

# ДИПЛОМ

Федоров Глеб, 125

26 мая 2015 г.

# Оглавление

<b>1 Введение</b>	<b>4</b>
<b>2 Теоретические сведения</b>	<b>6</b>
1 Явление сверхпроводимости . . . . .	6
2 Эффект Джозефсона . . . . .	7
2.1 Уравнения Джозефсона . . . . .	7
2.2 RCSJ-модель . . . . .	8
2.3 Фазо-потоковое соотношение . . . . .	8
3 Теория изолированного Flux-кубита . . . . .	9
3.1 Построение гамильтониана . . . . .	10
3.2 Квантово-механический анализ . . . . .	11
4 Открытые системы и декогеренция . . . . .	16
4.1 Матрица плотности . . . . .	16
4.2 Уравнение эволюции в форме Линдблада . . . . .	18
4.3 Релаксация . . . . .	19
4.4 Дефазировка . . . . .	19
4.5 Диссипативная динамика . . . . .	20
4.6 Вынужденное поведение . . . . .	20
5 Кубит, связанный с квантовым гармоническим осциллятором . . . . .	22
5.1 Гамильтониан Раби . . . . .	22
5.2 Спектр модели Раби . . . . .	22
5.3 Динамика модели Раби . . . . .	25
5.4 Теория отклика . . . . .	27
<b>3 Экспериментальная часть</b>	<b>28</b>
1 Установка и оборудование . . . . .	28
1.1 Рефрижератор растворения . . . . .	28
1.2 Микроволновое оборудование . . . . .	30
<b>4 Результаты</b>	<b>32</b>

<b>5 Заключение</b>	<b>33</b>
---------------------	-----------

# Глава 1

## Введение

Квантовый компьютер – это устройство, хранящее и обрабатывающее информацию внутри группы квантовых систем, причем обработка информации происходит в результате когерентных взаимодействий систем внутри группы.<sup>1</sup> Каждая квантовая система, как правило, является двухуровневой и носит название “квантовый бит” или “кубит” (англ. “qubit” – quantum bit). Для осуществления квантового расчета необходимо связать кубиты друг с другом, иметь возможность управлять состоянием кубитов и считывать его, сохраняя чистоту соответствующей матрицы плотности, а также обеспечить изоляцию кубитов от влияния окружающей среды. Следовательно, в качестве кубитов могут быть использованы любые достаточно изолированные двухуровневые системы, поддающиеся контролю и способные взаимодействовать друг с другом.<sup>2–4</sup> В качестве примера можно привести фотоны,<sup>5</sup> ионы в ионных ловушках,<sup>6</sup> ядерные спины,<sup>7</sup> атомы в электромагнитных резонаторах,<sup>8</sup> электрические системы<sup>9</sup> и т.п.

Последние являются одними из самых заманчивых кандидатов на эту роль, но при условии, что их поведение будет именно квантовым, а не классическим.<sup>10</sup> К счастью, явление сверхпроводимости и эффект Джозефсона позволяют наблюдать квантовые эффекты в контурах даже мезоскопического масштаба и создавать на их основе так называемые *сверхпроводящие (джозефсоновские) кубиты*.<sup>11</sup> В данной работе проводится исследование одного из них – потокового сверхпроводящего кубита (Flux-кубит, впервые предложен в статье<sup>12</sup>).

Джозефсоновские кубиты имеют два значительных недостатка и одно значительное преимущество в сравнении с микроскопическими кубитами. Первый недостаток заключается в значительном взаимодействии с окружающей средой - в силу больших размеров, джозефсоновские кубиты сильнее связываются со средой, что требует дополнительных изысканий в области их изоляции; второй недостаток заключается в том, что в то время как микроскопические кубиты, например, атомы, идентичны друг другу, сверхпроводящие кубиты могут иметь отличия из-за неточностей производства. Для борьбы с этим требуется либо создавать заведомо нечувствительные к дефектам схемы, либо проводить калибровку, в процессе которой параметры цепей изменяются, а затем компенсируются в эксперименте.

Преимущество джозефсоновских кубитов в их гибкости: они могут быть про-

извольным образом расположены относительно друг друга, а их параметры легко и непрерывно изменяются в широких пределах. Эта гибкость вместе с некоторыми фундаментальными эффектами<sup>13</sup> может быть использована для борьбы с первым недостатком, а также предоставляет много вариантов для подстройки параметров, что в значительной степени нивелирует второй недостаток. Далее, накопленный опыт человечества в области изготовления интегральных схем позволит упростить переход к производству реальных квантовых вычислительных устройств, что является еще одним преимуществом в сравнении с другими типами кубитов. Таким образом, скорее всего именно джозефсоновские кубиты и будут применены в первом квантовом компьютере, и именно их следует изучать.

Важно отметить, что сверхпроводящие кубиты могут применяться не только для непосредственного использования в квантовом компьютере, так как по сути являются рукотворными атомами с широко изменямыми характеристиками, как внутренними, так и касающимися связи с окружением. Они могут быть пригодны для создания метаматериалов,<sup>14</sup> проведения высокоточных измерений полей,<sup>15</sup> использоваться в качестве активной среды,<sup>16</sup> применяться в квантовой криптографии и телепортации<sup>17</sup> и т.п.

# Глава 2

## Теоретические сведения

Данный раздел содержит теоретическое описание явлений, наблюдавшихся в экспериментальной части работы. Далее будут кратко рассмотрена теория сверхпроводимости, эффект Джозефсона, затем произведено рассмотрение теории изолированного Flux-кубита, теории его взаимодействия с окружающей средой и, наконец, вопросы измерения и контроля.

### 1 Явление сверхпроводимости

Сверхпроводимость – это сложное коллективное явление, свойство некоторых материалов обладать строго нулевым электрическим сопротивлением при достижении ими температуры ниже определенного значения. В настоящий момент самой известной точной теорией сверхпроводимости является теория БКШ,<sup>18</sup> согласно которой электроны в сверхпроводнике при переходе через критическую температуру объединяются в так называемые куперовские пары и претерпевают бозе-конденсацию. Спаривание электронов происходит в результате обмена фононами, приводящего к эффективному притяжению между ними и образованию связанного состояния на уровне Ферми, отделенного от уровней квазичастичных возбуждений энергетической щелью. Полное описание данного эффекта в рамках микроскопической теории невозможно в данной работе, поэтому мы будем далее пользоваться феноменологической теорией Гинзбурга-Ландау,<sup>19</sup> которая выводится из модели БКШ,<sup>20</sup> но является более удобной в практическом применении. Сверхпроводящее состояние в рамках этой теории может быть описано параметром порядка или, иначе, модулем так называемой "макроскопической волновой функции куперовских пар":

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})}, \quad (1.1)$$

где  $n_s$  – концентрация сверхпроводящих электронов в сверхпроводнике. Важно подчеркнуть, что она не является настоящей волновой функцией, но тем не менее позволяет получить практически важные результаты. Мы далее считаем, что в изолированном невозмущенном полями сверхпроводнике и модуль, и фаза волновой функции (1.1) постоянны.

Из минимизации функционала Гинзбурга-Ландау и одного из уравнений Максвелла можно получить следующее уравнение для сверхпроводящего тока куперовских пар в зависимости от приложенного поля, являющееся обобщением уравнения Лондонов:

$$\mathbf{j}_s = -\frac{i\hbar e}{2m_e}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m_e}\mathbf{A}|\Psi|^2. \quad (1.2)$$

Подставляя сюда  $\Psi(\mathbf{r})$  из определения (1.1), получим:

$$\mathbf{j}_s = \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta(\mathbf{r}) - \mathbf{A} \right), \quad (1.3)$$

где  $\Lambda = \frac{m_e}{n_s e^2}$ ,  $\Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}$ . Вторая константа, как будет показано далее, является *квантом магнитного потока*, и имеет важное значение в данной работе.

## 2 Эффект Джозефсона

### 2.1 Уравнения Джозефсона

Эффект Джозефсона<sup>21</sup> – это эффект установления одной макроскопической фазы в двух сверхпроводниках, соединенных через так называемую “слабую связь”. Слабые связи многообразны: это могут быть тонкие слои диэлектрика, сужения, точечные контакты, прослойки из металла в нормальном состоянии или из ферромагнетика. В случае, если фазы не равны, то через слабую связь будет течь бездиссиликативный ток, и будет выполнено некоторое *фазо-токовое соотношение* между током и скачком фазы на переходе. Часто, хотя и не всегда,<sup>22</sup> оно оказывается синусоидальным:

$$I_s = I_c \sin(\theta_2 - \theta_1) = I_c \sin \varphi. \quad (2.1)$$

Из этой формулы видно, что сверхпроводящий ток  $I_s$  не может превысить некоторого значения  $I_c$ . Это так называемый *критический ток* джозефсоновского перехода, при превышении которого бездиссиликативность нарушается, и на переходе устанавливается напряжение  $V$ . В этом случае выполнено второе уравнение Джозефсона:

$$\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2eV, \quad (2.2)$$

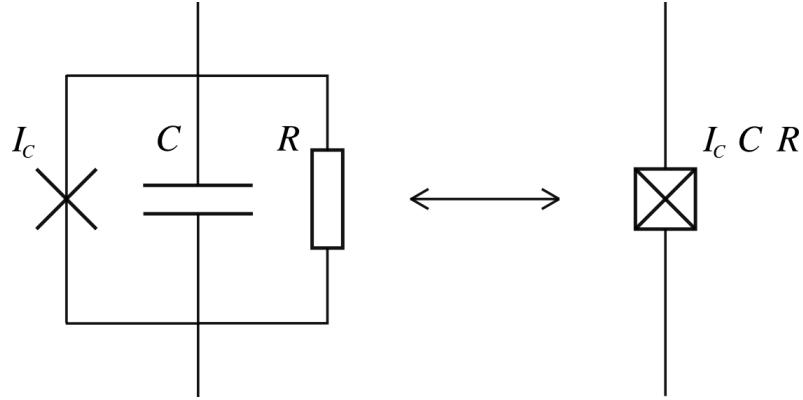
и наблюдаются осцилляции разности фаз между сверхпроводниками. Величина критического тока рассчитывается из микроскопической теории, например, для перехода SIS верна формула Амбера-Баратова:

$$I_c = \frac{\pi\Delta(T)}{2eR_n} \operatorname{th} \left( \frac{\Delta(T)}{2k_b T} \right), \quad (2.3)$$

где через  $T$  обозначена температура, а через  $R_n$  сопротивление контакта в отсутствие сверхпроводимости,  $R_n = \rho \frac{d}{S}$ , где  $\rho$  – удельное сопротивление I-слоя, а  $d$  и  $S$  – его толщина и площадь.

## 2.2 RCSJ-модель

Для упрощения описания динамики джозефсоновского контакта применяется модель RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction), работающая для маленьких переходов со слоем изолятора, когда изменения фазы на размере контакта пре-небрежимо малы и присутствует ненулевая геометрическая емкость.



**Рис. 2.1:** Схема RCSJ в виде параллельного соединения идеального джозефсоновского перехода с конденсатором и резистором.

Принципиальная схема изображена на Рис. 2.1. В случае, когда ток через систему не превышает критического  $I_c$ , резистор на схеме может быть опущен. В силу параллельности соединения выполнено также соотношение  $\frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = U_C$  между напряжениями на переходе и на конденсаторе, которое устанавливает аналогию между неидеальным переходом и колебательным контуром с нелинейной индуктивностью.

