

# ДИПЛОМ

Федоров Глеб, 125

29 января 2015 г.

## Содержание

Введение	2
<b>I Теоретические сведения</b>	<b>4</b>
1 Явление сверхпроводимости	4
2 Эффект Джозефсона	5
2.1 Уравнения Джозефсона . . . . .	5
2.2 RCSJ-модель . . . . .	5
2.3 Фазо-потокковое соотношение . . . . .	6
3 Теория изолированного Flux-кубита	7
3.1 Построение гамильтониана . . . . .	8
3.2 Квантово-механический анализ . . . . .	9
<b>II Экспериментальная часть</b>	<b>14</b>
<b>III Результаты</b>	<b>14</b>
<b>IV Заключение</b>	<b>14</b>

# Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию в группе квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.<sup>1</sup> Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо уметь реализовывать связь между кубитами, управлять состоянием кубитов, сохраняя его чистоту, определять состояние каждого из кубитов в группе и, наконец, изолировать кубиты от окружающей среды, следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.<sup>2-4</sup> В качестве примера можно привести фотоны,<sup>5</sup> ионы в ионных ловушках,<sup>6</sup> ядерные спины,<sup>7</sup> атомы в электромагнитных резонаторах,<sup>8</sup> электрические системы<sup>9</sup> и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, если только окажутся подчинены квантовой механике.<sup>10</sup> К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать так называемые сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты.<sup>11</sup> В данной работе проводится исследование одного из них – потокового сверхпроводящего кубита (впервые предложен в статье<sup>12</sup> и назван Flux-кубитом).

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток касается шума и нарушения чистоты состояния – в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей измеряются и компенсируются.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть произвольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяемы в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми фундаментальными эффектами<sup>13</sup> может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных устройств, что является очевидным преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,<sup>14</sup>

проведения высокоточных измерений полей,<sup>15</sup> использоваться в качестве активной среды,<sup>16</sup> для квантовой криптографии и телепортации<sup>17</sup> и т.п.

## Часть I

# Теоретические сведения

Данный раздел содержит теоретическое описание явлений, наблюдаемых в экспериментальной части работы. Далее будут кратко рассмотрена теория сверхпроводимости, эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного Flux-кубита, теории его взаимодействия с окружающей средой и, наконец, вопросы измерения и контроля.

## 1 Явление сверхпроводимости

Сверхпроводимость – это сложное коллективное явление, свойство некоторых материалов обладать строго нулевым электрическим сопротивлением при достижении ими температуры ниже определенного значения. В настоящий момент доминирующей теорией сверхпроводимости является теория БКШ,<sup>18</sup> согласно которой электроны в сверхпроводнике при переходе через критическую температуру объединяются в так называемые куперовские пары и претерпевают бозе-конденсацию. Спаривание электронов происходит в результате взаимодействия через фононы, приводящего к эффективному притяжению между ними и образованию связанного состояния на уровне Ферми, отделенного от уровней квазичастичных возбуждений энергетической щелью. Полное описание данного эффекта в рамках микроскопической теории невозможно в данной работе, поэтому мы будем далее пользоваться феноменологической теорией Гинзбурга-Ландау.<sup>19</sup> Сверхпроводящее состояние в рамках этой теории может быть описано параметром порядка или, иначе, модулем так называемой "макроскопической волновой функции куперовских пар":

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

где  $n_s$  – концентрация сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике. Важно подчеркнуть, что она не является настоящей волновой функцией,<sup>20</sup> но тем не менее позволяет получить практически важные результаты. Мы далее считаем, что в изолированном невозмущенном полеми сверхпроводнике и модуль, и фаза волновой функции (1.1) постоянны.

Из минимизации функционала Гинзбурга-Ландау и одного из уравнений Максвелла можно получить следующее уравнение для сверхпроводящего тока куперовских пар в зависимости от приложенного поля, являющееся обобщением уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m_e}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m_e}\mathbf{A}|\Psi|^2. \quad (1.2)$$

Подставляя сюда  $\Psi(\mathbf{r})$  из определения (1.1), получим:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \right), \quad (1.3)$$

где  $\Lambda = \frac{m_e}{n_s e^2}$ ,  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ . Вторая константа, как будет показано далее, является *квантом магнитного потока*, и имеет важное значение в данной работе.

