

I. Общая теория построения IN-OUT формализма

Будем действовать в соответствии с идеологией, изложенной в разделе 3 главы 5 книжки Gardiner [1], что согласуется с главой 7 книжки Walls [2]. Сперва рассмотрим минимальную задачу — некую систему, связанную с внешней баней. Гамильтониан запишется в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{b}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}},$$

где $\hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}}$ — гамильтониан системы, который пока не будем конкретизировать, отметим лишь то, что в подпространстве $\hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}}$ могут действовать 2 сорта операторов. Один из них обозначим \hat{a} — динамику этих операторов мы и будем исследовать и другой сорт операторов обозначим \hat{c} — эти операторы обеспечивают взаимодействие системы с баней. В частности, при дальнейшем рассмотрении цепочки кубитов роль оператора \hat{a} будут играть $\hat{\sigma}_i^{\pm, z}$, а роль оператора \hat{c} будут играть $\hat{\sigma}^-$ крайних кубитов.

Гамильтониан внешней бани имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{b}} = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega \hat{b}^\dagger(\omega) \hat{b}(\omega) d\omega, \quad (1)$$

гамильтониан взаимодействия есть

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega) \left(\hat{b}^\dagger(\omega) \hat{c} - \hat{c}^\dagger \hat{b}(\omega) \right) d\omega.$$

Для следующего шага — написания уравнений движения для операторов — нам потребуется коммутационное соотношение для операторов бани:

$$\left[\hat{b}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega') \right] = \delta(\omega - \omega').$$

Используя это соотношение находим

$$\partial_t \hat{b}(\omega) = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{b}(\omega), \hat{\mathcal{H}} \right] = -i\omega \hat{b}(\omega) + \kappa(\omega) \hat{c}, \quad (2)$$

поскольку

$$\left[\hat{b}(\omega), \hat{\mathcal{H}}_{\text{b}} \right] = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega' \left(\hat{b}(\omega) \hat{b}^\dagger(\omega') \hat{b}(\omega') - \hat{b}^\dagger(\omega') \hat{b}(\omega') \hat{b}(\omega) \right) d\omega' = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} \omega' \left[\hat{b}(\omega), \hat{b}^\dagger(\omega') \right] \hat{b}(\omega') d\omega' = \hbar \omega \hat{b}(\omega)$$

в силу того, что $\left[\hat{b}(\omega), \hat{b}(\omega') \right] = 0$. В этих рассуждениях предполагается что есть иерархия времен и что мы интересуемся медленным поведением огибающих амплитуд высокочастотных мод, поэтому никаких контр-RWA слагаемых мы не рассматриваем (для более подробного обсуждения см. примечания в книжке [1]), что делает осмысленным запись $\partial_t \hat{b}(\omega)$. С другой стороны, на выражение (1) можно смотреть как на сумму по всем модам бани и тогда (2) будет описывать то, как меняется со временем амплитуда соответствующей моды. Так или иначе, важно иметь в виду, что эти слова не стоит понимать буквально, поскольку уравнения операторные и прямого отношения к измеряемым физическим величинам они не имеют.

Аналогично находим уравнение движения для некоего оператора \hat{a} , соответствующего системе:

$$\partial_t \hat{a} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{a}, \hat{\mathcal{H}} \right] = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{a}, \hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}} \right] + \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega') \left(\hat{b}^\dagger(\omega') [\hat{a}, \hat{c}] - [\hat{a}, \hat{c}^\dagger] \hat{b}(\omega') \right) d\omega'. \quad (3)$$

Формальным решением уравнения (2) будет (будем полагать, что $t_0 < t$ — это важно)

$$\hat{b}(\omega) = e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{b}_0(\omega) + \kappa(\omega) \int_{t_0}^t e^{-i\omega(t-t')} \hat{c}(t') dt'. \quad (4)$$

Подставляя в (3) найденное решение (4) для $\hat{b}(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{a} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}, \hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}}] + \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\omega') \left(e^{i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0^\dagger(\omega') [\hat{a}, \hat{c}] - [\hat{a}, \hat{c}^\dagger] e^{-i\omega(t-t_0)} b_0(\omega') \right) d\omega' + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \kappa^2(\omega') \int_{t_0}^t dt' \left(e^{i\omega(t-t')} \hat{c}^\dagger(t') [\hat{a}, \hat{c}(t)] - [\hat{a}, \hat{c}^\dagger(t)] e^{-i\omega(t-t_0)} c(t') \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Для дальнейших упрощений будем предполагать марковость:

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}},$$

что, возможно, обосновывается выбором калибровки в слагаемом гамильтониана с взаимодействием $\hat{\mathcal{H}}$, но это не точно.

