

ДИПЛОМ

Федоров Глеб, 125

28 марта 2015 г.

Оглавление

1	Введение	3
2	Теоретические сведения	5
1	Явление сверхпроводимости	5
2	Эффект Джозефсона	6
2.1	Уравнения Джозефсона	6
2.2	RCSJ-модель	7
2.3	Фазо-потокковое соотношение	7
3	Теория изолированного Flux-кубита	8
3.1	Построение гамильтониана	9
3.2	Квантово-механический анализ	10
4	Взаимодействие кубита с окружающей средой	15
4.1	Матрица плотности	15
4.2	Уравнение эволюции в форме Линдблада	17
4.3	Релаксация	18
4.4	Дефазировка	18
4.5	Диссипативная динамика	19
3	Экспериментальная часть	20
4	Результаты	21
5	Заключение	22

Глава 1

Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию внутри группы квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.¹ Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо связать кубиты друг с другом, иметь возможность управлять состоянием кубитов и считывать его, сохраняя чистоту соответствующей матрицы плотности, а также обеспечить изоляцию кубитов от влияния окружающей среды. Следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.^{2–4} В качестве примера можно привести фотоны,⁵ ионы в ионных ловушках,⁶ ядерные спины,⁷ атомы в электромагнитных резонаторах,⁸ электрические системы⁹ и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, но при условии, что их поведение будет именно квантовым, а не классическим.¹⁰ К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать на их основе так называемые *сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты*.¹¹ В данной работе проводится исследование одного из них – потокового сверхпроводящего кубита (он был впервые предложен в статье¹² и назван Flux-кубитом).

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток заключается в значительном взаимодействии с окружающей средой – в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей измеряются, а затем компенсируются в эксперименте.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть про-

извольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяемы в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми фундаментальными эффектами¹³ может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных квантовых вычислительных устройств, что является еще одним преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами с широко изменяемыми характеристиками, как внутренними, так и касающимися связи с окружением. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,¹⁴ проведения высокоточных измерений полей,¹⁵ использоваться в качестве активной среды,¹⁶ применяться в квантовой криптографии и телепортации¹⁷ и т.п.

Глава 2

Теоретические сведения

Данный раздел содержит теоретическое описание явлений, наблюдаемых в экспериментальной части работы. Далее будут кратко рассмотрена теория сверхпроводимости, эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного Flux-кубита, теории его взаимодействия с окружающей средой и, наконец, вопросы измерения и контроля.

1 Явление сверхпроводимости

Сверхпроводимость – это сложное коллективное явление, свойство некоторых материалов обладать строго нулевым электрическим сопротивлением при достижении ими температуры ниже определенного значения. В настоящий момент самой известной точной теорией сверхпроводимости является теория БКШ,¹⁸ согласно которой электроны в сверхпроводнике при переходе через критическую температуру объединяются в так называемые куперовские пары и претерпевают бозеконденсацию. Спаривание электронов происходит в результате обмена фононами, приводящего к эффективному притяжению между ними и образованию связанного состояния на уровне Ферми, отделенного от уровней квазичастичных возбуждений энергетической щелью. Полное описание данного эффекта в рамках микроскопической теории невозможно в данной работе, поэтому мы будем далее пользоваться феноменологической теорией Гинзбурга-Ландау,¹⁹ которая выводится из модели БКШ,²⁰ но является более удобной в практическом применении. Сверхпроводящее состояние в рамках этой теории может быть описано параметром порядка или, иначе, модулем так называемой "макроскопической волновой функции куперовских пар":

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

где n_s – концентрация сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике. Важно подчеркнуть, что она не является настоящей волновой функцией, но тем не менее позволяет получить практически важные результаты. Мы далее считаем, что в изолированном невозмущенном полями сверхпроводнике и модуль, и фаза волновой

функции (1.1) постоянны.

Из минимизации функционала Гинзбурга-Ландау и одного из уравнений Максвелла можно получить следующее уравнение для сверхпроводящего тока куперовских пар в зависимости от приложенного поля, являющееся обобщением уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m_e}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m_e}\mathbf{A}|\Psi|^2. \quad (1.2)$$

Подставляя сюда $\Psi(\mathbf{r})$ из определения (1.1), получим:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \right), \quad (1.3)$$

где $\Lambda = \frac{m_e}{n_s e^2}$, $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$. Вторая константа, как будет показано далее, является квантом магнитного потока, и имеет важное значение в данной работе.

2 Эффект Джозефсона

2.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона²¹ – это эффект установления одной макроскопической фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через так называемую “слабую связь”. Слабые связи многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссипативный ток, и будет выполнено некоторое *фаза-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,²² оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (2.1)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток I_s не может превысить некоторого значения I_c . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссипативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение V . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (2.2)$$

и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS верна формула Амбегаокара-Баратова:

$$I_c = \frac{\pi \Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left(\frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (2.3)$$

где через T обозначена температура, а через R_n сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости, $R_n = \rho \frac{d}{S}$, где ρ – удельное сопротивление I-слоя, а d и S – его толщина и площадь.

2.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пренебрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.