В рамках RCSJ-модели энергия перехода состоит из энергии, запасенной в нелинейной индуктивности идеального перехода, и энергии конденсатора:

$$E = E_{ind} + E_{cap} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} E_{ind} &= \int I_J V_J dt = I_c \frac{\hbar}{2e} \int_0^T \sin(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= E_J \int_0^\varphi \sin \phi d\phi = E_J [1 - \cos \varphi] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$E_{cap} = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\hbar^2}{4E_C} \dot{\varphi}^2, \quad E_C = \frac{(2e)^2}{2C}. \quad (2.6)$$

## 2.3 Фазо-потоковое соотношение

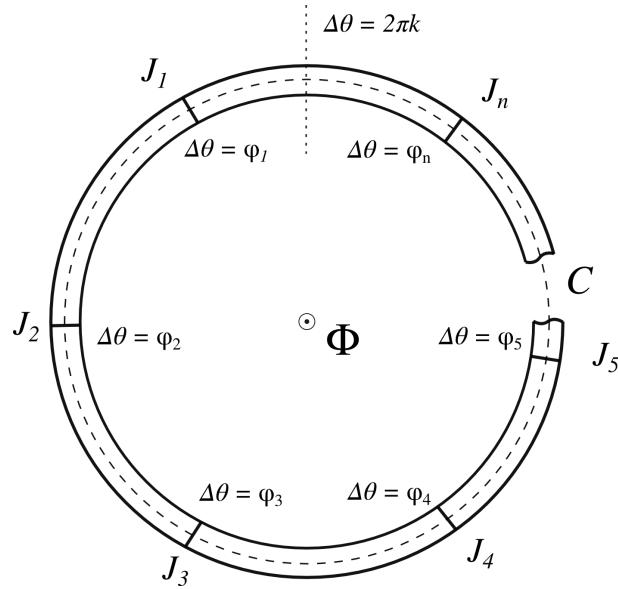
Рассмотрим замкнутое сверхпроводящее кольцо конечной толщины, быть может, прерванный конечным числом джозефсоновских переходов  $\{J_1..J_n\}$ . Рассмотрим применительно к данному случаю уравнение (1.3). Проведем контур  $C$  внутри кольца так, чтобы он нигде не приближался к стенкам на расстояние, меньшее глубины проникновения магнитного поля (Рис. 2.2). Тогда сверхток на всей его длине

будет равен нулю, и, проинтегрировав по нему (1.3), мы получим следующее равенство:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l}.$$

Руководствуясь Рис. 2.2, соображениями однозначности волновой функции (1.1) при обходе вокруг контура и теоремой Стокса для  $\text{rot } \mathbf{A}$ , можем написать:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\Phi_0}{2\pi} \left( \sum_i \varphi_n + 2\pi k \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_i \varphi_n &= 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

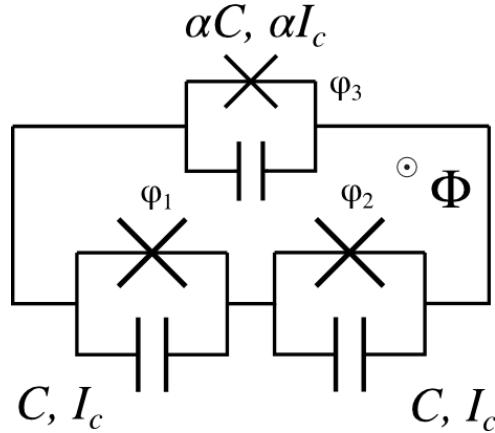


**Рис. 2.2:** К выводу фазо-потокового соотношения. Пунктиром обозначен контур интегрирования  $C$ . Через  $\varphi_i$  обозначены скачки фаз на джозефсоновских контактах, а точками - место разрешенного накопления фазы при полном обходе вокруг кольца  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

Таким образом, получено фазо-потоковое соотношение. Видно, что в случае отсутствия в кольце джозефсоновских переходов полученное уравнение (2.7) опишет равенство магнитного потока  $\Phi$ , проходящего через сверхпроводящее кольцо, целому числу  $k$  квантов потока  $\Phi_0$ , обосновывая определение этой константы в (1.3).

### 3 Теория изолированного Flux-кубита

Flux-кубит, или потоковый трехконтактный сверхпроводящий кубит, был предложен впервые в 1999 году<sup>12</sup> и представляет собой сверхпроводящий контур, прерванный в трех местах джозефсоновскими переходами (Рис. 3.1), два из которых одинаковы, а третий отличается по площади в  $\alpha$  раз. Под *изолированным* в данном разделе



**Рис. 3.1:** Принципиальная схема Flux-кубита в рамках RCSJ-модели. Два из трех переходов по площади одинаковы, площадь третьего по сравнению с ними в  $\alpha$  раз отличается (параметры отличаются в то же число раз согласно формулам для емкости конденсатора и (2.3)).  $\Phi$  – поток, пронизывающий контур. Резисторы не изображены, так как рабочий ток переходов меньше  $I_c$ .

понимается одиночный кубит, не взаимодействующий с окружением ни диссипативным, ни консервативным образом. Единственным внешним фактором является при таком рассмотрении постоянное магнитное поле, проходящее через контур.

### 3.1 Построение гамильтониана

Для того, чтобы провести квантово-механическое рассмотрение кубита, требуется записать его гамильтониан. Для этого прежде всего нужно понять, какими независимыми степенями свободы он обладает. Вообще говоря, состояние одиночного джозефсоновского перехода, в силу того, что в параллельном соединении RCSJ-модели  $U = \frac{\hbar}{2e}\dot{\phi}$ , целиком описывается своей разностью фаз. Для трех невзаимодействующих переходов таких разностей будет три, и их и следует выбрать в качестве обобщенных координат системы. Однако в случае замкнутого контура дополнительно накладывается фазо-потоковое соотношение (2.7):

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \left( \frac{\Phi}{\Phi_0} - k \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в контуре на Рис. 3.1 остаются независимыми только две разности фаз из трех. Введя их в качестве обобщенных координат, можно понять, что является аналогом кинетической, а что – потенциальной энергии системы. В уравнениях (2.4)-(2.6) энергия перехода зависит непосредственно от  $\varphi$ , а емкостная от  $\dot{\varphi}$ . Таким образом, переход запасает потенциальную, а емкость кинетическую энергию. Энергия магнитного поля, возникающего при течении тока в кольце, считается малой в силу малости геометрической индуктивности кубита по сравнению с джозефсоновой индуктивностью переходов, а поток  $\Phi \equiv \Phi_{ext}$  (подробное описание данной процедуры см. в статье<sup>23</sup>). Теперь можно записать лагранжиан системы, используя

все те же уравнения (2.4)-(2.6) и выражая разность фаз  $\varphi_3$  отличающегося перехода через разности фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  одинаковых переходов при помощи (3.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{T} - \mathcal{U}, \\ \mathcal{T} &= E_{cap} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 C_i V_i^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 [C(\dot{\varphi}_1)^2 + \alpha C(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 + C(\dot{\varphi}_2)^2] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2) C \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U} &= E_{ind} = E_J \left[ 2 + \alpha + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - \varphi_1 - \varphi_2 \right) \right].\end{aligned}$$

Строить гамильтониан системы из такого лагранжиана не очень удобно, поэтому предварительно произведем замену координат  $\phi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ ,  $\theta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &\stackrel{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta}{=} C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (\dot{\phi} \quad \dot{\theta}) \begin{pmatrix} 1+2\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U} &\stackrel{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \phi, \theta}{=} E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.2)$$

Теперь, стандартным образом вводя обобщенный импульс  $\mathbf{p}^T = (p_\phi \quad p_\theta) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$  и производя преобразование Лежандра, получим итоговый гамильтониан системы:

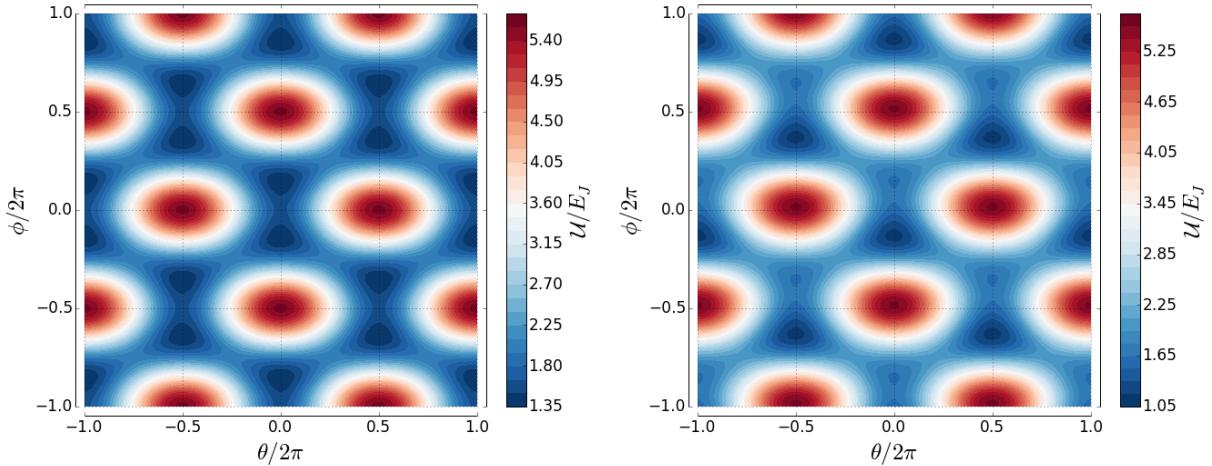
$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{p_\phi^2}{2M_\phi} + \frac{p_\theta^2}{2M_\theta} + E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right], \\ M_\phi &= 2C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 (1+2\alpha), \quad M_\theta = 2C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2.\end{aligned}$$

Далее, осуществляя переход к операторному виду квантовой механики, можно получить оператор Гамильтона для сверхпроводящего потокового кубита в терминах исключительно  $E_C$  и  $E_J$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= E_C \left[ -\frac{1}{2(1+2\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + \\ &+ E_J \left[ 2 + \alpha - 2 \cos(\phi) \cos(\theta) - \alpha \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - 2\phi \right) \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

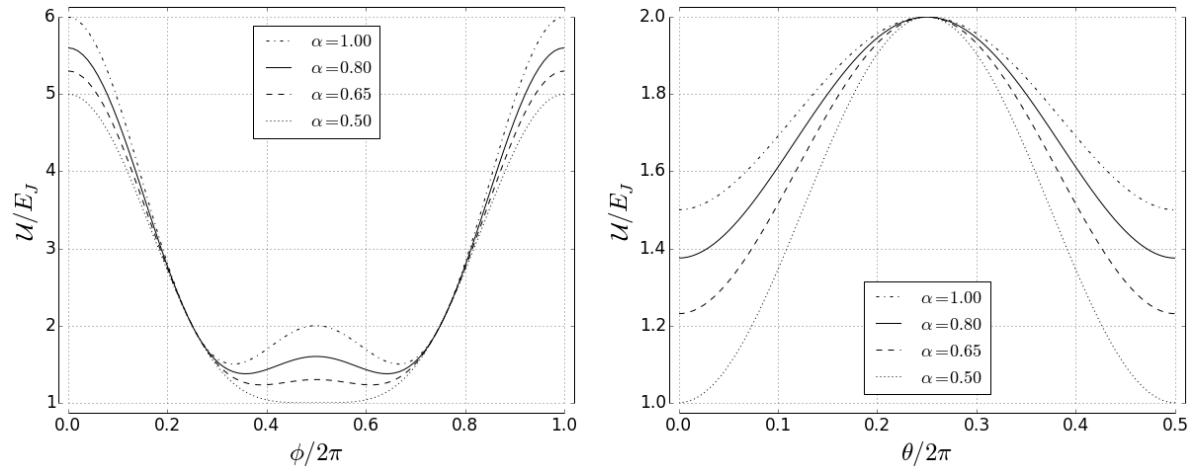
## 3.2 Квантово-механический анализ

**Анализ потенциала.** Прежде всего рассмотрим потенциал  $\mathcal{U}(\phi, \theta)$ . На Рис. 3.2 представлены графики, демонстрирующие его структуру в случае  $\Phi = \Phi_0/2$ , или в так называемой *точке вырождения* по потоку. На Рис. 3.2 (а) можно видеть, что потенциал  $2\pi$ -периодичен по каждой из переменных  $\phi$  и  $\theta$  и представляет собой бесконечную центрированную квадратную решетку с базисом из симметричных двойных



**(a)** Трехмерное изображение потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$ ,  $\alpha = 0.8$ . Можно видеть  $2\pi$ -периодическую центрированную квадратную решетку с базисом из двойных ям.