Для дальнейших выкладок будем использовать соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega(t-t')} d\omega &= 2\pi \delta(t-t'), \\ \int_{t_0}^t \hat{c}(t') \delta(t-t') dt &= \frac{1}{2} \hat{c}(t), \end{aligned}$$

где важно отметить, что в последнем выражении интегрирование ведется точно до точки, где аргумент δ -функции обращается в 0, что и является источником коэффициента $1/2$ (это более-менее очевидно из того факта, что δ -функция чётная). Кроме того обозначим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_0(\omega) d\omega \equiv \hat{b}_{\text{in}}(t).$$

Окончательно можем переписать (5) в виде уравнения типа Линдблада, т.е. получим квантовое уравнение Ланжевена:

$$\partial_t \hat{a} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}, \hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}}] - [\hat{a}, \hat{c}^\dagger] \left(\frac{\gamma}{2} \hat{c} + \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}(t) \right) + \left(\frac{\gamma}{2} \hat{c}^\dagger + \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{in}}^\dagger(t) \right) [\hat{a}, \hat{c}]. \quad (6)$$

В этом уравнении есть источники (поля с индексами “in”) и радиационные потери, связанные с излучением кубитов в линию (слагаемые $\propto \gamma$), а само уравнение описывают как динамику системы в таких условиях, так и установившееся решение, которым мы и будем интересоваться далее.

Если рассмотреть ситуацию, когда $t_0 > t$, то эволюция системы будет идти в обратном направлении по времени и вместо (4) будет иметь место

$$\hat{b}(\omega) = e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_1(\omega) - \kappa(\omega) \int_t^{t_0} e^{-i\omega(t-t')} \hat{c}(t') dt'.$$

В этом случае вместо операторов падающего поля \hat{b}_{in} мы будем писать операторы излученного поля \hat{b}_{out} :

$$\hat{b}_{\text{out}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t_0)} \hat{b}_1(\omega) d\omega.$$

Соответствующее уравнение Ланжевена имеет вид

$$\partial_t \hat{a} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{a}(\omega), \hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}}] + [\hat{a}, \hat{c}^\dagger] \left(\frac{\gamma}{2} \hat{c} - \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{out}}(t) \right) - \left(\frac{\gamma}{2} \hat{c}^\dagger - \sqrt{\gamma} \hat{b}_{\text{out}}^\dagger(t) \right) [\hat{a}, \hat{c}]. \quad (7)$$

Сравнивая уравнения (6), (7) приходим к заключению, что

$$\hat{b}_{\text{in}}(t) - \hat{b}_{\text{out}}(t) = \sqrt{\gamma} \hat{c}(t). \quad (8)$$

Наконец, последним шагом будет переход от уравнений для операторов к уравнениям на средние, например, простой заменой операторов на соответствующие средние. При этом мы будем считать, что среднее от произведения операторов равно произведению соответствующих средних. Соотношение (8) позволяет построить следующий алгоритм для вычисления испущенного излучения: по заданному b_{in} находим поле (или поля) в системе по уравнениям движения для соответствующих средних (6). По найденному среднему от поля в системе по формуле (8) находим соответствующее исходящее излучение.

II. Применение IN-OUT теории к цепочке кубитов

Проиллюстрируем как изложенный выше подход работает на системе, состоящей из цепочки кубитов. Будем модифицировать подход two-sided cavity из [2]: бань будет 2 штуки, приделанных к кубитам 1 и 5 соответственно — см. рис. 1.

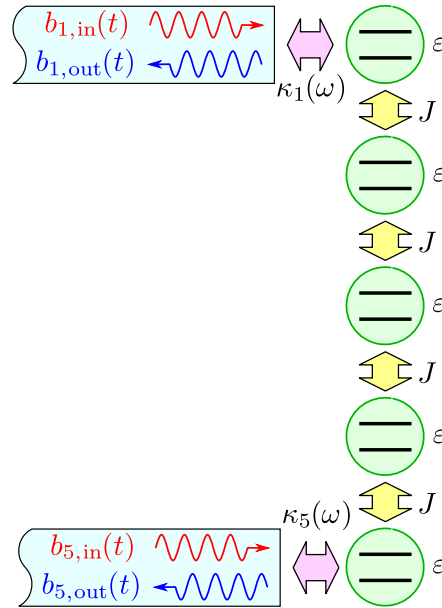


Рис. 1: in-out теория для цепочки из 5 кубитов. Модификация two-sided cavity

В этом случае гамильтониан системы будет иметь вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{sys}} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^5 \hat{\sigma}_i^z + J \sum_{i=1}^4 (\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_{i+1}^- + \hat{\sigma}_{i+1}^+ \hat{\sigma}_i^-).$$

Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = i\hbar \sqrt{\frac{\gamma_i}{2\pi}} \sum_{i=1,5} \left(\hat{b}_i^\dagger \hat{\sigma}_i^- - \hat{\sigma}_i^+ \hat{b}_i \right),$$

где мы подразумеваем, что резервуары подсоединены только к крайним кубитам. Роль оператора \hat{c} будут играть операторы $\hat{\sigma}_1^-$ и $\hat{\sigma}_5^-$. Вместо одного уравнения (6) для \hat{a} в общем случае нам придется писать 15 уравнений на операторы $\hat{\sigma}_i^{\pm,z}$, $i = 1 \dots 5$. При выводе уравнений будем пользоваться тем фактом, что спиновые операторы, относящиеся к разным кубитам коммутируют и соотношениями, выполненными при $i \neq j$

$$[\hat{\sigma}_i^z, \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- + \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_i^-] = 2J (\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- - \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_i^-), \quad (9)$$

$$[\hat{\sigma}_i^+, \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- + \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_i^-] = J \sigma_i^z \hat{\sigma}_j^+, \quad (10)$$

$$[\hat{\sigma}_i^-, \hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_j^- + \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_i^-] = -J \sigma_i^z \hat{\sigma}_j^-. \quad (11)$$

Это позволит вычислить коммутаторы соответствующих операторов с гамильтонианом и получить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\sigma}_1^- &= - \left(i\varepsilon + \frac{\gamma_1}{2} \right) \hat{\sigma}_1^- + \sqrt{\gamma_1} \hat{\sigma}_1^z \hat{b}_{1,\text{in}}(t) + iJ \hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^-, \\ \partial_t \hat{\sigma}_2^- &= - i\varepsilon \hat{\sigma}_2^- + iJ \hat{\sigma}_2^z (\hat{\sigma}_1^- + \hat{\sigma}_3^-), \\ \partial_t \hat{\sigma}_3^- &= - i\varepsilon \hat{\sigma}_3^- + iJ \hat{\sigma}_3^z (\hat{\sigma}_2^- + \hat{\sigma}_4^-), \\ \partial_t \hat{\sigma}_4^- &= - i\varepsilon \hat{\sigma}_4^- + iJ \hat{\sigma}_4^z (\hat{\sigma}_3^- + \hat{\sigma}_5^-), \\ \partial_t \hat{\sigma}_5^- &= - \left(i\varepsilon + \frac{\gamma_5}{2} \right) \hat{\sigma}_5^- + \sqrt{\gamma_5} \hat{\sigma}_5^z \hat{b}_{5,\text{in}}(t) + iJ \hat{\sigma}_5^z \hat{\sigma}_4^-, \\ \partial_t \hat{\sigma}_1^z &= - \gamma_1 (1 + \hat{\sigma}_1^z) - 2\sqrt{\gamma_1} \left(\hat{\sigma}_1^+ \hat{b}_{1,\text{in}}(t) + \hat{b}_{1,\text{in}}^\dagger(t) \hat{\sigma}_1^- \right) + 2iJ (\hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_2^- - \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_1^-), \\ \partial_t \hat{\sigma}_2^z &= 2iJ (\hat{\sigma}_2^+ (\hat{\sigma}_3^- + \hat{\sigma}_1^-) - \hat{\sigma}_2^- (\hat{\sigma}_1^+ + \hat{\sigma}_3^+)), \\ \partial_t \hat{\sigma}_3^z &= 2iJ (\hat{\sigma}_3^+ (\hat{\sigma}_4^- + \hat{\sigma}_2^-) - \hat{\sigma}_3^- (\hat{\sigma}_2^+ + \hat{\sigma}_4^+)), \\ \partial_t \hat{\sigma}_4^z &= 2iJ (\hat{\sigma}_4^+ (\hat{\sigma}_5^- + \hat{\sigma}_3^-) - \hat{\sigma}_4^- (\hat{\sigma}_3^+ + \hat{\sigma}_5^+)), \\ \partial_t \hat{\sigma}_5^z &= - \gamma_5 (1 + \hat{\sigma}_5^z) - 2\sqrt{\gamma_5} \left(\hat{\sigma}_5^+ \hat{b}_{5,\text{in}}(t) + \hat{b}_{5,\text{in}}^\dagger(t) \hat{\sigma}_5^- \right) + 2iJ (\hat{\sigma}_5^+ \hat{\sigma}_4^- - \hat{\sigma}_4^+ \hat{\sigma}_5^-), \end{aligned}$$

причём уравнения для $\hat{\sigma}_j^+$ получаются из уравнений для $\hat{\sigma}_j^-$ эрмитовым сопряжением.