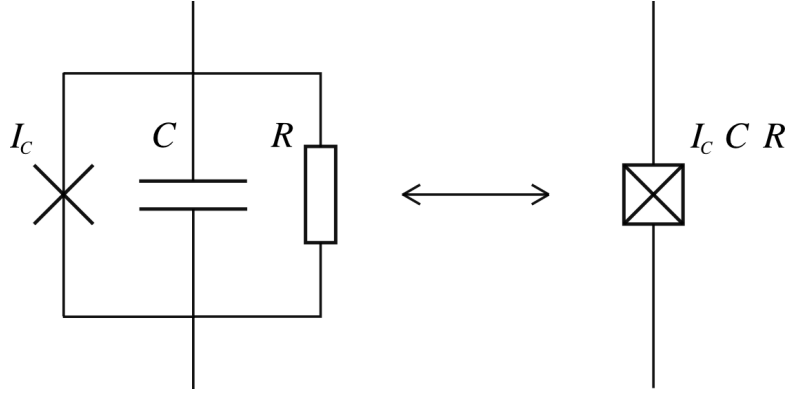


Рис. 2.1: Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

Принципиальная схема изображена на Рис. 2.1. В случае, когда ток через систему не превышает критического I_c , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение $\frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = U_C$ между напряжениями на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(2e)^2}{2C}. \quad (2.6)$$

2.3 Фазо-потокковое соотношение

Рассмотрим замкнутый сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванный конечным числом джозефсоновских переходов $\{J_1 \dots J_n\}$. Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (1.3). Проведем контур C внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 2.2). Тогда сверхток на всей его длине

будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (1.3), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

Руководствуясь Рис. 2.2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для $\text{rot } \mathbf{A}$, можем написать:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(\sum_i \varphi_n + 2\pi k \right) \\ \sum_i \varphi_n &= 2\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

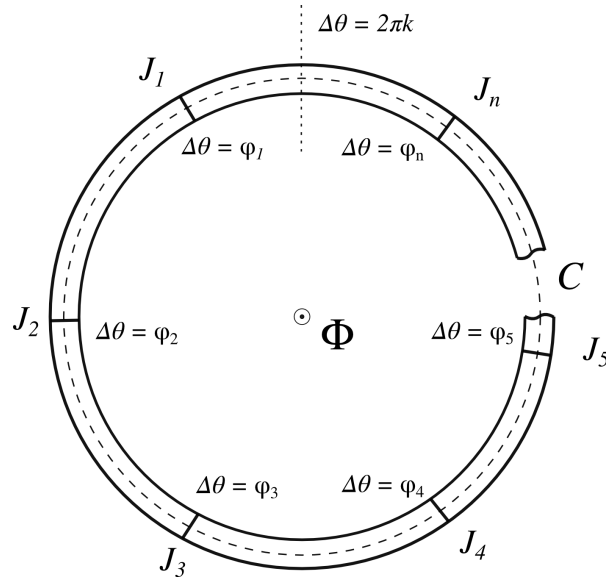


Рис. 2.2: К выводу фазо-потокowego соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования C . Через φ_i обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрешенного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, получено фазо-потокowego соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (2.7) опишет равенство магнитного потока Φ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу k квантов потока Φ_0 , обосновывая определение этой константы в (1.3).

3 Теория изолированного Flux-кубита

Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит, был предложен впервые в 1999 году¹² и представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (Рис. 2.3), два из которых

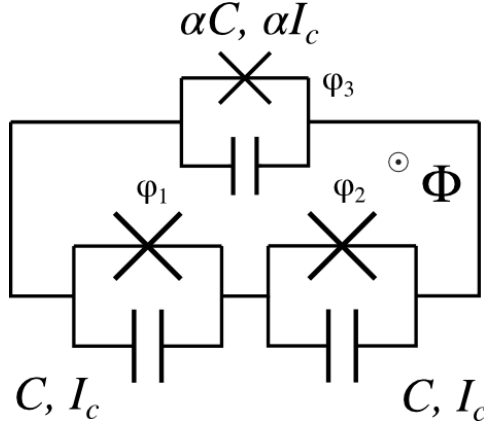


Рис. 2.3: Принципиальная схема Флюх-кубита в рамках RCSJ-модели. Два из трех переходов по площади одинаковы, площадь третьего по сравнению с ними в α раз отличается (параметры отличаются в то же число раз согласно формулам для емкости конденсатора и (2.3)). Φ – поток, пронизывающий контур. Резисторы не изображены, так как рабочий ток переходов меньше I_c .

одинаковы, а третий отличается по площади в α раз. Под *изолированным* в данном разделе понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.

3.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели $U = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi}$, целиком описывается своей разностью фаз. Для трех невзаимодействующих переходов таких разностей будет три, и их и следует выбрать в качестве обобщенных координат системы. Однако в случае замкнутого контура дополнительно накладывается фазо-потокосое соотношение (2.7):

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в контуре на Рис. 2.3 остаются независимыми только две разности фаз из трех. Введя их в качестве обобщенных координат, можно понять, что является аналогом кинетической, а что – потенциальной энергии системы. В уравнениях (2.4)-(2.6) энергия перехода зависит непосредственно от φ , а емкостная от $\dot{\varphi}$. Таким образом, переход запасает потенциальную, а емкость кинетическую энергию. Энергия магнитного поля, возникающего при течении тока в кольце, считается малой в силу малости геометрической индуктивности кубита по сравнению с джозефсоновской индуктивностью переходов, а поток $\Phi = \Phi_{ext}$ (подробное описание данной

процедуры см. в статье²³). Теперь можно записать лагранжиан системы, используя все те же уравнения (2.4)-(2.6) и выражая разность фаз φ_3 отличающегося перехода через разности фаз φ_1 и φ_2 одинаковых переходов при помощи (3.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{U}, \\ \mathcal{T} &= E_{cap} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [C(\dot{\varphi}_1)^2 + \alpha C(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + C(\dot{\varphi}_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2) C \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U} &= E_{ind} = E_J \left[2 + \alpha + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - \varphi_1 - \varphi_2 \right) \right].\end{aligned}$$

Строить гамильтониан системы из такого лагранжиана не очень удобно, поэтому предварительно произведем замену координат $\phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$, $\theta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta} &\equiv C \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\phi} \quad \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}^{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta} &= E_J \left[2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.2)$$