## 2 Эффект Джозефсона

### 2.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона<sup>21</sup> – это эффект установления одной макроскопической фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через так называемую “слабую связь”. Слабые связи многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссипативный ток, и будет выполнено некоторое *фазо-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,<sup>22</sup> оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (2.1)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток  $I_s$  не может превысить некоторого значения  $I_c$ . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссипативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение  $V$ . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (2.2)$$

и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS верна формула Амбегаокара-Баратова:

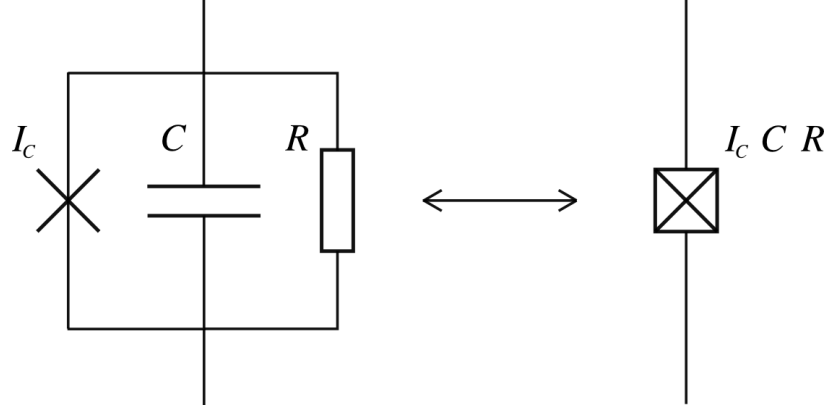
$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left( \frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (2.3)$$

где через  $R_n$  обозначено сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости,  $R_n = \rho \frac{d}{S}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление I-слоя, а  $d$  и  $S$  – его толщина и площадь.

### 2.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пренебрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.

Принципиальная схема изображена на Рис. 1. В случае, когда ток через систему не превышает критического  $I_c$ , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение  $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U_C$  между напряжениями



**Рис. 1:** Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(2e)^2}{2C}. \quad (2.6)$$

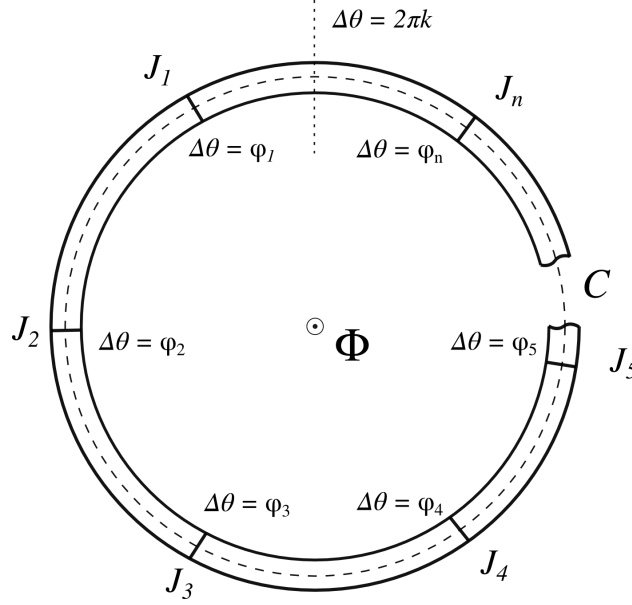
### 2.3 Фазо-потокковое соотношение

Рассмотрим замкнутый сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванный конечным числом джозефсоновских переходов  $\{J_1 \dots J_n\}$ . Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (1.3). Проведем контур  $C$  внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 2). Тогда сверхток на всей его длине будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (1.3), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

Руководствуясь Рис. 2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для  $\text{rot } \mathbf{A}$ , можем написать:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \sum_i \varphi_n + 2\pi k \right) \\ \sum_i \varphi_n &= 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

