \, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Доказательство:

$A(x) \cdot B(x) = D(x)$. Посмотрим на коэффициент при $x^k : \sum_{l=0}^{k} a_lb_{k-l} = \sum\limits_{\substack{i+j=0 \\ i,j\geqslant 0}} a_ib_j$.

$D(x) \cdot C(x)$. Посмотрим на коэффициент при $x^n : \sum_{k=0}^{n} d_kc_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum\limits_{\substack{i+j=0 \\ i,j\geqslant 0}} a_ib_jc_{n-k} = \sum\limits_{\substack{i+j+t=n \\ i,j,t\geqslant 0}} a_ib_jc_t$.

Последний переход следует из того, что сумма всех коэффицентов равна n, то есть мы просто рассматриваем произведение всех коэффициентов таких, чтобы их сумма давала n. Проделав такие же действия для левой части равенства, также получим инвариантное относительно n (по сумме индексов) выражение. Значит, ассоциативность умножения верна ■

Примечание. Мы не отметили это ранее, но умножение производящих функций коммутативно ровно потому, что коммутативно умножение комплексных чисел (см. определение умножения).

Давайте выпишем свойства умножения:

1. $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$ - коммутативность.
2. $A(x) \cdot (B(x) \cdot C(x)) = (A(x) \cdot B(x)) \cdot C(x)$ - ассоциативность.
3. $A(x) \cdot (B(x) + C(x)) = A(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot C(x)$ - дистрибутивность.

   Доказательство:

   Посмотрим на коэффициент при x^n у выражения слева: $\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k} + c_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_kc_{n-k} = A(x)C(x) + B(x)C(x)$.
4. $\exists 1 = (1, 0, 0, \ldots) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$

   $1 \cdot A(x) = A(x)$

   Утверждение. Введём определение константы: $c = (c, 0, 0, \ldots), c(x) = c + 0x + 0x^2 + \ldots$ Тогда $c(x) \cdot A(x) = (cA)(x)$

   Доказательство:

   Посмотрим на коэффициент при x^n у выражения слева: $\sum_{k=0}^{n} c_ka_{n-k} = ca_n$, т.к. все c_k кроме c_0 равны 0.
5. Обратный элемент не всегда существует.

   Определение. Пусть $A(x)$ - производящая функция. Тогда $B(x)$ - обратная к $A(x)$, если $A(x) \cdot B(x) = 1$ $(B(x) = A(x)^{-1})$

   Примеры:

   $A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ - обратима. Для неё существует обратный: $1 - x$. $A(x)(1 - x) = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots = 1$

   $B(x) = x$ - необратима, т.к. $xC(x) = 0 + c_0x + c_1x^2 + \ldots \neq 1$

Будем обозначать обратный таким образом: $A(x)^{-1} = \frac{1}{A(x)}$.

Запишем несколько свойств, которые позже будут доказаны на семинарах:

1. $\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{1}{B(x)} = \frac{1}{A(x)B(x)}$
2. $\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x)+B(x)C(x)}{B(x)D(x)}$

   Поясним, что по определению $\frac{A(x)}{B(x)}$ значит $A(x) \cdot B(x)^{-1}$.

Дифференцирование

По **определению** производная к производящей функции $F = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots$ это:

$F'(x) = f_1 + 2f_2x^2 + 3f_3x^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} kf_kx^{k-1}$

Свойства производных:

1. $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x)$

   Доказательство:

   Посмотрим на коэффициент при x^{k-1} у выражения слева: $k(f_k + g_k) = kf_k + kg_k$.

2. $(cF(x))' = cF'(x) = (cF'(x))(x)$

   Доказательство:

   Посмотрим на коэффициент при x^{k-1} у выражения слева: $k \cdot cf_k = ckf_k$.

3. Правило Лейбница: $(F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$.

   Доказательство:

   Посмотрим на коэффициент при x^{n-1} у выражения $(F(x)G(x))'$: при x^n в $F(x)G(x)$ коэффициент равен $\sum_{k=0}^{n} f_kg_{n-k}$, значит при x^{n-1} у $(F(x)G(x))'$ он равен $n(f_0g_n + f_1g_{n-1} + \ldots + f_ng_0)$.

   Теперь посмотрим на коэффициент при x^{n-1} у выражения $F'(x)G(x)$: $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)f_{k+1}g_{n-1-k} = f_1g_{n-1}+2f_2g_{n-2}+3f_3g_{n-3} + \ldots + nf_ng_0$.

   И на коэффициент при x^{n-1} у выражения $F(x)G'(x)$ (он почти такой же как у предыдущего выражения): $g_1f_{n-1} + 2g_2f_{n-2} + 3g_3f_{n-3} + \ldots + ng_nf_0$.

   Тогда рассмотрим сумму коэффициентов при x^{n-1} у выражений $F'(x)G(x)$ и $F(x)G'(x)$: любой f_ig_{n-i} входит в сумму два раза с коэф-ми i и $n - i$, которые в сумме дадут n. Тогда коэффициент у данной суммы как раз и будет $nf_0g_n + nf_1g_{n-1} + \ldots + nf_ng_0 = n(f_0g_n + f_1g_{n-1} + \ldots + f_ng_0)$

4. $(\frac{1}{F(x)})' = -\frac{F'(x)}{F^2(x)}$ - будет обговорено на семинаре

5. $(\frac{A(x)}{B(x)})' = \frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{B^2(x)}$

   Сводится к (3) и (4), т.к. $(\frac{A(x)}{B(x)})' = (A(x) \cdot \frac{1}{B(x)})'$

Теперь наша задача понять, как "вытащить"из производящей функции её коэффициент. Хотя мы договорились пока ничего не подставлять в нашу производящую функцию, давайте определим подстановку 0:

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, тогда $A(0) = a_0$.

Запишем несколько очевидных свойств:

1. $(A + B)(0) = A(0) + B(0)$
2. $(A \cdot B)(0) = A(0) \cdot B(0)$
3. $(cA)(0) = cA(0)$

Утверждение. $A \to (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Тогда $a_n = \frac{A^{(n)}(x)}{n!}\Big|_{x=0}$ Несложно проверить, взяв производную n раз.

2.15 Пример применения производящих функций: вывод формулы для суммы квадратов первых n натуральных чисел.

Задача будет заключаться в вычислении $\sum_{i=0}^{n} i^2$ с помощью производящих функций. Т.е. по факту мы хотим найти производящую функцию для последовательности $(0^2, 0^2 + 1^2, 0^2 + 1^2 + 2^2, \ldots)$.

Возьмём $F(x) : (1, 1, 1, \ldots) \to 1 + x^2 + x^3 + \ldots$; $F(x) = \frac{1}{1-x}$

$F'(x) : (1, 2, 3, \ldots)$; $F'(x) = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$

Давайте получим это же но с 0, домножив на x:

$xF'(x) : (0, 1, 2, 3, \ldots)$; $xF'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

$(xF'(x))' : (1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$; $(xF'(x))' = (\frac{x}{(1-x)^2})' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

Давайте снова получим это же но с 0, домножив на x:

$x(xF'(x))' : (0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \ldots)$; $x(xF'(x))' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

Утверждение. Пусть $A(x) \to (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$S = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$. Тогда $S(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

Доказательство:

Просто по определению $\frac{A(x)}{1-x} = A(x)(1 + x + x^2 + \ldots) = S(x)$

Поэтому производящая функция для $(0^2, 0^2 + 1^2, 0^2 + 1^2 + 2^2, \ldots) \to \frac{x(xF'(x))'}{(1-x)} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$

$G(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4}$, $g_n = \sum_{i=0}^{n} i^2$

Разложим $G(x)$ на сумму двух дробей $\frac{x(1+x)}{(1-x)^4} = \frac{x^2}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^4}$. Но искать n-ые производные данных дробей тоже не просто, поэтому можем ввести вспомогательную производящую функцию $H(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$. Понятно, что умножение на x^2 и x делает сдвиг коэффициентов $H(x)$ на 2 и на 1 вправо соответственно, поэтому коэффициенты h_{n-2} и h_{n-1} будут n-ми коэффициентами данных дробей соответственно. Тогда посчитаем производную в общем виде для $\frac{1}{(1-x)^4}$:

$H'(x) = \frac{5}{(1-x)^5}, H''(x) = \frac{4 \cdot 5}{(1-x)^6}, H'''(x) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(1-x)^7}, \ldots$ по индукции несложно проверяется, что $H^{(n)}(x) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (n+3)}{(1-x)^{n+4}} = \frac{(n+3)!}{6(1-x)^{n+4}}$.

Тогда $h_n = \left.\frac{(n+3)!}{n! \cdot 6(1-x)^4}\right|_{x=0} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$

Ответом будет $g_n = \sum_{i=0}^{n} i^2 = h_{n-2} + h_{n-1} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.16 Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками. Бином Ньютона, обобщение на целые показатели. Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами. Доказательство того, что производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами, рациональна. Явная формула для общего члена последовательности, метод ее вывода.

Связь произведения производящих функций с неупорядоченными выборками

Пусть имеем n различных объектов, из которых мы неупорядоченно хотим выбрать k штук. Конечно, мы могли бы это сделать, пользуясь обычной комбинаторикой, но иногда жизнь несправедлива, поэтому применим соображения из производящих функций.

Рассмотрим n-элементный набор $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ который представим в виде объединения n одноэлеметных множеств, то есть $S = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ... \cup \{a_n\}$.

Рассмотрим произвольный элемент a_i. Понятно, что для него производящая функция в смысле нашей задачи будет иметь вид: $1 + x$. Далее, из прошлой лекции мы знаем, что производящая функция для объединения n объектов будет равна произведению производящих функций каждого из этих объектов. Поэтому искомая функция будем иметь вид:

$$(1 + x)(1 + x)...(1 + x) = (1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot x^i$$

Таким образом, мы получили функцию вида: $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + ... + f_n x^n$, где коэффициент f_i обозначает количество способов выбрать неупорядоченно k элементов из n.

Бином Ньютона, обобщение на целые показатели

Давайте обобщим формулу бинома Ньютона для целых коэффициентов и получим:

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} \cdot x^i$$

Давайте поясним, чему равен коэффициент $\binom{-n}{k}$.

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n)(-n-1)...(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k}$$

Отсюда предыдущая формула переписывается в виде:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} \cdot x^i$$

На самом деле, можно пойти дальше и определить биномиальный коэффициент $\binom{\alpha}{k}$, где $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha-k+1)}{k!}$$

Отдельно стоит отметить, что $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Линейные рекурентные соотношения с постоянными коэффициентами. Доказательство того, что производящая функция последовательности, удовлетворяющей линейному рекурентному соотношению с постоянными коэффициентами, рациональна

Пусть имеем некоторую реккурентную последовательность $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется, что a_j член выражается через k предыдущих с постоянными коэффициентами. То есть:

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + ... + c_k a_n$$

Тогда если рассмотрим производящую функцию $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$

То $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x) \in \mathbb{C}(x)$ и $\deg Q = k$, $\deg P \leqslant k-1$.

Доказательство:

Рассмотрим произведение $A(x) \cdot (c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k)$:

$$c_1 x \cdot A(x) = c_1 a_0 x + c_1 a_2 x^2 + ... + c_1 a_{n+k-1} x^{n+k} + ...$$

$$c_2 x^2 \cdot A(x) = c_2 a_0 x^2 + c_2 a_2 x^3 + ... + c_2 a_{n+k-2} x^{n+k} + ...$$

Делаем так k раз и получаем:

$$c_k x^k \cdot A(x) = c_k a_0 x^k + ... + c_k a_n x^{n+k} + ...$$

Просуммируем все эти выражения и получим:

$$A(x)(c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k) = (\text{какой-то многочлен } R(x)) + a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + ... = A(x) + P(x)$$

$P(x)$ - тоже некоторый многочлен, причем $\deg P(x) \leqslant k-1$.

Теперь вспомним, что рассматривали произведение $A(x) \cdot (c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k)$. Мы получили, что оно равно $A(x) + P(x)$, откуда $P(x) = A(x) \cdot (-1 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k)$. Обозначим $(-1 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_k x^k)$ за $Q(x)$ и получим, что $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Ч.Т.Д.

Явная формула для общего члена последовательности, метод ее вывода

Теперь мы получили, что $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(1-q_1 x)^{r_1} ... (1-q_n x)^{r_s}} = ... + \frac{A}{(1-q_i \cdot x)^m} + ...$ (разложение в сумму простых дробей (A - это какой-то коэффициент)). Заметим, что слагаемое вида:

$$\frac{A}{(1-q_i \cdot x)^m}$$

в точности равно:

$$A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} \cdot (-q_i \cdot x)^k$$

Тогда чтобы получить коэффициент при x^n у производящей функции, мы пройдемся по всем элементарным дробям и соберем в сумму все коэфициенты при x^n. Причем итоговый коэффициент будем иметь вид:

$$a_n = q_1 \cdot p_1(n) + ... + q_t \cdot p_t(n)$$

($p_i(n)$ - какой-то многочлен от n, который возникает из-за биномиального коэффициента при q_i^n)

Выражение вида $p_i(n) \cdot q_i^n$ называют квазимногочленом.

2.17 Задача о правильных скобочных последовательностях. Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей. Производящая функция и ее вывод как решения квадратного уравнения. Вывод явной формулы с использованием бинома Ньютона для извлечения корня

Задача о правильных скобочных последовательностях

Я буду обозначать правильную скобочную последовательность как **ПСП**.

ПСП - это такая последовательность, которая получается за конечное число шагов по следующим правилам:

1. () - ПСП.
2. Если P - ПСП, то (P) - тоже ПСП.
3. Если P_1 и P_2 - ПСП, то $P_1 + P_2$ - ПСП (под + подразумевается конкатенация).

Обозначим за C_n - число правильныз скобочных последовательностей длины $2n$. Задача о правильных скобочных последовательностях заключается в нахождении C_n

Рекуррентная формула для числа правильных скобочных последовательностей

Найдем число C_n, выразив число C_{n+1} через предыдущие.

Для этого рассмотрим первый момент, когда число левых скобок равно числу правых скобок (см. картинку)

Получили, что длина P_1 равна $2k$, а длина P_2 равна $2(n-1)-2k$. Тогда получаем, что число C_{n+1} выражается следующим образом:

$$C_{n+1} = C_0 \cdot C_n + C_1 \cdot C_{n-1} + C_2 \cdot Cn - 2 + ... + C_n \cdot C_0 = \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k}$$

При этом C_0 мы полагаем равным 1.

Производящая функция и ее вывод как решения квадратного уравнения

Рассмотрим производящую фукнцию для нашего реккурентного соотношения:

$$C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ...$$

Рассмотрим произведение $C(x) \cdot C(x)$:

$$C(x) \cdot C(x) \Rightarrow \text{при } x^n \text{ стоит коэффициент} \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} = C_{n+1}$$

Тогда умножим $C(x) \cdot C(x)$ на x и при члене x^{n+1} получим коэффициент: $\sum\limits_{k=0}^{n} C_k \cdot C_{n-k} = C_{n+1}$ (что мы и хотели). Но тогда:

$$x \cdot C(x) \cdot C(x) = C_1 x + C_2 x^2 + ... = C(x) - C_0$$

Таким образом, получили соотношение:

$$x \cdot C(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

Решая относительно $C(x)$, получим, что:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 \pm (1-4x)^{1/2}}{2x}$$

Далее, возьмем знак минус и раскроем $(1-4x)^{1/2}$ по биному и тогда получим явную формулу для $C(x)$:

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 - (1-4x)^{1/2}}{2x}$$

Рассмотрим $1-(1-4x)^{1/2}$:

$$1-(1-4x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} (-4x)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(-1)(-3)...(-(2k-3))}{2^k \cdot k!} \cdot (-4x)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1(1)(3)...(2k-3)}{2^k \cdot k!} 4^k \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2k-3) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2k-2)}{2^{k-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (k-1) \cdot 2^k \cdot k!} 4^k \cdot x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(k-1)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{2}{k} \cdot x^k$$

Значит, $\frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(k-1)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{1}{k} \cdot x^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot x^n$

Ч.Т.Д.

2.18 Вывод тождества для $\binom{k+l}{n}$ при $\forall k, l \in \mathbb{R}$. Числа Каталана. Их явная формула и прямое доказательство того, что она верна (использующее тождество для $\binom{k+l}{n}$).

Вывод тождества для $\binom{k+l}{n}$ при $\forall k, l \in \mathbb{R}$

Рассмотрим равенство $(1+x)^k \cdot (1+x)^l = (1+x)^{k+l}$, $k, l \in \mathbb{N}$. Оно очевидно, если мы рассматриваем его как равенство многочленов, но давайте взглянем на него на как на равенство производящих функций. Перепишем наше равенство:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{k}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{l}{j} x^j = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+l}{n} x^n.$$

При x^n стоит коэффициент:

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} = \binom{k+l}{n}$$

Справа и слева мы получили многочлены от k и l, при этом n фиксировано. Заметим, что эти многочлены равны в бесконечном количестве точек. Далее, зафиксируем $l \in \mathbb{N} \Rightarrow$ левая часть равна правой части $\forall k \in \mathbb{R}$. Затем зафиксируем $k \in \mathbb{R}$ и получим, что левая часть равна правой части $\forall l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ эти многочлены равны $\forall k, l \in \mathbb{R}$.

Числа Каталана. Их явная формула и прямое доказательство того, что она верна (использующее тождество для $\binom{k+l}{n}$)

Утверждение: $C_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$, $C_0 = 1$, $C_1 = 1$.

Доказательство:

Введем числа $\tilde{C}_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$ (знак тильды просто означает, что мы хотим отличать числа Каталана, полученные из производящих функций и полученные из комбинаторных рассуждений). Докажем, что для них выполняется рекуррентное соотношение:

$$\tilde{C}_n = \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ k,\ l \geqslant 0}} \tilde{C}_k \tilde{C}_l$$

Пока что непонятно, как это можно хорошо доказать. Чтобы сделать нашу жизнь лучше, рассмотрим следующее равенство (просто воспользуемся тем, как мы определили биномиальный коэффициент с дробным показетелем):

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \tilde{C}_{n-1}$$

Правда, при $n = 0$ правая часть не имеет смысла, и чтобы придать ей смысл, надо положить $\tilde{C}_{-1} = -1/2$. Теперь мы можем вспомнить тождество, которое верно $\forall k, l \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geqslant 0}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} = \binom{k+l}{n}$$

После этого запишем его для $k = 1 = \frac{1}{2}$, правая часть обратится в нуль, и получится тождество:

$$0 = \tilde{C}_{-1} \cdot \tilde{C}_{n-1} + \tilde{C}_0 \cdot \tilde{C}_{n-2} + \tilde{C}_1 \cdot \tilde{C}_{n-3} + ... + \tilde{C}_{n-1} \cdot \tilde{C}_{-1}$$

Вспоминая о соглашении $C_{-1} = -\frac{1}{2}$, мы получаем искомое рекуррентное соотношение (только для меньшего на единицу значения n).

Ч.Т.Д.

2.19 Комбинаторные игры с полной информацией. Задание игры в виде ориентированного графа. Партии и стратегии. Стратегии, гарантирующие выигрыш. Цена игры. Теорема о цене игры.

Пример(игра в монетницу)

Игроки Первый и Второй по очереди достают монеты из монетницы, в которой изначально лежат 20 монет, 2 или 3 монеты. За один ход соответственно можно взять 2 или 3 монеты. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Нужно сказать, есть ли у какого-то игрока выигрышная стратегия, если оба игрока будут играть *оптимальным способом.*(пока не очень понятно, как это с формальной точки зрения, но потом станет понятно)

Ответ: Выигрывает Второй.

Решение:

1. Приведём некую стратегию для второго игрока. Заметим, что 20 - это 4 раза по 5 монет.
2. Если Первый берёт 2 монеты, то Второй должен взять 3 и наоборот. То есть Второй своим ходом дополняет ход Первого до 5. Тогда проделав так 4 раза, Второй заберёт последние монеты и тем самым победит.

Пример описания игры в шахматы:

Заметим, что нам недостаточно знать расстановку фигур и чей ход для описания позиций, потому что в шахматах есть куча нюансов по типу взятия на проходе, рокировки и тд, и нам важно знать, были ли они или нет, чтобы понять кто ходит при той или иной расстановке фигур, поэтому нам необходимо вести за собой по-хорошему всю историю игры.

Пример описания игры в крестики и нолики:

Тут уже всё попроще, поэтому тут под позицией действительно можно понимать просто расстановку какую-то крестиков и ноликов, которая реально могла встретиться в игре(модуль разности крестиков и ноликов равен 1 или 0)

Поговорим про то, как устроена функция выигрыша: (покажу на примерах, и сразу станет понятно)

- В игре в монетницу фугкция выигрыша может принимать значения 1 и -1, потому что тут можно или выиграть, или проиграть.
- В шахматах и крестиках-ноликах функция выигрыша может принимать значения -1 0 и 1, потому что может быть ещё и ничья.

Теперь понятно, почему игроков назвали Макс и Мин, потому что Макс стремится максимизировать выигрыш в игре, а Мин минимизировать, поэтому если значение функции равно 1, то победил Макс, а если -1, то Мин.

Теорема о цене игры: У любой описанной выше игры существует единственная цена.

Доказательство:

1. Сначала докажем единственность, потому что она очевидна, ведь если у игры была не одна цена, а , например c_1 и c_2 и не умоляя обности $c_1 < c_2$, то давайте возьмём стратегию Макса, которая гарантирует выигрыш c_2, то есть $f(v_k) \geqslant c_2$, и стратегию Мина, которая гарантирует выигрыщ c_1, то есть $f(v_k) \leqslant c_1$, откуда $c_1 \geqslant c_2$ - противоречие!
2. Теперь покажем существование. Давайте введём вспомогательное определение:

   Назовём позицию **хорошей**, если игра, начинающаяся с этой позиции, имеет цену. Для каждой хорошей позиции мы выберем в этой позиции тот ход, который согласован со стратегией, гарантирующей эту цену.

   Лемма: Если все позиции, в которые можно попасть из данной (быть может, за несколько ходов), хороши (следовательно, в каждой из них выбран ход стратегий), то и данная позиция хороша (следовательно, в ней также выбран ход стратегий).

   Что говорит эта лемма про заключительные позиции? По правилам логики хороши все позиции, в которые можно попасть из заключительной (таких позиций просто нет, так как из заключительной позиции попасть никуда нельзя). Но и утверждение леммы тривиально: в заключительных позициях результат уже известен, так что оба игрока его уже обеспечили.

   Доказательство:

   - Для доказательства леммы осталось рассмотреть случай незаключительной позиции. В ней ходит либо Макс, либо Мин. Рассуждения в обоих случаях аналогичны, разберём подробно только случай, когда в позиции x, принятой за начальную, ходит Макс.