Теперь, стандартным образом вводя обобщенный импульс $\mathbf{p}^T = (p_\phi \quad p_\theta) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$ и производя преобразование Лежандра, получим итоговый гамильтониан системы:

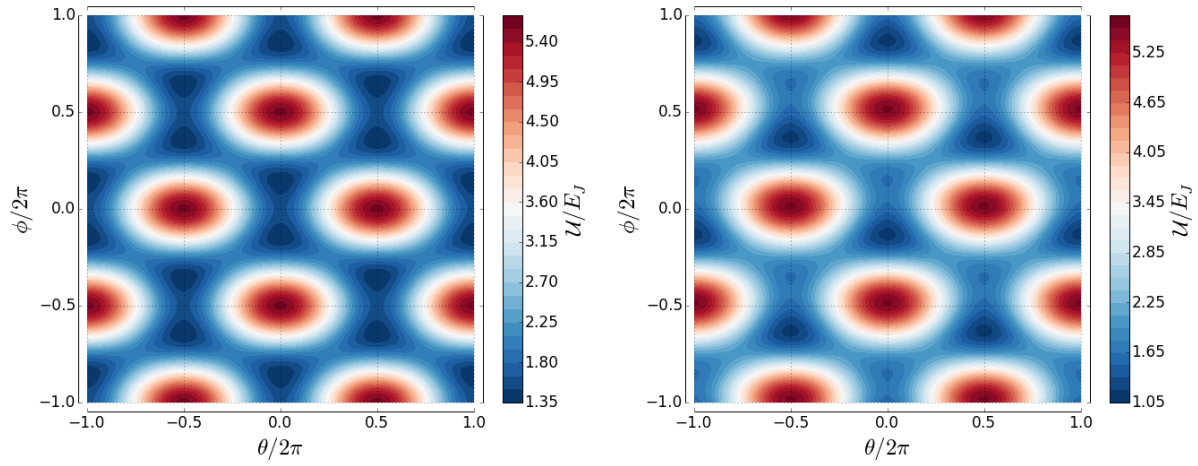
$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p_\phi^2}{2M_\phi} + \frac{p_\theta^2}{2M_\theta} + E_J \left[2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right], \\ M_\phi &= 2C \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (1 + 2\alpha), \quad M_\theta = 2C \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2.\end{aligned}$$

Далее, осуществляя переход к операторному виду квантовой механики, можно получить оператор Гамильтона для сверхпроводящего потокового кубита в терминах исключительно E_C и E_J :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= E_C \left[-\frac{1}{2(1+2\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + \\ &+ E_J \left[2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

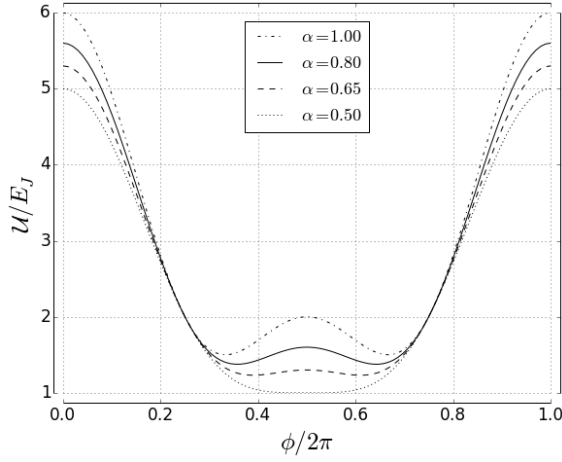
3.2 Квантово-механический анализ

Анализ потенциала. Прежде всего рассмотрим потенциал $\mathcal{U}(\phi, \theta)$. На Рис. 2.4 представлены графики, демонстрирующие его структуру в случае $\Phi = \Phi_0/2$, или в так называемой *точке вырождения* по потоку. На Рис. 2.4 (а) можно видеть,

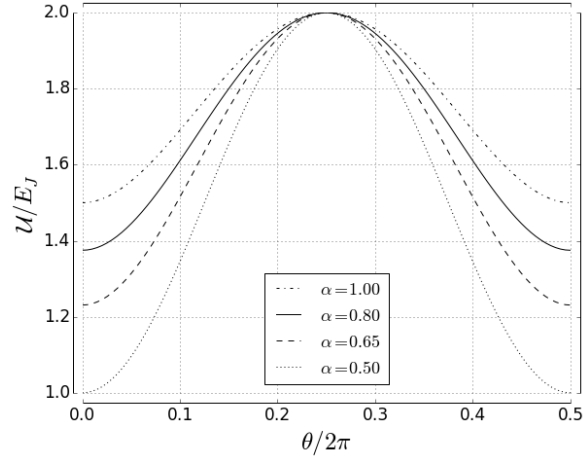


(а) Трехмерное изображение потенциала при $\Phi = \Phi_0/2$, $\alpha = 0.8$. Можно видеть 2π -периодическую центрированную квадратную решетку с базисом из двойных ям.

(б) При отклонении потока от $\Phi_0/2$ появляется перекося внутри двойных ям, одна половина становится глубже, а другая мельче в зависимости от знака отклонения $\Delta\Phi$. Здесь $\Delta\Phi = -0.05\Phi_0$, $\alpha = 0.8$



(с) Срез потенциала при $\Phi = \Phi_0/2$ по направлению $\theta = \pi$ (барьер внутри ям) в зависимости от α . При $\alpha = 0.5$ этот барьер пропадает, при $\alpha = 1$ он сравнивается с барьером между ямами (см. (d)).