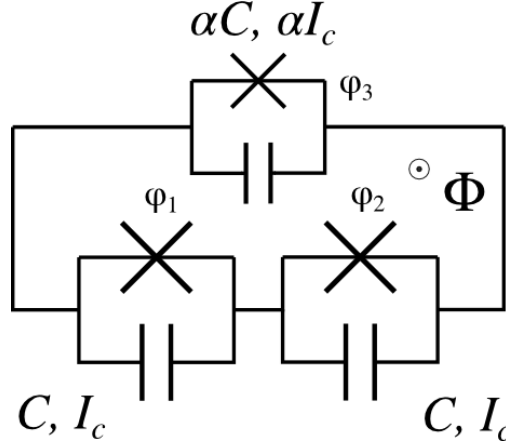


**Рис. 2:** К выводу фазо-потокowego соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования  $C$ . Через  $\varphi_i$  обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрезанного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, получено фазо-потокowego соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (2.7) описывает равенство магнитного потока  $\Phi$ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу  $k$  квантов потока  $\Phi_0$ , обосновывая определение этой константы в (1.3).

### 3 Теория изолированного Flux-кубита

Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит, был предложен впервые в 1999 году<sup>12</sup> и представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (Рис. 3), два из которых одинаковы, а третий отличается по площади в  $\alpha$  раз. Под *изолированным* в данном разделе понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.



**Рис. 3:** Принципиальная схема Flux-кубита в рамках RCSJ-модели. Два из трех переходов по площади одинаковы, площадь третьего по сравнению с ними в  $\alpha$  раз отличается (параметры отличаются в то же число раз согласно формулам для емкости конденсатора и (2.3)).  $\Phi$  – поток, пронизывающий контур. Резисторы не изображены, так как рабочий ток переходов меньше  $I_c$ .

### 3.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели  $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$ , целиком описывается своей разностью фаз. Для трех невзаимодействующих переходов таких разностей будет три, и их и следует выбрать в качестве обобщенных координат системы. Однако в случае замкнутого контура дополнительно накладывается фазо-потокковое соотношение (2.7):

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в контуре на Рис. 3 остаются независимыми только две разности фаз из трех. Введя их в качестве обобщенных координат, можно понять, что является аналогом кинетической, а что – потенциальной энергии системы. В уравнениях (2.4)-(2.6) энергия перехода зависит непосредственно от  $\varphi$ , а емкостная от  $\dot{\varphi}$ . Таким образом, переход запасает потенциальную, а емкость кинетическую энергию. Энергия магнитного поля, возникающего при течении тока в кольце, считается малой в силу малости геометрической индуктивности кубита по сравнению с джозефсоновской индуктивностью переходов, а поток  $\Phi = \Phi_{ext}$  (подробное описание данной процедуры см. в статье<sup>23</sup>). Теперь можно записать лагранжиан системы, используя все те же уравнения (2.4)-(2.6) и выражая разность фаз  $\varphi_3$  отличающегося перехода через разности фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  оди-



наковых переходов при помощи (3.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{U}, \\ \mathcal{T} = E_{cap} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [C(\dot{\varphi}_1)^2 + \alpha C(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + C(\dot{\varphi}_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2) C \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U} = E_{ind} &= E_J \left[ 2 + \alpha + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - \varphi_1 - \varphi_2 \right) \right].\end{aligned}$$

Строить гамильтониан системы из такого лагранжиана не очень удобно, поэтому предварительно произведем замену координат  $\phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ,  $\theta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta} &= C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\phi} \quad \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}^{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta} &= E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.2)$$

Теперь, стандартным образом вводя обобщенный импульс  $\mathbf{p}^T = (p_\phi \quad p_\theta) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$  и производя преобразование Лежандра, получим итоговый гамильтониан системы:

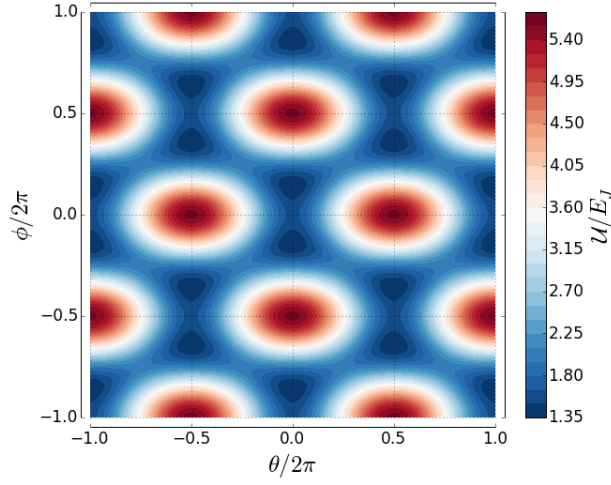
$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p_\phi^2}{2M_\phi} + \frac{p_\theta^2}{2M_\theta} + E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right], \\ M_\phi &= 2C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (1 + 2\alpha), \quad M_\theta = 2C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2.\end{aligned}$$

Далее, осуществляя переход к операторному виду квантовой механики, можно получить оператор Гамильтона для сверхпроводящего потокового кубита в терминах исключительно  $E_C$  и  $E_J$ :

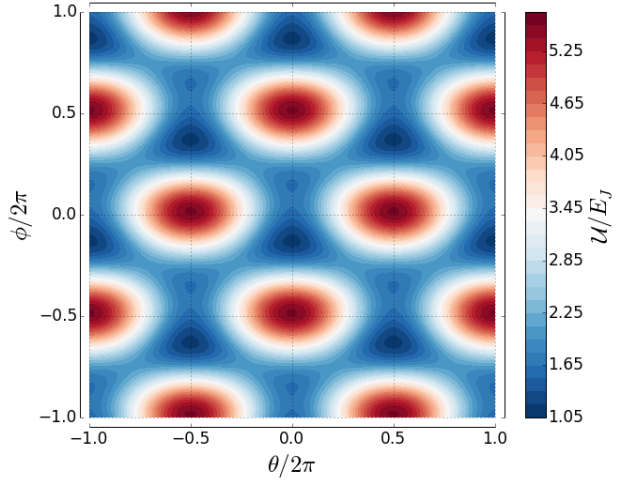
$$\hat{\mathcal{H}} = E_C \left[ -\frac{1}{2(1+2\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right]. \quad (3.3)$$

## 3.2 Квантово-механический анализ

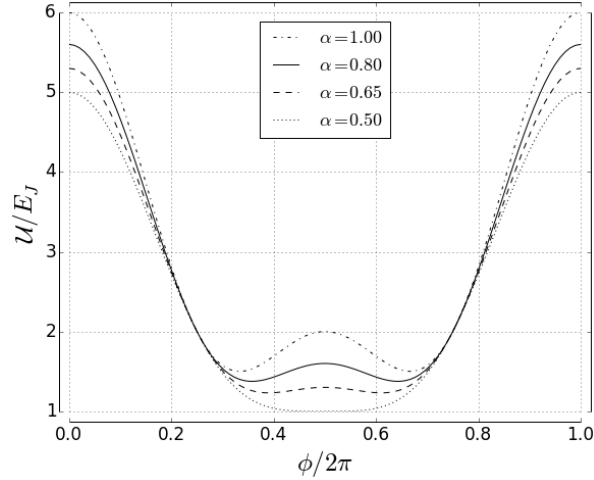
**Анализ потенциала.** Прежде всего рассмотрим потенциал  $\mathcal{U}(\phi, \theta)$ . На Рис. 4 представлены графики, демонстрирующие его структуру в случае  $\Phi = \Phi_0/2$ , или в так называемой *точке вырождения* по потоку. На Рис. 4 (а) можно видеть, что потенциал  $2\pi$ -периодичен по каждой из переменных  $\phi$  и  $\theta$  и представляет собой бесконечную решетку из симметричных двойных ям, отделенных друг от друга диагональными барьерами. Каждая их ям, в свою очередь, делится на две части меньшим барьером. Его высота, как видно из Рис. 4 (с), определяется параметром  $\alpha$ . Для того, чтобы структура оставалась