- Пусть $y_1,...,y_k$ — все позиции, в которые Макс может попасть по правилам игры. По предположению все эти позиции хороши и потому имеют некоторые цены $c_1,...,c_k$. Более того, мы предполагаем, что в каждой из этих позиций, как и во всех позициях, в которые можно попасть из них, выбран ход стратегий. Что должен делать Макс «при правильной игре»?
- Понятное дело — он должен выбрать позицию с наибольшим c_i (одну из таких, если максимум достигается в нескольких) и пойти туда. И дальше следовать той стратегии для позиции y_i , которая гарантирует ему c_i и которая всегда выбирает ход стратегий (по условию такая существует). Так он обеспечит себе результат не меньше c_i . С другой стороны, в какую бы позицию y_j он ни пошёл, у Мина есть такая стратегия, которая обеспечивает ему результат не больше c_j и всегда выбирает ход стратегий. Заметим, что $c_j \leqslant c_i$, поскольку c_i было максимальным.
- Повторим это рассуждение более формально. Не ограничивая общности, будем считать, что в начальной позиции x ходит Макс. Докажем, что цена игры с началом в x равна $c = max(c_1,...,c_k)$, где c_i — цена игры с началом в y_i , существующая по предположению индукции. Ходом стратегий в позиции x объявим ход в позицию y_i с наименьшим индексом i, для которой достигается максимум, то есть $c_i = c$.
- По предположению позиция y_i хороша, то есть у Макса есть стратегия, которая выбирает ходы стратегий и гарантирует цену не ниже $c = c_i$. Значит, стратегия Макса, которая выбирает ход стратегий в каждой позиции, начиная с x, гарантирует ему результат не меньше c.
- С другой стороны, стратегия Мина, которая выбирает ходы стратегий в позициях, которые возникают в партии, начинающейся с позиции x, гарантирует ему результат не больше c_i. Действительно, пусть Макс пошёл в y_j. Тогда по предположению у Мина есть стратегия, которая гарантирует Мину результат не больше $c_j \leqslant c$ (c — максимум) в игре с началом в y_j и всегда выбирает ходы стратегий.
- Здесь существенен выбор ходов стратегий в каждой из позиций, благодаря чему стратегия Мина при игре из начальной позиции x корректно определена.

Теперь можно доказать очень просто и существование.

Пусть есть плохая позиция. Тогда по лемме есть позиция, в которую можно из неё перейти, которая тоже будет плохой (в частности, наша позиция не заключительная). Из этой новой плохой позиции по тем же причинам можно перейти в какую-то плохую позицию, и так далее. Рано или поздно (граф ведь конечный) получится цикл, которого быть не может — противоречие.

Ч.Т.Д.

2.20 Беспристрастные игры, N- и P-позиции. Анализ игры с конца, примеры. Игра ним, ее P-позиции.

N и P позиции (выигрышные и проигрышные)

Беспристрастная игра - это такая игра, в которой два игрока ходят по очереди и проигрывает тот, кто не может сделать ход (иногда расмматривается, что выигрывает тот, кто не может сделать ход). Соответсвенно есть позиции двух типов: $\{1, -1\}$.

Тогда N**-позиции (выигрышные)** - позиции, в которых выигрывает тот, кто ходит следующим (от слова Next).

P**-позиции (проигрышные)** - позиции, в которых выигрывает тот, кто ходил предыдущим (от слова Previous).

Понятно, что текущая позиция:

- N-позиция, если есть ход в P-позицию.
- P-позиция, если все ходы ведут в N-позиции.

Исследовать вершины нужно в соотвествии с топологической сортировкой. Данная процедура когда мы идём из проанализированных позиций в ещё не проанализированные называется *Анализом с конца.*

Пример:

Приведём пример несложной игры, в которой мы можем применить анализ с конца.

Правила: за свой ход можно подвинуть ладью на сколько угоджно клеток вправо или вверх. Проигрывает тот игрок, который не может сдвинуть ладью. Изначально ладья стоит в левой нижней клетке.

N	N	N	N	N	N	N	P
N	N	N	N	N	N	P	N
N	N	N	N	N	P	N	N
N	N	N	N	P	N	N	N
N	N	N	P	N	N	N	N
N	N	P	N	N	N	N	N
N	P	N	N	N	N	N	N
P	N	N	N	N	N	N	N

Проанализировав позиции, видим, что при правильной игре второго игрока первый всегда проигрывает. Несложно восстанавливается и сам стратегия: после каждого хода первого игрока, второй своим следующим ходом возвращает его на главную диагональ.

Игра Ним

Есть n кучек камней: $x_1, x_2, \ldots, x_n (x_i > 0)$

Разрешается в свой ход взять любое количество камней, но только из одной кучки (в том числе все камни из кучки). Пригрывает тот, кто не может сделать ход.

$N = 1 : x_1$ - выигрывает I игрок (берёт всю кучку).

$N = 2 : x_1, x_2$ - можно посмотреть на эту ситуацию как на игру с ладьёй, только можно ходить влево и вниз из верхнего правого угла (то есть за ход можно уменьшать одну координату, x_1 или x_2. И тогда если $x_1 = x_2$ - выигрывает II игрок ровно так, как мы описывали выше, а если $x_1 \neq x_2$ - выигрывает I, первым ходом выравниваю количество камней в кучках и сводя задачу к предыдущей.

$N = 3 :$ позиция (n, n, m), например, - N-позиция, т.к. она сводится к $(n, n, 0)$, P-позиции. Но в общем случае довольно сложно проанализировать позицию. Однако это возможно сделать с помощью двоичной СС.

Теорема: Каждую из n кучек записываем в двоичной системе счисления:

$x_1 = x_1^{(r)} \ldots x_1^{(1)} x_1^{(0)}$
$x_2 = x_2^{(r)} \ldots x_2^{(1)} x_2^{(0)}$
$\ldots$
$x_n = x_n^{(r)} \ldots x_n^{(1)} x_n^{(0)}$

Далее вычислим побитовый XOR, т.е. суммируем по модулю 2 биты у всех кучек в одном разряде. Получившуюся строку результатов будем называть res.

Наконец, теорема гласит, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - P-позиция $\Leftrightarrow res = 00 \ldots 0$

Пример:

Проаналазириуем позицию $(1, 2, 3)$:

$1 = 01$
$2 = 10$
$3 = 11$
$res = 00 \Rightarrow$ это P-позиция.

Проаналазириуем позицию $(2, 3, 4)$:

$2 = 010$
$3 = 011$
$4 = 100$
$res = 101 \Rightarrow$ это N-позиция.

Доказательство:

Докажем два факта (с их помощью можно будет применить анализ с конца, т.к. в заключительной позиции $res = 0$):

1. если $res \neq 0$, то можно сделать ход в позицию, где $res = 0$.
2. если $res = 0$, то любой ход ведёт в позицию, где $res \neq 0$.

1) Возьмём первую 1 слева в res. Пусть она соответствует некоторому k-му биту. Тогда должна найтись кучка x_i, у которой в k-м бите стоит 1. Заменяем эту единицу на 0. Далее идём вправо по двоичной записи x_i и инвертируем биты в тех столбцах, у которых в соответствующих позициях res стоит 1. Понятно, что получилось меньшее число x_i. То есть просто убираем из x_i-й кучи $x_i - x_i'$ камней и действительно получаем $res' = 0$. Этот факт доказан.

2) Этот факт совсем очевиден. Если мы уменьшаем кучку, мы точно поменяли какой-то его бит. Тогда понятно, что XOR по этой строке станет противположеным тому, что был, то есть 1. Значит $res \neq 0$. Теорема доказана.

2.21 Модель разрешающих деревьев. Адаптивный и неадаптивный протоколы, сведение адаптивного протокола к неадаптивному. Задача об угадывании числа, ее сложность в адаптивном и неадаптивном случае.

Есть числа $1, 2, \ldots, N$. Есть два игрока: Алиса и Боб. Алиса загадывает число, а Боб может задавать вопросы, на которые можно ответить да или нет. Боб задаёт k вопросов. Его цель: точно определить загаданное число.

Одна из стратегий Боба заключается в том, что он может каждый раз выбирать среднее число, и спрашивать, находиться ли загаданное число в первой половине (включая среднее). Если да, то он рассмматривает первую половину (или примерно половину в случае нечётного). Иначе - вторую. Тогда понятно, что $k \leqslant \lceil \log_2 N \rceil$. Чтобы не было этой неудобной ситуации с тем, что нечетное число чисел не делится на две равные половины, можем предположить, что чисел изначально было, не N, а $2^s (2^s \geqslant N)$, где 2^s - наименьшая степень $2 \geqslant N$. Теперь Боб всегда может угадать число точно за s вопросов: $k \leqslant s = \lceil \log_2 N \rceil$.

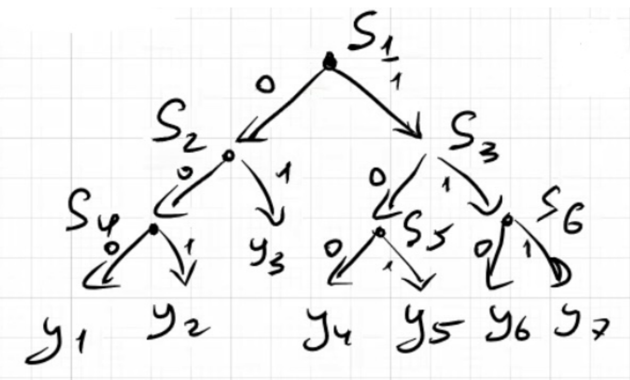
Поясним, почему не получится гарантированно угадать число за меньшее число вопросов k. Пусть хватило k вопросов: получили последовательность ответов $a_1 a_2 \ldots a_k$ из да/нет, по которой мы восстанавливаем число. Понятно, что каждая последовательность однозначно задаёт своё число. Действительно, если для двух различных чисел x и y Алиса даёт Бобу на его вопросы полностью одинаковые ответы, то для Боба эти случаи неразличимы: его диалоги с Алисой для x и для y выглядят одинаково. При этом Боб после диалога выдаёт какой-то ответ, который определяется только состоявшимся диалогом. Значит в одном из случаев ответ будет неправильным. Далее, заметим, что не может быть так, что для двух различных x и y, загаданных Алисой, цепочка ответов для x является началом цепочки ответов для y. Действительно, иначе диалог Боба с Алисой выглядит одинаково для x и y до того момента, когда будут заданы все вопросы из цепочки ответов для x. Значит, к этому моменту Боб не может отличить x от y и должен делать для них одно и то же, тогда как он в одном случае задаёт следующий вопрос, а в другом - нет.

Таким образом, мы получили, что каждому числу от 1 до N соответствует последовательность из не более чем k нулей и единиц, все эти последовательности различны, и ни одна не является началом другой. Заметим, что семейство этих последовательностей содержит не более 2^k элементов. Действительно, если какая-то из них имеет длину меньше k, то продолжим её, например, нулями. Тогда для различных x и y полученные последовательности длины k различны: иначе они либо совпадают, либо одна (более короткая) является началом другой. Таким образом, каждому числу от 1 до N соответствует последовательность длины k из нулей и единиц, и все эти последовательности различны. Всего последовательностей длины k из нулей и единиц 2^k. По принципу Дирихле, чисел от 1 до N должно быть не больше 2^k (иначе двум разным числам соответствуют одинаковые последовательности). Значит нужно, чтобы $2^k \geqslant N \Rightarrow k \geqslant \lceil \log_2 N \rceil$ ■

Разрешающие деревья

Даны X, Y - конечные множества и $f : X \to Y$. Требуется вычислить $f(x)$ при некотором неизвстном входе x. Разрешается задавать вопросы типа $x \in S$ для подмножеств S множества X. Тогда разрешающим деревом будем называть двоичное дерево, каждая промежуточная вершина которого (не лист) помечена некоторым подмножеством $S \subseteq X$. Каждый лист помечен элементом $b \in Y$. Из каждой промежуточной вершин выходят три ребра: одно к корню и два к литьям. Для каждой промежуточной вершины одно из рёбер, ведущих к листьям, помечено единицей, а другое - нулём.

Некоторый конкретный пример разрешающего дерева:



Мы строим путь от корня на каждом шагу переходя по ребру с 1, если ответ положительный, и 0, если ответ отрицательный. Вычисления завершается тогда, когда мы попадаем в лист. Мы говорим, что протокол (по-другому разрешающее дерево) вычисляет функцию f, если для всякого $x \in X$ протокол выдаёт $f(x)$.

Сложностью адаптивного протокола (адаптивным протокол - такой протокол, вопрос в котором может зависеть от предыдущих ответов) называется глубина дерева (несложно убедиться, что она равна количеству вопросов, которое потребуется задать в худшем случае).

Рассмотрим неадаптивную постановку задачи. Предположим, что Боб отправляет сразу k вопросов по почте. Тогда можем задавать такие независимые вопросы: верно ли, что в i-м бите числа стоит 1? $\forall i$. Битов в числе не более чем $\lceil \log_2 N \rceil$, значит $k \geqslant \lceil \log_2 N \rceil$. Понятно, что меньше вопросов, чем в адаптивном точно не получится, посколько неадаптивный протокол не опирается на историю ответов, что несколько усложняет вычисление (ведь если Боб в неадаптивном протоколе справляется с задачей за k вопросов, то он точно справися за k и в адаптивном - достаточно задать те же вопросы). Но в то же время и понятно, что $\lceil \log_2 N \rceil$ вопросов достаточно. Вот почему:

Давайте покажем на изображённом выше примере (к задаче об угадывании числа), как переписать адаптивный протокол в неадаптивный. Приведём вопросы, которые мы будем задавать:

1) Верно ли, что $x \in S_1$?

2) Верно ли, что если $x \in S_1$, то $x \in S_3$, а если же $x \notin S_1$, то $x \in S_2$?

3) $\ldots$

Вопросы будут получаться большими и громоздкими, однако данное рассуждение работает для любой задачи такого типа и любого адаптивного алгоритма.

2.22 Задача о взвешиваниях: поиск самой тяжелой монеты. Сложность в адаптивном и неадаптивном случае.

Задача о взвешивании Есть n монет различной массы, ход заключается в сравнении весов двух монет. Наша цель: найти самую тяжёлую монету за как можно меньшее число вопросов k.

Решение:

Лемма. Для адаптивной модели необходимо и достаточно $n-1$ взвешивание.

Доказательство:

Достаточность: можно взять любую монету и сравнивать её с какой-нибудь другой. Если она оказалась тяжелее, то выкидываем ту, с которой сравнивали и продолжаем сравнение с оставшимися. Если же она оказалась легче, то выкидываем её и берём ту, которой она "проиграла" и уже с ней продолжим сравнение с оставшимися. Таким образом за $n-1$ сравнение мы вычислим максимум.

Необходимость: пусть мы нашли максимум за $n-2$ взвешивания. Тогда построим граф, где вершинами будут монеты, а рёбрами будут соединены те монеты, которые мы попарно сравнивали. Если в графе на n вершинах $n-2$ ребра, то он несвязен. Тогда рассмотрим его компоненту связности V_1, в которой находится максимум, и V_2 - все остальные объекты. Увеличим веса всех монет в V_2 на одно и то же число так, чтобы они были тяжелее максимума в V_1. Причём результаты взвешиваний не изменятся, потому что они были или в пределах V_1, или в пределах V_2, а самая тяжёлая монета станет другой (теперь она в V_2). Таким образом результат взвешивания даст один и тот же результат при разных максимумах, значит алгоритм работает неправильно. Противоречие, значит $n-1$ взвешиваний необходимо.

Теперь посмотрим на неадаптивную модель для данной задачи. Как мы видели ранее в общей модели разрешающих деревьев, отличий между адаптивным и неадаптивным протоколом нет, их сложности одинаковые. Но это достигается за счёт весьма нетривиальных запросов в неадаптивной модели. Если же мы ставим ограничения на тип запросов, то логично ожидать, что разница между моделями появится.

Лемма. Докажем, что для неадаптивной модели необходимо и достаточно $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ взвешивания.

Доказательство:

Достаточность: очевидна, т.к. можем просто сравнить попарно все объекты и найти максимум. Как раз будет $\binom{n}{2}$ сравнения.

Необходимость: пусть мы нашли максимум меньше чем за $\binom{n}{2}$ взвешивания. Значит есть два объекта x и y, которые не сравнивались. Тогда подадим на вход те же объекты, но увеличим массу у x. А затем еще один вход с теми же объектами, но увеличим массу у y. Мы получим одинаковые ответы при разных входах, а значит алгоритм выдаст на них один и тот же результат. Поскольку самые тяжёлые объекты в этих двух входах разные, алгоритм работает неправильно. Противоречие, значит $\binom{n}{2}$ сравнения необходимо.

2.23 Сложность булевой функции. Сложность функции CONN, определяющей связность неориентированного графа на n вершинах.

Для начала определим, что такое сложность протокола для вычисления булевой функции: нам дана $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, причём сам набор $x_1, \ldots, x_n$ не дан. Мы можем задавать вопросы вида: верно ли, что $x_i = 0$. Однако есть функции, для которых можно задать меньше вопросов, чтобы вычислить её значение. Тогда сложность протокола - минимальное число вопросов указанного вида, которое нужно задать, чтобы вычислить $f(x_1, \ldots, x_n)$.

В доказательствах нижних оценок используется метод противника. Будем играть в модели разрешающих деревьев. Противник задаёт какой-нибудь вход в алгоритм, в процессе возможно видоизменяя его, но так, чтобы его ответы согласовывались с предыдущими его ответами и не противоречили реальности. Тогда алгоритм пытается выдасть ответ за как можно меньшее число вопросов, а противник (за него будем играть мы) наоборот пытается увеличить это число вопросов. То есть алгоритм играет за MIN, а мы играем за MAX. У такой игры есть цена k, то есть такое число вопросов, что алгоритм всегда может выдасть правильный ответ за $\leqslant k$ вопросов, а противник задать такой вход, чтобы алгоритму нужно было задать $\geqslant k$ вопросов. Тогда число k - это будет необходимое число вопросов.

Решим такую задачу: нужно проверить связность графа. Введём булеву функцию $CONN : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$ от $\binom{n}{2}$ переменных, где x_{ij} - есть ребро ли ребро (1), или нет (0). То есть функция $CONN$ принимает граф (множество его рёбер) и выдаёт 1, если он связен, 0 - в противоположном случае.

Нужно узнать сложность булевой функции в модели, указанной выше.

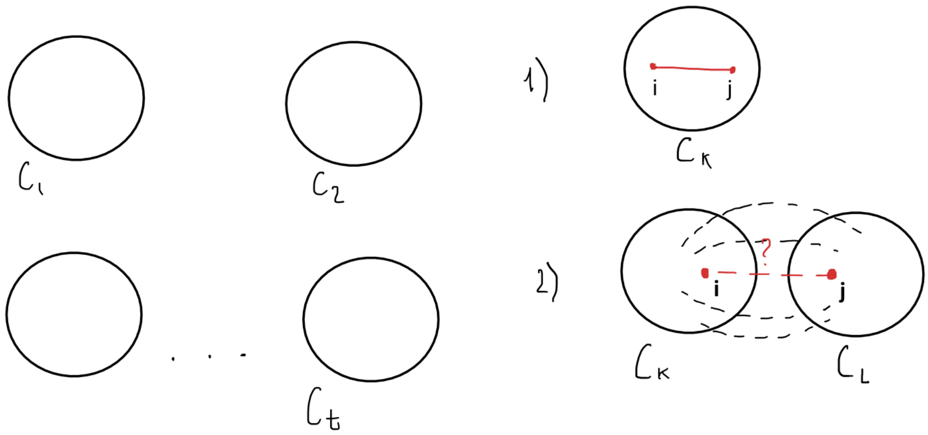
Утверждение: Сложность функции $CONN$ в модели булевых функций $= \binom{n}{2}$

Доказательство:

Достаточность: Достаточность очевидна, можно просто задать вопрос про каждое ребро (которых $\binom{n}{2}$ штук) и в получившемся графе проверить связность.

Необходимость: Играем за противника. В данной игре на самом деле даже не важна согласованность действий противника, поскольку рёбра не зависят друг от друга (хотя, конечно, если вопрос повторяется дважды - каждый раз нужно отвечать одно и то же). Так что требуется описать только стратегию противнику.

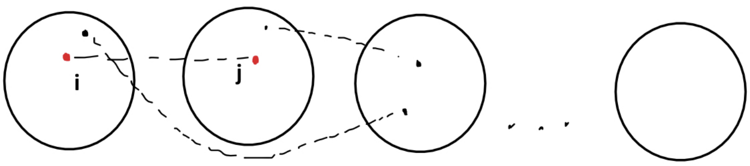
На конкретном ходе у нас есть какие-то компоненты связности (изначально точки). Есть несколько ситуаций, в зависимости от того, про какие рёбра был задан вопрос:



1. Вопрос задан про ребро между вершинами i и j внутри одной компоненты связности. В таком случае $x_{ij} = 1$ (если эта переменная не спрашивалась ранее).

2. Вопрос задан про ребро между вершинами i и j из разных компонент связности. В таком, случае, если про все рёбра из C_k в C_l были даны ответы "нет"(0), то $x_{ij} = 1$, иначе $x_{ij} = 0$.

Предположим, что алгоритм не спрашивал про некоторое ребро x_{ij} и при этом выдал ответ. Чтобы прийти к противоречию, нужно найти два входа и со связным и не связным графом, в зависимости от того, какое ребро находится на месте x_{ij}.



Посмотрим на то, есть ли путь между вершинами i и j (это и нужно для связности). Во-первых, заметим, что при расширении компоненты связности (когда мы соединяем две), все ребра внутри компоненты связности нам известны (показывается индуктивно). Поэтому i и j не могли быть связаны путём (иначе они лежат в одной компоненте связности, но все рёбра внутри компоненты связности должны быть известны, а про x_{ij} информации нет). Значит i и j лежат в разных компонентах связности. Могут быть и другие компоненты, не содержащие i и j, но при этом не по построению не бывает, что между двумя компонентами рёбер нет совсем (тоже сохраняется индуктивно). Значит алгоритм просто не спросил про нужное ребро между этими компонентами. Поэтому если всех этих неспрошенных рёбер нет, то граф несвязен. А если они все есть - то он связен. Поэтому нельзя не спросить про какое-то ребро, иначе мы точно не можем определить, связен граф или нет. Значит $\binom{n}{2}$ вопросов необходимо. Понятно, что и в неадаптивном протоколе меньшее число вопросов нельзя было задать (неадаптивный только сложнее).

2.24 Схема линейного размера для сложения двоичных чисел. Вычисление произвольной булевой функции от n переменных схемой размера $O(n \cdot 2^n)$. Существование функций с экспоненциальной схемной сложностью $\Omega(\frac{2^n}{n})$

Схема линейного размера для сложения двоичных чисел

Пусть нам даны две n-битовых двоичных записи чисел x и y и мы хотим вычислить двоичную запись их суммы $z = x + y$. Для удобства обозначим $x = x_{n-1}...x_1x_0$, где x_0 младший разряд двоичной записи. Аналогично, $y = y_{n-1}...y_1y_0$. Во-первых, заметим, что в двоичной записи z будет не более $n+1$ разрядов. Так что мы хотим построить схему с $2n$ входами и $n+1$ выходом.