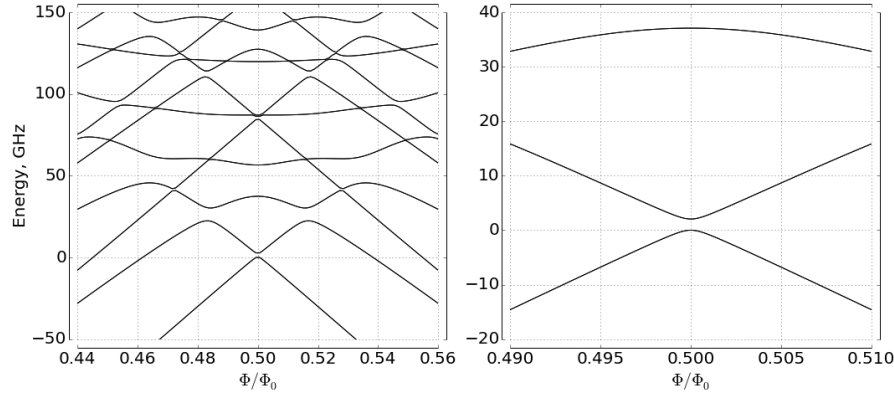
(d) Срез потенциала при $\Phi = \Phi_0/2$ по направлению $\phi = (1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{2\alpha}) \theta + \arccos \frac{1}{2\alpha}$ (барьер между ямами) в зависимости от α . Здесь крайние точки отвечают минимумам \mathcal{U} при $\theta = 0$ (π), $\phi = \arccos \frac{1}{2\alpha}$ ($\pi - \arccos \frac{1}{2\alpha}$).

Рис. 2.4: Графическое изображение периодического потенциала Flux-кубита в зависимости от относительного размера отличающегося перехода α и пронизывающего потока Φ .

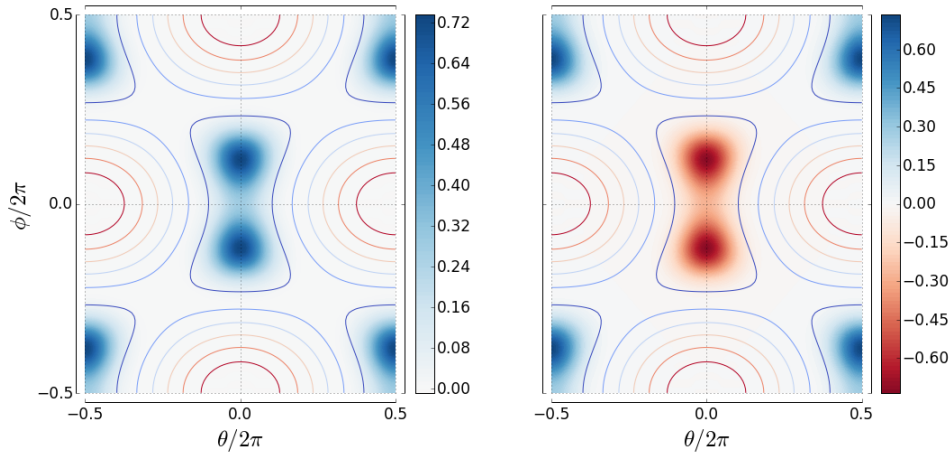
что потенциал 2π -периодичен по каждой из переменных ϕ и θ и представляет собой бесконечную центрированную квадратную решетку с базисом из симметричных двойных ям, отделенных друг от друга диагональными барьерами. Каждая их ям, в свою очередь, делится на две части меньшим барьером. Его высота, как видно из Рис. 2.4 (с), определяется параметром α . Для того, чтобы структура оставалась подобной изображенной на Рис. 2.4 (а), требуется, чтобы $\alpha \in (0.5, 1)$: при нарушении этого условия либо совсем пропадает внутренний барьер, либо внешний барьер сравнивается с внутренним по высоте, и ямы перестают быть качественно отделены друг от друга (Рис. 2.4 (d)). Минимумы \mathcal{U} находятся в точках $\theta = \pi k$, $\phi = \pm \arccos \frac{1}{2\alpha} + \pi \frac{n}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$, причем в точке вырождения все минимумы имеют одинаковую энергию, а при отходе от нее в зависимости от знака отклонения одна половина двойных ям становится мельче, а другая глубже, и вырождение внутри каждой ямы снимается (Рис. 2.4 (b)).

Стационарные состояния. Прежде, чем начинать поиск стационарных состояний для гамильтониана (3.3), важно не упустить смысл происходящего. Строго говоря, в силу того, что потенциал (3.2) является периодическим, решениями уравнения Шредингера будут являться *блеховские функции*, а спектр энергий будет иметь зонную структуру. Таким образом, в приближении нулевой индуктивности Flux-кубит представляет собой модель частицы в идеальной периодической решетке двумерного твердого тела. В реальности, однако, энергетический спектр все же является дискретным из-за квадратичной по фазам индуктивной энергии,²³ с пиками числа уровней в областях бывших зон.