Следующим шагом будет переход к уравнениям для средних. Для этого просто заменим операторы на их средние, убрав крышечки. Нас будет интересовать случай

$$b_{1,\text{in}}(t) = b_{\text{in}} e^{-i\omega t}, \quad b_{5,\text{in}} = 0,$$

т.е. когда на последний кубит не светим, но он сам может излучать в свою линию. В рассматриваемом случае гармонической накачки первого кубита переход во вращающийся базис согласно

$$\sigma_i^\pm \rightarrow \sigma_i^\pm e^{\mp i\omega t}, \quad \sigma_i^z \rightarrow \sigma_i^z$$

позволяет избавиться от явной зависимости уравнений от времени. При условии слабой накачки b_{in} (нас будет интересовать линейный отклик) можно предположить, что все σ_i^z будут близки к -1 в меру слабости накачки. Это позволяет получить линейные уравнения для σ_i^\pm в стационарном случае ($\partial_t \sigma_i^z \rightarrow 0$, $\partial_t \sigma_i^\pm \rightarrow \mp i\omega \sigma_i^\pm$, где фактор $\mp i\omega$ взят из перехода во вращающийся базис). Возможно, стоит произнести еще одно заклинание — в кубитах 2, 3 и 4 тоже есть какое-то слабое затухание, которое можно промоделировать присоединением неких слабо связанных линий, но, поскольку это даст малую поправку, то делать этого не будем и оставим уравнения как есть.

В итоге для стационарного состояния получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(i\varepsilon - i\omega + \frac{\gamma_1}{2}\right) \sigma_1^- - \sqrt{\gamma_1} b_{\text{in}} - iJ\sigma_2^-, \\ 0 &= -i(\varepsilon - \omega)\sigma_2^- - iJ(\sigma_1^- + \sigma_3^-), \\ 0 &= -i(\varepsilon - \omega)\sigma_3^- - iJ(\sigma_2^- + \sigma_4^-), \\ 0 &= -i(\varepsilon - \omega)\sigma_4^- - iJ(\sigma_3^- + \sigma_5^-), \\ 0 &= -\left(i\varepsilon - i\omega + \frac{\gamma_5}{2}\right) \sigma_5^- - iJ\sigma_4^-, \end{aligned}$$

которая позволяет найти средние σ_j^- , $j = 1 \dots 5$ как функции амплитуды поля накачки первого кубита b_{in} . Соотношение (8) позволяет найти поле, излучённое 5-м кубитом:

$$b_{5,\text{out}} = -\sqrt{\gamma_5} \sigma_5^-.$$

В случае $\gamma_1 = \gamma_5 = \gamma$ после простой арифметики получаем

$$b_{5,\text{out}} = \frac{4J^4\gamma}{(2J^2 - \delta(i\gamma + \delta))(2J^2(\gamma - 3i\delta) - \delta^2(\gamma - 2i\delta))} b_{\text{in}}, \quad \delta = \omega - \epsilon. \quad (12)$$

Это выражение в точности совпадает с выражением, полученным Димой при помощи функций Грина.

Анализируя выражение (12) можно легко показать, что в пределе сильной связи между кубитами (по сравнению с радиационными потерями, т.е. в случае $\gamma \rightarrow 0$) резонансные пики находятся при

$$\delta = 0, \pm J, \pm\sqrt{3}J.$$

Можно показать, что при этом $|b_{5,\text{out}}| = |b_{\text{in}}|$, т.е. $|S_{12}| = |b_{5,\text{out}}/b_{\text{in}}| = 1$.