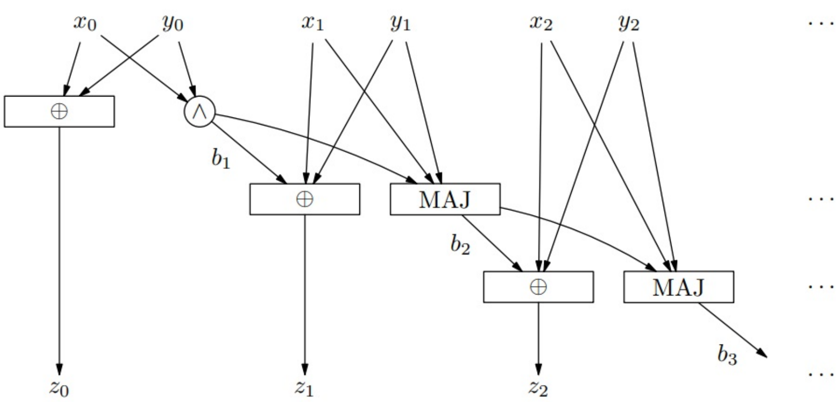
Идея конструкции схемы будет та же, что и в обычном школьном сложении в столбик. Мы будем складывать числа x и y поразрядно, попутно вычисляя биты переноса в следующий разряд.

Для удобства будем обозначать через b_i бит, который переносится в i-ый разряд из предыдущих.

Заметим, что мы уже готовы вычислить первый разряд ответа $z_0 = x_0 \oplus y_0$. Конечно, мы не можем сразу применить операцию $\oplus$, но выше мы показали, как её можно вычислить небольшой схемой. Добавим эту маленькую схему в нашу как подсхему. Далее, заметим, что $b_1 = x_0 \wedge y_0$, добавим соответствующий элемент в схему. Перейдём к следующему разряду. Здесь $z_1 = x_1 \oplus y_1 \oplus b_1$ и $b_2 = MAJ_3(x_1, y_1, b_1)$.

Для вычисления первого выражения добавим сначала подсхему, вычисляющую промежуточную величину $c_1 = x_1 \oplus y_1$, а затем подсхему, вычисляющую $z_1 = c_1 \oplus b_1$ Для вычисления b_2 просто добавим подсхему, вычисляющую функцию MAJ_3. Такая схема также приведена выше. Дальше, случай произвольных z_i и b_i полностью аналогичен случаю z_1 и b_1 и мы можем последовательно вычислить все эти значения.

Приведем пример визуализации для сложения чисел:



Оценим теперь размер описанной схемы. Для каждого разряда ответа нам нужно не больше двух раз применить подсхему для вычисления функции $\oplus$ и не более одного раза подсхему для вычисления MAJ_3. Все эти схемы имеют фиксированный размер, так что для вычисления каждого разряда z мы используем фиксированное число элементов, не зависящее от числа входных переменных. Поэтому всего в схеме $O(n)$ элементов.

Вычисление произвольной булевой функции от n переменных схемой размера $O(n \cdot 2^n)$

Пусть имеется функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Тогда такая функция может быть вычислена схемой размера $O(n \cdot 2^n)$.

Доказательство:

Мы знаем, что любая булева функция представляется в в виде СДНФ:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \\ f(\alpha)=1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

Напомним: $x^\alpha = \begin{cases} x, \, \alpha = 1 \\ \neg x, \, \alpha = 0 \end{cases}$

Понятно, что число дизъюнкций не превышает 2^n, а число элементов в каждом из конъюнктов не превышает n. Таким образом, при вычислении функции на все дизъюнкции мы потратим не более 2^n операций, а внутри каждого конъюнкта мы используем не более $n + n - 1$ операции (может быть n отрицаний, и еще надо добавить $n - 1$ конъюнкцию). Итого получили, что общее число операций не превысит $2^n + 2^n(2n - 1) = 2n \cdot 2^n = O(n \cdot 2^n)$ операций.

Существование функций с экспоненциальной схемной сложностью $\Omega(\frac{2^n}{n})$

Для всякого $n > 10$ существует функция $f : 0, 1^n \to 0, 1$, которую нельзя вычислить схемой размера меньше $\frac{2^n}{10n}$.

Доказательство:

Для доказательства применим мощностной метод: докажем, что функций больше, чем схем нужного размера. Тогда схем не хватит, чтобы вычислить все функции.

Понятно, что булевых функций от n переменных 2^{2^n}.

Оценим количество схем размера S (в нашем случае $S = \frac{2^n}{10n}$. Причем стоит отметить, что если мы вычислили функцию схемой размера меньше S, то мы можем добавить некоторое количество фиктивных переменных так, чтобы размер схемы стал равен S.

Посчитаем количество бит, необходимых для задания схемы. Теперь сделаем для себя некоторое удобство, чтобы было легче описать нашу схему, - а именно, выпишем все элементы схемы, включая переменные:

$$x_1, x_2, ..., x_n, g_1, g_2, ..., g_s$$

Теперь надо понять, как мы можем закодировать нашу последовательность. Для каждого элемента нам нужно сделать две вещи:

1. Указать два предыдущих элемента (в смысле из каких двух элементов был составлен данный).
2. Указать, какая операция была использована, чтобы получить данный элемент (конъюнкция, дизъюнкция или отрицание).

Для первого случая нам потребуется не более $2 \cdot log_2(n + S)$ бит (для каждого из двуз предыдущих элементов потребуется не более $log_2(n + S)$ бит).

Далее, для второго случая нам достаточно 2 бит, чтобы указать какой тип операции был использован.

Итого для каждого из S элементов в схеме потребуется $2(1 + log_2(n + S)$ бит. Тогда для всей схемы получаем итоговый размер $2S(1 + log_2(n + S)$ бит. Сделаем оценку на полученное число:

$$2S(1 + log_2(n + S) \leqslant 2S \cdot (2 + log_2 S) \leqslant 4S \cdot log_2 S$$

При $S = \frac{2^n}{10n}$ получаем:

$$4 \cdot \frac{2^n}{10n} \cdot (n - log_2(10n)) \leqslant 2 \cdot \frac{2^n}{5}$$

Поэтому количество схем размера S не больше, чем количество таких строк, то есть не больше $2^{2 \cdot \frac{2^n}{5}}$, что меньше, чем кол-во всех булевых функций (2^{2^n}), следовательно, не всякую функцию можно вычислить схемой размера S.

Ч.Т.Д

2.25 Глубина булевой схемы. Построение схемы для функции CONN, определяющей связность неори- ентированного графа на n вершинах (два варианта для размера и глубины).

Давайте посчитаем пример, связанный с функцией $CONN : \{0,1\}^{\binom{n}{2}} \to \{0,1\}$

Хочется, понять, как можно просто построить схему, которая её вычисляет и при этом может быть сэкономить на глубине и понять какой тут размер в теории возможен.

Мы вводим, так называемую модифицированную матрицу смежности:

Мы берём граф G и рассматриваем матрицу $A(G)$ - это матрица n на n, состоит из элементов

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ соединены ребром и } i \neq j \\ 0, \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не соединены ребром и } i \neq j \\ 1, \text{если } i = j \end{cases}$$

У матрицы смежности по диагонали обычно стоят нули, но мы поставим единицы, потому что единицы будут соответствовать петлям. И мы понимаем, чтобы проверить, связен ли граф, надо просто понять, есть ли путь просто вершины u в v какой-то длины и длину эту можно ограничить числом вершин, то есть длина должна быть не больше, чем $n-1$. Но за счёт того, что у нас есть петли мы сможем найти путь длины ровно $n-1$. И вот эта информация как раз и хранится в степенях матрицы $A(G)$

Утверждение: Матрица A^k на позиции a_{ij} содержит количество путей длины k из v_i в v_j.

Доказательство:

1. Будем вести индукцию по k.

   База: $k = 1$ - очевидно.

   Переход: $k-1 \to k$.

   $A^k = A^{k-1} \cdot A$, а $a_{ij}^{(k)} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{it}^{(k-1)} \cdot a_{tj}$

   Однако посмотрим на то, что написано с комбинаторной точки зрения. Вот у нас есть вершины v_i, v_t, v_j и мы хотим посчитать количество путей длины k из v_i в v_j. Для этого мы проведём одно ребро, если оно есть из v_j в v_t и будем считать количество путей длины $k-1$ из v_i в v_t. Как раз тогда a_{tj} будет отвечать за наличие ребра между v_t и v_j и тогда мы просто суммируем по всем таким вершинам v_t, а это ровно то, что у нас и написано.

Ч.Т.Д.

Ну и при построении схемы возникает потребность в подсчёте A^{n-1}. Чтобы это сделать, давайте будем возводить матрицу в степень $n-1$ в булевом смысле, то есть сложение заменим на $\vee$, а умножение на $\wedge$.

Тогда конкретно формула матричного произведения принимает вид: $(A \cdot B)_{(ij)} = \bigvee\limits_{t=1}^{n} A_{(i,t)} \wedge B_{(t,j)}$

Однако теперь,

$$A^k_{(i,k)} = \begin{cases} 1, \text{если } \exists \text{ путь длины } k \text{ из } v_i \text{ в } v_j \\ \text{иначе} \end{cases}$$

Поэтому теперь нам достаточно возвести матрицу в $n-1$ степень и проверить, что она состоит из всех единиц.

Ну на самом деле удобно вычислять степень не $n-1$, а $2^m (2^m \geq n \implies m = \lceil log_2(n) \rceil)$ какую-то, для быстрого возведения в степень.

Ну и тогда получаем, что на каждом шаге мы будем возводить матрицу в квадрат. Это занимает порядка n^3 действий, ну и таких шагов будет m штук, поэтому схема будет размера порядка $O(n^3 log_2(n))$ Ну там ещё надо будет взять конъюнкцию по всем n^2 элементам матрицы, чтобы проверить, что там все единички, ну это ещё n^2 действий, но сложность это не поменяет.

А вот , что касается глубины, то мы делаем m операций и каждую матрицу мы вычисляем дизъюнкцией и глубина там $log_2(n)$(было обсуждено в первом примере), поэтому глубина здесь $O(log_2^2(n))$, ну на самом деле там ещё нужно из-за конъюнкции $log_2(n^2)$, итого выйдет $O(log_2^2(n) + log_2(n^2)) = O(log_2^2(n))$.

Здесь можно немножечко сэкономить в размере и посчитать не за $n^3 log_2(n)$, а за n^3, потому что на самом деле нам не нужна информация про всю матрицу, а нужна информация только про её первый столбец, потому что если из первой вершины достижимы все другие, то это уже означает, что граф связен.

То есть должно быть выполнено вот такое:

$$A^{N(\geq n-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Умножение здесь подразумевается булево.

Теперь мы можем вычислять с конца:

$$\left(A \dots \left(A\left(A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)\right)\dots\right)$$

Теперь умножение матрицы на столбец занимает n^2 операций, ну и делаем так n раз и получим порядка n^3 операций. То есть размер - это $O(n^3)$

А глубиной мы теперь пожертвовали и теперь она равна $O(nlog_2(n))$

2.26 Схемная сложность булевой функции.Верхняя и нижняя оценки для схемной сложности функции XOR от n переменных.

Теорема: Схемная сложность $XOR_n \geqslant 2n - 1$

Доказательство:

- Доказательство буду вести по индукцией по n, однако хитрой индукцией. Сразу для функции XOR_n и её отрицания - $\neg XOR_n$

  Мы раньше говорили, что в схеме будем допускать только элементы $\vee, \wedge, \neg$, однако в этом доказательстве будем допускать схемы более общего характера, поэтому будем допускать, что элементами схемы могут быть: $(h_i^a \wedge h_j^b)^c$

  Тут имеется в виду, что $x^a = \begin{cases} x, \text{если } a = 1 \\ \neg x, \text{если } a = 0 \end{cases}$

  Что такое h_i и h_j?

  Ну вот раньше у нас были функции $g_1, g_2, ..., g_s$, такие что $g_k = \left[\begin{array}{c} \neg h_i \\ h_i \wedge h_j \\ h_i \vee h_i \end{array}\right.$, где h_p - это или предыдущий элемент или переменная, которая встречалась раньше.

  Теперь же мы просто рассматриваем более общие элементы.

  Примеры:

-
  - $a = b = c = 1$, тогда получаем $h_i \wedge h_j$
  - $a = b = c = 0$, тогда получаем $h_i \vee h_j$
  - $i = j$ и $a = b = 1$, тогда получим или h_i, или $\neg h_i$ в зависимости от того, чему равно c
  - $i = j$ и $a = 0, b = 1$, тогда мы получаем или 0, или 1

  Отсюда видно, что размер новое схемы будет точно не меньше размера новой схемы, потому что элементы старой схемы включены в элементы новой схемы, что мы и показали в примерах, однако в новой схеме мы можем получать и другие элементы другими комбинациями a,b,c.

- Теперь запускаем индукцию.

  База: n $= 1$ и получим, что нам будет необходимо для $XOR_1 = x_1$ минимум 1 элемента в схеме. Ну это правда, потому что нам нужен какой-то выход в схеме(тут, конечно, вопрос с обозначениями, но мы выход из схемы в данном случае считаем за элемент).

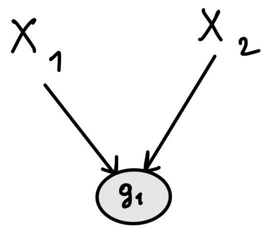
  Переход: $n - 1 \to n$

  Рассмотрим "новую"схему минимального размера, которая имеет строго меньше, чем $2n - 1$ элемента, которая вычисляет XOR_n или $\neg XOR_n$.

  У нас есть n переменных x_1,x_2,...x_n и вот в этой схеме наши элементы как-то устроены, пусть это $g_1, g_2, ..., g_s = (XOR_n)^\alpha$

  Берём первый элемент g_1, понятно, что в первый элемент мы подставляли две переменные или одну переменную.

  Не умоляя общности давайте обозначим эти переменные за x_1 и x_2, тогда имеем, что



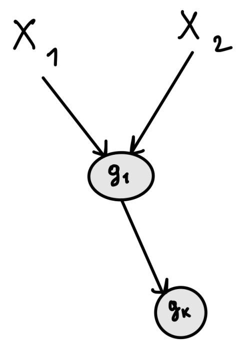
Замечание: $(x_i^a \wedge x_j^b)^c \neq x_i \oplus x_j$ ни при каких a,b,c, потому что $\oplus$ принимает две единицы и два нуля, а та конъюнкция истинна только на одном наборе (x_i,x_j)

Это замечание просто к тому, чтобы было понятно, что мы не сможем на первом шаге вычислить XOR_2, то есть $g_1 \neq XOR_2$.

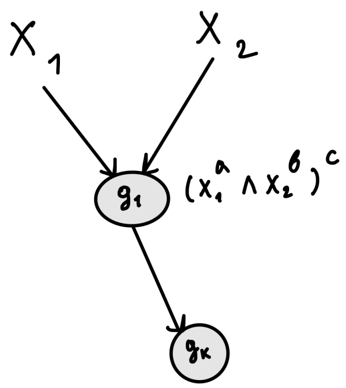
Значит, элемент g_1 участвовал в дальнейшей реализации нашей схемы, то есть он поступал в какой-то элемент g_k. (может быть в несколько поступал, но вот мы конкретное место выберем и посмотрим туда)

Почему? Ну если это не так, то он не помогал вычислять XOR_n, а значит бы не нужный этой схеме, поэтому мы бы его выкинули и получили бы схему меньшего размера, но по условию схема была минимального размера.

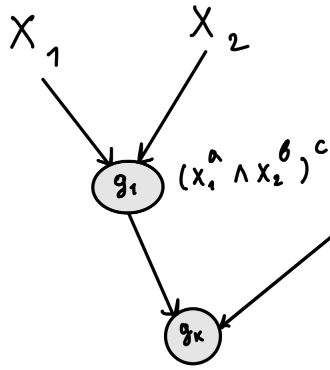
Значит, имеем вот, что



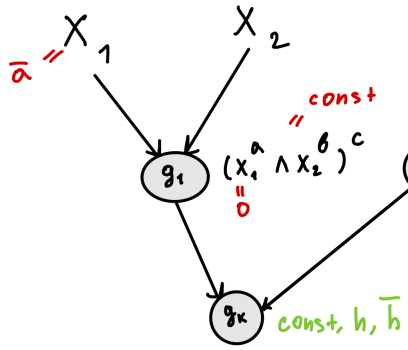
Давайте подпишем, что такое g_1.



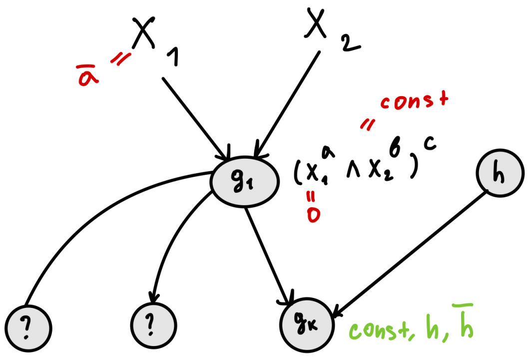
А g_k - это тоже элемент которому на вход что-то приходило, одна из частей входа - это g_1, а вторая пусть будет h.



Давайте теперь поменяем вход и подставим вместо x_1 - $\neg a$ и получим, что $g_1 = ((\neg a)^a \wedge x_2^b)^c = (0 \wedge x_2^b)^c = 0$. То есть мы получили, что g_1 стал константой. Тогда что можно сказать про g_k? Ну на самом деле так как там стоит $(g_1^a \wedge h^b)^c$, а g_1 - это или 0 или 1, то получаем, что в g_k может стоять или константа, или $\neg h$, или h



Ну от g_1 вероятно мог подаваться не только на g_k, но и в какие-то другие элементы, изобразим их.



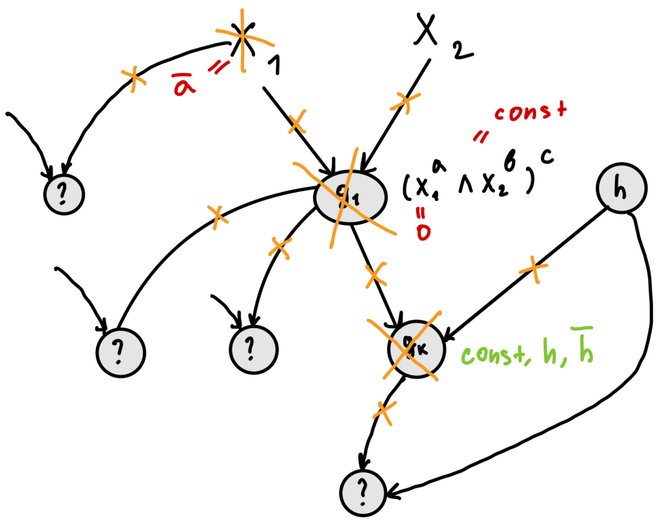
Теперь мы делаем следующее. Мы удаляем из схемы g_1,g_k,x_1.

Что произошло с функцией после всех предыдущих манипуляций? Ну после подстановки в XOR_n вместо одной из переменных константы мы получаем или XOR_{n-1} или $\neg XOR_{n-1}$. Почему? Ну просто из-за того, что $1 \oplus x_1 \oplus x_2 = \neg(x_1 \oplus x_2)$ и $0 \oplus x_1 \oplus x_2 = x_1 \oplus x_2$

Однако теперь схема может стать не совсем корректной, поэтому нам надо поправить граф, который получился, чтобы он стал настоящей схемой

Какая у нас есть проблема? У нас g_k, g_1, x_1 кому-то могли подаваться на вход.

Но на самом деле проблемы нет, потому что мы можем просто заметить, что так как x_1 и g_1 стали константами, то мы можем, если они поступали куда-то, просто оставить второй вход, который шёл к этим элементам. А что касается g_k, то так как он что-то из $const, h, \neg h$, то можем направить, если он куда-то поступал, в его входной элемент просто h, потому что за счёт второго входа мы сможем использовать как раз $const, h, \neg h$.



Ну тут есть ещё небольшой нюансик с тем, что, кто нам сказал, что h - это функция, ведь это может быть переменной. Но на самом деле это не проблема, а вот что если у нас h был равен g_1 или x_1,например? Ну тогда раз это у нас константы, то по-прежнему всё хорошо, а если он был равен g_k, то у же было сказано, что делать - надо заменять просто на h.

Итого, мы получили корректную схему, вычисляющую XOR_{n-1} или $\neg XOR_{n-1}$ размера $<$ 2n-3, но по предположению индукции у нас схема была размера $\geqslant 2n-3$ - противоречие!

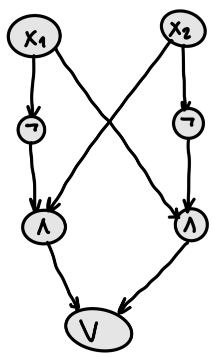
Значит схемная сложность $XOR_n \geq 2n-1$

Ч.Т.Д.

То, что мы сейчас доказали - это доказали нижнюю оценку.

Однако очень просто можно показать верхнюю оценку.

Заметим, что для выражения XOR_2 нам понадобится 5 операций



А для XOR_3 нам понадобится ещё 5 операций, ну и тд, поэтому понятно, что верхняя оценка на сложность схемы XOR_n - это $5(n-1)$

3 Семинары

3.1 Семинар 16

(Никита)

3.1.1 Задача 1

Для начала зафиксируем утверждении из Лекции 15:

Утверждение. $\chi_{G-uv}(x) = \chi_G(x) + \chi_{G\cdot uv}(x)$, если $\{u, v\} \in E(G)$.

По условию $G = C_n$. Отсюда легко выражается, что $\chi_{C_n}(x) = \chi_{C_n - uv}(x) - \chi_{C_n \cdot uv}(x)$, где $\chi_{C_n \cdot uv}$ на самом деле хроматический многочлен для простого цикла на $n-1$-й вершине, а $\chi_{C-uv}(x)$ - хроматический многочлен для дерева, который мы научились считать в Лекции 15 (см. примеры оттуда). Поэтому можно просто доказать по индукции следующую формулу, полученную методом пристального взгляда:

$\chi_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1)$

Доказательство:

База. Легко можно убедиться руками, что $C_3 = x(x-1)(x-2)$. По предположению $C_3 = (x-1)^3 + (-1)^3(x-1) = (x-1)^3 - (x-1) = (x-1)(x^2 - 2x + 1 - 1) = x(x-1)(x-2)$. База верна.

Переход. Мы знаем, что $\chi_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1)$, нужно показать, что $\chi_{C_{n+1}}(x) = (x-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(x-1)$.