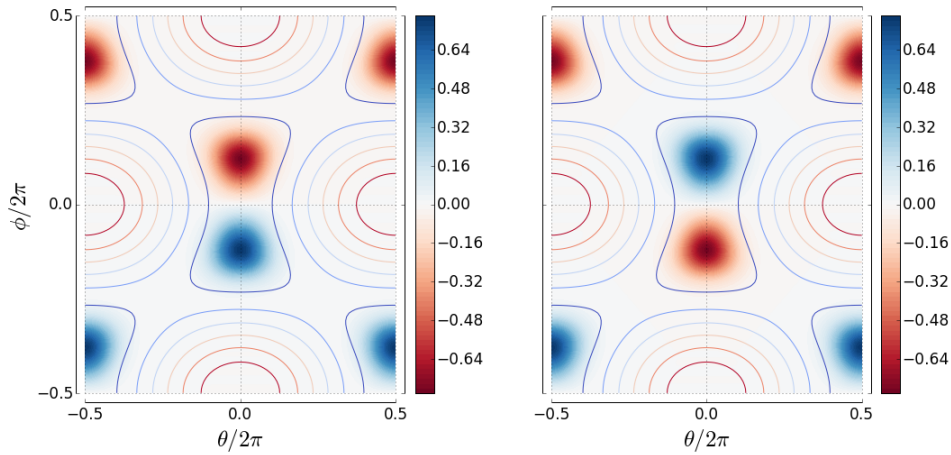
Оставаясь в рамках приближения нулевой индуктивности, для аналитического решения задачи можно использовать модель сильной связи для центрированной решетки с базисом, однако мы будем рассматривать численный вариант – метод, изложенный в работе.²⁴ В условиях 2π -периодичности и действительности потенциала и искомой волновой функции можно разложить в ряд Фурье, ограничиваясь $2N + 1$ начальными слагаемыми, уравнение Шредингера с гамильтонианом (3.3), что после определенных преобразований сведет задачу к поиску собственных значений и векторов матрицы размером $(2N + 1)^2$ на $(2N + 1)^2$. Результаты такого вычисления для $N = 20$ представлены на Рис. 2.5. Вычисленный спектр энергий (Рис. 2.5 (а)) состоит из дублетов (на рисунке они сливаются в синглеты), причем расщепление в дублетах обусловлено разными периодическими конфигурациями волновой функции при фиксированной четности ее внутри ям, а расстояния между дублетами изменением четности внутри ям. Такая структура спектра возникает по причине того, что в силу использованных предположений о волновой функции машинный метод “вылавливает” из каждой энергетической зоны лишь граничные состояния, так как только они обладают подходящими свойствами! Действительно, по теореме Блоха $\psi(r) = e^{ikR}\psi(r)$, для граничных квазиимпульсов $k = 0$ и $k = K/2$ (K -вектор обратной решетки) выполнено соответственно $\psi(r + R) = \psi(r)$ и $\psi(r + R) = -\psi(r)$, что и наблюдается на парах Рис. 2.5 (b) и Рис. 2.5 (с). Четные конфигурации волновой функции имеют меньшую рассчитанную энергию, а нечетные большую, в соответствии с вышесказанным.



(а) Уровни энергии в зависимости от внешнего поля. Каждая линия на рисунке на самом деле является двойной (подробности см. в тексте).



(б) Граничные по квазиимпульсу состояния нулевой зоны (“ $|g\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция четная.



(с) Граничные по квазиимпульсу состояния первой зоны (“ $|e\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция нечетная.

Рис. 2.5: Результаты численного решения стационарного уравнения Шредингера с параметрами $\alpha = 0.7$, $E_J = 30E_C = 400$ GHz. Цветом обозначено значение волновой функции, нормированной на единицу в периоде потенциала.

В зависимости от поля спектр ведет себя, как показано на Рис. 2.5 (а), неравномерно: в окрестности $\Phi_0/2$ четные зоны сдвигаются вниз, нечетные вверх, а на большем удалении магнитного потока от полкванта картина вообще теряет порядок из-за значительного числа квазипересечений. На Рис. 2.5 (b) и (c) изображены соответственно нулевое и первое дублетные состояния в точке вырождения. Далее мы будем пренебрегать тем, что первые две зоны отличны от дискретных уровней, так как расщепления внутри них примерно в 10^5 раз меньше, чем расстояния между ними, и назовем верхнюю по энергии зону “ $|e\rangle$ -состоянием”, а нижнюю “ $|g\rangle$ -состоянием”.

Двухуровневое приближение. Следующим шагом будет приведение системы к двум нижним состояниям, пренебрегая всеми остальными. Это оправданно, так как третья зона в окрестности точки вырождения лежит гораздо выше (почти в 20 раз) по энергии, чем состояние $|e\rangle$. Теперь, используя метод сильной связи в двойной яме, рассчитаем зависимость расщепления уровней $|g\rangle$ и $|e\rangle$ от Φ . Разобьем яму на два потенциала \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 , так, что их сумма даст исходный потенциал ямы, а не равными нулю они окажутся только в области соответствующих полуям. Для каждого из этих двух потенциалов можно найти основные состояния, которые мы обозначим $|1, g\rangle$ и $|2, g\rangle$. Основное состояния для уравнения с потенциалом $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ в предположении о малом перекрытии потенциалов и волновых функций отдельных ям можно искать в виде $|g\rangle = a|1, g\rangle + b|2, g\rangle$. Также мы получим сразу и $|e\rangle$ в качестве второго решения задачи. Итак, записывая полный гамильтониан, действуя им на выбранного вида функцию $|g\rangle$ и умножая слева сначала на $\langle 1, g|$, а потом на $\langle 2, g|$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} E_{1g} + U_2^{1g1g} & E_{1g}\langle 1, g|2, g\rangle + U_2^{1g2g} \\ E_{2g}\langle 2, g|1, g\rangle + U_1^{2g1g} & E_{2g} + U_1^{2g2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & \langle 1, g|2, g\rangle \\ \langle 2, g|1, g\rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где верхними индексами обозначены соответствующие матричные элементы потенциалов U , E_{1g}, E_{2g} – энергии основных состояний ям, E – искомое собственное значение полного гамильтониана. Далее, пренебрежем диагональными матричными элементами потенциалов, так как здесь они берутся по волновым функциям противоположной половины ямы, а также неортогональностью $|1, g\rangle$ и $|2, g\rangle$ (они также локализованы в разных ямах). Тогда уравнение значительно упростится:

$$\begin{pmatrix} E_{1g} & U_2^{1g2g} \\ U_1^{2g1g} & E_{2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Следующим приближением будет пренебрежение различием в недиагональных элементах, так как при малых отклонениях Φ деформации около дна ям незначительны, и можно считать, что формы волновых функций и потенциалов остаются прежними, а меняются лишь энергии основных состояний из-за перекоса ям. Переобозначая элементы матрицы и смещая собственные значения на постоянную величину,

получаем сокращенный гамильтониан следующего вида:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x \Leftrightarrow \frac{\delta}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z \quad (3.4)$$

(с точностью до выбора базиса)

где $\Delta = 2U_1^{2g1g} \approx 2U_2^{1g2g}$ – минимальное расщепление по энергии, $\delta = |E_{1g} - E_{2g}|$ – сдвиг энергий основных состояний ям в зависимости от поля. После дифференцирования потенциала можно получить, что сдвиг минимумов по энергии, а, следовательно, и δ , будут пропорциональны $\Phi - \Phi_0/2$.