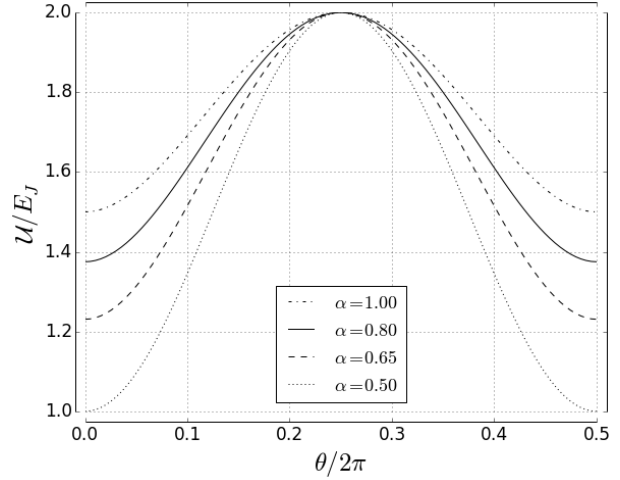
(а) Трехмерное изображение потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$ ,  $\alpha = 0.8$ . Можно видеть  $2\pi$ -периодическую решетку из двойных ям.



(б) При отклонении потока от  $\Phi_0/2$  появляется перекося внутри двойных ям, одна половина становится глубже, а другая мельче в зависимости от знака отклонения  $\Delta\Phi$ . Здесь  $\Delta\Phi = -0.05\Phi_0$ .



(с) Срез потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$  по направлению  $\theta = \pi$  (барьер внутри ям) в зависимости от  $\alpha$ . При  $\alpha = 0.5$  этот барьер пропадает, при  $\alpha = 1$  он сравнивается с барьером между ямами (см. (d)).



(д) Срез потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$  по направлению  $\phi = (1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{2\alpha}) \theta + \arccos \frac{1}{2\alpha}$  (барьер между ямами) в зависимости от  $\alpha$ . Здесь крайние точки отвечают минимумам  $\mathcal{U}$  при  $\theta = 0$  ( $\pi$ ),  $\phi = \arccos \frac{1}{2\alpha}$  ( $\pi - \arccos \frac{1}{2\alpha}$ ).

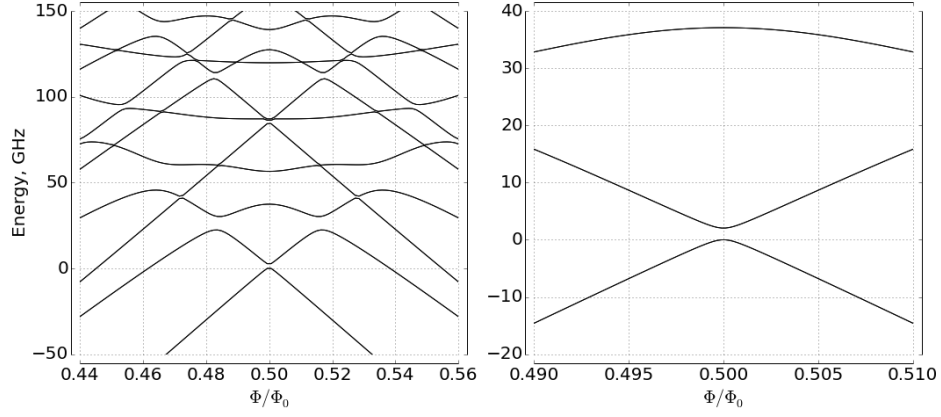
**Рис. 4:** Графическое изображение периодического потенциала Флюкс-кубита в зависимости от относительного размера отличающегося перехода  $\alpha$  и пронизывающего потока  $\Phi$ .

подобной изображенной на Рис. 4 (а), требуется, чтобы  $\alpha \in (0.5, 1)$ : при нарушении этого условия либо совсем пропадает внутренний барьер, либо внешний барьер сравнивается с внутренним по высоте, и ямы перестают быть качественно отделены друг от друга (Рис. 4 (d)). Минимумы  $\mathcal{U}$  находятся в точках  $\theta = \pi k$ ,  $\phi = \pm \arccos \frac{1}{2\alpha} + \pi n$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ , причем в точке вырождения все минимумы имеют одинаковую энергию, а при отходе от нее в зависимости от знака отклонения одна половина двойных ям становится мельче, а другая глубже, и вырождение внутри каждой ямы снимается (Рис. 4 (b)).