По утверждению выше $\chi_{C_{n+1}}(x) = \chi_{C_{n+1}-uv}(x) - \chi_{C_{n+1} \cdot uv}(x) = x(x-1)^n - \chi_{C_n}(x) = x(x-1)^n - (x-1)^n - (-1)^n(x-1) = (x-1)^n(x-1) + (-1)^{n+1}(x-1) = (x-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}(x-1)$ ■

Ответ: $\chi_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1)$

3.1.2 Задача 2

$\chi_G(x) = x(x-1)^{n-1}$. Можем заметить, что после раскрытия скобок коэффициент при x^{n-1} будет равен $-1 \cdot \binom{n-1}{1} = -(n-1)$, т.е. $|E(G)| = n-1$, а младшая степень равна 1, значит в графе 1 компонента связности (G - связен). В сумме эти два замечания дают одно из эквивалентных определений дерева.

Ответ: Да, всегда

3.1.3 Задача 3

Введем вспомогательную случайную величину (индикаторную функцию) $I_k = \begin{cases} 1, \text{ если } k\text{-ый элемент лежит в } S_p \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Теперь опрeделим случайную величину так: $I = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$.

Тогда $E[I] = \sum\limits_{k=1}^{n} E[I_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot p = np$.

Ответ: np

3.1.4 Задача 4

а) Обозначим суммарное количество единиц подмножества S. Для каждой двоичной строки w обозначим через S_w случайную величину, которая равна $|w|$, т.е. количеству 1 в строке w, если эта строка попала в случайное множество, и 0 в противном случае. Тогда $S = \sum\limits_{w} S_w$. Поскольку все подмножества равновероятны, вероятность для каждого попасть в случайное множество равна $\frac{1}{2}$ (одинаково количество тех подмножеств, которые содержат w, и тех, которые не содержат). Поэтому математическое ожидание S_w равно $E[S_w] = \frac{1}{2} \cdot |w| + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{|w|}{2}$

Значит, $E[S]$ равно общему количеству единиц в двоичных строках длины n, делённому на 2. В каждом разряде во всех строках вместе ровно 2^{n-1} единиц (нулей и единиц в каждом разряде поровну). Поэтому общее количество единиц равно $n2^{n-1}$, откуда получаем $E[S] = n2^{n-2}$.

Ответ: $n2^{n-2}$

б) Рассматриваем аналогичные случайные величины S и S_w как в п. (а). Но теперь у нас пространство состоит из подмножеств мощности k. Какова вероятность события «строка w попала в случайное k-элементное подмножество строк X»? Всего k-элементных подмножеств строк $\binom{2^n}{k}$. Из них $\binom{2^n-1}{k-1}$ содержат данную строку w. Вероятность равна отношению этих двух чисел.

Получаем $E[S_w] = |w| \frac{\binom{2^n-1}{k-1}}{\binom{2^n}{k}} = \frac{|w|k}{2^n}$.

Отсюда, пользуясь вычислениями из п. (а), находим ответ:

$E[S] = \sum\limits_{w} E[S_w] = \frac{k}{2^n} \sum\limits_{w} |w| = \frac{k}{2^n} \cdot n2^{n-1} = \frac{kn}{2}$.

Ответ: $\frac{kn}{2}$

3.1.5 Задача 5

По определению математического ожидания: $E[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$. Давайте разобьём эту сумму на 3 суммы по разным значениям x_i.

Итак, $E[X] = \sum\limits_{i:x_i<3}^{n} x_i \cdot P(x_i) + \sum\limits_{i:x_i\geqslant 3\ \&\ x_i<6}^{n} x_i \cdot P(x_i) + \sum\limits_{i:x_i\geqslant 6}^{n} x_i \cdot P(x_i)$.

Давайте посчитаем каждую из вероятностей в этих трёх суммах. По условию, $P(x_i) = \frac{1}{3}|x_i < 3, P(x_i) = \frac{1}{6}|x_i \geqslant 6$, а значит $P(x_i) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}|3 \leqslant x_i < 6$.

Теперь давайте с учётом этого оценим снизу каждую из этих сумм. $\sum\limits_{i:x_i<3}^{n} x_i \cdot P(x_i) \geqslant 0$, так как по условию $x_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i:x_i\geqslant 3\ \&\ x_i<6}^{n} x_i \cdot P(x_i) \geqslant 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 1.5$ и $\sum\limits_{i:x_i\geqslant 6}^{n} x_i \cdot P(x_i) \geqslant 6 \cdot \dfrac{1}{6} = 1$ Тогда $E[X] \geqslant 1 + 1.5 + 0 = 2.5$. Получена нижняя оценка.

Давайте покажем, что она достигается. Пусть наша величина принимает значение 0 с вероятностью $\frac{1}{3}$, значение 6 с вероятностью $\frac{1}{6}$ и 3 с вероятностью $\frac{1}{2}$, тогда как раз-таки и получится 2.5.

Для получения оценки сверху давайте положим, что наша случайная величина принимает значение $m \geqslant 6$ при $x_i \geqslant 6$ и всё остальное так же, как и в предыдущем примере, тогда наше мат. ожидание можно записать вот так $E[X] = 1.5 + \frac{m}{6}$. Понятно, что я могу подобрать любое, сколь угодно большое число m, поэтому верхняя оценка на наше мат. ожидание - это $+\infty$.

Ответ: $[2.5\ ,\ +\infty)$

3.1.6 Задача 6

Пусть p - доля работ студента, оценка за которые меньше 4. Максимальная оценка, которую он мог получить за все работы гарантированно не меньше средней (здесь используется идея похожая на ту, что была в доказательстве леммы для общего случая вероятностного метода, см. лекцию 16). Запишем неравенство:

$3p + 10(1-p) \geqslant 6$
$3p + 10 - 10p \geqslant 6$
$4 \geqslant 7p$
$p \leqslant \frac{4}{7}$ ■

3.1.7 Задача 7

Для удобства будем обозначать $E[X]$ как EX.

Воспользуемся неравенством Чебышева: $P(|x - EX| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{DX}{\alpha^2}$.

Случайная величина $X = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i$, где $I_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ый элемент строки - единица} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

$EX = \frac{n}{2}$, $DX = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = E(\sum\limits_{i=1}^{n} I_i)^2 = E(\sum\limits_{i=1}^{n} I_i^2 + \sum\limits_{i\neq j}^{n} I_i I_j) = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}$.

Выше мы использовали, то что I^2 на самом деле равно I, поэтому $E(\sum\limits_{i=1}^{n} I_i^2) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} I_i) = EX = \frac{n}{2}$, а так же то, что выражение $I_i I_j$ равно 1 ровно в том, случае, когда обе индикаторных функции равны 1, вероятность чего равна $\frac{1}{4}$. Следовательно, $E(\sum\limits_{i\neq j}^{n} I_i I_j) = n(n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n(n-1)}{4}$ (Отметим, что $n(n-1)$ - количество мономов $I_i I_j$, где $i \neq j$).

Тогда $DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4} - (\frac{n}{2})^2 = \frac{n}{4}$, и тогда $P(...) \leqslant \frac{n}{4(\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4}$ ■

3.1.8 Задача 8

Будем рассматривать случайно выбранную перестановку из множества всех перестановок вершин графа.

Введём случайную величину X равную количеству соседних пар вершин в перестановке, которые являются рёбрами в графе (или что эквивалентно числу рёбер в графе, которые встречаются в виде соседних пар вершин в перестановке).

Введем индикаторную функцию $I_e = \begin{cases} 1, \text{ если ребро является парой в перестановке} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Тогда $X = \sum\limits_{e \in E} I_e$. Следовательно $EX = E(\sum\limits_{e \in E} I_e) = \sum\limits_{e \in E} EI_e$.

Осталось найти вероятность того, что ребро является парой в перестановке. Пусть есть некоторое случайное ребро $\{v, w\}$. Подходящих перестановок с этим ребром $2 \cdot n \cdot (n-2)!$ штук (выбираем n способами место для вершины v, потом 2-мя способами, справа или слева с учётом зацикливания по концам, место для вершины w, и просто расставляем как угодно $n-2$ оставшиеся вершины). Всего перестановок $n!$, поэтому вероятность того, что ребро подходящее: $\frac{2 \cdot n \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}$.

В графе по условию $\frac{nd}{2}$ рёбер, поэтому $EX = \sum\limits_{e \in E} EI_e = \frac{nd}{2} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{nd}{n-1} > \frac{nd}{n} = d$. Тогда по вероятностному методу найдётся такая перестановка, что более d пар в ней будут являться рёбрами графа $\blacksquare$

3.1.9 Задача 9

Случайная величина $X = \sum\limits_{i=1}^{15} I_i$, где $I_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i\text{-ая девочка стоит левее всех мальчиков} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Теперь для подсчёта мат. ожидания осталось узнать вероятность того, что выбранная девочка стоит левее всех мальчиков. Это можно сделать с помощью идеи близкой к методу шаров и перегородок: давайте выстроим подряд 15 мальчиков, образовалось (с учётом мест перед 1-м и после 15-го) 16 промежутков, куда мы можем поставить девочек. Чтобы девочка была левее всех мальчиков, нужно просто, чтобы она стояла в первом промежутке. Вероятность этого - $\frac{1}{16}$.

Тогда $EX = E(\sum\limits_{i=1}^{15} I_i) = 15 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Ответ: $\frac{15}{16}$

3.1.10 Задача 10

Не решали на семинаре (возможно, появится после факультатива).

3.2 Семинар 17

(Никита)

3.2.1 Задача 1

Условие: Докажите, что вершины полного графа K_n можно раскрасить в два цвета так, что в полученном графе есть не более

$$\binom{n}{t} 2^{1-t}$$

одноцветных подграфов K_t

Решение:

Введём случайную величину X равную количеству одноцветных подграфов на t вершинах.

Введем индикаторную функцию $I_{K_t} = \begin{cases} 1, \text{ если подграф одноцветен} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Тогда $X = \sum\limits_{K_t \in G} I_{K_t}$. Следовательно $EX = E(\sum\limits_{K_t \in G} I_{K_t}) = \sum\limits_{K_t \in G} EI_{K_t}$.

Осталось найти вероятность того, что выбранный подграф K_t будет одноцветным. У нас есть всего 2 цвета (НУО чёрный и белый), каждая вершина независимо красится или в черный, или в белый с вероятностью $\frac{1}{2}$, поэтому, чтобы подграф был одноцветным, все вершины должны быть полностью чёрными или полностью белыми. Вероятность этого: $2 \cdot (\frac{1}{2})^t = (\frac{1}{2})^{t-1} = 2^{1-t}$. Всего в полном графе есть $\binom{n}{t}$ полных подграфов на t вершинах, следовательно $EX = \sum\limits_{K_t \in G} EI_{K_t} = \binom{n}{t} 2^{1-t}$, а тогда по вероятностному методу найдётся раскраска вершин, при которой количество одноцветных подграфов будет $\leqslant \binom{n}{t} 2^{1-t}$ $\blacksquare$

3.2.2 Задача 2 (дублирует 8 с семинара 16)

Условие: В неориентированном графе (без петель и кратных ребер) n вершин и $\frac{nd}{2}$ ребер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что существует такое упорядочение вершин графа $(v_1,v_2,...,v_n)$, в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более d из n пар $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, ... , $\{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ являются ребрами графа.

Решение:

Будем рассматривать случайно выбранную перестановку из множества всех перестановок вершин графа.

Введём случайную величину X равную количеству соседних пар вершин в перестановке, которые являются рёбрами в графе (или что эквивалентно числу рёбер в графе, которые встречаются в виде соседних пар вершин в перестановке).

Введем индикаторную функцию $I_e = \begin{cases} 1, \text{ если ребро является парой в перестановке} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Тогда $X = \sum\limits_{e \in E} I_e$. Следовательно $EX = E(\sum\limits_{e \in E} I_e) = \sum\limits_{e \in E} EI_e$.

Осталось найти вероятность того, что ребро является парой в перестановке. Пусть есть некоторое случайное ребро $\{v, w\}$. Подходящих перестановок с этим ребром $2 \cdot n \cdot (n-2)!$ штук (выбираем n способами место для вершины v, потом 2-мя способами, справа или слева с учётом зацикливания по концам, место для вершины w, и просто расставляем как угодно $n-2$ оставшиеся вершины). Всего перестановок $n!$, поэтому вероятность того, что ребро подходящее: $\frac{2 \cdot n \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}$.

В графе по условию $\frac{nd}{2}$ рёбер, поэтому $EX = \sum\limits_{e \in E} EI_e = \frac{nd}{2} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{nd}{n-1} > \frac{nd}{n} = d$. Тогда по вероятностному методу найдётся такая перестановка, что более d пар в ней будут являться рёбрами графа ■

3.2.3 Задача 3

Условие: Для одного и того же вероятностного пространства приведите пример двух зависимых случаиных величин, а также двух независимых случаиных величин.

Решение:

Определим вероятностное пространство, как множество всех двоичных слов длины 2 (их всего 4: 00, 01, 10, 11).

а) Зависимые случайные величины.

Введём случаные величины X - кол-во нулей в слове, Y - количество единиц в слове. Если данные величины независимы, то для них верно следующее:

Случайные величины X,Y : $\Omega \to \mathbb{R}$ называются независимыми, если $\forall x$,$y \in \mathbb{R}$ события $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ и $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = y\}$ независимы. (напомню, что события A,B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Приведём такие x, y, при которых утверждение выше неверно: $x = 2, y = 2$. Можем видеть, что $P(X = 2) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{4}$, однако вероятность того $P(X = 2, Y = 2) = 0$, т.к. нет чисел с двумя нулями и единицами одновременно. Значит $P(X = 2) \cdot P(Y = 2) \neq P(X = 2, Y = 2)$, следовательно X и Y зависимы.

б) Независимые случайные величины.

Введём случайные величины X - значение в первомразряде (0 или 1), Y - значение во втором разряде (0 или 1). Независимость величин тривиальна и предоставляется на проверку читателю.

3.2.4 Задача 4

Условие: Что можно сказать про случайную величину X, если известно, что $E[X^2] = (E[X])^2$?

Решение:

Давайте для начала докажем лемму:

Если $f \geqslant 0$ и $Ef = 0$, то $f = 0$. Доказать этот факт можно разными способами, мы воспользуемся неравенством Маркова:

$P(f \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E[f]}{\alpha}$ при подстановке туда $Ef = 0$ превращается в $P(f \geqslant \alpha) \leqslant 0 \ \forall \alpha > 0$. Вероятность по определению неотрицательна, поэтому $P(f \geqslant \alpha) = 0 \ \forall \alpha > 0$. Но раз вероятность того, что f принимает положительное значение равна 0 и $f \geqslant 0$, то f это константный 0 ■

Теперь перейдём к основной части. По условию $EX^2 = (EX)^2$, значит $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 = 0$. По лемме из того, что $E(X - EX)^2 = 0$, следует, что $(X - EX)^2 = 0$, значит $X = EX$.

Ответ: про такую случайную величину мы можем сказать, что она равна своему мат. ожиданию.

3.2.5 Задача 5

Условие: Про независимые случайные величины X_1,X_2,X_3,X_4 известно, что $E[X_i] = -1, D[X_i] = 1$. Найдите $D[X_1X_2X_3X_4]$.

Решение:

$EX_i = -1, DX_i = 1$. $DX_i = EX_I^2 - (EX_i)^2 \Rightarrow EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = 1 + (-1)^2 = 2$.

Отметим, что для независимых величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ верно, что $EX_1X_2 \ldots X_N = EX_1 \cdot EX_2 \ldots EX_n$ (доказывалось на лекции). Помимо того, далее мы воспользуемся фактом, что $f(X)$, $g(Y)$ независимы, если X, Y независимы (это доказывается чуть более сложно, заинтересованный читатель может доказать данный факт в качестве упражнения или же привлечь дополнительную литературу - по крайне мере строгое обоснование на семинаре не приводилось).

Тогда $DX_1X_2X_3X_4 = E(X_1X_2X_3X_4)^2 - (EX_1X_2X_3X_4)^2 = EX_1^2X_2^2X_3^2X_4^2 - (EX_1)^2(EX_2)^2(EX_3)^2(EX_4)^2 =$
$EX_1^2EX_2^2EX_3^2EX_4^2 - (EX_1)^2(EX_2)^2(EX_3)^2(EX_4)^2 = 2^4 - (-1)^{2\cdot 4} = 16 - 1 = 15$.

Ответ: 15.

3.2.6 Задача 6

Условие: Пусть $X_i \in \{0, 1\}, i = 1$,2,..,n -независимые случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Рассмотрим $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Докажите, что существует некоторое $\gamma = O(\sqrt{n})$, для которого

$$P[X \geqslant \frac{n}{2} + \gamma] \leqslant \frac{1}{100}$$

Решение:

Уточняется.

3.2.7 Задача 7

Условие: Пусть $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ - булева функция и пусть A - вероятностный алгоритм, вычисляющий f, работающий за время $O(n^2)$ и ошибающийся с вероятностью $\frac{1}{3}$. Постройте вероятностный алгоритм B, вычисляющий f, работающий за время $O(n^2)$ и ошибающийся с вероятностью не более $\frac{1}{1000}$.

Решение:

Построим алгоритм B так: запустим 1000 раз алгоритм A и выберем то число, которое выдавалось чаще (при равенстве пусть выдаёт заведомо ошибочное число - например 2). Раз алгоритм A работал за $O(n^2)$, то и B будет работать за $O(n^2)$. Осталось проверить, что вероятность ошибки $\leqslant \frac{1}{1000}$:

Введем индикаторную функцию $I_i = \begin{cases} 1, \text{ если на } i\text{-м запуске алгоритма } A \text{ внутри } B, \text{ алгоритм } A \text{ ошибся} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$

Тогда $X = \sum\limits_{i=1}^{1000} I_i$ - количество ошибок в запусках алгоритма A внутри B. Чтобы алгоритм B в итоге выдал ошибочный ответ, нужно чтобы $X \geqslant 500$. Воспользуемся неравенством Чернова:

$\forall \varepsilon \in (0,1) \;\; P(X \geqslant (1+\varepsilon)pn) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2 np}{3}}$.

$P(X \geqslant 500) = P(X \geqslant (1 + \frac{1}{2})\frac{1000}{3}) \leqslant e^{\frac{-(\frac{1}{2})^2 \frac{1000}{3}}{3}} = e^{\frac{-1000}{36}}$. Последним шагом осталось показать что $e^{\frac{-1000}{36}} \leqslant \frac{1}{1000}$.

Сработает любая грубая оценка:

$e^{\frac{-1000}{36}} < e^{-20} < 2^{-20} = \frac{1}{1024^2} < \frac{1}{1000}$ ■

3.3 Семинар 18

(Никита)

3.3.1 Задача 1

Условие: Найдите обратную к производящей функции:

а) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$

б) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

Решение:

Эти задачи скорее решаются методом пристального взгляда и некоторой интуицией. Просто заметим, что для а) обратной будет $1 + x$. Это можно показать по определению: коэффициент при x^n будет равен $1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, а a_0 в действительности 1.

Аналогично для б) проверяется, что обратная это $1 - x^2$.

Ответ: а) $1 + x$; б) $1 - x^2$.

3.3.2 Задача 2

Условие: Найдите произведение следующих производящих функций:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$$

Решение:

Здесь мы воспользуемся фактом из задачи 3 (который мы докажем чуть ниже):

$(FG)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$

Заметим, что $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x}$, а $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ (было показано на лекции). Тогда $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots) = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ (см 1(б)).

Ответ: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$

3.3.3 Задача 3

Условие: Пусть F и G — обратимые производящие функции. Докажите, что $(FG)^{-1} = G^{-1}F^{-1}$.

Решение:

Достаточно проверить, что $FG \cdot G^{-1}F^{-1} = 1$. Пользуемся ассоциативностью умножения производящих функций: $FG \cdot G^{-1}F^{-1} = F(GG^{-1})F^{-1} = FF^{-1} = 1$ ■

3.3.4 Задача 4

Условие: Пусть A, B, C, D - обратимые функции. Докажите равенство:

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$

Решение:

Покажем следующий несложный факт, равенства $X = Y$ и $XZ = YZ$ эквивалентны, если Z - обратима. Следование справа налево очевидно, а слева направа импликация верна потому, что можно домножить на существующий обратный к Z и получить исходное равенство. Тогда домножим данное в задаче равенство на обратимую BD (обратима по задаче 3). Получится:

$AD + BC = AD + BC$, что верно. Значит и исходное было верно ■

3.3.5 Задача 5

Условие: Докажите равенство:

$(F^{-1})' = -\frac{F'}{F^2}$

Решение:

Воспользуемся доказанной на лекции формулой Лейбница для взятия производной $FF^{-1} = 1$:

$(FF^{-1})' = F'F^{-1} + F(F^{-1})'$

$(1)' = F'F^{-1} + F(F^{-1})'$

$0 = F'F^{-1} + F(F^{-1})'$, откуда $(F^{-1})' = -\frac{F'}{F^2}$ ■

3.3.6 Задача 6

Условие: Какие производящие функции обратимы, то есть для каких производящих функций g существует производящая функция f, такая что $f \cdot g = 1$?

Решение:

Пусть $g = g_0 + g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \ldots$, а $f = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \ldots$. Тогда $f \cdot g = f_0g_0 + (f_0g_1 + f_1g_0)x + (f_0g_2 + f_1g_1 + f_2g_0)x^2 + \ldots$. Коэффициенты функции f мы знаем, а функцию g будем строить пошагово. Свободный член $f \cdot g$ равен 1, а коэффициент при $x^n \, \forall n$ равен 0.

Запишем:

$f_0g_0 = 1$, значит $f_0 = \frac{1}{g_0}$, что верно при $g_0 \neq 1$ Рассмотрим следующее равенство $f_0g_1 + f_1g_0 = 0$. Это линейное уравнение с одной неизвестной g_1 и нулевым коэффициентом при ней, т.е. такое уравнение всегда имеет решение. Аналогично можем находить и следующие коэффициенты, так как в уравнении коэффициенте при x^k всегда будет участвовать ровно одна неизвестная g_k умноженная на что-то ненулевое (совсем строго это всё показывается по индукции). Вывод: единственное условие на то, чтобы функция была обратима, это наличие ненулевого свободного члена.

Ответ: $g_0 \neq 0$

3.3.7 Задача 7

Условие: Пусть a_n — число решений уравнения $x_1 + \ldots + x_k = n$ в целых неотрицательных числах. в целых неотрицательных числах. Пусть $F(x)$ — производящая функция для последовательности a_n. Докажите, что $F(x) = (1-x)^{-k}$.

Решение:

$F(x) = (1-x)^{-k} = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (1 + x + x^2 + \ldots)$ (k раз).