Сокращенный гамильтониан (3.2) можно просто привести к диагональному виду. Его собственные значения и их разность будут зависеть от δ следующим образом:

$$E_{g,e} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \delta^2}, \quad \Delta E = h\nu_q = \sqrt{\Delta^2 + \delta^2}, \quad (3.5)$$

где ν_q – это экспериментально наблюдаемая частота перехода между кубитными уровнями. Легко построить зависимость этой частоты от приложенного поля – это гипербола.

Главным обоснованием сделанных приближений является точный численный результат Рис. 2.5 (а) для двух нижних состояний, который так же дает гиперболическую зависимость.

4 Взаимодействие кубита с окружающей средой

Переход от замкнутых квантовых систем, эволюция которых подчинена нестационарному уравнению Шредингера и состояние которых в каждый момент времени точно известно, к так называемым *открытым*, т.е. незамкнутым, квантовым системам всегда сопряжен с трудностями. Это связано с тем, что для описания таких систем в идеале требовалось бы найти закон эволюции Вселенной, а затем исключить из рассмотрения все ее степени свободы, не касающиеся представляющей интерес области. Эта формулировка является, конечно, довольно туманной в отношении Вселенной, но что вообще такое Вселенная? В силу отсутствия однозначного ответа на данный вопрос в качестве “вселенной” часто выбирают что-то простое, такое, что в определенных приближениях можно описать математически – и получают результаты, согласующиеся с экспериментом.²⁵ Далее будет описана такая процедура и соответствующий математический аппарат.

4.1 Матрица плотности

Матрица плотности – это обобщение вектора состояния на системы, точное состояние которых неизвестно. Матрицы плотности подразделяются на *чистые* и *смешанные*: первые эквивалентны обычной волновой функции, вторые же определяют распределение вероятности на волновых функциях. Рассмотрим две ситуации:

1. Система находится в суперпозиции состояний из какого-либо набора $|a\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$. Тогда матрица плотности является чистой и записывается следующим образом:

$$\hat{\rho}_a = |a\rangle\langle a| = \sum_{k,n} c_k c_n^* |k\rangle\langle n|.$$

2. Система находится в каком-то одном из состояний $|k\rangle$ с вероятностью c_k^2 . Тогда матрица плотности является смешанной и записывается теперь иначе:

$$\hat{\rho}_a = \sum_k c_k^2 |k\rangle\langle k|.$$

В чем удобство таких определений? Для ответа на этот вопрос рассмотрим значение произвольной наблюдаемой с оператором \hat{Q} . В первом случае, из определения:

$$Q = \langle a|\hat{Q}|a\rangle = \sum_{k,n} c_k c_n^* \langle n|\hat{Q}|k\rangle \equiv \sum_i \sum_{k,n} c_k c_n^* \langle i|k\rangle \langle n|\hat{Q}|i\rangle \stackrel{def}{=} \text{Tr} [\hat{\rho}_a \hat{Q}].$$

Во втором случае, из определения и квантового, и статистического среднего, а также приема, примененного выше, для каждого вероятного состояния:

$$Q = \sum_k Q_k p_k = \sum_k \text{Tr} [|k\rangle\langle k|\hat{Q}] p_k \equiv \text{Tr} [\hat{\rho}_a \hat{Q}].$$

Таким образом, через матрицу плотности мы получаем единое определение среднего значения оператора, имеющего смысл как для статистического, так и для простого квантового случая. Также просто показывается, что обе матрицы плотности удовлетворяют одному и тому же уравнению Лиувилля-фон-Неймана:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}].$$

В качестве примера того, как матрица плотности может помочь при описании открытых систем, рассмотрим два кубита, находящихся в *перепутанном* состоянии, когда невозможно представить их общее состояние как тензорное произведение векторов состояний кубитов по отдельности. Такое состояние – это, например,

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B).$$

Соответствующая матрица плотности:

$$\hat{\rho}_{\Psi^+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждый из кубитов в примере является, по сути, открытой системой, которую требуется описать. Для этого вводится понятие *сокращенной матрицы плотности* и операция взятия *частичного следа* для системы двух подсистем:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B [\hat{\rho}_{AB}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \langle i|_B \hat{\rho}_{AB} |i\rangle_B \Leftrightarrow [\hat{\rho}_A]_{n,m} = \sum_i \langle n|_A \otimes \langle i|_B \hat{\rho}_{AB} |i\rangle_B \otimes |m\rangle_A,$$

где суммирование ведется по базису подсистемы В (второе выражение показывает, как суммировать по состояниям композитного базиса $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$). Для каждого из двух кубитов системы в состоянии $|\Psi^+\rangle$ такое вычисление даст $\hat{\rho}_{A,B} = \hat{\mathbb{1}}_{A,B}/2$ – матрица плотности каждого из них смешанная и дает 50%-ую вероятность быть в одном из двух состояний. Таким образом, зная все о перепутанной системе, мы не имеем достоверной информации о ее частях.