**(b)** При отклонении потока от  $\Phi_0/2$  появляется перекос внутри двойных ям, одна половина становится глубже, а другая мельче в зависимости от знака отклонения  $\Delta\Phi$ . Здесь  $\Delta\Phi = -0.05\Phi_0$ ,  $\alpha = 0.8$



**(c)** Срез потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$  по направлению  $\theta = \pi$  (барьер внутри ям) в зависимости от  $\alpha$ . При  $\alpha = 0.5$  этот барьер пропадает, при  $\alpha = 1$  он сравнивается с барьером между ямами (см. (d)).

**(d)** Срез потенциала при  $\Phi = \Phi_0/2$  по направлению  $\phi = (1 - \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{2\alpha})\theta + \arccos \frac{1}{2\alpha}$  (барьер между ямами) в зависимости от  $\alpha$ . Здесь крайние точки отвечают минимумам  $\mathcal{U}$  при  $\theta = 0$  ( $\pi$ ),  $\phi = \arccos \frac{1}{2\alpha}$  ( $\pi - \arccos \frac{1}{2\alpha}$ ).

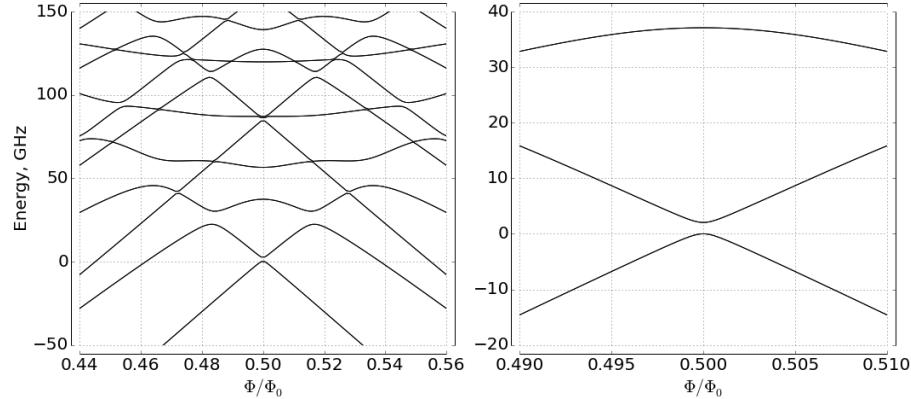
**Рис. 3.2:** Графическое изображение периодического потенциала Flux-кубита в зависимости от относительного размера отличающегося перехода  $\alpha$  и пронизывающего потока  $\Phi$ .

ям, отделенных друг от друга диагональными барьерами. Каждая из ям, в свою очередь, делится на две части меньшим барьером. Его высота, как видно из Рис. 3.2 (с), определяется параметром  $\alpha$ . Для того, чтобы структура оставалась подобной изображенной на Рис. 3.2 (а), требуется, чтобы  $\alpha \in (0.5, 1)$ : при нарушении этого условия либо совсем пропадает внутренний барьер, либо внешний барьер сравнивается с внутренним по высоте, и ямы перестают быть качественно отделены друг от друга (Рис. 3.2 (д)). Минимумы  $\mathcal{U}$  находятся в точках  $\theta = \pi k$ ,  $\phi = \pm \arccos \frac{1}{2\alpha} + \pi \frac{n}{2}$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ , причем в точке вырождения все минимумы имеют одинаковую энергию, а при отходе от нее в зависимости от знака отклонения одна половина двойных ям становится мельче, а другая глубже, и вырождение внутри каждой ямы снимается (Рис. 3.2 (б)).

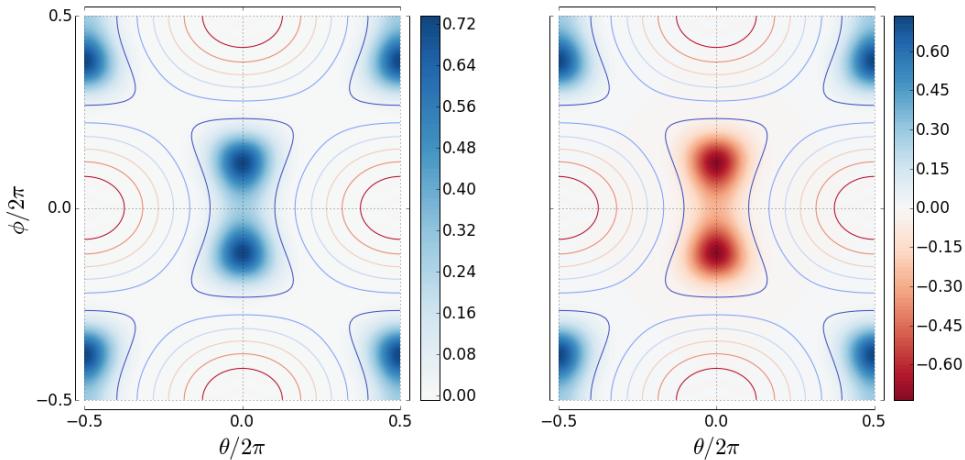
**Стационарные состояния.** Прежде, чем начинать поиск стационарных состояний для гамильтониана (3.3), важно не упустить смысл происходящего. Строго говоря, в силу того, что потенциал (3.2) является периодическим, решениями уравнения Шредингера будут являться *блоховские функции*, а спектр энергий будет иметь зонную структуру. Таким образом, в приближении нулевой индуктивности Flux-кубит представляет собой модель частицы в идеальной периодической решетке двумерного твердого тела. В реальности, однако, энергетический спектр все же является дискретным из-за квадратичной по фазам индуктивной энергии,<sup>23</sup> с пиками числа уровней в областях бывших зон.

Оставаясь в рамках приближения нулевой индуктивности, для аналитического решения задачи можно использовать модель сильной связи для центрированной решетки с базисом, однако мы будем рассматривать численный вариант – метод, изложенный в работе.<sup>24</sup> В условиях  $2\pi$ -периодичности и действительности потенциала и искомой волновой функции можно разложить в ряд Фурье, ограничиваясь  $2N+1$  начальными слагаемыми, уравнение Шредингера с гамильтонианом (3.3), что после определенных преобразований сведет задачу к поиску собственных значений и векторов матрицы размером  $(2N+1)^2$  на  $(2N+1)^2$ . Результаты такого вычисления для  $N=20$  представлены на Рис. 3.3. Вычисленный спектр энергий (Рис. 3.3 (а)) состоит из дублетов (на рисунке они сливаются в синглеты), причем расщепление в дублетах обусловлено разными периодическими конфигурациями волновой функции при фиксированной четности ее внутри ям, а расстояния между дублетами изменением четности внутри ям. Такая структура спектра возникает по причине того, что в силу использованных предположений о волновой функции машинный метод “вылавливает” из каждой энергетической зоны лишь граничные состояния, так как только они обладают подходящими свойствами! Действительно, по теореме Блоха  $\psi(r) = e^{ikR}\psi(r)$ , для граничных квазипульсов  $k = 0$  и  $k = K/2$  ( $K$ -вектор обратной решетки) выполнено соответственно  $\psi(r+R) = \psi(r)$  и  $\psi(r+R) = -\psi(r)$ , что и наблюдается на парах Рис. 3.3 (б) и Рис. 3.3 (с). Четные конфигурации волновой функции имеют меньшую рассчитанную энергию, а нечетные большую, в соответствии с вышесказанным.

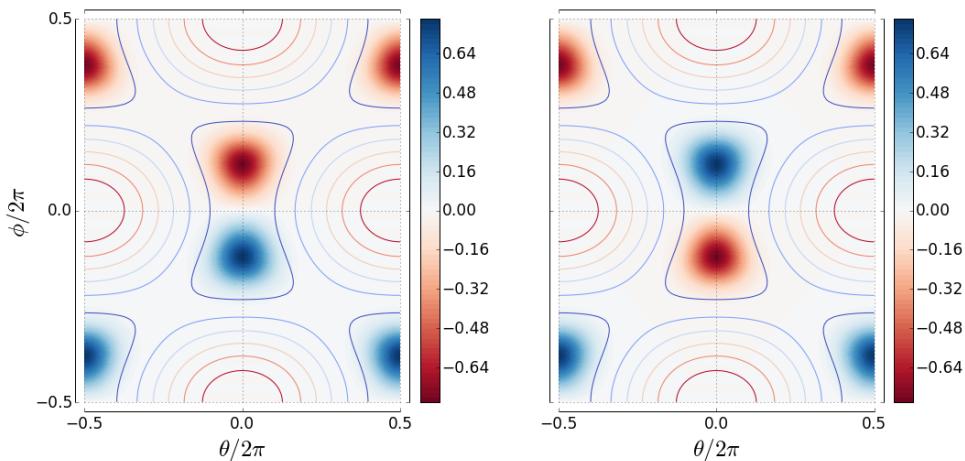
В зависимости от поля спектр ведет себя, как показано на Рис. 3.3 (а), неравномерно: в окрестности  $\Phi_0/2$  четные зоны сдвигаются вниз, нечетные вверх, а на большем удалении магнитного потока от полкванта картина вообще теряет порядок



**(а)** Уровни энергии в зависимости от внешнего поля. Каждая линия на рисунке на самом деле является двойной (подробности см. в тексте).



**(б)** Границные по квазимпульсу состояния нулевой зоны (“ $|g\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция четная.



**(с)** Границные по квазимпульсу состояния первой зоны (“ $|e\rangle$ -состояния”) в точке вырождения. Внутри ям волновая функция нечетная.

**Рис. 3.3:** Результаты численного решения стационарного уравнения Шредингера с параметрами  $\alpha = 0.7$ ,  $E_J = 30E_C = 400$  GHz. Цветом обозначено значение волновой функции, нормированной на единицу в периоде потенциала.

из-за значительного числа квазипересечений. На Рис. 3.3 (b) и (c) изображены соответственно нулевое и первое дублетные состояния в точке вырождения. Далее мы будем пренебречь тем, что первые две зоны отличны от дискретных уровней, так как расщепления внутри них примерно в  $10^5$  раз меньше, чем расстояния между ними, и назовем верхнюю по энергии зону “ $|e\rangle$ -состоянием”, а нижнюю “ $|g\rangle$ -состоянием”.