Тогда посмотрим чему равен коэффициент при x^n по определению: $\sum\limits_{x_1+\ldots+x_k} 1 \cdot \ldots \cdot 1 = a_n$ (иначе говоря, мы должны выбрать из каждой скобки свой член ряда, так чтобы сумма всех степеней при их x давала n, и перемножить числовые коэффициенты при всех выбранных членах рядов. А поскольку $1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$ мы для каждого решения уравнения $x_1 + \ldots + x_k = n$ прибавим единицу, то есть в точности посчитаем число решений a_n. Значит $(1-x)^{-k}$ - действительно производящая функция для последовательности a_n ■

3.3.8 Задача 8

Условие: Докажите, что для всех неотрицательных n верно:

а) $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$

б) $(1+x)^{-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$

3.3.9 Задача 9

Спасибо за решение и задачи Любови Николаевне

Условие: С помощью производящих функций найдите сумму $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

Решение:

Рассмотрим сначала последовательность 1,1,1,1,1,... и ее производящую функцию

$$F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Построим используя $F(x)$ производящую функцию последовательности 1,2,3,4,5,...

$$F'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Домножим $F'(x)$ на x и возьмем еще одну производную, чтобы получить производящую функцию последовательности $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

$$(x \cdot F'(x))' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Снова домножим получившуюся функцию на x и возьмем еще одну производную, чтобы получить производящую функцию последовательности $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

$$(x \cdot (x \cdot F'(x))')' = 1 + 2^3x + 3^3x^2 + 4^3x^3 + \cdots = \left(\frac{x+x^2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{(1+2x)(1-x)+3(x+x^2)}{(1-x)^4} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

Заметим, что если домножить некий формальный ряд

$$G(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2 + \ldots$$

на ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

то получится ряд

$$\frac{1}{1-x} \cdot G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(g_0 + g_1 + \cdots + g_k)x^k.$$

Поэтому для получения производящей функции последовательности $a_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ нужно производящую функцию последовательности $b_n = n^3$ домножить на $\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = 1^3 + (1^3+2^3)x + (1^3+2^3+3^3)x^2 + \ldots.$$

Нас интересует коэффициент данного ряда при x^{n-1}. Для того, чтобы было проще считать, разобьем дробь на сумму дробей:

$$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^5} = \frac{1}{(1-x)^5} + \frac{4x}{(1-x)^5} + \frac{x^2}{(1-x)^5}.$$

Вспомним, что (см. задачу 7 с семинара)

$$\frac{1}{(1-x)^5} = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^5 = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 x^k,$$

$$\frac{4x}{(1-x)^5} = 4x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^5 = \sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot C_{k+4}^4 x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot C_{k+3}^4 x^k,$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^5} = x^2(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^5 = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+4}^4 x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} C_{k+2}^4 x^k.$$

Откуда

$$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^5} = \sum_{k=0}^{\infty}(C_{k+4}^4 + 4 \cdot C_{k+3}^4 + C_{k+2}^4)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)}{4!} + \frac{4(k+3)(k+2)(k+1)k}{4!} + \frac{(k+2)(k+1)k(k-1)}{4!}\right)x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{((k+4)(k+3) + 4(k+3)k + k(k-1))(k+2)(k+1)}{4!}x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k^2+7k+12+4k^2+12k+k^2-k)(k+2)(k+1)}{4!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6k^2+18k+12)(k+2)(k+1)}{4!}x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k^2+3k+2)(k+2)(k+1)}{4}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4}x^k.$$

Ответ: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$.

Второй способ. Очень похоже на первый способ, но рассматривается конечный ряд.

Сразу ограничимся конечной суммой. То есть рассмотрим

$$F(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

С этой конечной суммой произведем те же операции (взятия производной и умножения на x)

$$1 + 2^3x + 3^3x^2 + 4^3x^3 + \cdots + n^3x^{n-1} = (x \cdot (x \cdot F'(x))')' = \left(x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)'\right)'\right)' =$$

$$\left(x \cdot \left(\frac{-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2} + x}{(1-x)^2}\right)'\right)' = \left(x \cdot \frac{-n^2x^{n+2} + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + x + 1}{(1-x)^3}\right)' =$$

$$\frac{n^3x^{n+3} + (-3n^3 - 3n^2 + 3n - 1)x^{n+2} + (3n^3 + 6n^2 - 4)x^{n+1} - (n+1)^3x^n + x^2 + 4x + 1}{(1-x)^4}.$$

Посчитать нам нужно значение этой функции при $x = 1$. Просто подставить не получится, т.к. знаменатель обратится в ноль. Можно посчитать предел, например, через правило Лопиталя (опять куча производных, но уже отдельно для числителя и знаменателя). Через правило Лопиталя: вычисляем четвертые производные числителя и знаменателя и подставляем $x = 1$:

$$\frac{n^3(n+3)(n+2)(n+1)n + (-3n^3 - 3n^2 + 3n - 1)(n+2)(n+1)n(n-1) +}{}$$

$$\frac{+(3n^3 + 6n^2 - 4)(n+1)n(n-1)(n-2) - (n+1)^3n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{4!} \cdot \big(n^3(n+3)(n+2) + (-3n^3 - 3n^2 + 3n - 1)(n+2)(n-1) +$$

$$+(3n^3 + 6n^2 - 4)(n-1)(n-2) - (n+1)^2(n-1)(n-2)(n-3)\big) = //\text{оно упрощается, записывать не хочу}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4!} \cdot (6n^2 + 6n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Ответ: $\left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$.

3.4 Семинар 19

(Илья)

3.4.1 Задача 1

Условие: Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами:

а) $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n, a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$

б) $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, a_0 = 2, a_1 = 0$

Решение:

а) Пусть $C(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$ - производящая функция для последовательности a_n.

Давайте домножим уравнение на x^{n+3} и получим, что $x^{n+3}a_{n+3} = -3x \cdot x^{n+2}a_{n+2} - 3x^2 \cdot x^{n+1}a_{n+1} - x^3 \cdot x^n a_n$

Просуммируем уравнение по всем $n \geqslant 0$ и получим, что $C(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 = -3x(C(x) - a_0 - a_1x) - 3x^2(C(x) - a_0) - x^3C(x)$

Отсюда, $C(x) - 1 = -3x(C(x) - 1) - 3x^2(C(x) - 1) - x^3C(x)$, значит $C(x) = \frac{3x+3x^2+1}{1+3x+3x^2+x^3} = \frac{1+3x+3x^2}{(x+1)^3}$

Мы хотим найти $a_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!}$. Но давайте заметим, что $C(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + 3\frac{x}{(x+1)^3} + 3\frac{x^2}{(x+1)^3}$ и каждое слагаемое отличается от $\frac{1}{(x+1)^3}$ только сдвигом коэффициентов на 1 и 2 соответственно.

Пусть $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$

Так что давайте найдём $b_n = \frac{f(x)^{(n)}(0)}{n!}$

Узнаём $f(x)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{2!(x+1)^{n+3}}$, тогда $b_n = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$

Тогда $a_n = b_n + 3b_{n-2} + 3b_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

б) Пусть $C(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$ - производящая функция для последовательности a_n.

Давайте домножим уравнение на x^{n+2} и получим, что $x^{n+2}a_{n+2} = x \cdot x^{n+1}a_{n+1} + 2x^2 \cdot x^n a_n$

Просуммируем уравнение по всем $n \geqslant 0$ и получим, что $C(x) - a_0 - a_1x = x(C(x) - a_0) + 2x^2C(x)$

Отсюда, $C(x) - 2 = x(C(x) - 2) + 2x^2C(x)$, значит $C(x) = \frac{2(x-1)}{2x^2+x-1} = \frac{2(x-1)}{(x+1)(2x-1)} = \frac{4}{3(x+1)} - \frac{2}{3(2x-1)}$

Мы хотим найти $a_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!}$. Тогда $C^{(n)}(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n n! \cdot 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$

Тогда $a_n = \frac{4(-1)^n + 2^{n+1}}{3}$

Ответ: $\begin{cases} \text{а)} C(x) = \frac{1+3x+3x^2}{(x+1)^3}, a_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ \text{б)} C(x) = \frac{2(x-1)}{(x+1)(2x-1)}, a_n = \frac{4(-1)^n+2^{n+1}}{3} \end{cases}$

3.4.2 Задача 2

Условие: Используя производящую функцию для чисел Фибоначчи F_n докажите тождество:

$$F_0 + F_1 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$$

Решение:

1.

3.4.3 Задача 3

Условие: Имеется неограниченное количество монет 1 рубль и 5 рублей. Обоначим через a_n число спосо- бов разменять n рублей этими монетами. Используя производящие функции, выпишите рекуррентное соотношение на a_n

Решение:

1. Запишем производящую $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + ...) = C(x)$. Причём коэффициент при t^n будет в точности равен a_n.
2. Немного преобразуем $C(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}$

3.4.4 Задача 4

Условие: Используя производящие функции, покажите, что любое натуральное число однозначно представ- ляется в виде суммы различных степеней двоек с целым неотрицательным показателем (т. е. однознач- но записывается в двоичной системе счисления). Докажите аналогичный результат для десятичной системы счисления.

Решение:

1.

3.4.5 Задача 5

Условие: Найдите число монотонных функций $f : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}$.

Решение:

1.

3.4.6 Задача 6

Определение: Производящую функцию назовем рациональной, если она представляется в виде отношения двух многочленов.

Условие: Существует ли последовательность, производящая функция которой не рациональна?

Решение:

1.

3.4.7 Задача 7

Условие: Докажите, что производящие функции следующих последовательностей рациональны: а) $a_n = \binom{n+m}{m}$; б) $a_n = \binom{n}{m}$.

Решение:

1.

3.4.8 Задача 8

Пусть $A(x) = \sum\limits_{ik=0}^{\infty} a_k x^k, B(x) = \sum\limits_{ik=0}^{\infty} b_k x^k$. Произведением Адамара назовем

$$A(x) \circ B(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k x^k$$

Условие: Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — рациональные производящие функции. Докажите, что $A(x) \circ B(x)$ рациональна.

Решение:

1.

3.4.9 Задача 9

Условие: Используя производящие функции, докажите, что число разбиений натурального числа n на раз- личные (положительные) слагаемые равно числу его разбиений на нечетные слагаемые.

Решение:

1.

3.4.10 Задача 10

Условие: Найдите число «чередующихся» перестановок $\sigma \in S_n$, т.е. таких, что $\sigma(1) < \sigma(2), \sigma(2) > \sigma(3), \sigma(3) < \sigma(4)$ и т.д.

Решение:

1.

4 Домашние задания

4.1 Домашнее задание 13

(Никита)

4.1.1 Задача 1

Условие: При бросании двух кубиков какова вероятность получить два одинаковых числа?

Решение:

Зафиксируем какое-нибудь из чисел от 1 до 6. Вероятность, что на одном кубике выпало это число и оно же на другом равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Всего чисел 6, поэтому общая вероятность $6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

4.1.2 Задача 3

Условие: Бросаем кубик четыре раза. Какова вероятность того, что выпадающие числа строго возрастают? Укажите числовой ответ с абсолютной погрешностью 0.1.

Решение:

Возьмём возрастающую последовательность 1,2,3,4,5,6.

Все подходящие под условие подпоследовательности получаются вычёркиванием из неё двух символов. Тогда посчитаем, сколько существует четырёхэлементных подмножеств(будем брать элементы с сохранением порядка в исходной последовательности, следовательсно получим строго возрастающую подпоследовательность): их $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$. Значит $P = \frac{15}{6^4} = \frac{15}{1296} \approx 0{,}011574$

Ответ: 0,011574

4.1.3 Задача 2

Условие: Случайно и равновероятно выбрано целое число от 1 до 100 Найдите вероятность того, что сумма цифр этого числа равна 8.

Решение:

Выпишем все числа с суммой цифр 8: 8,17,26,35,44,53,62,71,80. Их 9, следовательно, $P = \frac{9}{100} = 0{,}09$

Ответ: 0,09

4.1.4 Задача 4

Условие: На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64 Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (все такие возможности равновероятны), окажется, что угаданы ровно 4 клеток?

Решение:

Зафиксируем выбранные игроками 8 чисел. Подходящими билетами будут те, в которых есть 4 элемента из выбранных 8 + 4 из оставшихся 56. Тогда $P = \frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{56}{4}}{\binom{64}{8}} = \frac{8!56!8!56!}{4!4!4!52!64!} = \frac{714175}{122948038}$

Ответ: $\frac{714175}{122948038}$

4.1.5 Задача 6

Условие: Вася и Петя бросают монету: Вася бросил ее 10 раз, а Петя — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у Пети монета упала орлом большее число раз, чем у Васи?

Решение:

Заметим, что события "у Пети больше орлов, чем у Васи"и "у Васи больше решек, чем у Пети"равновероятны, так как они симметричны. Покажем, что они дополняют друг друга дро 1. Действительно, так как Петя бросал ровна на 1 раз больше, то или у Пети орлов больше или у Васи больше решек, но не одновременно. Значит вероятность каждого события по $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$

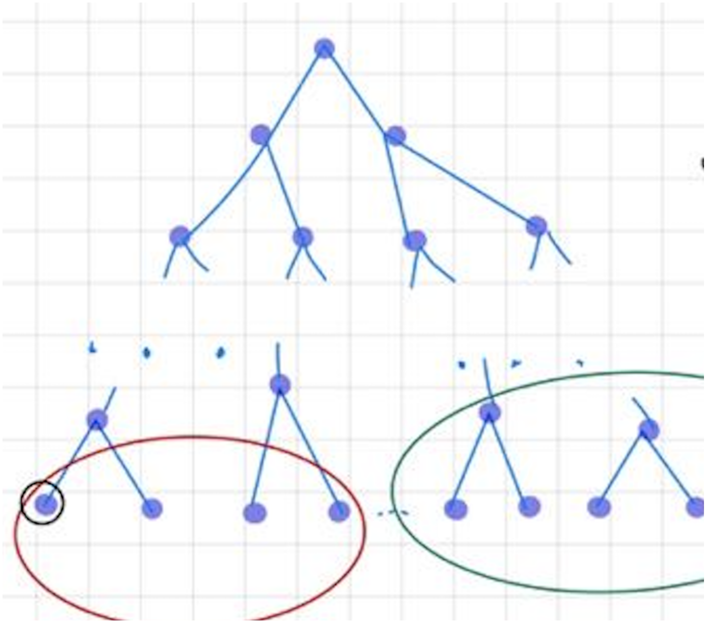
4.1.6 Задача 5

Условие: Шестьдесят четыре команды участвуют в турнире по олимпийской системе (команды случайно и равновероятно разбиваются на пары, парные команды играют между собой, победители проходят в следующий раунд, где процедура повторяется). Все команды упорядочены по силе, и более сильная всегда выигрывает у более слабой. Какова вероятность того, что в финале встретятся две самые сильные команды?

Решение:

Олимпийский турнир можно изобразить в виде дерева(вершина-пара соревнующихся, а ребро соединяет вершину из одного раунда с вершиой следующего раунда, если в них есть один и тот же участник)

Две сильнейшие команды могут не сыграть вместе в финале только если сыграли вместе до этого. Значит, чтобы было как в условии, то надо, чтобы у этих игроков были разные поддеревья.



Листьев у дерева 32(так как вершина - это пара человек). Зафиксируем для самого сильного один элемент из поддерева. Значит осталось 63 места для второго игрока. Ему подходит другая половина, то есть 32 места. Итого $P = \frac{32}{63}$.

Ответ: $\frac{32}{63}$

4.1.7 Задача 7

Условие: Докажите, что случайный граф на вершинах связен. Точная формулировка: исходы — все неориентированные графы без кратных ребер с одним и тем же множеством вершин, в котором элементов. Все исходы равновозможны. Нужно доказать, что вероятность события «граф несвязный» стремится к нулю при $\to \infty$.

Решение:

Уточняется.

4.1.8 Задача 8

Условие: Докажите, что найдется такой турнир, в котором любые 10 команд проиграли какой-то одной команде (победители разных десяток могут различаться).

Решение:

Рассмотрим какой-нибудь турнир при $n \to \infty$(будем доказывать аналогично предыдущей).

Зафиксируем тогда какие-ниюудь 10 команд. Выберем из оставшихся (n-10) команду, которой все эти 10 команд проиграли.Это происходит с вероятностью $(\frac{1}{2})^{10})$. Отрицание этого события с вероятностью $\frac{1023}{1024}$. Тогда для конкретной команды вероятность того, что такое событие не произойдёт равна $(\frac{1023}{1024})^{n-10} \to 0, n \to \infty$. Однако всего наборов из 10 команд $\binom{n}{10}$. Поэтому вероятность того, что вообще не найдётся ни одной команды такой, что условие выполняется $\leqslant \binom{n}{10} \cdot (\frac{1023}{1024})^{n-10}$(по теореме с лекции о сумме и пересечении вероятностей). Аналогично задаче 7, эта вероятность стремится к 0 при $n \to \infty$. Значит, найдётся команда из условия.

Ч.Т.Д.

4.2 Домашнее задание 14

(Илья)

4.2.1 Задача 3

Условие: Равновероятно выбирается случайная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Независимы ли события «число 1 остается на месте» и «число 2 остается на месте»?

Решение:

1. Пусть A - событие «число 1 остается на месте», а B - событие «число 2 остается на месте». Тогда посчитаем 3 вероятсноти: $P(A\cap B), P(A), P(B)$.

2. Сначала найдём $P(A)$ и $P(B)$. Так как мы выбираем перестановку равновероятно, то вероятность того, что случайная перестановка оставляет число i на месте равна $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ и понятно, что тогда $P(A) = P(B) = \frac{1}{n}$

3. Теперь посчитаем вероятсноть $P(A\cap B)$. Событие $A\cap B$ - перестановка оставляет и 1, и 2 на месте. Вероятность такого события $\frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

4. По определению незавимсмости двух событий, события независимы, если $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. Проверка: $\frac{1}{n(n-1)} \neq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$

   Значит события A,B зависимы.

Ответ: Нет, зависимы.

4.2.2 Задача 2

Условие: Заранее известно, что пациент болен тяжелой болезнью с вероятностью 10^{-5}. Ему сделали тест на эту болезнь, который дает правильный результат с вероятностью 99% (независимо от того, здоров пациент или нет). Найдите отношение вероятностей событий «пациент болен этой болезнью» и «пациент не болен этой болезнью» при условии, что результат теста положительный.

Решение:

1. Пусть A - событие «пациент болен этой болезнью» и B - событие «пациент не болен этой болезнью», C - событие «результат теста положительный». Тогда требуется найти $\frac{P(A|C)}{P(B|C)} = \frac{P(A\cap C)}{P(B\cap C)}$(по формуле условной вероятсности)

2. Вероятсноть события $A\cap C$, то есть того, что пациент болен этой болезнью и тест его положительный, равна $10^{-5}\cdot 0{,}99$. Вероятсность события $B\cap C$, то есть того, что пациент не болен этой болезнью и результат теста положительный, равна $(1-10^{-5})\cdot(1-0.99)$

   Значит $\frac{P(A\cap C)}{P(B\cap C)} = \frac{10^{-5}\cdot 0{,}99}{(1-10^{-5})\cdot(1-0.99)} = \frac{10^{-5}\cdot 0{,}99}{10^{-2}\cdot 0{,}99999} = 10^{-3}\cdot\frac{11000}{11111} = \frac{11}{11111}$

Ответ: $\frac{11}{11111}$

4.2.3 Задача 1

Условие: Во сколько раз доля блондинов среди голубоглазых больше доли голубоглазых среди блондинов, если всего голубоглазых вдвое больше, чем блондинов?

Решение:

1. Пусть A - событие "случайный человек голубоглазый"и B -событие "случайный человек блондин". Тогда ответом на задачу будет отношение условных вероятностей $\frac{P(B|A)}{P(A|B)} = \frac{P(B)}{P(A)}$ (по формуле Байеса).

2. Так как $|A| = 2\cdot|B|$, то $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

4.2.4 Задача 4

Условие: Жюри из трех человек нужно принять одно из двух возможных решений, одно из которых правильное. Два члена жюри независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий случайно выбирает одно из двух возможных решений с равными вероятностями. Окончательное решение жюри выносится большинством голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? (Сравните ее с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.)

Решение:

1. Есть 3 случая, когда жюри примет правильное решение: первые двое приняли верное решение(тут учитывается вариант, когда все 3 прияняли верное решение), первый принял верное решение, второй принял неверное решение, а третитий принял верное решение,первый принял неверное решение, второй и третий верное решение.

   Посчитаем их.

2. Начнём с первого случая. Вероятность такого события равна $p \cdot p = p^2$

3. Посчитаем второй и третий случаи, так как они симметричны. Вероятность второго случая равна $p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2}$ и вероятность третьего случая равна $(1-p) \cdot p \cdot \frac{1}{2}$

4. Итого получаем, что вероятность того, что жюри приняло верное решение равна $p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} + p \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{2} + p^2 = p(1-p) + p^2 = p$. Получается, что эта вероятность совпадает с вероятностью p правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.

Ответ: Вероятность совпадает.

4.2.5 Задача 5

Условие: Король предлагает узнику разложить десять белых и десять чёрных шаров по двум одинаковым коробкам (надо использовать все шары; в каждой коробке должен быть хотя бы один шар). После этого сначала король выбирает случайно одну из коробок, каждую с вероятностью $1/2$, а затем из выбранной коробки выбирает случайный шар, все с равными вероятностями. Если шар чёрный, то узника казнят, если белый — отпускают. Как нужно разложить шары, чтобы вероятность выжить была максимальной?

Решение:

1. Пусть в первой коробке после разложения оказалось w белых шаров и b чёрных шаров, тогда во второй коробке их $10 - w$ и $10 - b$ соответснвенно. Тогда вероятность выживания состоит из двух случаев: если король выбрал первую коробку и из неё выбрал белый шарик или король выбрал вторую коробку и из неё выбрал белый шарик.

   Посчитаем эти вероятсноти.

2. Итак, вероятность первого случая есть $\frac{1}{2} \cdot \frac{w}{w+b}$, так как сначала король выбирает первую коробку с вероятностью $\frac{1}{2}$, а потом достаёт один из w белых шаров из $w + b$ шаров.

   Второй случай аналогичен, там выходит $\frac{1}{2} \cdot \frac{10-w}{20-(w+b)}$

3. Итого получаем, что вероятность выжить равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{10-w}{20-(w+b)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{w+b}$. Получили функцию от двух переменных, надо найти её максимум, учитывая,что w,b натуральные числа, не превышающие 9.

   Зафиксируем $w+b = k$. Тогда вероятность имеет вид $\frac{1}{2} \cdot \frac{10-w}{20-(w+b)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{w+b} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{10-w}{20-k} + \frac{w}{k}) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{(10-w)k+w(20-k)}{k(20-k)}) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{10k-2wk+20w}{k(20-k)})$. Так как знаменатель фиксирован, то выражение максимально, когда числитель максимален, поэтому нужно найти максимум числителя. Опять же таки, так как k фиксировано, то достаточно найти максимум выражения $20w - 2wk = 2w(10-k)$. Можем считать, что $k \leqslant 10$, так как иначе просто переименуем коробки. Так как $w \leqslant k$, то понятно, что максимум такого выражения будет при $w = k$, но тогда $b = 0$. То есть в первой коробке будут лежать только белые шары.