4.2 Уравнение эволюции в форме Линдблада

Процедура сокращения матрицы плотности, проведенная с двумя кубитами и их общим стационарным состоянием, применяется и в нестационарном случае для получения уравнения эволюции подсистемы (master equation).²⁶ Исходный гамильтониан включает систему, ее окружение и их взаимодействие:

$$\hat{\mathcal{H}}_{se} = \hat{\mathcal{H}}_s \otimes \hat{\mathbb{1}}_e + \hat{\mathbb{1}}_s \otimes \hat{\mathcal{H}}_e + \hat{\mathcal{H}}_i. \quad (4.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{se} = [\hat{\mathcal{H}}_{se}, \hat{\rho}_{se}] \quad (4.2)$$

Теперь обозначим приближения, которые используются для получения сокращенного уравнения эволюции (хорошее обсуждение их соответствия реальности см. в работе²⁷):

1. **Модель окружения.** В качестве модели внешней среды обычно используется бозе-термостат, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_e = \sum_k \hbar \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ в (4.1), а взаимодействие $\hat{\mathcal{H}}_i$ однобозонным и слабым.
2. **Борновское приближение.** При решении уравнения (4.2) мы ищем матрицу плотности системы в виде $\hat{\rho}_{se}(t) = \hat{\rho}_s(t) \otimes \hat{\rho}_e^0$, тем самым пренебрегая изменением состояния термостата $\hat{\rho}_e^0 = \exp(\hat{\mathcal{H}}_e) / \text{Tr} [\exp(\hat{\mathcal{H}}_e)]$.
3. **Приближение Маркова.** Эволюция $\hat{\rho}_s$ после момента t определяется только ее значением в этот момент и не зависит от прошлых значений. По-другому это формулируется как отсутствие памяти у термостата.

В условиях выбранных приближений можно путем достаточно громоздких преобразований получить уравнение динамики подсистемы. Его часть, ведущая к отличиям от стандартной унитарной эволюции, окажется представимой в *форме Линдблада*, и, в итоге, искомое уравнение будет иметь следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s = [\hat{\mathcal{H}}_s, \hat{\rho}_s] + \sum_k \Gamma_k \left(\hat{\mathcal{O}}_k \hat{\rho}_s \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger \hat{\mathcal{O}}_k, \hat{\rho}_s \} \right) \quad (4.3)$$

$$\stackrel{def}{=} [\hat{\mathcal{H}}_s, \hat{\rho}_s] + \sum_k \Gamma_k \mathcal{D} [\hat{\mathcal{O}}_k] \hat{\rho}_s. \quad (4.4)$$

$\hat{\mathcal{D}}$ - линдбладовский супероператор. Коэффициенты Γ_k , определяющие скорость распада, и операторы $\hat{\mathcal{O}}_k$, определяющие каналы распада, выводятся²⁶ для каждой конкретной модели, для каждого гамильтониана (4.1), однако вид (4.4) сохраняется (это можно показать в рамках теории групп²⁸).

4.3 Релаксация

Для получения диссипатора, отвечающего за передачу энергии кубита внешнему бозе-полю, используется следующий модельный гамильтониан:

$$\hat{\mathcal{H}}_{se} = \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}_e + \hat{\mathbb{1}}_q \otimes \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k g_k \left(\hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_k^\dagger + \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_k \right), \quad (4.5)$$

где ω_q, ω_k - энергии кубита и мод, $\hat{\sigma}^\pm$ - повышающий и понижающий операторы кубита, $\hat{\sigma}^+ = \hat{\sigma}^{-\dagger} = |e\rangle\langle g|$, а g_k - константы связи кубита с внешним полем. Последняя часть возникает из взаимодействия квантованного поля каждой моды, которое пропорционально $\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k$, с кубитом (через оператор $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+$, см. (3.2)) в первом порядке теории возмущений, т.е. $\hat{\mathcal{H}}_{i_k} \propto (\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+) \otimes (\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k) \xrightarrow{\mathbb{I}^{ord.}} (\hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_k^\dagger + \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_k)$. Это оправданно, так как мы полагаем связи, т.е. g_k , малыми. Исходя из такой модели при $T \approx 0$ получаем²⁶ следующее уравнение эволюции:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_q = [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma (\hat{\sigma}^- \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-, \hat{\rho}_q \}), \quad (4.6)$$

где γ получается в процессе вычисления из (4.5), однако на практике подгоняется к экспериментальным данным. Динамику данного уравнения мы обсудим несколько позже.

4.4 Дефазировка

Более тонкий эффект получится, если мы будем рассматривать другую модель, выбрав следующий вид гамильтониана (4.1):²⁶

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_q &= \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z \\
\hat{\mathcal{H}}_e &= \sum_k \hbar\omega_{1k} \hat{a}_{1k}^\dagger \hat{a}_{1k} + \sum_k \hbar\omega_{2k} \hat{a}_{2k}^\dagger \hat{a}_{2k} \\
\hat{\mathcal{H}}_i &= \sum_{k,j} g_{k,j} \left(\hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_{1k}^\dagger \hat{a}_{1j} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_{2k}^\dagger \hat{a}_{2j} \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Слагаемое $\hat{\mathcal{H}}_i$ здесь отвечает за переброс мод термостата вместе с виртуальным возбуждением (релаксацией) кубита. Так же выбирается иногда т.н. спин-бозонное взаимодействие.²⁹ Вообще говоря подобный вид вытекает в общем случае из разложения произвольного оператора в пространстве термостата по его фундаментальным модам.³⁰ Аналогично предыдущему пункту, получаем следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_q = [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma_\phi (\hat{\sigma}^z \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^z - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}^z \hat{\sigma}^z, \hat{\rho}_q \}) \equiv [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma_\phi (\hat{\sigma}^z \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^z - \hat{\rho}_q), \tag{4.8}$$

где последнее равенство верно в силу того, что $\hat{\sigma}_z^2 \equiv \hat{1}$. Понятно, что объединив гамильтонианы (4.5) и (4.7), мы получим итоговое уравнение с диссипативной частью $\gamma \mathcal{D}[\hat{\sigma}^-] + \gamma_\phi \mathcal{D}[\hat{\sigma}_z]$. Теперь перейдем к рассмотрению динамики таких уравнений.