**Двухуровневое приближение.** Следующим шагом будет приведение системы к двум нижним состояниям, пренебрегая всеми остальными. Это оправданно, так как третья зона в окрестности точки вырождения лежит гораздо выше (почти в 20 раз) по энергии, чем состояние  $|e\rangle$ . Теперь, используя метод сильной связи в двойной яме, рассчитаем зависимость расщепления уровней  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$  от  $\Phi$ . Разобъем яму на два потенциала  $\mathcal{U}_1$  и  $\mathcal{U}_2$ , так, что их сумма даст исходный потенциал ямы, а не равными нулю они окажутся только в области соответствующих полувалов. Для каждого из этих двух потенциалов можно найти основные состояния, которые мы обозначим  $|1, g\rangle$  и  $|2, g\rangle$ . Основное состояния для уравнения с потенциалом  $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$  в предположении о малом перекрытии потенциалов и волновых функций отдельных ям можно искать в виде  $|g\rangle = a|1, g\rangle + b|2, g\rangle$ . Также мы получим сразу и  $|e\rangle$  в качестве второго решения задачи. Итак, записывая полный гамильтониан, действуя им на выбранного вида функцию  $|g\rangle$  и умножая слева сначала на  $\langle 1, g|$ , а потом на  $\langle 2, g|$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} E_{1g} + U_2^{1g1g} & E_{1g}\langle 1, g|2, g\rangle + U_2^{1g2g} \\ E_{2g}\langle 2, g|1, g\rangle + U_1^{2g1g} & E_{2g} + U_1^{2g2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & \langle 1, g|2, g\rangle \\ \langle 2, g|1, g\rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

где верхними индексами обозначены соответствующие матричные элементы потенциалов  $U$ ,  $E_{1g}$ ,  $E_{2g}$  – энергии основных состояний ям,  $E$  – искомое собственное значение полного гамильтониана. Далее, пренебрежем диагональными матричными элементами потенциалов, так как здесь они берутся по волновым функциям противоположной половины ямы, а также неортогональностью  $|1, g\rangle$  и  $|2, g\rangle$  (они также локализованы в разных ямах). Тогда уравнение значительно упростится:

$$\begin{pmatrix} E_{1g} & U_2^{1g2g} \\ U_1^{2g1g} & E_{2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Следующим приближением будет пренебрежение различием в недиагональных элементах, так как при малых отклонениях  $\Phi$  деформации около дна ям незначительны, и можно считать, что формы волновых функций и потенциалов остаются прежними, а меняются лишь энергии основных состояний из-за перекоса ям. Переобозначая элементы матрицы и смешав собственные значения на постоянную величину, получаем сокращенный гамильтониан следующего вида:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\varepsilon}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_x \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2}\hat{\sigma}_x + \frac{\Delta}{2}\hat{\sigma}_z \quad (3.4)$$

(с точностью до выбора базиса)

где  $\Delta = 2U_1^{2g1g} \approx 2U_2^{1g2g}$  – минимальное расщепление по энергии,  $\varepsilon = |E_{1g} - E_{2g}|$  – сдвиг энергий основных состояний ям в зависимости от поля. После дифференци-

рования потенциала можно получить, что сдвиг минимумов по энергии, а, следовательно, и  $\varepsilon$ , будут пропорциональны  $\Phi - \Phi_0/2$ .

Сокращенный гамильтониан (3.4) можно просто привести к диагональному виду. Его собственные значения и их разность будут зависеть от  $\varepsilon$  следующим образом:

$$E_{g,e} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}, \quad \Delta E = h\nu_q = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}, \quad (3.5)$$

где  $\nu_q$  – это экспериментально наблюдаемая частота перехода между кубитными уровнями. Легко построить зависимость этой частоты от приложенного поля – это гипербола.

Главным обоснованием сделанных приближений является точный численный результат Рис. 3.3 (а) для двух нижних состояний, который так же дает гиперболическую зависимость.

## 4 Открытые системы и декогеренция

Переход от замкнутых квантовых систем, эволюция которых подчинена нестационарному уравнению Шредингера и состояние которых в каждый момент времени точно известно, к так называемым *открытым*, т.е. незамкнутым, квантовым системам всегда сопряжен с трудностями. Это связано с тем, что для описания таких систем в идеале требовалось бы найти закон эволюции Вселенной, а затем исключить из рассмотрения все ее степени свободы, не касающиеся представляющей интерес области. Эта формулировка является, конечно, довольно туманной в отношении Вселенной, но что вообще такое Вселенная? В силу отсутствия однозначного ответа на данный вопрос в качестве “вселенной” часто выбирают что-то простое, такое, что в определенных приближениях можно описать математически – и получают результаты, очень хорошо согласующиеся с экспериментом.<sup>25</sup> Далее будет описана такая процедура и соответствующий математический аппарат.

### 4.1 Матрица плотности

Матрица плотности – это обобщение вектора состояния на системы, точное состояние которых неизвестно. Матрицы плотности подразделяются на *чистые* и *смешанные*: первые эквивалентны обычной волновой функции, вторые же определяют распределение вероятности на волновых функциях. Рассмотрим две ситуации:

1. Система находится в суперпозиции состояний из какого-либо набора  $|a\rangle = \sum_k c_k |k\rangle$ . Тогда матрица плотности является чистой и записывается следующим образом:

$$\hat{\rho}_a = |a\rangle\langle a| = \sum_{k,n} c_k c_n^* |k\rangle\langle n|.$$

2. Система находится в каком-то одном из состояний  $|k\rangle$  с вероятностью  $c_k^2$ . Тогда матрица плотности является смешанной и записывается теперь иначе:

$$\hat{\rho}_a = \sum_k c_k^2 |k\rangle\langle k|.$$

В чем удобство таких определений? Для ответа на этот вопрос рассмотрим значение произвольной наблюдаемой с оператором  $\hat{Q}$ . В первом случае, из определения:

$$Q = \langle a|\hat{Q}|a\rangle = \sum_{k,n} c_k c_n^* \langle n|\hat{Q}|k\rangle \equiv \sum_i \sum_{k,n} c_k c_n^* \langle i|k\rangle \langle n|\hat{Q}|i\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr} [\hat{\rho}_a \hat{Q}] .$$

Во втором случае, из определения и квантового, и статистического среднего, а также приема, примененного выше, для каждого вероятного состояния:

$$Q = \sum_k Q_k p_k = \sum_k \text{Tr} [|k\rangle\langle k|\hat{Q}] p_k \equiv \text{Tr} [\hat{\rho}_a \hat{Q}] .$$

Таким образом, через матрицу плотности мы получаем единое определение среднего значения оператора, имеющего смысл как для статистического, так и для простого квантового случая. Также просто оказывается, что обе матрицы плотности удовлетворяют одному и тому же уравнению Лиувилля-фон-Неймана:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] .$$

В качестве примера того, как матрица плотности может помочь при описании открытых систем, рассмотрим два кубита, находящихся в *перепутанном* состоянии, когда невозможно представить их общее состояние как тензорное произведение векторов состояний кубитов по отдельности. Такое состояние – это, например,

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B) .$$

Соответствующая матрица плотности:

$$\hat{\rho}_{\Psi^+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Каждый из кубитов в примере является, по сути, открытой системой, которую требуется описать. Для этого вводится понятие *сокращенной матрицы плотности* и операция *взятия частичного следа* для системы двух подсистем:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B [\hat{\rho}_{AB}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \langle i|_B \hat{\rho}_{AB} |i\rangle_B \Leftrightarrow [\hat{\rho}_A]_{n,m} = \sum_i \langle n|_A \otimes \langle i|_B \hat{\rho}_{AB} |i\rangle_B \otimes |m\rangle_A ,$$

где суммирование ведется по базису подсистемы B (второе выражение показывает, как суммировать по состояниям композитного базиса  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ). Для каждого из двух кубитов системы в состоянии  $|\Psi^+\rangle$  такое вычисление даст  $\hat{\rho}_{A,B} = \hat{\mathbb{1}}_{A,B}/2$  – матрица плотности каждого из них смешанная и дает 50%-ую вероятность быть в одном из двух состояний. Таким образом, зная все о перепутанной системе, мы не имеем достоверной информации о ее частях.

## 4.2 Уравнение эволюции в форме Линдблада

Процедура сокращения матрицы плотности, проведенная с двумя кубитами и их общим стационарным состоянием, применяется и в нестационарном случае для получения уравнения эволюции подсистемы (master equation).<sup>26</sup> Исходный гамильтониан включает систему, ее окружение и их взаимодействие:

$$\hat{\mathcal{H}}_{se} = \hat{\mathcal{H}}_s \otimes \hat{\mathbb{1}}_e + \hat{\mathbb{1}}_s \otimes \hat{\mathcal{H}}_e + \hat{\mathcal{H}}_i. \quad (4.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_{se} = [\hat{\mathcal{H}}_{se}, \hat{\rho}_{se}] \quad (4.2)$$

Теперь обозначим приближения, которые используются для получения сокращенного уравнения эволюции (хорошее обсуждение их соответствия реальности см. в работе<sup>27</sup>):

1. **Модель окружения.** В качестве модели внешней среды обычно используется бозе-термостат, т.е.  $\hat{\mathcal{H}}_e = \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  в (4.1), а взаимодействие  $\hat{\mathcal{H}}_i$  однобозонным и слабым.
2. **Борновское приближение.** При решении уравнения (4.2) мы ищем матрицу плотности системы в виде  $\hat{\rho}_{se}(t) = \hat{\rho}_s(t) \otimes \hat{\rho}_e^0$ , тем самым пренебрегая изменением состояния термостата  $\hat{\rho}_e^0 = \exp(-\beta \hat{\mathcal{H}}_e) / \text{Tr} \left[ \exp(-\beta \hat{\mathcal{H}}_e) \right]$ ,  $\beta = 1/kT$ .
3. **Приближение Маркова.** Эволюция  $\hat{\rho}_s$  после момента  $t$  определяется только ее значением в этот момент и не зависит от прошлых значений. По-другому это формулируется как отсутствие памяти у термостата.

В условиях выбранных приближений можно путем достаточно громоздких преобразований получить уравнение динамики подсистемы. Его часть, ведущая к отличиям от стандартной унитарной эволюции, окажется представимой в *форме Линдблада*, и, в итоге, искомое уравнение будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_s &= [\hat{\mathcal{H}}_s, \hat{\rho}_s] + \sum_k \Gamma_k \left( \hat{\mathcal{O}}_k \hat{\rho}_s \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathcal{O}}_k^\dagger \hat{\mathcal{O}}_k, \hat{\rho}_s \right\} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} [\hat{\mathcal{H}}_s, \hat{\rho}_s] + \sum_k \Gamma_k \mathcal{D} [\hat{\mathcal{O}}_k] \hat{\rho}_s. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\hat{\mathcal{D}}$  - линдбладовский супероператор. Коэффициенты  $\Gamma_k$ , определяющие скорость распада, и операторы  $\hat{\mathcal{O}}_k$ , определяющие каналы распада, выводятся<sup>26</sup> для каждой конкретной модели, для каждого гамильтониана (4.1), однако вид (4.3) сохраняется (это можно показать в рамках теории групп<sup>28</sup>).