   Пользуясь этим знанием найдём w.

4. Так как $b = 0$, то исходная вероятность имеет вид $\frac{1}{2} \cdot \frac{10-w}{20-(w+b)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w}{w+b} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{10-w}{20-w} + 1)$. Найдём максимум выражения $\frac{10-w}{20-w}$. Он достигается при минимуме обратного. То есть ищем минимум выржания $\frac{20-w}{10-w} = 1 + \frac{10}{10-w}$. Минимум будет, когда знаменатель максимальный, следовательно, когда w минимально. Так как $w \geqslant 1$, то положим $w = 1$.

   Ответ: В одну коробку положить 1 белый шар, а во вторую положить все остальные.

4.2.6 Задача 6

Условие: Двое играют в бой яиц. Перед ними стоит корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их носами. Разбитое яйцо выбрасывается и побеждённый берёт новое, а победитель раунда сохраняет своё яйцо для следующего раунда (предполагается, что победившее яйцо сохранило свою прочность и что исход каждого раунда зависит только от относительного качества яиц). Какова вероятность победы в $(n+1)$-м раунде после победы в предыдущих?

Решение:

1. Для начала поймём, что раз прошёл $n+1$ раунд, то успело поучавствовать $n+2$ яйца.(в первом раунде появилось 2 новых яйца, а в остальных n раундах добавлялось по 1 яйцу за раунд)

2. Так, теперь надо как-то подумать о том, как вообще считать данную вероятность. Давайте введём два события. Пусть событие A - "яйцо победило в $n+1$ раунде" и событие B - "яйцо победило в предыдущих n раундах". Ну теперь хотя понятно, что надо искать $P(A|B)$.

3. По формуле условной вероятности, $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Давайте поймём, что победа определяетя только относительной прочностью яйца, поэтому выпишем в ряд все числа от 1 до $n+2$, где каждое из чисел - это номер яйца и определим на этом множестве такой порядок - одно из чисел стоит левее другого, если оно прочнее его. Тогда понятно, чему равносильна $P(A\cap B)$(вероятность того, что яйцо выиграет все $n+1$ раунды) - тому, что первое яйцо будет левее(прочнее), чем все остальные, то есть яйцо с номером 1 стоит самым первым. Такая вероятность равна $\frac{(n+1)!}{(n+2)!}$(номер 1 стоит на первом месте, а остальные как-то перемешаны).

   Аналогично понятно, чему равна $P(B)$. Тут 2 варианта, либо $n+2$ яйцо оказалось прочнее, чем первое яйцо, но все остальные проиграли (таких $n!$ вариантов, так как 2 элемента из $n+2$ фиксированы, а остальные как-то перемешаны), или первое яйцо оказалось самым сильным и это уже в точности посчитано($(n+1)!$). Итого $P(B) = \frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}$.

4. Значит искомая вероятность равна $P(A|B) = \frac{(n+1)!}{n!+(n+1)!} = \frac{n+1}{n+2}$

Ответ: $\frac{n+1}{n+2}$

4.2.7 Задача 7

Условие: Приведите пример вероятностного пространства и n зависимых его событий, любые $n-1$ из которых независимы в совокупности.

Решение:

1. Пусть у нас есть нечестная монетка(то есть вероятность выпадения орла равна $p \neq \frac{1}{2}$ и решки – $1-p$) и мы бросаем её из $n-1$ раз. Наше вероятностное простанство состоит из n событий(и их вероятностей): "в i-ом броске выпал орёл" , коих $n-1$ штука и события "всего выпала 1 решка".

2. Заметим, что все n событий вместе невозможны, поэтому они не могут быть независимыми, значит они зависимы. Ещё можно заметить, что если рассматривать $n-1$ событие вида "в i-ом броске выпал орёл" , то понятно, что они все независимы при любом p. Осталось подобрать такое p, при котором событие "в i-ом броске выпал орёл" , где $1 \leqslant i \leqslant n-2$, и "всего выпала 1 решка" будут независимы, тогда любые $n-1$ событие будут независимы.

3. Вероятность события "в i-ом броске выпал орёл" равна p, а вероятность $n-2$ таких событий равна p^{n-2}. Без ограничения общности можно положить, например, что в $n-1$-ом броске не выпал орёл.

   Тогда вероятность события "в i-ом броске выпал орёл"($n-2$ раза) и "всего выпала 1 решка"равна $p^{n-2} \cdot (1-p)$.

4. Посчитаем теперь вероятность того, что "всего выпала 1 решка". Это значит, что в каких-то $n-2$ бросках выпал орёл и в оставшемся броске выпала решка. Вероятность этого равна $\binom{n-1}{1} \cdot p^{n-2} \cdot (1-p) = (n-1) \cdot p^{n-2} \cdot (1-p)$.

5. Чтобы события "в i-ом броске выпал орёл"($n-2$ раза) и "всего выпала 1 решка"были независимы в совокупности необходимо,чтобы было выполнено равенство: $p^{n-2} \cdot (n-1) \cdot (1-p) \cdot p^{n-2} = p^{n-2} \cdot (1-p)$

   Отсюда, $p = \sqrt[n-2]{\frac{1}{n-1}}$(договоримся, что $n \geqslant 2$, так как при $n=1$ у нас ровно одно событие и понятно, что там всё выполняется.)

   Значит, мы смогли подобрать такое p. Тогда условие выполняется и мы постороили пример с n зависимыми событиями, где любые $n-1$ событие независимы в совокупности.

4.2.8 Задача 8

Условие: Прямоугольная таблица заполнена нулями и единицами. В таблице $3n$ столбцов, в каждой строке ровно n единиц, все строки различны. Известно, что для любых двух строк найдется такой столбец, в котором в данных строках стоят единицы.

а) Докажите, что вероятность того, что случайно выбранная строка из n единиц и $2n$ нулей входит в такую таблицу, не больше $\frac{1}{3}$.

б) Докажите, что количество строк в такой таблице не больше $\binom{3n-1}{n-1}$.

Решение:

Давайте сначала переформулируем условие задачи. Сопоставим каждой строке n подмножество $3n$ элементного множества - номера столбцов, где стоят единицы. Условие означает, что пересечение любых двух множеств непусто. Требуется доказать, что всего множеств(для простоты будем называть их особыми), обладающих таким свойством, не более трети от всего $3n$ элементного множества.

Начнём с пункта а):

1. Заметим, что если разбить всё $3n$ элементное множество на 3 n - непересекающихся подмножеств, то в каждой тройке будет не более одного особого множества, иначе есть 2 у которых пересечение пусто и тогда они не особые. Всего способов сделать это $N = \binom{3n}{n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{3!}$

2. Теперь пусть у нас есть уже какое-то фиксированное n элементное множество, тогда способов выбрать 2 оставшихся n - элементных множества равно $M = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2!}$. Представим теперь список всевозможных разбиений на тройки нашего множества, в каждом пункте списка есть не более одного особого множества и причём каждое такое множество встретиться в списке не более M раз. Отсюда, всего особых множеств не более, чем $\frac{N}{M} = \binom{3n}{n} \cdot \frac{1}{3}$. Что и завершает доказательство пункта а).

Пункт б):

1. Так как мы поняли, что особое множество задаётся строкой в таблице и особых множеств не более трети от всех всех троек, на которые можно разбить $3n$ элементное множество, то давайте приведём пример, когда достигается ровно треть. Такой пример как раз таки можно построить если выбрать все n элементные множества, куда входит один фиксированный элемент. Тогда этих множеств будет $\binom{3n-1}{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \binom{3n}{n}$. То есть всего строк в таблице не более, чем $\binom{3n-1}{n-1}$

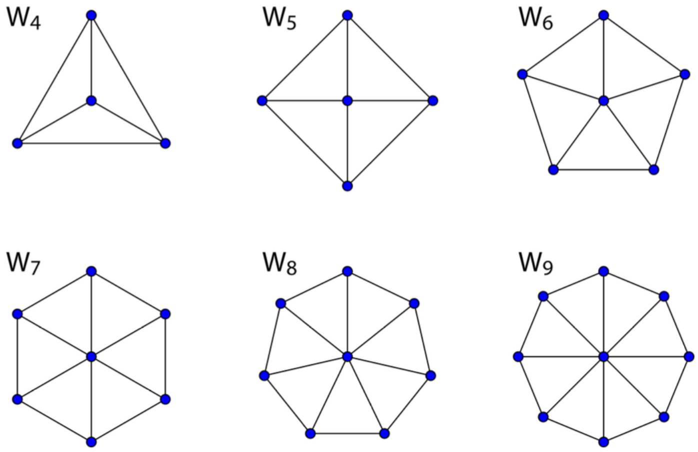
Ч.Т.Д.

4.3 Домашнее задание 16

(Илья)

4.3.1 Задача 1

Условие: Граф-колесо W_n $(n > 3)$ получается из простого цикла C_{n-1} добавлением n-ой вершины, смежной со всеми остальными. Примеры таких графов можно видеть на рисунке ниже.



Вычислите хроматический многочлен $\chi_{w_n}(x)$.

Решение:

1. Вершину, смежную со всеми другими вершинами, можно покрасить в один из x цвтов, тогда останется покрасить цикл длиной $n-1(C_{n-1})$, причём использовать можно уже $x-1$ цвет. Способов сделать это $\chi_{c_{n-1}} = (x-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(x-2)$(по задаче 1 из семинара)

   Тогда ответом будет: $x((x-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(x-2))$

Ответ: $\chi_{w_n}(x) = x((x-2)^{n-1} + (-1)^{n-1}(x-2))$.

4.3.2 Задача 2

Условие: Выбирается случайно и равновозможно 10 различных чисел из множества целых чисел от 0 до 29. Найдите математическое ожидание суммы этих чисел.

Решение:

1. Пусть $\Omega = \{(a_1,a_2,...,a_{10}) | a_i \in \{0,1,...,29\}\}$ - вероятностное простарнство, где a_i - это какое-то из 10 выбранных чисел и X - это случайная величина(по условию задачи - это сумма 10 выбранных чисел).

2. Давайте введём индикаторную функцию $I_i = \begin{cases} 1, & if \quad i \in \{a_1,a_2,...,a_{10}\} \\ 0, & if \quad i \notin \{a_1,a_2,...,a_{10}\} \end{cases}$ Тогда $X_s = 0 \cdot I_0 + 1 \cdot I_1 + ... + 29 \cdot I_{29} = \sum_{k=0}^{29} k \cdot I_k$.

3. Посчитаем наконец математическое ожидание $E[X] = E[\sum_{k=0}^{29} k \cdot I_k] = \sum_{k=0}^{29} k \cdot P(I_k = 1)$.

   Посчитаем, чему равна вероятность того, что число k вошло в нашу десятку, это означает, что оно входит в какую-то из $\binom{29}{9}$ десяток из $\binom{30}{10}$ десяток. Значит, $P(I_k = 1) = \frac{\binom{29}{9}}{\binom{30}{10}}$, отсюда $E[X] = \frac{\binom{29}{9}}{\binom{30}{10}}(0 + 1 + ... + 29) = \frac{1}{3} \cdot \frac{0+29}{2} \cdot 30 = 29 \cdot 5 = 145$

Ответ: 145.

4.3.3 Задача 3

Условие: 3. Честную монету подбросили 100 раз. Докажите, что вероятность события «орлов выпало не менее 60 или не более 40» не превосходит $1/4$.

Решение:

1. Воспользуемся задачей номер 7 из семинара, только переобозначим орла за 1 и решку за 0. Тогда подкидывание 100 раз монетки порождает двоичноую строку длиной 100.

   Теперь положим n = 100 в 7-ой задаче и получим, что вероятность события "количестко единиц в строке отличается от 50 не меньше, чем на 10"не превосходит $1/4$. С учётом введённых обозначений это то же самое, что нам и нужно доказать(причём доказано и про 60 орлов, и про 40, потому что отличаться от 50 на 10 можно в обе стороны), поэтому **Ч.Т.Д.**

4.3.4 Задача 4

Условие: Каждое из чисел $a_1, a_2,..., a_n$ выбирается случайно, равномерно и независимо среди чисел $1, 2,..., n$. Найдите математическое ожидание количества различных чисел среди $a_1, a_2,..., a_n$.

Решение:

1. Пусть X - это случайная велечина(в нашем случае количество различных чисел в наборе $a_1,a_2,...,a_n$)

   Давайте введём индикаторную функцию $I_k = \begin{cases} 1, \text{ если число } k \text{ новое} \\ 0, \text{ если число } k \text{ уже было} \end{cases}$

   Тогда понятно, что $X = \sum_{k=1}^{n} I_k$

2. По линейности получаем, что $E[X] = E[\sum_{k=1}^{n} I_k] = \sum_{k=1}^{n} P(I_k = 1)$

   Давайте посчитаем $P(I_k = 1)$. То есть это вероятность того, что a_k - это новое число, а все $a_1,a_2,...,a_{k-1}$ числа не равны a_k. Это событие состоит из многих независимых событий вида "$a_i(i \in [1,k-1])$ не равно a_k". Тогда понятно, что вероятность одного такого события равна $\frac{n-1}{n}$, тогда из независимости следует, что вероятность $k - 1$ таких событий равна $(\frac{n-1}{n})^{k-1} = (1 - \frac{1}{n})^{k-1} = P(I_k = 1)$.

   Тогда осталось посчитать $\sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{n})^{k-1}$. Ну а это просто сумма геометрической прогрессии, которая равна $\frac{1 \cdot ((1-\frac{1}{n})^n - 1)}{(1-\frac{1}{n}) - 1} = n(1 - (1 - \frac{1}{n})^n)$

Ответ: $n(1 - (1 - \frac{1}{n})^n)$.

4.3.5 Задача 5

Условие: Дан неориентированный граф G(без петель и кратных ребер). Известно, что в G есть вершина степени не более 2022 и что при удалении произвольного собственного подмножества вершин G (и смежных им ребер) в полученном графе обязательно найдется вершина степени не более 2022. Докажите, что $\chi(G) \leqslant 2023$.

Решение:

1. Буду доказывать индукцией по количеству вершин.

   Предположение индукции: *Я смогу покрасить граф, на котором выполняется условие, в 2023 цвета.*

2. База: $n = 1$. Понятно, что там предположение выполняется.(это подходит под условие, потому что лектор сказал, что можно удалять пустое подмножество, поэтому термин собственное подмножество в этой задаче немного некорректен)

3. Шаг индукции: $n \to n+1$. Рассмотрим граф G на $n+1$ вершине, на котором выполняется условие задачи. Значит в нём есть вершина степени не выше 2022. Пусть это вершина v.

   Заметим, что такую вершину всегда можно правильно покрасить в 2023 цвета, потому что она имеет степень не выше 2022, то есть максимум у неё соседей 2022, а у нас 2023 цвета в запасе.

   Давайте забудем про вершину v вместе со всеми рёбрами, идущими из неё.(потом вспомним о ней, по сути я её удаляю, но потом верну.) Получили граф G/v.

   Рассмотрим непустое подмножество вершин X и посмотрим на граф $(G/v)/X$ этот граф получается из G путём удаления собственного подмножества $X \cup v$. Тогда по условию в графе $(G/v)/X$ выполняется условие.

   И в графе G/v есть вершина степени не выше 2022, потому что этот граф получен удалением собственного подмножества - $\{v\}$ из графа G. Значит граф G/v красится в 2023 цвета по предположению индукции. Теперь просто возращаем вершину v на место и тоже красим её в один из 2023 цветов(это можно сделать всегда, было доказано ранее) и получаем граф G на $n + 1$ вершине, покрашенный правильно в 2023 цвета.

Ч.Т.Д.

4.3.6 Задача 6

Условие: В неориентированном графе (без петель и кратных ребер) n вершин и $\frac{n}{2d}$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $\frac{n}{2d}$.

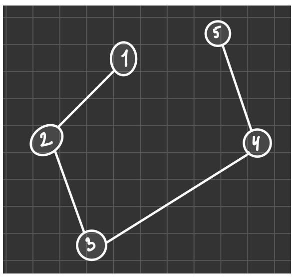
Решение:

1. Давайте занумеруем все вершины графа числами от 1 до n. Будем рассматривать произвольную перестановку этих вершин и будем формировать независимое множество жадно.

   Подробное описание жадного алгоритма(обходим перестановку слева направо):

   - Включаем первую вершину из перестановки в множество.
   - Каждую следующую вершину проверяем на смежность с уже добавленными. Если не соединена, то добавляем в множество, а если соединена, то не добавляем.

   Приведём пример работы данного алгоритма.

   Рассматриваем перестановку (1 2 3 4 5), тогда по алгоритму мы сначала берём вершину 1 в наше множество. Теперь смотрим на вершину 2. Она соединена с вершиной 1, поэтому не берём. Теперь смотрим вершину 3. Она не соединена с верishой 1, поэтому берём в наше множество. Смотрим вершину 4. Она соединена с вершиной 3, поэтому не берём. Смотрим вершину 5. Она не соединена ни с вершиной 3, ни с вершиной 1, поэтому включаем её включаем в наше множество.

   Итого получаем множество $\{1, 3, 5\}$

Теперь посмотрим на другую перетсановку, например (2 3 1 4 5). Вершину 2 включаем в множество. Смотрим на вершину 3, она соединена с вершиной 2, поэтому не берём её. Смотрим на вершину 1, она соединена с вершиной 2, поэтому тоже не берём её в множество. Смотрим на вершину 4, она не соединена с вершиной 2, поэтому берём её в наше множество. Теперь смотрим на вершину 5, она соединена с вершиной 4, поэтому не берём её.

Итого получаем множество $\{2, 4\}$

2. Главная идея решения заключается в том, что мы смотрим на всевозможные перестановки и хотим понять, какой размер в среднем будет у нашего независимого множества, которое мы жадно сформируем. Если оно вдруг окажется больше нужного результата, то тогда мы можем воспользоваться леммой вероятностного метода, которая гласит, что если среднее значение равно m, то существует исход $c \geqslant m$.

   Так вот, давайте посчитаем математическое ожидание размера независимиого множества.

3. Пусть X - случайная велечина, размер независимого множества, построенного по перестановке. Так же введём индикаторную функцию $I_k = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } k \text{ вошла в множество} \\ 0, \text{ если не вошла} \end{cases}$

   Тогда $X = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$. По линейности $E[X] = E[\sum\limits_{k=1}^{n} I_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} P(I_k = 1)$.

   Осталось только посчитать вероятность $P(I_k = 1)$. Давайте сделаем это.

4. Искомая вероятность - это вероятность того, что вершина k войдёт в наше независимое множество.

   Пусть вершина k имеет степень $\deg(k)$, то есть она соединена с $\deg(k)$ вершинами, которые имеют номера $k_1,k_2,...,k_{\deg(k)}$, тогда если вдруг в перестановке вершина k стоит первой среди $k,k_1,k_2,...,k_{\deg(k)}$, то по описанному выше алгоритму вершина k точно попадёт в наше независимое множество. Вероятность того, что вершина k окажется на первом месте среди своих смежных вершин равна $\frac{\deg(k)!}{(\deg(k)+1)!} = \frac{1}{\deg(k)+1}$. Отсюда, $P(I_K = 1) \geqslant \frac{1}{\deg(k)+1}$

   Значит, $E[X] \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\deg(k)+1}$

5. Пусть $f(x) = \frac{1}{x+1}$, тогда заметим, что рассматриваемая функция выпукла вниз при $x \geqslant 0$, так как её вторая производная $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \geqslant 0$.

   Тогда для такой функции выполнено неравенство Йенсена:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \geqslant f(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n})$$

   Положим $x_k = \deg(k)$, тогда в левой части стоит $\frac{E[X]}{n}$, а справа стоит $f(d) = \frac{1}{d+1}$, так как средняя степень всех вершин это как раз-таки d.

   Окончательно получим, что $E[X] \geqslant \frac{n}{d+1} \geqslant \frac{n}{2d}$. Значит, по лемме из лекции о вероятностном методе мы получаем, что существует такое независимое множество размером не менее $\frac{n}{2d}$.

   Ч.Т.Д.

4.4 Домашнее задание 17

(Илья)

4.4.1 Задача 1

Условие: Докажите, что ребра полного графа на 2^n вершинах можно раскрасить в два цвета так, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на $2n$ вершинах.

Решение:

1. Пусть X - случайная величина количества одноцветных подграфов на $2n$ вершинах.

   Введём индикаторную функцию $I_k = \begin{cases} 1, & \text{если полный подграф на 2n вершинах одноцветный} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

   Тогда $X = \sum\limits_{k \in |K_{2n}|} I_k$, тогда $E[X] = \sum\limits_{k \in |K_{2n}|} P(I_k = 1)$. Так как мы красим рёбра и у нас есть 2 цвета, то вероятность того, что граф покрасился в один цвет равна $2 \cdot (\frac{1}{2})^{\binom{2n}{2}} = (\frac{1}{2})^{2n^2-n-1}$(так как цвета у нас 2 и каждое ребро с вероятностью $\frac{1}{2}$ может быть покрашено + у нас рёбер $\binom{2n}{2}$).

2. Тогда $E[X] = \binom{2^n}{2n} \cdot (\frac{1}{2})^{2n^2-n-1} = \frac{2^n(2^n-1)\cdot\ldots\cdot(2^n-2n+1)}{2n(2n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot 2^{2n^2-n-1}} \leqslant \frac{(2^n)^{2n}}{2^{2n-1}\cdot 2^{2n^2-n-1}} = 2^{2-n}$

   По словам лектора, мы считаем в этой задаче, что $n > 1$, поэтому при $n \geqslant 2$ имеем, что $E[X] < 1$, а значит по лемме о вероятностном методе найдётся такая раскраска при которой все полные подграфы на $2n$ вершинах будут разноцветны.

Ч.Т.Д.

4.4.2 Задача 2

Условие: Пусть f — случайная функция из n-элементного множества в $100n$-элементное (функция выбирается равновероятно). Докажите, что

$$P[f \text{ инъективная}] \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Решение:

1. Посчитаем вероятность влоб. Всего функций из n- элементного множества в 100n - элементное множество $(100n)^n$.

   Можем посчитать, сколько из них инъективных. Так как мы считаем, что функция всюду определена(так как f: $n \to 100n$ и на курсе мы договорились, что стрелочка означает, что функция всюду определена), то есть из каждого элемента в множестве из n элементов исходит стрелочка куда-то в 100n-элементное множество, то всего таких функций будет $\binom{100n}{n} \cdot n!$(так как мы однозначно зафиксируем инъективную функцию выбрав какие-то n элементов из 100n, но выбранные n элементов можно перетасовать и будут разные функции, поэтому надо домножить на перестановки из n элементов)

2. Итого, искормая вероятность имеет вид $\frac{\binom{100n}{n}\cdot n!}{(100n)^n} = \frac{\frac{(100n)!}{99n!}}{(100n)^n} = \frac{(100n)!}{(99n)!(100n)^n}$

3. Да начнётся матан!!!! Посчитаем предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(100n)!}{(99n)!(100n)^n}$. Воспользуемся формулой Стирлинга для оценки факториала(была на лекции).