4.5 Диссипативная динамика

Качественный вид картины диссипации сильно зависит от выбранного начального состояния системы: на основное состояние диссипаторы не оказывают влияния вовсе, а, например, на возбужденное оказывает влияние только релаксация, экспоненциально “спуская” его по вертикальной оси сферы Блоха.

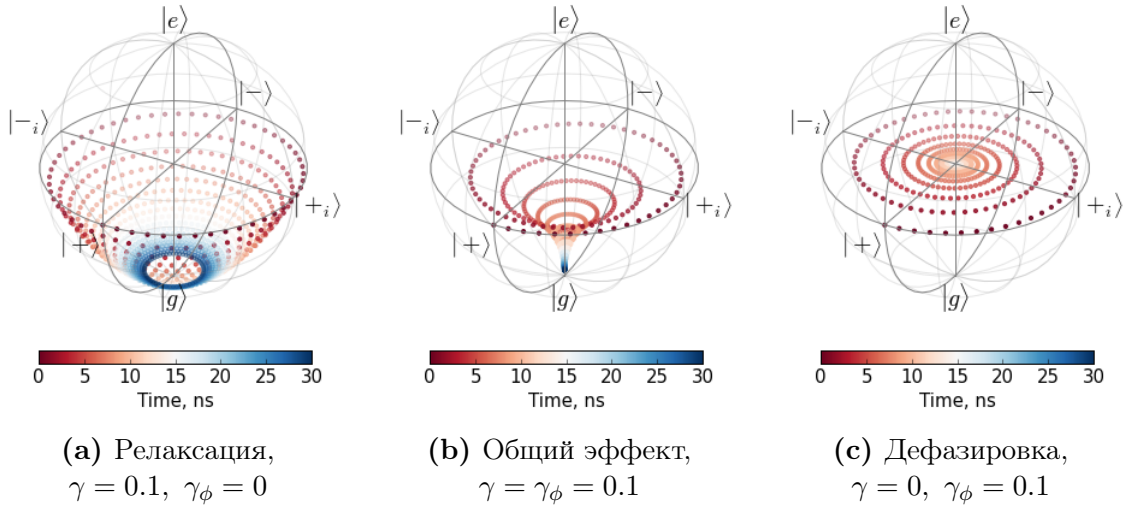


Рис. 2.6: Диссипативная динамика кубита с $\nu_q = 1$ ГГц.

Для состояния $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$ более интересная картина эволюции представлена на Рис. 2.6. Как видно, дефазировка уничтожает когерентность системы, т.е. приближает значение $\text{Tr} [\hat{\rho}_q^2]$ к нулю, гораздо быстрее, чем релаксация.

Глава 3

Экспериментальная часть

Глава 4

Результаты

Глава 5

Заключение

Литература

- ¹ Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [3])
- ² DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [3])
- ³ DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [3])
- ⁴ Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [3])
- ⁵ Milburn G. J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [3])
- ⁶ Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [3])
- ⁷ Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [3])
- ⁸ Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [3])
- ⁹ Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [3])
- ¹⁰ Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — URL: http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf. (ссылка на стр. [3])
- ¹¹ Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [3])

- ¹² Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // Physical Review B. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылки на стр. [3 и 8])
- ¹³ Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁴ Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁵ Clarke J., Braginski A. I. The SQUID Handbook. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁶ Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁷ Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // Scientific reports. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [4])
- ¹⁸ Schrieffer J. R., Tinkham M. Superconductivity // Reviews Of Modern Physics. — 1999. — Vol. 71. — P. S313–S317. (ссылка на стр. [5])
- ¹⁹ Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064. — 1950. (ссылка на стр. [5])
- ²⁰ Gorkov L. P. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // Sov. Phys. JETP. — 1959. — Vol. 9, no. 6. — P. 1364–1367. (ссылка на стр. [5])
- ²¹ Josephson B. Coupled Superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [6])
- ²² Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il’ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [6])
- ²³ Quantum theory of three-junction flux qubit with non-negligible loop inductance: Towards scalability / T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt et al. // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73, no. 17. — P. 174526. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.174526>. (ссылки на стр. [10 и 12])
- ²⁴ Johansson R. Reproduce: Orlando et al., Phys. Rev. B 60, 15398 (1999). — URL: <http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/reproduced-papers/blob/master/Reproduce-PRB-60-15398-1999-Orlando.ipynb>. (ссылка на стр. [12])

- ²⁵ Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance / L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch et al. // *Nature Physics*. — 2009. — Vol. 5, no. 2. — P. 105–109. (ссылка на стр. [15])
- ²⁶ Carmichael H. J. *Quantum Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*. — Springer Verlag, 1999. (ссылки на стр. [17 и 18])
- ²⁷ Markovian master equations: a critical study / A. Rivas, A. D. K. Plato, S. F. Huelga, M.B. Plenio // *New Journal of Physics*. — 2010. — Vol. 12, no. 11. — P. 113032. (ссылка на стр. [17])
- ²⁸ Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // *Communications in Mathematical Physics*. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130. — URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF01608499>. (ссылка на стр. [18])
- ²⁹ Dynamics of the dissipative two-state system / A. J. Leggett, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher et al. // *Reviews of Modern Physics*. — 1987. — Vol. 59, no. 1. — P. 1. (ссылка на стр. [19])
- ³⁰ Hsu D., Skinner J. L. General quantum mechanical theory of pure dephasing // *Journal of luminescence*. — 1987. — Vol. 37, no. 6. — P. 331–337. (ссылка на стр. [19])