### 4.3 Релаксация

Для получения диссипатора, отвечающего за передачу энергии кубита внешнему бозе-полю, используется следующий модельный гамильтониан:

$$\hat{\mathcal{H}}_{se} = \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}_e + \hat{\mathbb{1}}_q \otimes \sum_k \hbar\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_k g_k \left( \hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_k^\dagger + \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_k \right), \quad (4.4)$$

где  $\omega_q, \omega_k$  – энергии кубита и мод,  $\hat{\sigma}^\pm$  – повышающий и понижающий операторы кубита,  $\hat{\sigma}^+ = \hat{\sigma}^{-\dagger} = |e\rangle\langle g|$ , а  $g_k$  – константы связи кубита с внешним полем. Последняя часть возникает из взаимодействия квантованного поля каждой моды, которое пропорционально  $\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k$ , с кубитом (через оператор  $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+$ , см. (3.4)) в первом порядке теории возмущений, т.е.  $\hat{\mathcal{H}}_{i_k} \propto (\hat{\sigma}^- + \hat{\sigma}^+) \otimes (\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k) \xrightarrow{\mathbb{I}^{ord.}} (\hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_k^\dagger + \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_k)$ . Это оправданно, так как мы полагаем связи, т.е.  $g_k$ , малыми. Исходя из такой модели при  $T \approx 0$  получаем<sup>26</sup> следующее уравнение эволюции:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_q = [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma(\hat{\sigma}^- \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^+ - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-, \hat{\rho}_q \}), \quad (4.5)$$

где  $\gamma$  получается в процессе вычисления из (4.4), однако на практике подгоняется к экспериментальным данным. Строго говоря, частота кубита при выводе окажется измененной (лэмбовский сдвиг), однако этим изменением можно пренебречь. Динамика данного уравнения будет обсуждаться ниже.

### 4.4 Дефазировка

Более тонкий эффект может быть получен, если рассматривать другую модель, выбрав следующий вид гамильтониана (4.1):<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_q &= \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z \\ \hat{\mathcal{H}}_e &= \sum_k \hbar\omega_{1k} \hat{a}_{1k}^\dagger \hat{a}_{1k} + \sum_k \hbar\omega_{2k} \hat{a}_{2k}^\dagger \hat{a}_{2k} \\ \hat{\mathcal{H}}_i &= \sum_{k,j} g_{k,j} \left( \hat{\sigma}^- \hat{\sigma}^+ \otimes \hat{a}_{1k}^\dagger \hat{a}_{1j} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- \otimes \hat{a}_{2k}^\dagger \hat{a}_{2j} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Слагаемое  $\hat{\mathcal{H}}_i$  здесь отвечает за переброс мод термостата вместе с виртуальным возбуждением (релаксацией) кубита. Так же выбирается иногда т.н. спин-бозонное взаимодействие.<sup>29</sup> Различные варианты получаются в общем случае из разложения произвольного оператора в пространстве термостата по фундаментальным модам.<sup>30</sup> Аналогично предыдущему пункту, получаем следующее уравнение:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}_q = [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma_\phi(\hat{\sigma}^z \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^z - \frac{1}{2} \{ \hat{\sigma}^z \hat{\sigma}^z, \hat{\rho}_q \}) \equiv [\hat{\mathcal{H}}_q, \hat{\rho}_q] + \gamma_\phi(\hat{\sigma}^z \hat{\rho}_q \hat{\sigma}^z - \hat{\rho}_q), \quad (4.7)$$

где последнее равенство верно в силу того, что  $\hat{\sigma}_z^2 \equiv \hat{\mathbb{1}}$ . Понятно, что объединив гамильтонианы (4.4) и (4.6), мы получим итоговое уравнение с диссипативной частью  $\gamma\mathcal{D}[\hat{\sigma}^-] + \gamma_\phi\mathcal{D}[\hat{\sigma}_z]$ . Теперь перейдем к рассмотрению динамики таких уравнений.

## 4.5 Диссипативная динамика

Качественный вид картины диссипации сильно зависит от выбранного начального состояния системы: на основное состояние диссипаторы не оказывают влияния вовсе, а, например, на возбужденное оказывает влияние только релаксация, экспоненциально “спуская” его по вертикальной оси сферы Блоха.

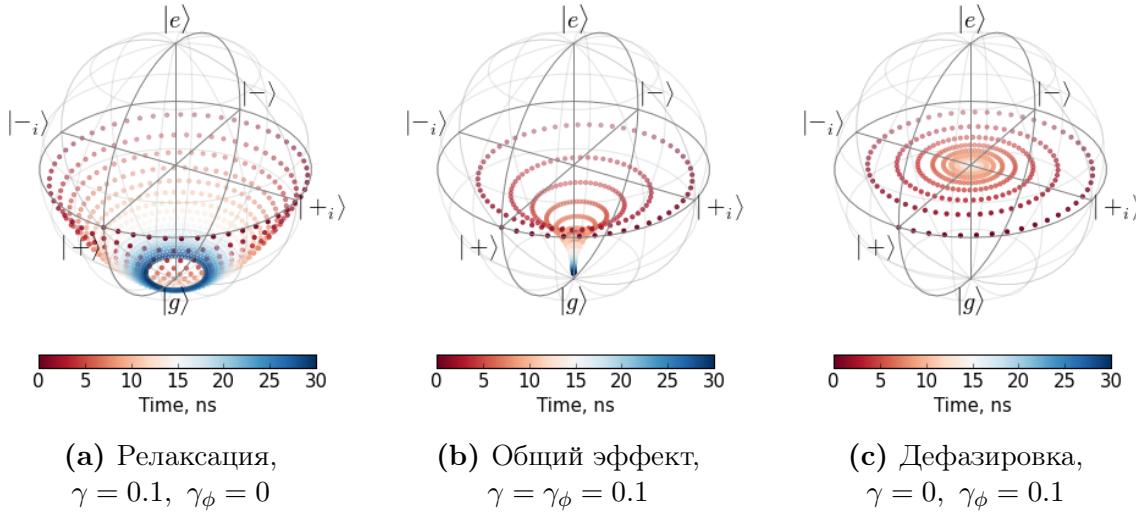


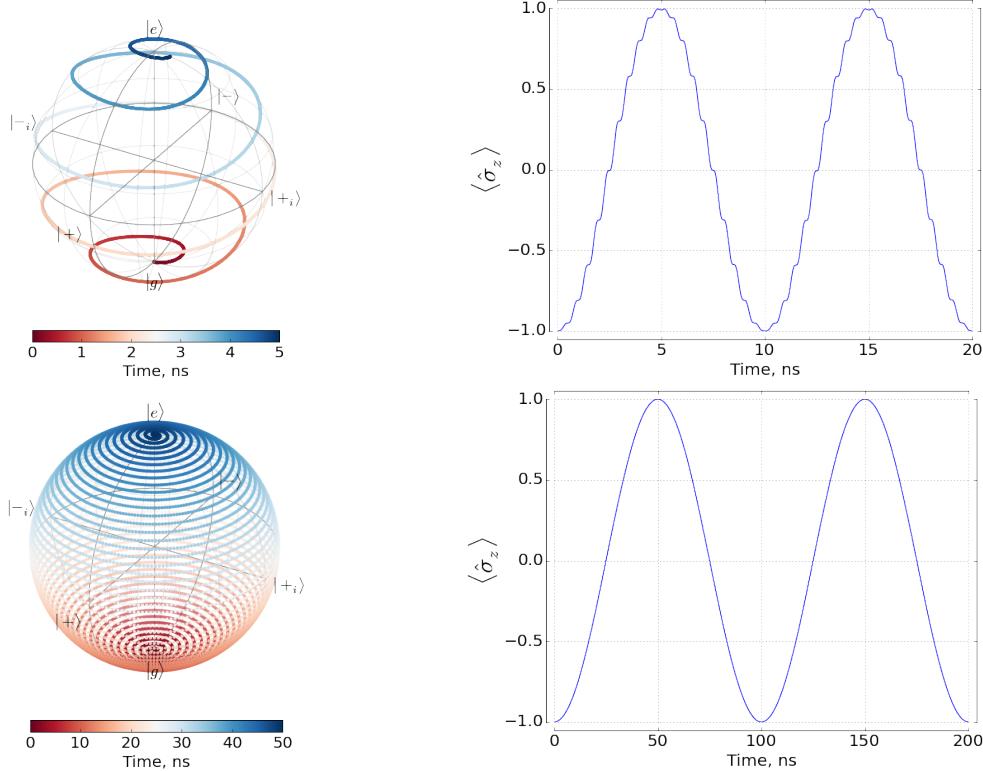
Рис. 4.1: Диссипативная динамика кубита с  $\nu_q=1$  ГГц.

Для состояния  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$  более интересная картина эволюции представлена на Рис. 4.1. Как видно, дефазировка уничтожает когерентность суперпозиции, т.е. приближает значение  $\text{Tr} [\hat{\rho}_q^2]$  к 1/2, в то время как релаксация проходит от чистого до смешанного состояния, а затем возвращается к чистому  $|g\rangle$ .

## 4.6 Вынужденное поведение

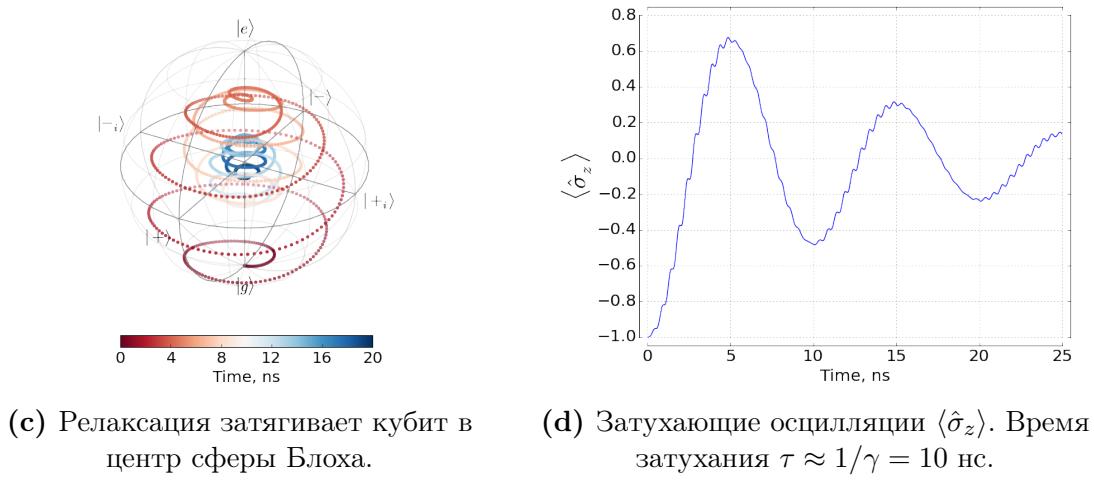
Практический интерес представляет *когерентное* взаимодействие кубита с контролирующими импульсами, которые по сути так же являются внешними, однако сохраняют чистоту состояния. В рамках теории Flux-кубита возмущением является синусоидально изменяющийся магнитный поток, проходящий через кольцо. В случае рассмотрения вынужденного поведения можно использовать классический подход в отношении поля и записывать оператор возмущения для кубита как  $\hat{\mathcal{V}}_q = A\hat{\sigma}_x \cos \omega t$ , где  $A$  – это (с точностью до множителя) амплитуда изменения потока, а  $\omega$  – частота. Если моделировать эволюцию кубита под таким возмущением, то получится изображенная на Рис. 4.2 динамика. Видно, что чем слабее возмущение, тем ближе к гармоническим оказываются колебания  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  - *осцилляции Раби*. Частота этих осцилляций пропорциональна амплитуде переменного поля, однако при значительном увеличении амплитуды они перестают быть периодическими. Аналитически рассматриваться поведение системы может в *приближении вращающейся волны*<sup>31–33</sup> (Rotating Wave Approximation, RWA), которое убирает вращение вокруг оси  $Oz$ :

$(\hat{\sigma}^+ + \hat{\sigma}^-)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \rightarrow (\hat{\sigma}^- e^{-i\omega t} + \hat{\sigma}^+ e^{i\omega t})$ , а также, при длительном воздействии возмущения, по теории Флоке.<sup>33</sup>



(a) Динамика состояния кубита при подаче  $\pi$ -импульса.