   Напомню: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ при $n \to \infty$

   Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(100n)!}{(99n)!(100n)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{200\pi n}(\frac{100n}{e})^{100n}}{\sqrt{2\cdot 99\pi n}(\frac{99n}{e})^{99n}(100n)^n} = \sqrt{\frac{200}{198}} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{100}{99})^{99n}}{e^n} = \sqrt{\frac{200}{198}} \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{((1+\frac{1}{99})^{99})}{e})^n$.

   Теперь последний fun fact с матана, что $e > (1+\frac{1}{n})^n$ при любых натуральных n, а значит и при n $= 99$ тоже, поэтому $\frac{(1+\frac{1}{99})^{99}}{e} < 1$. Значит искомый предел при $n \to \infty$ равен 0

Ч.Т.Д.

4.4.3 Задача 3

Условие: Пусть X — случайная величина, для которой $E[X^2] = E[X^3] = E[X^4]$. Докажите, что если X принимает значение $r \in \mathbf{R}$ с ненулевой вероятностью, то $r = 0$ или $r = 1$.

Решение:

1. Рассмотрим вот такое выражение $E[X^4]-E[X^3]+E[X^2]-E[X^3]$. По условию оно равно 0. Распишем по линейности математического ожидания и получим, что $E[X^4 - 2X^3 + X^2] = E[X^2(X^2 - 2X + 1)] = E[X^2(X-1)^2] = 0$.

2. **Лемма:** Если $Y \geqslant 0$ и $E[Y] = 0$, то $Y = 0$.

   Доказательство:

   - Воспользуемся неравенством Маркова: $P(Y \geqslant \alpha) \leqslant \frac{E[Y]}{\alpha} = 0(\alpha > 0)$. Значит, $P(Y \geqslant \alpha) = 0$.
   - Получается, что вероятность того, что случайная величина положительная равна 0, но по условию $Y \geqslant 0$ $\to Y = 0$.

     Ч.Т.Д.

3. Так как $X^2(X-1)^2 \geqslant 0$ и $E[X^2(X-1)^2] = 0$, то по лемме из пункта 2 получим, что $X^2(X-1)^2 = 0$. Значит, $\left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 0 \end{array}\right.$. То есть случайная величина принимает значение или 0, или 1.

   Тогда вероятность того, что она примет какое-то значение, кроме 0 и 1, равна 0, а вероятность того, что она примет значение 1 ненулевая и вероятность того, что она примет значение 0 тоже ненулевая.

   Отсюда и следует то, что требовалось доказать.

Ч.Т.Д.

4.4.4 Задача 4

Условие: Пусть $X_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2,..., n$ — независимые случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Рассмотрим $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Докажите, что для любого $C > 0$ существует некоторое $\gamma = O(\sqrt{n \cdot logn})$ такое, что

$$P[X \geqslant \frac{n}{2} + \gamma] \leqslant \frac{1}{n^C}$$

Решение:

Уточняется.

4.4.5 Задача 5

Условие: Пусть $V = \{1, 2,..., n\}$. Гиперребром на V называется любое непустое подмножество $S \subseteq V$. Гиперграфом H с множеством вершин V называется произвольное семейство гиперребер $S_1, S_2,..., S_m$ на V . Мы хотим раскрасить вершины гиперграфа в два цвета: 0 и 1, — чтобы каждое гиперребро было раскрашено как можно «равномернее». Для данной раскраски назовем пестротой $disc(S_i)$ гиперребра S_i модуль разности числа вершин цвета 0 и числа вершин цвета 1 в S_i. Пестротой гиперграфа H назовем $disc(H) = \max\limits_{i=1,2,...,m} disc(S_i)$. Докажите, что для всякого гиперграфа H с множеством вершин V существует такая раскраска, что $disc(H) = O(\sqrt{n \cdot logm})$.

Решение:

Уточняется.

4.5 Домашнее задание 18

(Илья)

4.5.1 Задача 1

Условие: Пусть F и G — производящие функции. Докажите равенство $(\frac{F}{G})' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$

Доказательство:

1. $(\frac{F}{G})' = (F \cdot \frac{1}{G})'$ Это можно расписать по правилу Лейбница(на лекции доказали, что для производящих функций оно тоже верно). Поэтому $(F \cdot \frac{1}{G})' = F' \cdot \frac{1}{G} + F \cdot (\frac{1}{G})'$
2. По задаче 5 с семинара имеем, что $(\frac{1}{G})' = -\frac{G'}{G^2} \implies F' \cdot \frac{1}{G} + F \cdot (\frac{1}{G})' = \frac{F'}{G} - \frac{FG'}{G^2}$
3. По задаче 4 с семинара[1] имеем, что $\frac{F'}{G} - \frac{FG'}{G^2} = \frac{F'G - FG'}{G^2}$

Ч.Т.Д.

4.5.2 Задача 2

Условие: Рассмотрим класс производящих функций, у которых коэффициент при x^0 равен нулю. Для каких производящих функций $F(x) = f_1 x + f_2 x^2 + ...$ из этого класса существует производящая функция $G(x)$ из этого класса, такая что $F(G(x)) = x$?

Решение:

1. Пусть $G(x) = g_1 x + g_2 x^2 + ...$. Тогда композиция $F(G(x))$ определяется как $f_1(g_1 x + g_2 x^2 + ...) + f_2(g_1 x + g_2 x^2 + ...)^2 + ...$
2. Посчитаем коэффициент при x^1: По условию он должен быть равен 1, поэтому $f_1 g_1 = 1 \implies g_1 = \frac{1}{f_1} (f_1 \neq 0)$

   Посчитаем коэффициент при x^2: По условию все коэффициенты при более высоких степенях должны быть равны 0, поэтому $f_1 g_2 + f_2 g_1 = 0 = f_1 g_2 + \frac{f_2}{f_1} \implies g_2 = -\frac{f_2}{f_1^2}$

   Посчитаем коэффициент при x^k, но уже понятно, что зная все f_i и $g_i (i \leqslant k - 1)$ я смогу приравнивая найти коэффициент g_k. (это можно более строго показать при помощи индукции, но надеюсь, что и так понятно)
3. Тогда при условии, что $f_1 \neq 0$ мы сможем посторить такой $G(x)$, что $F(G(x)) = x$.

Ответ: $F(x) = f_1 x + f_2 x^2 + ... (f_1 \neq 0)$

[1] Там написано, что A и C должны быть обратимыми, но это необязательное условие: уточнял у лектора и семинариста

4.5.3 Задача 3

Условие: С помощью производящих функций вычислите сумму $1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3} + ... + n \cdot \binom{n}{n}$

Решение:

1. Рассмотрим функцию $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$

   Тогда $((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1} = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2}x + ... + n \cdot \binom{n}{n}x^{n-1}$

   Так как при n = 1 должно выйти $1 \cdot \binom{1}{1}$, то надо домножить функцию на x: $nx(1+x)^{n-1} = 1 \cdot \binom{n}{1}x + 2 \cdot \binom{n}{2}x^2 + ... + n \cdot \binom{n}{n}x^n$

   Тогда по утверждению с лекции[2]: Поделим на $1-x$, чтобы перейти к сумме и получим $\frac{nx(1+x)^{n-1}}{1-x}$

2. Посчитаем $a_n = \frac{(\frac{nx(1+x)^{n-1}}{1-x})^{(n)}}{n!}$. Пусть $x+1=y$, тогда $x = y-1 \implies \frac{nx(1+x)^{n-1}}{1-x} = \frac{n(y-1)y^{n-1}}{2-y} = \frac{ny^n}{2-y} - \frac{ny^{n-1}}{2-y} = n(\frac{(x+1)^n}{1-x} - \frac{(x+1)^{n-1}}{1-x}) = n(\frac{1}{1-x} + \frac{\binom{n}{1}x}{1-x} + \frac{\binom{n}{2}x^2}{1-x} + ... + \frac{\binom{n}{n}x^n}{1-x} - (\frac{1}{1-x} + \frac{\binom{n-1}{1}x}{1-x} + \frac{\binom{n-1}{2}x^2}{1-x} + ... + \frac{\binom{n-1}{n-1}x^{n-1}}{1-x}))$

   Давайте рассмотрим функцию $\frac{1}{1-x} = 1 + x^2 + x^3 + ...$ и понятно, что a_n здесь это 1, потому что $\frac{(\frac{1}{1-x})^{(n)}}{n!} = 1$(легко проверяется руками). Заметим, что домножение функции $\frac{1}{1-x}$ на x^k всего лишь делает b_{n-k} коэффициент функции $\frac{1}{1-x}$ b_n коэффициентом функции $\frac{x^k}{1-x}$

   Поэтому $a_n = n(b_n + \binom{n}{1}b_{n-1} + \binom{n}{2}b_{n-2} + ... + \binom{n}{n}b_0 - (b_n + \binom{n-1}{1}b_{n-1} + ... + \binom{n-1}{n-1}b_0)) = n(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} - ((\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-1}{n-1}))) = n(2^n - 2^{n-1}) = 2^{n-1}n$

Ответ: $2^{n-1}n$

4.5.4 Задача 4

Условие: С помощью производящих функций найдите и докажите формулу для суммы

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n$$

Решение:

1. Рассмотрим функцию $F(x) = x^2 + x^3 + x^4 + ... = \frac{x^2}{1-x}$. Тогда $(F(x))'' = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + ... = \frac{2}{(1-x)^3}$

   Так как при n = 2 значение $1 \cdot 2$, то надо домножить на x^2 и получим $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

   Чтобы перейти к сумме надо поделить на $1-x$ и пролучим: $\frac{2x^2}{(1-x)^4}$

2. Давайте рассмотрим функцию $H(x) = \frac{2}{(1-x)^4}$. Мы искали h_n на лекции - это $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

   Как я говорил в задаче 3, функция $\frac{2x^2}{(1-x)^4}$ имеет n-ый коэффициент, равный $h_{n-2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

Ответ: $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

4.5.5 Задача 5

Условие: Пусть у нас есть неограниченное количество монет по 2 и 5 рублей, а также 4 монеты по 1 рублю. Обозначим через a_n число способов набрать n рублей с помощью имеющихся монет (монеты одинакового достоинства считаются одинаковыми). Выразите производящую функцию для последовательности a_n в виде отношения многочленов.

Решение:

1. Пусть Производящая функция для выдачи монет номиналом 2 рубля - это $G(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^8 + ...$, 5 рублей - это $H(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + ...$, 1 рубль - это $L(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ Тогда $a_n = H(x)L(x)G(x) = \frac{x^5-1}{(1-x^2)(1-x^5)(x-1)} = \frac{1}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$

Ответ: $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$

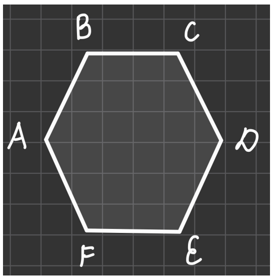
[2] Пусть $A(x) \to (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$
$S = (a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k, \ldots)$. Тогда $S(x) = \frac{A(x)}{1-x}$.

4.5.6 Задача 6

Условие: Лягушка прыгает по вершинам правильного шестиугольника $ABCDEF$ начиная из вершины A. На каждом прыжке лягушка прыгает в одну из соседних вершин. Найдите производящую функцию для последовательности a_n, где a_n равно числу способов оказаться в вершине C через n шагов.

Решение:

1. Давайте сделаем рисунок.



Пусть a_n,c_n,e_n,b_n,f_n,d_n- количество способов попасть из вершины A в A,C,E,B,F и D соответственно(то есть я ищу c_n). Понятно, что $c_n = e_n$ в силу симметрии.

Сделаем пару наблюдений. $\begin{cases} c_n = b_{n-1} + d_{n-1} \\ a_n = b_{n-1} + f_{n-1} \\ d_n = c_{n-1} + e_{n-1} = 2c_{n-1} \\ f_n = a_{n-1} + e_{n-1} = a_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1} \end{cases}$

Отсюда, $a_n = b_{n-1} + f_{n-1} = 2a_{n-2} + 2c_{n-2} \implies c_n = b_{n-1} + d_{n-1} = 3c_{n-2} + a_{n-2} \implies c_{n+2} = 3c_n + 2a_{n-2} + 2c_{n-2} \implies c_{n+4} = 3c_{n+2} + 2c_n + 2a_n = 3c_{n+2} + 2c_n + 2(c_{n+2} - 3c_n) = 5c_{n+2} - 4c_n$

Итого, $c_{n+4} = 5c_{n+2} - 4c_n$. Выпишем первые очевидные значения рекурренты: $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$

Отсюда можно сделать вывод, что для любых нечётных n $c_n = 0$.

2. Пусть $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...c_nx^n + ...$ - производящая функция последовательности c_n.

Домножим наше рекуррентное уравнение на x^{n+4} и получим, что $c_{n+4}x^{n+4} = 5x^2c_{n+2}x^{n+2} - 4x^4c_nx^n$

Просуммируем по всем $n \geqslant 0$ и получим, что $(c_4x^4 + c_5x^5 + ... + c_nx^n + ...) = 5x^2(c_2x^2 + c_3x^3 + ... + c_nx^n + ...) - 4x^4(c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n + ...)$

Итого, $C(x) - c_3x^3 - c_2x^2 - c_1x - c_0 = 5x^2(C(x) - c_1x - c_0) - 4x^4C(x)$

С учётом того, что $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$ имеем, что $C(x) - x^2 = 5x^2C(x) - 4x^4C(x) \implies C(x) = \frac{x^2}{4x^4-5x^2+1}$

Ответ: $\frac{x^2}{4x^4-5x^2+1}$

4.6 Домашнее задание 19

(Илья)

4.6.1 Задача 1

Условие: Найдите производящие функции и явные выражения для элементов последовательностей, заданных рекуррентными формулами $n \geqslant 0$:

$a)2a_{n+3} = -9a_{n+2} - 12a_{n+1} - 5a_n; a_0 = 5, a_1 = -12, a_2 = 28;$

$b)a_{n+2} = -2a_{n+1} + 8a_n + 2^n; a_0 = 1, a_1 = 0;$

Решение:

1. Пункт а). Пусть $C(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$ - производящая функция последовательности a_n.

Домножим обе части уравнения на x^{n+3} и получим, что $2a_{n+3}x^{n+3} = -9xa_{n+2}x^{n+2} - 12x^2a_{n+1}x^{n+1} - 5x^3a_nx^n$

Просуммируем по всем $n \geqslant 0$ и получим, что $2(C(x) - a_0x^0 - a_1x^1 - a_2x^2) = -9x(C(x) - a_0x^0 - a_1x^1) - 12x^2(C(x) - a_0x^0) - 5x^3C(x)$

Отсюда, $C(x)(2+9x+12x^2+5x^3) = 45x - 108x^2 + 60x^2 + 10 - 24x + 56x^2$

Значит, $C(x) = \frac{8x^2+21x+10}{5x^3+12x^2+9x+2}$

Заметим, что $C(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{8}{5x+2}$

Теперь надо посчитать $a_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!}$

Пусть $A(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ и $B(x) = \frac{8}{5x+2}$

Найдём $A^{(n)}(x)$:

- Заметим, что $A'(x) = -2(x+1)^{-3}$
- $A''(x) = 6(x+1)^{-4}$
- $A'''(x) = -24(x+1)^{-5}$
  Понятно, что $A^{(n)}(x) = (-1)^n(n+1)!(x+1)^{-(n+2)}$

Теперь найдём $B^{(n)}(x)$:

- $B'(x) = 8(-1(5x+2)^{-2}5^1)$
- $B''(x) = 8(-1(-2)(5x+2)^{-3}5^2)$
  Понятно, что $B^{(n)}(x) = 8(-1)^n n!(5x+2)^{-(n+1)}5^n$

Тогда $C^{(n)}(x) = 8(-1)^n n!(5x+2)^{-(n+1)}5^n + (-1)^n(n+1)!(x+1)^{-(n+1)}$

Значит, $a_n = \frac{8(-1)^n n!(2)^{-(n+1)}5^n + (-1)^n(n+1)!(1)^{-(n+2)}}{n!} = 2^{-n}(4(-5)^n + (-2)^n(n+1))$

2. Пусть $C(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...$ - производящая функция последовательности a_n.

   Домножим обе части уравнения на x^{n+2} и получим, что $a_{n+2}x^{n+2} = -2xa_{n+1}x^{n+1} + 8x^2a_nx^n + x^2 2^n x^n$

   Просуммируем по всем $n \geqslant 0$ и подставим a_0,a_1 и получим, что $C(x) - 1 = -2x(C(x)-1) + 8x^2C(x) + x^2(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+...)$

   Вспомним, что $1+2x+2^2x^2+2^3x^3+... = \frac{1}{1-2x}$

   Получим, что $C(x)(1+2x-8x^2) = 1+2x+\frac{x^2}{1-2x}$

   $C(x) = \frac{1-3x^2}{(1-2x)(1+2x-8x^2)}$

   Заметим, что $C(x) = \frac{1}{12(2x-1)^2} - \frac{5}{9(2x-1)} + \frac{13}{36(4x+1)}$

   Пусть $A(x) = \frac{1}{12(2x-1)^2}$

   Тогда, посчитав первые пару её производных, понимаем, что $A^{(n)}(x) = \frac{1}{12}(-1)^n(n+1)!(2x-1)^{-(n+2)}2^n$

   Пусть $B(x) = \frac{5}{9(2x-1)}$, тогда $B^{(n)}(x) = \frac{5}{9}2^n(-1)^n n!(2x-1)^{-(n+1)}$

   Пусть $D(x) = \frac{13}{36(4x+1)}$, тогда $D^{(n)}(x) = \frac{13}{36}(-1)^n4^n(4x+1)^{-(n+1)}n!$

   Тогда $a_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!} = \frac{13}{36}(-1)^n4^n(1)^{-(n+1)} + \frac{5}{9}2^n(-1)^n(-1)^{-(n+1)} + \frac{1}{12}(-1)^n(n+1)(-1)^{-(n+2)}2^n = \frac{1}{36}2^n(13(-2)^n + 3n+23)$

Ответ: $\begin{cases} a) C(x) = \frac{8x^2+21x+10}{5x^3+12x^2+9x+2}, a_n = 2^{-n}(4(-5)^n + (-2)^n(n+1)) \\ b) C(x) = \frac{1-3x^2}{(1-2x)(1+2x-8x^2)}, a_n = \frac{1}{36}2^n(13(-2)^n+3n+23) \end{cases}$

4.6.2 Задача 2

Условие: Используя производящую функцию для чисел Фибоначчи, докажите тождество ($n \geqslant 1$):

$$F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$$

Решение:

1. По задаче номер 2, доказанной на семинаре имеем, что $F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

   Заметим, что $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + ... + F_{2n-1} = F_1 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_{2n-3} + F_{2n-2} = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_{2n-2}$

   Заметим, что мы получили сумму чисел фиббоначи от 0 до $2n-2$, тогда подставим вместо n в задаче семинара число $2n-2$ и получим, что $F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_{2n-2} = F_{2n-2+2} - 1 = F_{2n} - 1$

   На семинаре задача 2 решалась через производящую функцию.

Ч.Т.Д.

4.6.3 Задача 3

Условие: Пусть $A(x)$— производящая функция последовательности $(0, 1, 2, ...)$. Известно, что $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ где $P(x)$,$Q(x)$ — ненулевые многочлены с комплексными коэффициентами, не имеющие общих корней. Пусть $\deg Q = k$. Докажите, что, начиная с некоторого номера n , выполняется линейное рекуррентное соотношение:

$$a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + c_2a_{n+k-2} + ... + c_ka_n.$$

Решение:

1. Пусть $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ и $Q(x) = 1 - c_1x^1 - c_2x^2 - ... - c_kx^k, \deg P < k$.

   Выразим $P(x) = A(x) \cdot Q(x)$ и так как $deg(P) < k$, то $p_n = 0 \forall n \geqslant k$. Распишем p_n по определению и получим, что $p_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i}q_i = 0$;

   Разобьём теперь полученную сумму на две: $p_n = \sum\limits_{i=0}^{k} a_{n-i}q_i + \sum\limits_{i=k+1}^{n} a_{n-i}q_i = 0$ Так как $Q(x)$ задан, то я могу понять, чему равны эти суммы. Для первой выполняется, что: $q_0 = 1, q_i = -c_i \;\; \forall i \neq 0$ Так же понятно, что вторая сумма равна 0, так как $deg(Q) = k$

   Отсюда, $p_n = a_n + \sum\limits_{i=1}^{k} a_{n-i} \cdot (-c_i) = a_n - \sum\limits_{i=1}^{k} a_{n-i}c_i = 0$

2. Распакуем наше вvражение для p_n и получим, что

   $$a_n - \sum_{i=1}^{k} a_{n-i}c_i = a_n - a_{n-1}c_1 - a_{n-2}c_2 - ... - a_nc_k = 0$$

   Отсюда и получаем результат, что $a_n = a_{n-1} \cdot c_1 + a_{n-2} \cdot c_2 + ... + a_{n-k} \cdot c_k$

Ч.Т.Д.

4.6.4 Задача 4

Условие: Рациональна ли производящая функция последовательности последовательности $(a_0,a_1,a_2,...)$, где

$a) a_k = k^{2023}$

$b) a_k = \frac{1}{(k+1)^2}$

Решение:

1. Давайте возьмём производящую функцию вот такой последовательности $(1,1,1,...) = \frac{1}{1-x}$ Это рациональная функция. Теперь будем проводить одну и ту же операцию до тех пор, пока не получим последовательность из условия - $(0^{2023},1^{2023},...)$. Будем брать производную и умножать на результат на x. Взятие производной от рациональной функции не меняет рациональной и домножение на x тоже.

   Тогда после первых итераций получим:

   $(1,1,1,...) = \frac{1}{1-x}$

   $(0,1,1,1,...) = \frac{x}{1-x}$

   $(0,1,2,...) = x(\frac{x}{1-x})'$

   $(1^2,2^2,3^2,4^2,...) = (x(\frac{x}{1-x})')'$

   $(0^2,1^2,2^2,3^2,...) = x(x(\frac{x}{1-x})')'$

   Понятно, что тогда мы дойдём до 2023 степени и получим рациональную производящую функцию.

2. Из матана мы знаем, что ряд Тейлора функции $ln(\frac{1}{1-x})$ хахрактеризует последовательность $(0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3},...)$

   На семинаре так же говорилось, что в производящие функции наследуют некоторые свойства аналитических функций, в том числе и нерациональность. Так как $ln(\frac{1}{1-x})$ нерационален, то и формальный степенной ряд $0x^0 + \frac{1}{1}x^1 + \frac{1}{2}x^2 + ...$ тоже.