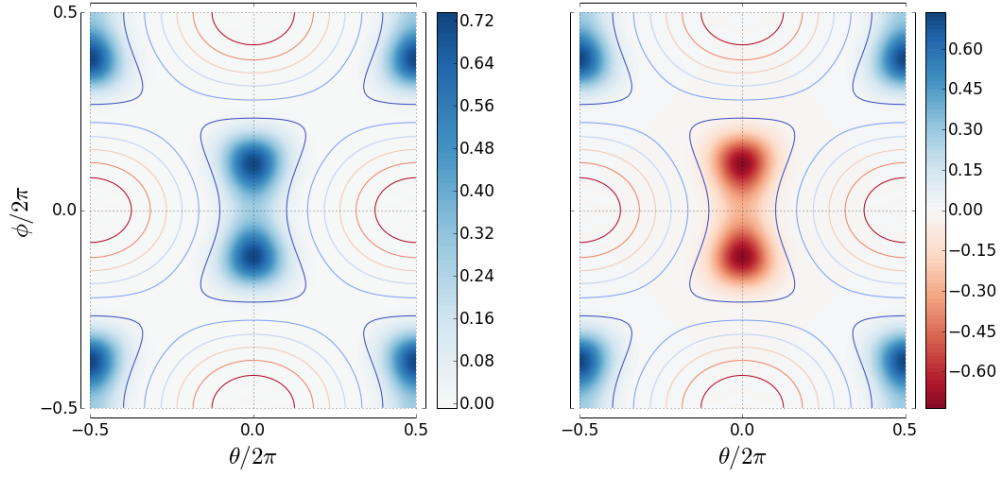
**Стационарные состояния.** Прежде, чем начинать поиск стационарных состояний для гамильтониана (3.3), важно не упустить одну особенность. Строго говоря, в силу того, что потенциал (3.2) является периодическим, решениями уравнения Шредингера будут являться *блоховские функции*, а спектр энергий будет иметь зонную структуру. Таким образом, как это ни удивительно, один Flux-кубит представляет собой модель частицы в идеальной периодической решетке двумерного твердого тела. Для приближенного аналитического решения задачи в случае, когда  $E_J \gg E_C$ , можно использовать модель сильной связи для центрированной решетки с базисом, однако здесь мы будем рассматривать численный вариант.

Для нахождения стационарных состояний гамильтониана (3.3) может быть применен метод, изложенный в работе.<sup>24</sup> Используя периодичность, можно разложить в ряд Фурье и потенциал, и искомую волновую функцию, ограничиваясь  $2N + 1$  начальными слагаемыми в разложении, и подставить их в уравнение Шредингера с гамильтонианом (3.3), что после определенных преобразований сведет задачу к поиску собственных значений и векторов матрицы  $(2N + 1)^2$  на  $(2N + 1)^2$ . Результаты такого вычисления для  $N = 20$  представлены на Рис. 5. Вычисленный спектр энергий состоит из дублетов (на рисунке они сливаются в синглеты), причем расщепление в дублетах обусловлено разными периодическими конфигурациями волновой функции при фиксированной четности ее внутри ям, а расстояния между дублетами изменением четности внутри ям. Это происходит так как используемый машинный метод “вылавливает” границы энергетических зон, так как может найти только чисто действительные блоховские решения. Действительно, по теореме Блоха  $\psi(r) = e^{ikR}\psi(r)$ , для граничных квазиимпульсов  $k = 0$  и  $k = K/2$  выполнено соответственно  $\psi(r + R) = \psi(r)$  и  $\psi(r + R) = -\psi(r)$ , что и наблюдается на парах Рис. 5 (b) и Рис. 5 (c). Видно также, что четные конфигурации волновой функции имеют меньшую энергию, а нечетные большую, в соответствии с вышесказанным.