(b) Почти гармонические осцилляции  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  за два периода.



(c) Релаксация затягивает кубит в центр сферы Блоха.

(d) Затухающие осцилляции  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ . Время затухания  $\tau \approx 1/\gamma = 10$  нс.

**Рис. 4.2:** Кубит, вынуждаемый внешним гармоническим полем.  $\omega/2\pi = \nu_q = 1$  ГГц,  $A=0.2$  ГГц для верхней и нижней пар рисунков,  $A=0.02$  ГГц для средней. Для нижней также  $\gamma = 0.1$  ГГц

На Рис. 4.2 (c,d) представлено затухание Раби-осцилляций, вызванное наличием релаксации. Характерное время затухания для не очень сильного вынуждения составляет порядка  $1/\gamma$ . Релаксация и вынужденное поглощение являются конкурирующими процессами, поэтому с течением времени кубит оказывается в равновесной области. Эта конечная область зависит от амплитуды возмущения: при сильном возмущении кубит в конце концов оказывается в окрестности центры сферы Блоха, а при слабом – в области между центром сферы и основным состоянием.

## 5 Кубит, связанный с квантовым гармоническим осциллятором

В данной работе исследовались потоковые кубиты, связанные с микроволновыми копланарными резонаторами, работающими в квантовом пределе. Связь возникает, когда магнитное поле стоячей волны резонатора создает сколько-нибудь заметный магнитный поток через кольцо кубита и тем самым зависит от взаимной индуктивности этих двух объектов. Наличие связи качественно меняет поведение кубита, и резонатора, и позволяет наблюдать целую плеяду новых эффектов.

### 5.1 Гамильтониан Раби

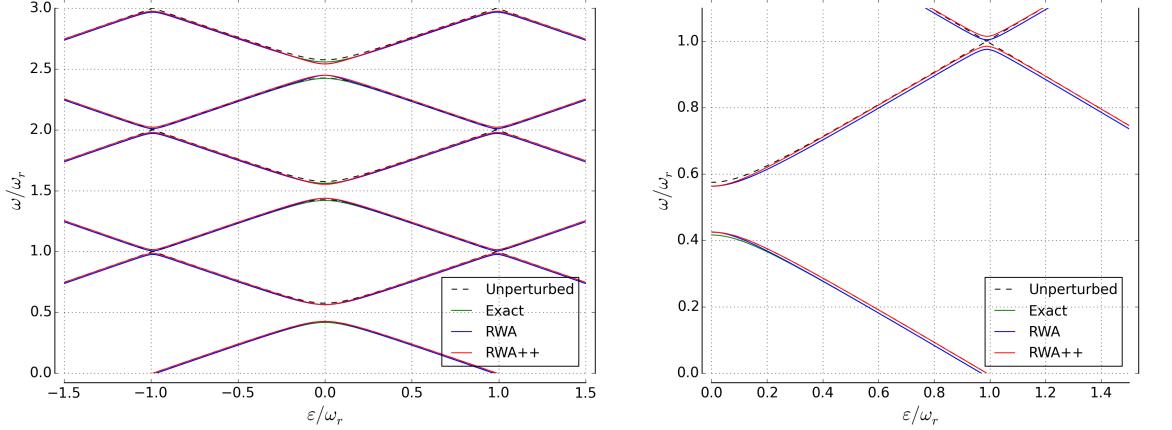
Самой простой моделью, описывающей взаимодействие кубита с резонатором, является модель *Раби*. Так же, как, например, в теории взаимодействия атома со светом, гамильтониан невзаимодействующих частей дополняется оператором взаимодействия. В случае потокового кубита его нужно записать как  $\hat{\mathcal{H}}_{int} = g \hat{\mathbf{H}}_{res} \otimes \hat{\sigma}_x = g (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \otimes \hat{\sigma}_x$ , где  $\hat{\mathbf{H}}_{res}$  – прокvantованное магнитное поле в резонаторе, а  $g$  – коэффициент перегонки поля в поток, а также в  $\epsilon$  из уравнения (3.4). В итоге, получаем следующий модельный гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_R &= \hat{\mathcal{H}}_q + \hat{\mathcal{H}}_r + \hat{\mathcal{H}}_i \\ \hat{\mathcal{H}}_q &= \hat{\mathbb{1}}_r \otimes \left[ \frac{\Delta}{2} \hat{\sigma}_z + \frac{\epsilon}{2} \hat{\sigma}_x \right], \quad \hat{\mathcal{H}}_r = \hbar \omega_r \left( \frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \otimes \hat{\mathbb{1}}_q, \\ \hat{\mathcal{H}}_i &= g(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes \hat{\sigma}_x \end{aligned} \quad (5.1)$$

Несмотря на свою простоту, СУШ для такого гамильтониана не имеет аналитического решения.<sup>34</sup> В связи с этим можно либо рассматривать приближения, либо решать задачу на собственные значения и векторы численно в матричной форме, ограничиваясь  $N$  состояниями резонатора.

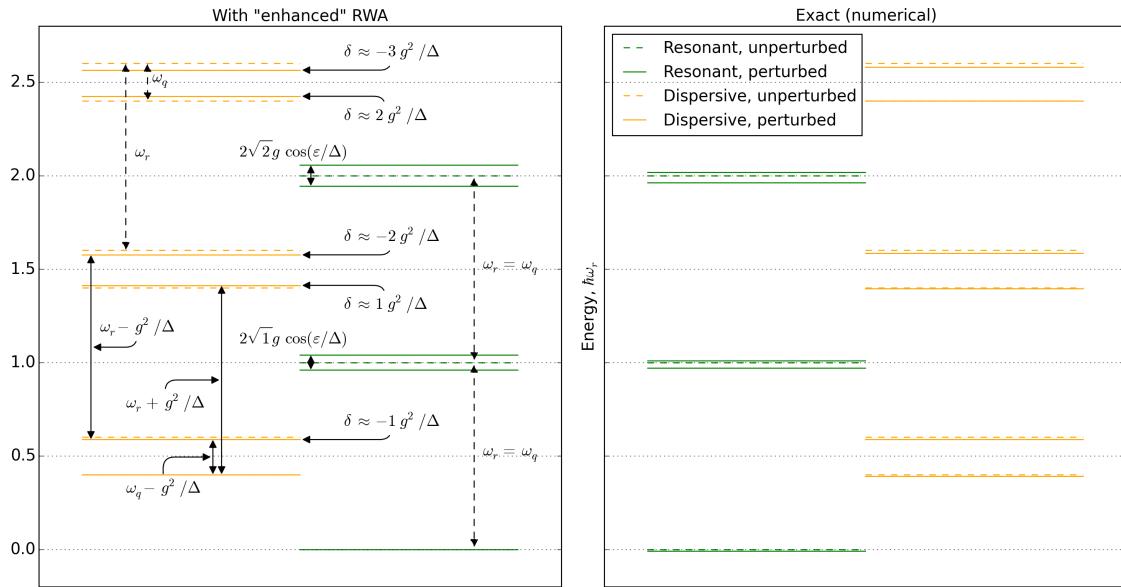
### 5.2 Спектр модели Раби

Энергетический спектр гамильтониана (5.1) подробно рассмотрен на Рис. 5.1. Большое внимание уделено часто используемому приближению RWA. Как ранее го-



(a) Спектр в зависимости от  $\varepsilon$  для трех возможных приближений и для невзаимодействующей системы.

(b) Увеличенная нижняя правая часть (a), видны отклонения результатов друг от друга.



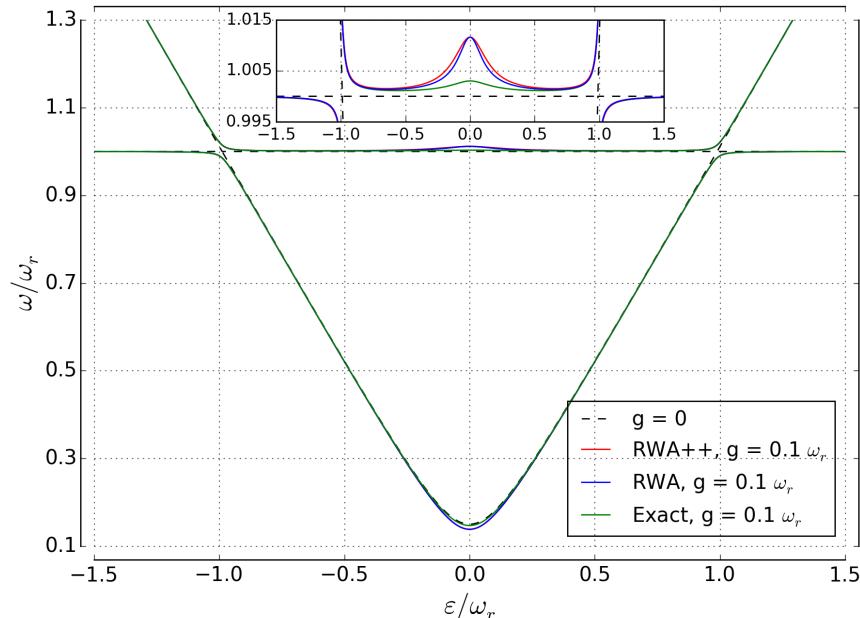
(c) Спектр в двух предельных случаях для приближенного и точного решений, для первого указаны аналитически полученные частоты. Для дисперсионного и резонансного режимов  $\varepsilon = 0$  и  $\varepsilon \approx 0.98$  соответственно.

**Рис. 5.1:** Подробный анализ спектра модели Раби и часто используемых приближений.

$$\Delta = 0.2 \omega_r, g = 0.1 \omega_r$$

ворилось, приближения нужны, чтобы получить хотя бы какое-то аналитическое решение, однако важно понимать, когда их можно использовать и когда они перестают соответствовать действительности.<sup>35,36</sup> Для (5.1) перехода к RWA, допускающему решение (далее, "улучшенный RWA"), требуется три шага:

1. Прежде всего нужно перейти к энергетическому представлению кубита. Для этого применяется оператор перехода  $\hat{U} = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_y}$ , где  $\tan \theta = \varepsilon/\Delta$ . Тогда  $\hat{\mathcal{H}}_q$  и  $\hat{\mathcal{H}}_r$  оказываются диагональными, а  $\hat{\mathcal{H}}_i \rightarrow g(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes (\hat{\sigma}_x \cos \theta - \hat{\sigma}_z \sin \theta)$ .
2.  $\hat{\mathcal{H}}_i = g(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes (\hat{\sigma}_x \cos \theta - \hat{\sigma}_z \sin \theta) \Rightarrow g \cos \theta (\hat{a}^\dagger \otimes \hat{\sigma}^- + \hat{a} \otimes \hat{\sigma}^+) - g \sin \theta (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes \hat{\sigma}_z$  – это стандартный прием RWA. Оправдать пренебрежение членами  $\propto \hat{a} \otimes \hat{\sigma}^-$ ,  $\hat{a}^\dagger \otimes \hat{\sigma}^+$  можно только в резонансном случае и малом  $g$ , когда в невозмущенной задаче уровни близки к вырождению или вырождены, при помощи стационарной теории возмущений (без туманных формулировок о "быстро вращающихся слагаемых").
3.  $\hat{\mathcal{H}}_i = g \cos \theta (\hat{a}^\dagger \otimes \hat{\sigma}^- + \hat{a} \otimes \hat{\sigma}^+) - g \sin \theta (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes \hat{\sigma}_z \Rightarrow \cos \theta (\hat{a}^\dagger \otimes \hat{\sigma}^- + \hat{a} \otimes \hat{\sigma}^+)$  – "улучшенный" RWA, допускающий аналитическое решение. Пренебрежение вторым слагаемым можно оправдать опять же в рамках стационарной теории возмущений: окажется, что его эффект в резонансной области сводится к сдвигу уровней вверх (см. Рис. 5.1 (b)). В точке вырождения этот член равен нулю сам по себе, поэтому в итоге частоты поглощения практически совпадают со стандартным RWA (см. Рис. 5.2)



**Рис. 5.2:** Частотный спектр модели Раби для всех вариантов гамильтониана. Изображены переходы  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  и  $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$ . На вставке: увеличенная окрестность  $\omega_r$  по частоте.