   Теперь посмотрим на задачу 8 с семинара и предположим, что наша функция из условия рациональна, то есть $\frac{1}{1^2}x^0 + \frac{1}{2^2}x^1 + ...$ рациональная, тогда и $0 + \frac{1}{1^2}x + \frac{1}{2^2}x^2 + ...$ тоже рациональна. Тогда рассмотрим её Адамарово произведение с функцией $0+1x^1+2x^2+... = \frac{x}{(1-x)^2}$ Получаем ряд $0 \cdot 0+1 \cdot \frac{1}{1^2}+2 \cdot \frac{1}{2^2}+...$ и получаем, гармонический ряд из первого замечания, который, как мы выяснили, не рациональный. Противоречие с задачей номер 8.

   Значит, изначальное предположение было неверным, то есть функция $\frac{1}{1^2}x^0 + \frac{1}{2^2}x^1 + ...$ нерациональна.

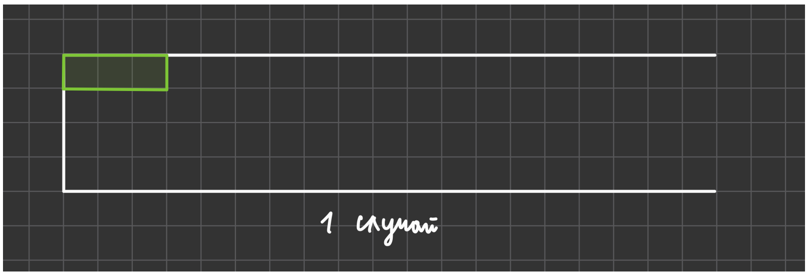
Ответ: $\begin{cases} \text{а) да} \\ \text{б) нет} \end{cases}$

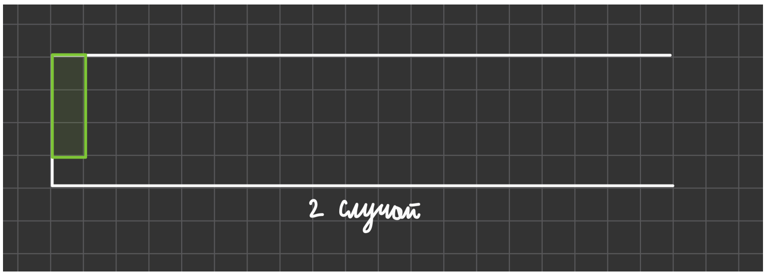
4.6.5 Задача 5

Условие: Обозначим через количество способов разрезать прямоугольник $4 \times n$ на прямоугольники 1×3 (как горизонтальные, так и вертикальные). Будем считать, что $d_0 = 1$ Найдите производящую функцию последовательности $(d_0, d_1, d_2, \ldots)$. Представьте её в виде отношения многочленов.

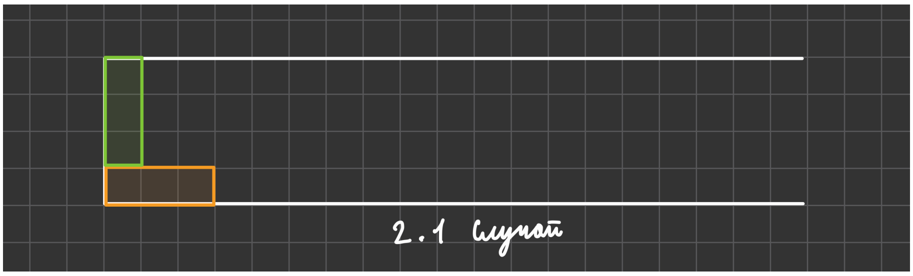
Решение:

Первую дощечку можно поставить 2 способами.

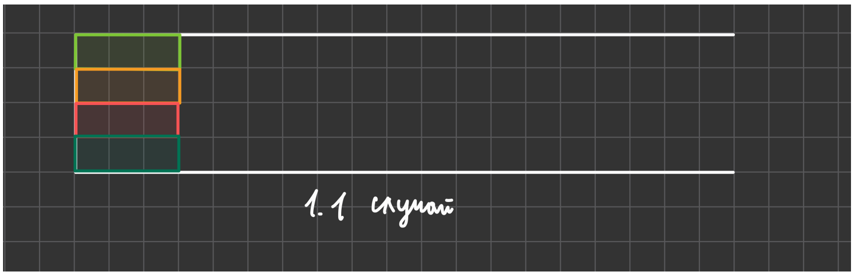




Теперь следующую дощечку в 2 случае можно поставить однозначно.

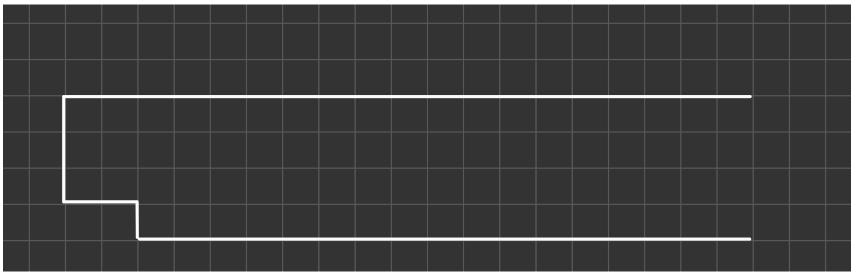


Следующую дощечку в 1 случае можно поставить вертикально и получить симметричный случай с 2.1, а можно поставить дощечку горизонтально и получить затем однозначное замощение.

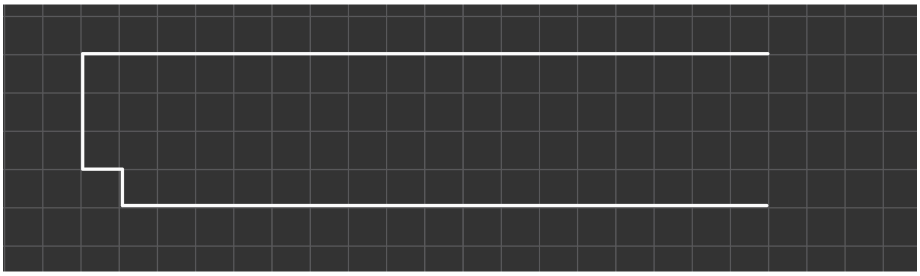


Итого, получаем, что мы свели в случае 1.1 к замощению прямоугольника размером 4 на n-3, количество способов сделать это d_{n-3}.

Обозначим за c_n - количество способов замостить вот такую фигуру



Обозначим за b_n -количество способов замостить вот такую фигуру:



Судя по рисункам, можно понять, что в $d_n = d_{n-3} + 2c_{n-1}$

Ещё мы можем понять, что $c_n = b_{n-1} + c_{n-3}$ и $b_n = d_{n-1} + b_{n-3}$

Итого имеем, что $\begin{cases} d_n = d_{n-3} + 2c_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + c_{n-3} \\ b_n = d_{n-1} + b_{n-3} \end{cases}$

Пусть $B(x)$,$C(x)$,$D(x)$ - производящие функции b_n,c_n,d_n соответственно. Перепишем систему уравнений в эквивалентом виде:

$$\begin{cases} d_{n+3} = d_n + 2c_{n+2} \\ c_{n+3} = b_{n+2} + c_n \\ b_{n+3} = d_{n+2} + b_n \end{cases}$$

Домножим все уравнения на x^{n+k}, где k - порядок рекурренты и просуммируем по всем $n \geqslant 0$ и получим, что

$$\begin{cases} D(x) - d_0x^0 - d_1x^1 - d_2x^2 = x^3D(x) + 2x(C(x) - c_0x^0 - c_1x^1) \\ C(x) - c_0x^0 - c_1x^1 - c_2x^2 = x(B(x) - b_0x^0 - b_1x^1) + x^3C(x) \\ B(x) - b_0x^0 - b_1x^1 - b_2x^2 = x(D(x) - d_0x^0 - d_1x^1) + x^3B(x) \end{cases}$$

Легко посчитать руками, что $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1, b_2 = 0$

Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} D(x) - 1 = x^3D(x) + 2xC(x) \\ C(x) - x^2 = x(B(x) - x) + x^3C(x) \\ B(x) - x = x(D(x) - 1) + x^3B(x) \end{cases}$$

Из первого уравнения $C(x) = \frac{D(x)(1-x^3)-1}{2x}$

Подставим во второе уравнение и получим, что $B(x) = \frac{D(x)(1-x^3)^2-1+x^3}{2x^2}$

Подставим теперь в последнее уравнение и получим, что

$D(x) = \frac{-(1-x^3)^2}{2x^3-(1-x^3)^3}$

Ответ: $D(x) = \frac{-(1-x^3)^2}{2x^3-(1-x^3)^3}$

4.7 Домашнее задание 20

(Илья)

4.7.1 Задача 1

Условие: Два игрока по очереди последовательно пишут 10 (не обязательно различных) цифр слева направо. Первый игрок выигрывает, если полученное число (после отбрасывания ведущих нулей) не делится на 7 В противном случае выигрывает второй игрок. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение:

1. Давайте вспомним признак делимости на 7: число делится на 7 тогда и только тогда, когда разность числа, полученного убиранием разряда единиц и удвоенного числа единиц делится на 7.

   Отсюда высвечивается стратегия второго игорока, потому что 10 - чётное число, поэтому последний ход делает второй игрок.

2. Достаточно проверить, что последняя цифра, умноженная на 2, может давать всевозможные остатки по модулю 7.

   $0 \to 0 \equiv 0$

   $1 \to 2 \equiv 2$

   $2 \to 4 \equiv 4$

   $3 \to 6 \equiv 6$

   $4 \to 8 \equiv 1$

   $5 \to 10 \equiv 3$

   $6 \to 12 \equiv 5$

   Получили всевозможные остатки, которые может давать число из 9 цифр при делении на 7, значит второй просто ставит такую цифру, чтобы в итоге выражение из признака делимости на 7 было сравнимо с 0 по модулю 7.

Ответ: У второго игрока.

4.7.2 Задача 2

Условие: На доске написано число 60 За один ход разрешается уменьшить число на любой из его целых положительных делителей (в том числе на единицу или на само это число). Если при этом получается нуль, игрок проиграл. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение:

1. Давайте покажем по индукции такой факт. Если начинать игру с нечётной позиции(то есть с нечётного числа), то выигрывает второй игрок, иначе - первый.

   Пусть мы стартуем с позиции $n > 0$. Будем идти индукцией с конца.

   База: ну если $n = 1$, то понятно, что первому нужно сделать ход и он обязан вычесть 1 и получить 0, то есть проиграть.

   Если же $n = 2$, то первый может просто вычесть 1 и привести второго к 1, откуда он обязан пойти в 0 и проиграть.

   Переход: $k(k \leqslant n-1) \to n$.(полная индукция)

   Предположим, что мы сейчас находимся в позиции n и у нас 2 варианта:

   если n - чётное, то первый игрок может сделать из этой позиции нечётное, сделав вычитание 1, и по предположению индукции тогда второй игрок проиграет.

   Если же n -нечётное, то у этого числа только нечётный делители, поэтому, вычитая любой из них, он получит чётное число и по предположению индукции второй игрок тогда там выиграет.

   Ч.Т.Д.

   Так как 60 - чётное число, то выиграет первый игрок.

Ответ: У первого игрока.

Задача 3

Условие: Есть две коробки с m и n монетами, m , $n > 0$ Обозначим эту позицию через (m, n). Два игрока играют в игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу разрешается убрать все монеты из одной из коробок, а монеты из второй коробки распределить между двумя этими коробками так, чтобы в каждой было хотя бы по одной монете. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, т. е. оказывается в позиции $(1, 1)$. Опишите все P-позиции данной игры.

Решение:

1. Докажем по индукции такой факт, что если мы начинаем игру с позиции, где есть хотя бы одна чётная куча(то есть куча с чётным числом монет в ней), то тогда выигрывает первый игрок, а если начинать с двух куч с нечётным числом монет в них, то выигрывает второй.

   Будем вести полную индукцию с конца по сумме монет в кучах.

   База: Если кучи (1,2), то тогда первый оставляет двойку и расскладывает её на (1,1) и выигрывает, а если мы начинаем с (1,1), то тогда проигрывает первый игрок сразу.

   Переход: $k(k \leqslant n-1) \to n$(полная индукция)

   Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть две кучи монет суммой n и хотя бы одна из них чётная, тогда первый игрок может взять чётное число и разложить его на два нечётных, при этом сумма камней уменьшится хотя бы на 1, поэтому можем воспользоваться предположением индукции и получим, что проиграет второй.

   Если же мы начинаем с позиции с обеими нечётными кучами, то тогда первый может оставить любую нечётную кучу(если она не 1, конечно, но этот случай проверен в базе) и разложить на чётную и нечётную кучи. Мы опять уменьшили сумму минимум на 1 и можем воспользваться предположением индукции, получив, что проиграет второй, то есть выиграет первый.

   Тогда получаем, что P-позиции - это те, где обе кучи нечётные.

   Ответ: Позиции, где в обоих кучах нечётное число камней.

4.7.3 Задача 4

Условие: Игроки по очереди красят ребра полного графа на $n \geqslant 2$ вершинах в красный (первый игрок) и синий (второй игрок) цвета. Красить ребро, которое уже покрашено в другой цвет, запрещено. Игрок выигрывает, если ребра его цвета задают на вершинах связный граф. При каких n у первого игрока есть выигрышная стратегия?

Решение:

1. Будем доказывать, что первый игрок всегда сможет выиграть.

   Делать это буду по индукции. Покажем, что первый всегда сможет добавить одну вершину к своему уже построенному связному графу-цепочке. Таким образом он дойдёт до n вершин.

   То есть предположение такое: на k-1-ом ходу первого игрока у него k-связный граф.

   База: $k = 2$ - очевидно

   Переход: $k \to k+1$

   То есть мы знаем, что сейчас был k-1 ход первого, второй сейчас походил и он всего поставил k-1 ребро, а сейчас k-ый ход первого, надо показать, что найдётся хотя бы одно ребро непокрашенное, чтобы мы могли дополнить цепочку красного.

   Если всего у первого цепочка на k-вершинах и тогда остальных вершин (n-k) -> рёбер соединяет эти вершины в полном графе (n-k)k штук, из которых по-максимуму могут быть заняты k-1 ребро вторым игроком, то есть надо показать, что $(n-k)k-k+1 \geqslant 1 \to n \geqslant k+1$, что верно, так как $k \leqslant n-1$, ведь на n-1 ходу игра закончится.

Ответ: Первый имеет выигрышную стратегию при всех n.

4.7.4 Задача 5

Условие: Шоколадка представляет собой прямоугольник mn , поделенный углублением на единичные квадратики. Два игрока играют в следующую игру, делая ходы по очереди. На каждом ходу разрешается забрать один еще не взятый квадратик шоколадки, а также все еще не взятые квадратики, лежащие правее и выше (в т. ч. квадратики, лежащие выше в том же столбце и правее в той же строке). Проигрывает тот, кто забирает последний квадратик. Для всех натуральных m и n укажите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Решение:

1. Решим аналогично 5-ой задачи семинара. Ничьи по условию быть не может.

   Надо доказать, что у второго нет выигрышной стратегии.

   Док-во:

   Предположим, что у второго игрока есть такая стратегия, то есть он из каждой позиции точно знает, куда сходить, чтобы победить.

   Пусть тогда первым ходом первый игрок закрасил правую верхнюю клетку.

   Второй же любыми своими выхрышными ходами захватывает блок из плиток шоколада, содержащий в том числе и ту (уже пустую)плитку, что взял первый своим первым ходом.

Тогда первый думает, что раз из такой позиции Y можно гарантированно выиграть, потому что второй знает как это сделать, то он просто своим первым ходом сделает ход второго и прийдёт в Y, уже в выигрышную позицию, из которой первый сможет выиграть.

Противоречие! Значит, у второго нет выигрышной стретегии, а раз у него нет и нет ничей, то у первого должна быть выигрышная стратегия(следует из теоремы о цене игры данного типа).

Исключением является случай, когда m и n равны 1, потому что там прям явно можно указать стартегию для второго игрока.

Ответ: При m = 1 и n = 1 выигрывает второй, а при остальных первый.

4.8 Домашнее задание 21

(Илья)

4.8.1 Задача 1

Условие: Опишите P-позиции и стратегию для аналога игры ним, в которой тот, кто не может сделать ход, не проигрывает, а выигрывает.

Решение:

На самом деле игра почти полность аналогична Ним. Пусть у нас есть n кучек с a_i камней в i-ой кучке.

Покажем, что все P-позиции - это

- $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0, \exists a_i \geqslant 2$(отсюда следует, что существует хотя бы ещё одна кучка с $a_j \geqslant 2$ камней, иначе 0 не получить)
- $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 1, \forall a_i \leqslant 1$

1. Рассмотрим второй случай, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 1, \forall a_i \leqslant 1$, тогда каждым своим ходом игроки увеличивают количество нулевых куч на 1

   Тогда раз уж $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 1$, то сейчас непустых куч нечётно, поэтому это P-позиция

   Тогда по аналогии понятно, что $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$ - N-позиция, так как имеется чётное количество непустых кучек.

2. Теперь посмотрим на первый случай, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0, \exists a_i \geqslant 2$.

   Давайте покажем, что $\begin{cases} a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0 - \text{P-позиция} \\ a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n \neq 0 - \text{N-позиция} \end{cases}$

   Заметим, что из позиции, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$ можно попасть только в позицию, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n \neq 0$ (известно с семинара и лекции)

   Почему же тогда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n \neq 0 -$ N-позиция?

   Посмотрим, что сможет сделать игрок, оказавшейся в этой позиции.

   - Если среди a_i есть хотя бы 2 кучи $\geqslant 2$, то с лекции и семинара мы знаем, что существует такой ход, который приведёт его в ситуацию, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0$, так как это всё произошло за 1 ход, то среди новых позиций есть та куча, у которой $a_i \geqslant 2$, но по замечанию в самом начале, у нас есть ещё одна $a_j \geqslant 2$, тогда после хода второго игрока, который уже оказался в своей P-позиции, он сможет привести в позицию, когда у первого игрока будет $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n \neq 0 -$ N-позиция
   - Если же среди a_i ровно одна куча с $\geqslant 2$ камнями, то сделаем её 1 или 0 и тогда получим P-позицию первого типа, а из неё второй игрок просто сделает для нас N- позицию первого типа, когда $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_n = 0, \forall a_i \leqslant 1$

4.8.2 Задача 2

Условие: Найдите сложность вычисления дизъюнкции $\vee_{i=1}^{n} x_i$ в модели разрешающих деревьев.

Решение:

1. Если у нас все переменные равны 0, то нам нужно задать n вопросов про все переменные, иначе мы не можем однозначно сказать про результат.

Ответ: n

4.8.3 Задача 3

Условие: Есть монет, среди которых одна фальшивая. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты.

а) Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ взвешиваний.

б) Докажите, что для нахождения фальшивой монеты необходимо $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ взвешиваний.

Решение:

а) Если n - чётное, то мы можем просто разделить на пары все n монет и за $\frac{n}{2}$ сравнений понять, кто фальшивка.

Если же n нечётное, то можно просто отложить одну монету и дальше за $\frac{n-1}{2}$ понять, кто есть кто из оставшихся. А если среди них нет фальшивой, то мы точно знаем, что это отложенная монета.

Чтобы объединить чётный и нечётный результат можем просто зписать, что нам достаточно $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ сранвений.

б) Теперь чтобы показать необходимость, давайте заметим, что после каждого сравнения двух монет мы узнаём иноформацию про 2 монеты. Давайте посмотрим в принципе, сколько необходимо сравнений для того, чтобы узнать информацию про все монеты (понятно, что если мы не знаем про это информацию, то ничего гарантировать мы не можем). То есть если $n = 2k$, то нам необоходимо $\frac{2k}{2} = k$ сравнений, а если $n = 2k + 1$, то нам тоже будет необходима k сранений, потому что тогда мы будем знать информацию о 2k монет, чего нам хватит, чтобы однозначно сказать, про все монеты.

k сравнений это как раз $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ для чётного и нечётных случаев.

4.8.4 Задача 4

Условие: Имеется n монет, среди которых одна фальшивая, и чашечные весы. Настоящие монеты все имеют одинаковый вес, а фальшивая легче. На каждую чашку весов можно класть произвольное количество монет.

а) Докажите, что фальшивую монету можно найти за $\log_3 n + O(1)$ взвешиваний.

б) Докажите, что существует константа $C \in \mathbf{Z}$, что для нахождения фальшивой монеты необходимо по крайней мере $\log_3 n + C$ взвешиваний для любого натурального n.

Решение:

а) Итеративный алгортим:(на каждой итерации будет происходить вот это)

- Делим n монет на 3 кучи: если $n \equiv 1 \bmod 3$, то добавим в одну из куч оставшуюся монету, а если $n \equiv 2 \bmod 3$, то добавим 2 монеты в любую кучу.
- Ставим любые две кучи на чаши весову и сравниваем. Если они равны по весу, то мы знаем, где фальшивая по весу, а если нет, то мы тоже знаем, в какой из них фальшивая монета.
- Потом берём кучу, в которой есть фальшивая монета и проделываем то же самое с первого пункта.

Этот алгоритм сведёт нас к куче разимера $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Таким образом за $log_3 n + O(1)$ сравнений мы сможем нацйти фальшивую монету.

б) Давайте заметим, что одно сравнение может иметь 3 исхода: монета в 1 куче, монета во 2 куче и монета в 3 куче. Посколько для нахождения фальшивой монеты нам необходимо не менее n исходов(так как иначе будут 2 монеты, о которых ничего нельзя сказать), то тогда раз если сделано k сравнений, то мы имеем 3^k исходов, то тогда имеем неравенство $3^k \geqslant n \implies k \geqslant log_3 n + C$ (C = 0)

4.8.5 Задача 5

Условие: Естьm n монет разного веса. За одно взвешивание можно сравнить по весу любые две монеты. Найдите среди монет самую тяжелую и вторую по тяжести монету за $n + log_2 n + O(1)$ взвешиваний.

Решение:

Давайте сделаем турнирную систему. Поделим все монеты на пары(если их чётное количество) или отложим одну монету(она сразу проходит во второй тур) и оставшиеся поделим на пары(если всего монет было нечётное количество).

Тогда в след тур будут выходить более тяжёлые монеты и так далее. Понятно, что для поиска самой тяжёлой монеты нам необходимо $n - 1$ сравнение, а что касается предтяжёлой, то тут стоит заметить, что у нас получилось дерево турнира и поэтому мы имеем $log_2 n$ раундов и понятно, что предтяжёлая монета могла проиграть только самой тяжёлой и нам понадобится сделать не более, чем $log_2 n$ сравнений для поиска предтяжёлой (возможно $+1$).

Итого, нам понадобится $n + log_2 n + O(1)$ взвешиваний.