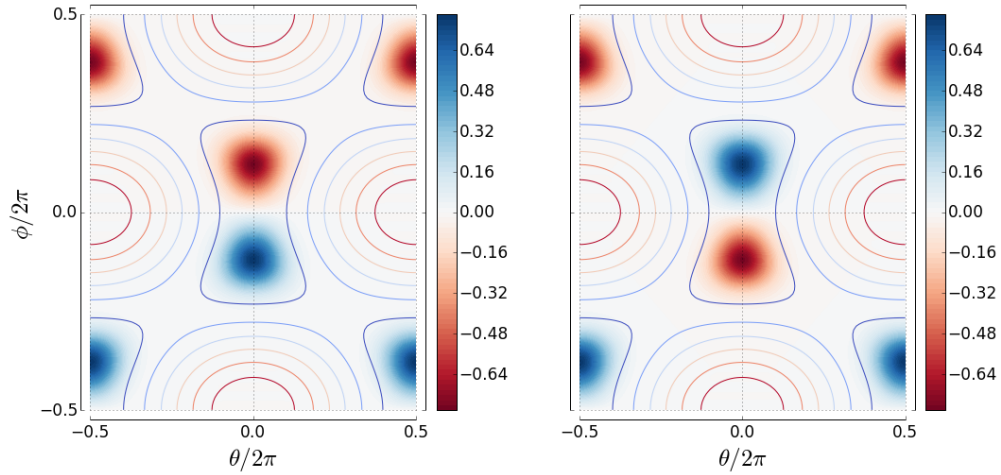
В зависимости от поля спектр ведет себя, как показано на Рис. 5 (а), неравномерно: в окрестности  $\Phi_0/2$  четные пары уровней сдвигаются вниз, нечетные вверх, а на большем удалении магнитного потока от полкванта картина вообще теряет порядок из-за значительного числа квазипересечений. На Рис. 5 (b) и (c) изображены соответственно нулевое и первое дублетные состояния в точке вырождения. Далее мы будем пренебрегать тем, что первые две зоны отличны от дискретных уровней, так как расщепления внутри них примерно в  $10^5$  раз меньше, чем расстояния между ними, и назовем верхнюю по энергии зону “ $|e\rangle$ -состоянием”, а нижнюю “ $|g\rangle$ -состоянием”.



(а) Уровни энергии в зависимости от внешнего поля. Каждая линия на рисунке на самом деле является двойной (объяснение см. в тексте).



(б) Граничные состояния нулевой зоны (“ $|g\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция четная.



(с) Граничные состояния первой зоны (“ $|e\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция нечетная.

**Рис. 5:** Результаты численного решения стационарного уравнения Шредингера с параметрами  $\alpha = 0.7$ ,  $E_J = 30E_C = 400$  GHz. Цветом обозначено значение волновой функции, нормированной на единицу в периоде потенциала.

**Двухуровневое приближение.** Следующим шагом будет приведение системы к двум нижним состояниям, пренебрегая всеми остальными. Это оправданно, так как третий дублет в точке вырождения лежит гораздо выше (почти в 20 раз) по энергии, чем состояние  $|e\rangle$ . Так же одновременно с этим мы явно выделим в гамильтониане член, отвечающий воздействию отклонения потока от полкванта, разложив в ряд Тейлора последнее слагаемое в потенциале. Это также оправданно потому, что, как видно из Рис. 5 (а), для большого изменения расстояния между уровнями годится даже малое отклонение от  $\Phi_0/2$ . Итак, записываем разложение потенциала и полный гамильтониан в матричной форме (в базисе из состояний  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$  в точке вырождения):