В итоге получаем аналитически разрешимый гамильтониан,<sup>31</sup> из которого рассчитаны выражения для сдвигов частот на Рис. 5.1 (с). На Рис. 5.2, Рис. 5.1 видны так называемые *квазипересечения* как уровней, так и частот там, где без  $\hat{\mathcal{H}}_i$  наблюдалось бы вырождение состояний. Такое явление иногда представляется как критерий квантовомеханического поведения системы, однако квазипересечения есть и в классике.<sup>37</sup>

### 5.3 Динамика модели Раби

Для рассмотрения временного поведения связанной системы нужно использовать опять же основное уравнение. При наличии диссипации возникает вопрос о том, как записать диссипативные слагаемые: в пределе слабой связи выбирается просто сумма диссипаторов от кубита и от резонатора, однако, естественно, это приводит к проблемам в случае сильной связи.<sup>38</sup> Далее мы тем не менее будем придерживаться простого вида диссипативной части:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qr}\hat{\rho} = & \kappa\mathcal{D}[\hat{a} \otimes \hat{1}_q]\hat{\rho} + \\ & + \gamma_\phi\mathcal{D}[\hat{1}_r \otimes \hat{\sigma}_z]\hat{\rho} + \gamma\mathcal{D}[\hat{1}_r \otimes \hat{\sigma}^-]\hat{\rho}. \end{aligned}$$

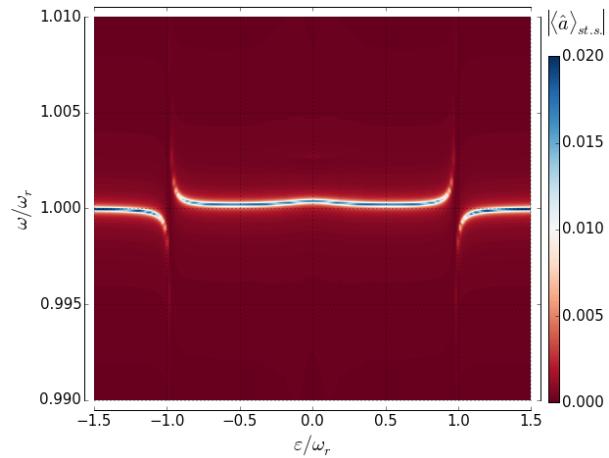
Далее, рассмотрим модель взаимодействия системы с внешним электромагнитным полем. Для кубита остаются в силе рассуждения из разд. 4.6, в то время как для резонатора нужно ввести новый формализм. Для классического осциллятора, вынужденного внешней силой, можно записать следующее уравнение движения и его лагранжиан:

$$m\ddot{x} - kx = F(t) \Leftrightarrow \mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - F(t)x.$$

Переходя к гамильтониану, производя каноническое квантование и переход к представлению чисел заполнения для осциллятора, получаем вид оператора, отвечающего за действие вынуждающей силы:

$$\hat{\mathcal{V}}_r = F(t)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger).$$

Таким образом, мы имеем все части линдбладовского уравнения, который описывает эволюцию системы кубит-резонатор. Выпишем его в явном виде (важно осуществить переход к энергетическому представлению кубита, как в пункте 1 разд. 4.6,

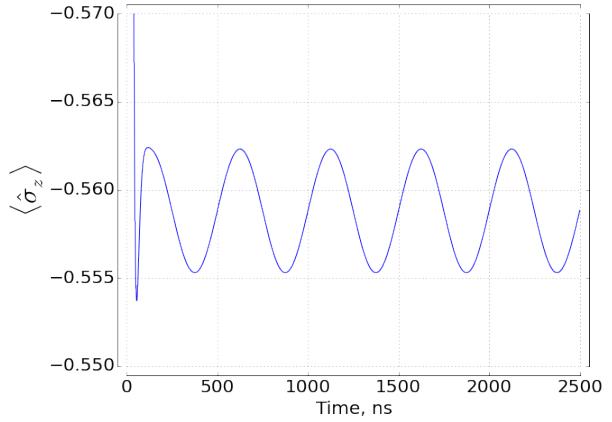


**Рис. 5.3:** Симуляция динамического отклика модели Раби (5.3). Параметры:  $\kappa = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\gamma_\phi = 0.007$ ,  $\Delta = 0.2\omega_r$ ,  $g = 0.03\omega_r$

иначе кубитные диссипаторы не будут иметь смысла):

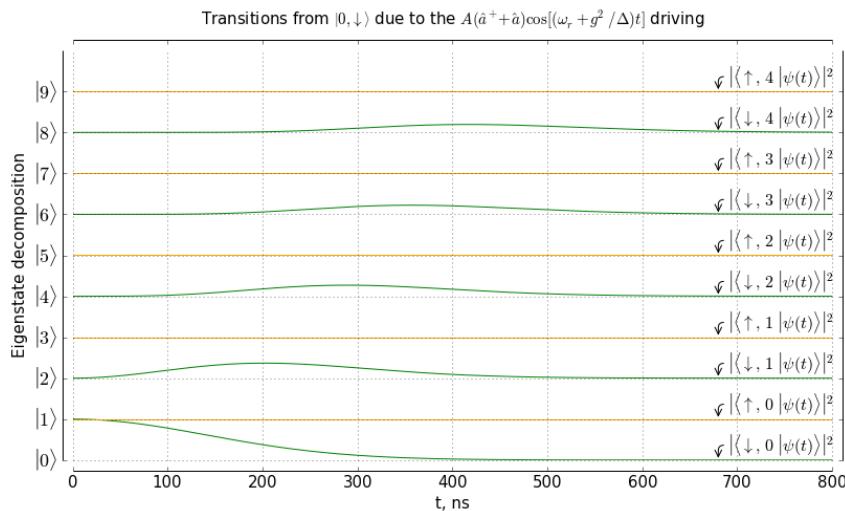
$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} &= \left[ \hat{\mathcal{H}}'_R, \hat{\rho} \right] + \mathcal{L}_{qb} \hat{\rho}, \\ \hat{\mathcal{H}}'_R &= \hat{\mathbb{1}}_r \otimes \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_r \left( \frac{1}{2} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \otimes \hat{\mathbb{1}}_q + \hbar g (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes (\hat{\sigma}_x \cos \theta - \hat{\sigma}_z \sin \theta) + \\ &\quad + A \cos(\omega t) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \otimes \hat{\mathbb{1}}_q + B \cos(\omega t) \hat{\mathbb{1}}_r \otimes (\hat{\sigma}_x \cos \theta - \hat{\sigma}_z \sin \theta), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $A$  и  $B$  – эффективные энергетические амплитуды поля на входе резонатора и в области кубита, а  $\mathcal{L}_{qb}$  определен выше. Уравнение (5.3) нужно решать численно, например, на конечном интервале времени. В случае моделирования спектроскопии решение заключается в обнаружении *стабильного состояния*  $\hat{\rho}_s$ , т.е. такого что  $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}_s = 0$ , в котором система оказывается на больших временах эволюции. В связи с временной зависимостью  $\mathcal{H}'_R$  с необходимостью  $[\hat{\mathcal{V}}_r + \hat{\mathcal{V}}_q, \hat{\rho}_s] = 0$ , а  $[\mathcal{H}_R, \hat{\rho}_s] = -\mathcal{L}_{qr}\hat{\rho}_s$ . Если первое условие не выполнено, то можно либо говорить о почти стабильных слабо осциллирующих состояниях (Рис. 5.4), либо об отсутствии решения – меняется также переход во врачающийся RWA (для внешнего поля, как и в разд.



**Рис. 5.4:** Слабо осциллирующее поведение кубита при слабом вынуждении и наличии релаксации.

дачи. Для ускорения решения иногда прибазис,<sup>32</sup> где гамильтониан в приближении (6) не зависит от времени.



**Рис. 5.5:** Уровни устроены так, что возмущение на дисперсионно сдвинутой частоте может загнать систему в высокие энергетические состояния.

Руководствуясь соображениями, приведенными в разд. 5.4, из стабильного решения уравнения (5.3) можно получить экспериментально наблюдаемый спектр системы. На Рис. 5.3 сразу видна явная особенность: мы можем видеть только часть спектра, предсказываемого стационарной моделью (5.1) (Рис. 5.2) в окрестности  $\omega_r$ . Связано это с тем, что в эксперименте  $A \gg B$ . Во-первых, оператор  $\hat{V}_r$  не может возбудить кубит, так как матричный элемент перехода по чисто кубитным состояниям  $|n, \downarrow\rangle, |n, \uparrow\rangle$  для него равен нулю. Поэтому в дисперсионном режиме при разумных  $g$ , когда собственные состояния приблизительно факторизованы, поглощения на частоте кубита нет.<sup>39</sup> Вторая причина связана с тем, как моделируется отклик, и будет объяснена ниже.

## 5.4 Теория отклика

При моделировании любого эксперимента необходимо понимать, что является наблюдаемой физической величиной. В экспериментальной части данной работы будет показано, что в эксперименте происходит *гетеродинное детектирование* сигнала, исходящего от образца. Так как основное уравнение, которым до сих пор мы пользовались описывает динамику внутри системы, но явно не дает информации о том, какое влияние она оказывает на внешнюю среду, необходимо применить дополнительный аппарат – *теорию отклика*<sup>32, 40, 41</sup> (input-output theory). Идеяна она похожа на ту, что была использована для получения диссипативной динамики подсистем, и заключается так же в записи полного гамильтониана для системы и для передающей линии, с которой она соединена слабой связью:

$$\hat{\mathcal{H}}_{tot} = \hat{\mathcal{H}}_{sys} + \int d\omega \hbar\omega \hat{b}^\dagger(\omega) \hat{b}(\omega) + \int d\omega [\kappa(\omega) \hat{c}^\dagger \hat{b}(\omega) + \kappa(\omega) \hat{c} \hat{b}^\dagger(\omega)],$$

где  $\hat{c}$  – оператор, через который система связана с линией. Для такого гамильтониана выводятся уравнения движения Гейзенberга, и после определенных преобразований находится следующее соотношение:

$$\hat{b}_{out} = \sqrt{\kappa} \hat{c}, \quad (5.3)$$

связывающее исходящую амплитуду поля с некоторым оператором системы ( $\kappa$  принята не зависящей от частоты). Выражение (5.3) записано для линии с двумя интерфейсами: входом и выходом, причем драйв на входе учитывается членом  $\hat{V}_r$  в основном уравнении, а на выходе мы пренебрегаем прошедшим насеквозд  $\hat{b}_{in}$ . Таким образом, оказывается, что основное уравнение все же дает информацию об излученной волне, причем для коэффициента прохождения при гетеродинном детектировании верно<sup>32</sup>

$$T \propto |\langle \hat{a} \otimes \hat{1}_q \rangle_s| = |\text{Tr} [\hat{\rho}_s \hat{a}]|. \quad (5.4)$$

В уравнении (5.4)  $\hat{c}$  был заменен на  $\hat{a} \otimes \hat{1}_q$ , и эта наивная замена может приводить к парадоксам. К примеру, в случае сильной связи основное состояние имеет ненулевое среднее значение этого оператора, и по формуле (5.4) должна излучать в пределе отсутствия драйва. Использование такой формулы также приводит к тому, что состояние кубита не дает вклада в пропускание, что заканчивает начатое в предыдущем разделе объяснение.