В противоположном случае слабой связи, когда $J \ll \gamma$, выражение (12) показывает, что резонансных величин частот будет на 2 меньше:

$$\delta = 0, \pm\sqrt{2}J,$$

при этом прохождение на этих частотах также будет единичным: $|S_{12}| = 1$. То, как происходит переход от 5-и к 3-м резонансам показан на левой панели рис. 2. Физический смысл изображенного

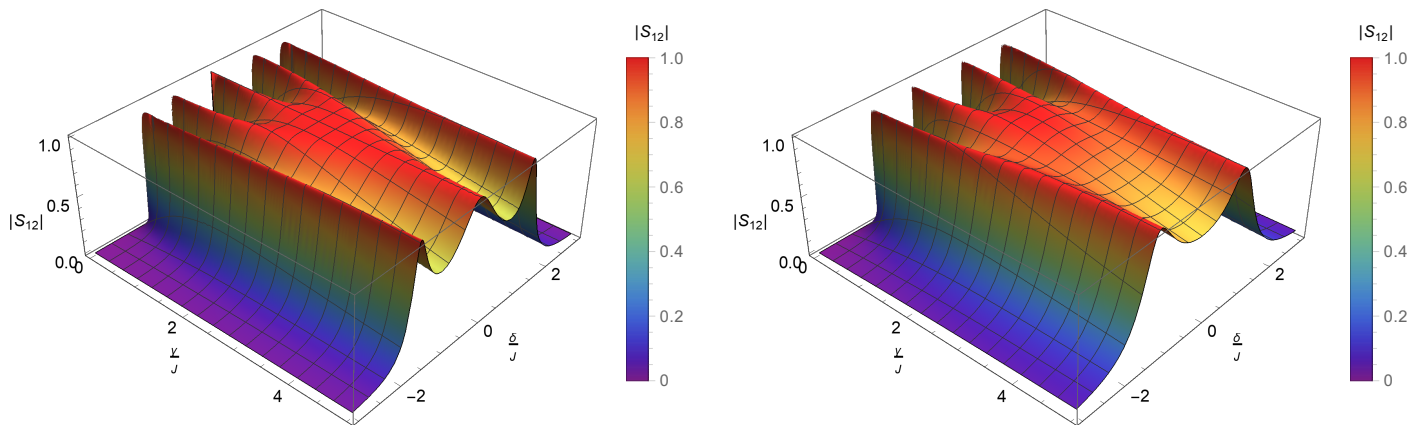


Рис. 2: Зависимость модуля коэффициента прохождения $|S_{12}|$ от величины константы связи крайних кубитов с линиями γ , и отстройки δ , измеренных в единицах J . Слева показана зависимость для 5 кубитов, справа — для 4-х

следующий: ширина максимумов определяется радиационными потерями крайних кубитов. Поэтому при слабой связи с внешними линиями системы из 5 кубитов, при $\gamma \ll J$ будет 5 узких пиков. В противоположном случае сильной связи крайних кубитов с линиями, сами крайние кубиты эффективно

становятся частью линии и система эффективно становится 3-х кубитной, поэтому задача сводится к задаче о 3-х кубитах, крайние из которых связаны с резонатором при этом роль константы связи крайних кубитов с резервуаром κ будет играть J , величина которой, следовательно, и будет определять ширину резонансных пиков в этом пределе. Если же кубитов будет четное число, то при увеличении Γ два центральных пика соединятся и пропадут.

Используя (12) из условия $|S_{21}| = 1$ можно найти положения максимумов, соответствующих единичному пропусканию. Для случая 5 кубитов эти положения описываются формулой

$$\delta = 0; \quad \pm \frac{1}{2} \sqrt{8J^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{64J^4 + \gamma^4}, \quad (13)$$

откуда видно, что при $\gamma \geq \sqrt{6}J$ вещественных решений будет 3, а при $\gamma < \sqrt{6}J$ — пять. Вообще, принципиальным отличием случая чётного и нечётного числа кубитов будет отсутствие и наличие соответственно единичного прохождения на частоте кубитов (т.е. $\delta = 0$), как это проиллюстрировано на рис. 2.

На формулу (13) можно смотреть как на формулу, описывающую сдвиг частоты из-за затухания. Для случая слабого затухания, $\gamma \ll J$ сдвиг частот можно записать как

$$\delta = 0; \quad \pm J \left(1 - \frac{\gamma^2}{16J^2} \right); \quad \pm J \left(\sqrt{3} - \frac{\gamma^2}{16\sqrt{3}J^2} \right);$$

Если обратить выражения (13), то можно решить следующую задачу: пусть известны (например, из эксперимента) отстройки частот, соответствующих максимумам, обозначим их $0, \pm\delta_1, \pm\delta_2$ соответственно, тогда по ним можно определить константы γ и J согласно выражениям

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{-\delta_1^2 - \delta_2^2 + 4\sqrt{\delta_1^4 - 3\delta_1^2\delta_2^2 + \delta_2^4}}, \quad J = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + 4\sqrt{\delta_1^4 - 3\delta_1^2\delta_2^2 + \delta_2^4}}.$$

[1] C.W. Gardiner. Quantum Noise.

[2] D.F. Walls, G.J. Milburn. Quantum Optics.