$$\begin{aligned}\hat{U} &= E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi_0/2 + \delta\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right] = \\ &= E_J [2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos(\pi - 2\phi)] + \alpha E_J \sin(\pi - 2\phi) 2\pi \frac{\delta\Phi}{\Phi_0} + \mathcal{O}(\delta\Phi^2), \\ \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{11} & \mathcal{H}_{12} \\ \mathcal{H}_{21} & \mathcal{H}_{22} \end{pmatrix} &= \hat{\mathcal{T}} + \hat{U} + \alpha E_J \begin{pmatrix} \langle 0 | \sin(\pi - 2\phi) | 0 \rangle & \langle 0 | \sin(\pi - 2\phi) | 1 \rangle \\ \langle 1 | \sin(\pi - 2\phi) | 0 \rangle & \langle 1 | \sin(\pi - 2\phi) | 1 \rangle \end{pmatrix} 2\pi \frac{\delta\Phi}{\Phi_0} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\delta}{2} \hat{\sigma}_x, |g\rangle_{\Phi_0/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |e\rangle_{\Phi_0/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\varepsilon$  – расстояние между уровнями, а  $\delta = 4\pi\alpha E_J \delta\Phi / \Phi_0 \cdot C$ ,  $C = const$  – неизвестный коэффициент. Последнее равенство перед (3.4) верно, так как при  $\Phi = \Phi_0/2$  диагональные матричные элементы равны нулю в силу нечетности оператора  $\sin(\pi - 2\phi)$  и симметрии волновых функций на Рис. 5, а элементы на побочной диагонали равны в силу самосопряженности этого оператора и действительности волновых функций как собственных для гамильтониана. Самосопряженность легко выводится из физического смысла данного оператора – это оператор тока через меньший переход  $\hat{I}_3$ . Равенство нулю его среднего значения в состояниях  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$  при  $\Phi = \Phi_0/2$  означает, что в точке вырождения в кубите не течет незатухающий ток. Этим объясняется ослабление в таком режиме его взаимодействия со средой – кубит не создает полей.

Сокращенный гамильтониан (3.4) можно просто привести к диагональному виду. Его собственные значения и их разность будут зависеть от  $\delta$ , и, следовательно, от  $\Phi$  следующим образом:

$$E_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}, \quad \Delta E = h\nu_q = \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}, \quad (3.5)$$

где  $\nu_q$  – это экспериментально наблюдаемая частота перехода между кубитными уровнями. Легко построить зависимость этой частоты от приложенного поля – это гипербола, причем по ее асимптотам можно вычислить константу связи с внешним постоянным полем.

## Часть II

# Экспериментальная часть

## Часть III

# Результаты

## Часть IV

# Заключение

## Список литературы

- <sup>1</sup> Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [2])
- <sup>2</sup> DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [2])
- <sup>3</sup> DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [2])
- <sup>4</sup> Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [2])
- <sup>5</sup> Milburn G J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [2])
- <sup>6</sup> Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [2])
- <sup>7</sup> Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [2])
- <sup>8</sup> Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [2])
- <sup>9</sup> Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [2])

- <sup>10</sup> Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — URL: [http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum\\_circuit\\_theory-1.pdf](http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf). (ссылка на стр. [2])
- <sup>11</sup> Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [2])
- <sup>12</sup> Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // Physical Review B. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылки на стр. [2, 7 и 11])
- <sup>13</sup> Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылка на стр. [2])
- <sup>14</sup> Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [2])
- <sup>15</sup> Clarke J., Braginski A. I. The SQUID Handbook. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [3])
- <sup>16</sup> Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [3])
- <sup>17</sup> Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // Scientific reports. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [3])
- <sup>18</sup> Schrieffer J. R., Tinkham M. Superconductivity // Reviews Of Modern Physics. — 1999. — Vol. 71. — P. S313–S317. (ссылка на стр. [4])
- <sup>19</sup> Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064. — 1950. (ссылка на стр. [4])
- <sup>20</sup> Gorkov Lev Petrovich. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // Sov. Phys. JETP. — 1959. — Vol. 9, no. 6. — P. 1364–1367. (ссылка на стр. [4])
- <sup>21</sup> Josephson B. Coupled Superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [5])
- <sup>22</sup> Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [5])

<sup>23</sup> Quantum theory of three-junction flux qubit with non-negligible loop inductance: Towards scalability / T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt et al. // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73, no. 17. — P. 174526. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.174526>. (ссылка на стр. [8])

<sup>24</sup> Johansson R. Reproduce: Orlando et al., Phys. Rev. B 60, 15398 (1999). — URL: <http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/reproduced-papers/blob/master/Reproduce-PRB-60-15398-1999-Orlando.ipynb>. (ссылка на стр. [11])