# Глава 3

## Экспериментальная часть

Целью экспериментальной части работы была проверка совпадения теории с экспериментом и, так как многими группами было доказано блестящее их соответствие,<sup>25,35,36</sup> качества наших установки и образца. Второй целью было наблюдение зависимости расщепления Раби и сдвига Блоха-Сиджерта<sup>36</sup> (отклонения точного решения от RWA) от фундаментального расщепления  $\Delta$  кубита, так как на одном образце их было несколько.

### 1 Установка и оборудование

Эксперимент проводился в Лаборатории сверхпроводящих метаматериалов НИТУ МИСиС. Лаборатория была создана в 2013 году и обладает оборудованием для получения низких температур, микроволновым оборудованием для измерения спектральных характеристик образцов, устройствами крепления образцов внутри криостата и подвода к ним микроволновых коаксиальных кабелей, пилой для обрезки чипов и множеством других полезных устройств.

#### 1.1 Рефрижератор растворения

Центральным прибором лаборатории является рефрижератор растворения, произведенный компанией Oxford Instruments. Это сложный инструмент, позволяющий получать температуры до 25 мК – такая температура требуется во-первых для работы сверхпроводящей электроники, а во-вторых, что более важно, сводит на нет термальное шумовое возбуждение кубита.

**Общая характеристика.** Рефрижератор состоит из двух частей: компрессора и турбомолекулярного насоса, находящихся в подвале, и вакуумной камеры с постом управления внутри самой лаборатории. Компрессор служит для работы термоакустической криогенной системы (pulse tube), а насос для откачки паров гелия-3.

Верхняя часть установки без поста управления изображена на Рис. 1.1 (а). Внутренняя часть изображена на Рис. 1.1 (б) и состоит из последовательно расположенных



(а) Общий вид верхней части фри-  
джа. Видны пульсационная трубка  
(два цилиндра), вспомогательная  
турбина (цилиндр вверху) и внеш-  
ний щит. Также присутствуют азот-  
ная ловушка и бак с азотом (внизу).

(б) Внутренняя часть установки.  
Видны две нижние пластины с ком-  
муникациями, 100 мК и 25 мК, в по-  
следнюю снизу ввинчивается держа-  
тель образца. Также виден внутрен-  
ний отражающий медный щит.

**Рис. 1.1:** Общий вид охлаждающей установки, расположенной в лаборатории.

ных уровней (далее *пластины*), каждый из которых достигает в охлажденном режиме своей температуры – чем ниже уровень, тем она меньше. Для охлаждения требуется свести к минимуму теплообмен со средой, поэтому в криостате устроена система из четырех коаксиальных щитов, которые последовательно надеваются на подвес, а затем откачиваются турбовакуумным насосом. После охлаждения вакуум достигает  $10^{-6}$  торр и обеспечивает хорошую термическую изоляцию.

Для коммуникации внутрь криостата подведены коаксиальные кабели для микроволновых сигналов (8 линий) и медные витые пары для постоянного тока (три линии, по 12 пар на каждой), что вкупе с довольно большим размером низшей пластины позволяет в принципе размещать несколько образцов на нескольких держателях.

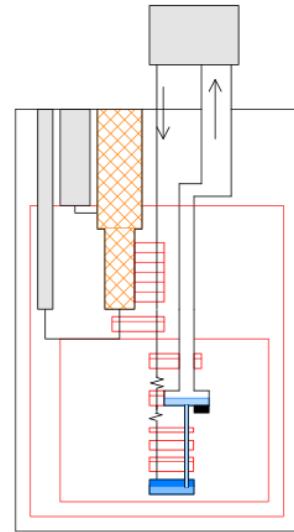
**Принцип работы.** Рефрижератор использует эффект абсорбции тепла при переходе  $^3\text{He}$  из однородной фазы в растворенную в  $^4\text{He}$ . Происходит этот процесс следующим образом: вначале происходит термоакустическое охлаждение смеси  $^4\text{He}$ - $^3\text{He}$  и до  $\approx 700$  мК, когда происходит самопроизвольное разделение изотопов на два слоя: чистый  $^3\text{He}$ , который оказывается сверху, и  $^4\text{He}$  под ним,

в котором, в силу некоторого превышения ван-дер-ваальсовского притяжения между атомами  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  над притяжением между атомами  $^3\text{He}$ , содержится около 6.6%  $^3\text{He}$  (при 0 К). Далее начинается откачка гелия-3, как показано на Рис. 1.2 (темно-синий –  $^3\text{He}$ , голубой – смесь  $^4\text{He}$  -  $^3\text{He}$ ). В результате в камере смешения под действием осмотического давления происходит обеднение раствора  $^4\text{He}$  -  $^3\text{He}$ , которое компенсируется “испарением” гелия-3: он растворяется из верхнего слоя в нижний для поддержания постоянной при заданной температуре его концентрации ( $\approx 6.6\%$  при низких Т). При таком растворении происходит отбор тепла от камеры смешивания и всего окружения согласно следующему закону:

$$\dot{Q} = T \dot{\nu}_3 [s_3(x_l) - s_3(x_u)],$$

где  $\dot{\nu}_3$  – молярная скорость прокачки  $^3\text{He}$ ,  $s_3(x_{l,u})$  – молярные энтропии  $^3\text{He}$  в зависимости от его концентрации  $x_{l,u}$  в растворенной и чистой фазах соответственно, а  $\dot{Q}$  – мощность охлаждения. В итоге получаем замкнутый контур: гелий-3 циркулирует по системе, растворяясь, откачиваясь, и поступая обратно туда, откуда растворялся.

При выключении смесь собирается в специальный бак при помощи турбомолекулярного насоса и, дополнительно, специальной турбины, установленной в верхней части криостата.

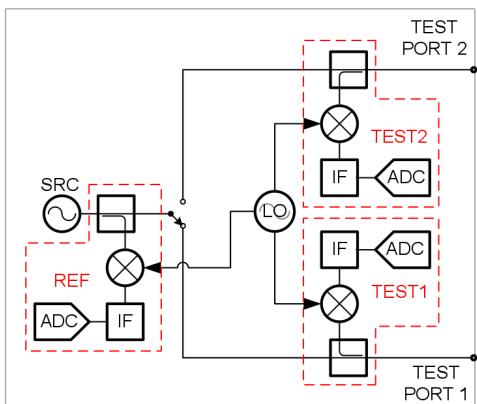


**Рис. 1.2:** Схема контура охлаждения. Вверху слева: контур акустического охлаждения. Внизу и по центру: контур охлаждения смесью.

## 1.2 Микроволновое оборудование

Хотя в теории частоты кубитов могут быть практически любыми, в реальности они ограничены микроволновым диапазоном, так как при больших частотах излучение начинает испытывать фундаментальное поглощение в сверхпроводнике (например, в алюминии, щель  $\Delta \approx 3.4 \cdot 10^{-4}$  эВ соответствует по частоте примерно 80 ГГц), что приводит к неприменимости использованных моделей. В силу этого в лабораториях, работающих с твердотельными кубитами, используются различные приборы микроволнового диапазона.

**Векторный анализатор цепей.** Этот прибор используется для определения *S-параметров* исследуемой системы, то есть комплексных коэффициентов прохождения и отражения для каждого из двух возможных направлений сигнала для систем с двумя входами. Именно потому, что он может определить и амплитуду, и фазу принятого сигнала (оба параметра вычисляются относительно изначально поданного), он называется *векторным*, в отличие от *скалярных* устройств, измеряющих только относительную амплитуду.



**Рис. 1.3:** Принципиальная схема векторного анализатора.

На Рис. 1.3 изображена упрощенная схема прибора. В векторных анализаторах используется *гетеродинирование* – понижающее частоту преобразование сигнала – для того, чтобы было возможно цифровое детектирование аналого-цифровым преобразователем (Analog-to-Digital Converter, ADC). Гетеродинирование происходит в *смесителях* (mixers,  $\otimes$ ) – нелинейных элементах, позволяющих получать суперпозиции гармоник, поданных на их входы. В каждом смесителе есть два входа: высокой частоты (Radio Frequency, RF) и гетеродинный (Local Oscillator, LO), и один выход – промежуточной частоты (Intermediate Frequency, IF). На

первый из входов подается соответственно исследуемый сигнал, а на второй – близкий к нему по частоте и единый для всех синхронизирующий сигнал. После прохождения через миксер в блоке обработки промежуточной частоты отфильтровывается сигнал на частоте  $|f_{LO} - f_{RF}|$  и, затем, через АЦП направляется в процессор.

В итоге, схема измерения S-параметров следующая: источник микроволн (SouRCe, SRC) подключается к одному из направлений 1 или 2 в зависимости от измерения  $S_{11}$  или  $S_{21}$ ; в этот же момент он копируется при помощи *направленного ответвителя* (coupler,  $\boxplus$ ) и направляется в контур сравнения (REFerence, REF), где гетеродинируется; затем либо в блоке TEST1, либо в блоке TEST2 в зависимости от измерения  $S_{11}$  или  $S_{21}$  гетеродинируется сигнал от исследуемой системы. В конечном итоге происходит вычисление процессором конкретного S-параметра на основе собранных АЦП данных по амплитуде и фазе относительно гетеродина.

**Источник микроволнового излучения.** Для экспериментов с кубитами отдельно требуется просто источник микроволнового сигнала, позволяющий в широких пределах изменять частоту выдаваемого сигнала.



## Глава 4

### Результаты

## **Глава 5**

### **Заключение**

# Литература

- <sup>1</sup> Lloyd S. A potentially realizable quantum computer. // Science (New York, N.Y.). — 1993. — Vol. 261. — P. 1569–1571. (ссылка на стр. [4])
- <sup>2</sup> DiVincenzo D. P. Quantum Computation // Science. — 1995. — Vol. 270, no. 5234. — P. 255–261. — URL: <http://www.sciencemag.org/content/270/5234/255.abstract>. (ссылка на стр. [4])
- <sup>3</sup> DiVincenzo D.P. Prospects for quantum computing. — 2000. — P. 12–15. (ссылка на стр. [4])
- <sup>4</sup> Spiller T. P. Quantum information processing: cryptography, computation, and teleportation // Proceedings of the IEEE. — 1996. — Vol. 84. (ссылка на стр. [4])
- <sup>5</sup> Milburn G J. Photons as qubits // Physica Scripta. — 2009. — Vol. 2009, no. T137. — P. 14003. — URL: <http://stacks.iop.org/1402-4896/2009/i=T137/a=014003>. (ссылка на стр. [4])
- <sup>6</sup> Cirac J. I., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical review letters. — 1995. — Vol. 74, no. 20. — P. 4091. (ссылка на стр. [4])
- <sup>7</sup> Kane B. E. A silicon-based nuclear spin quantum computer // Nature. — 1998. — Vol. 393. — P. 133–137. (ссылка на стр. [4])
- <sup>8</sup> Rempe G. Cavity QED with single atomic and photonic qubits // Conference on Quantum Electronics and Laser Science (QELS) - Technical Digest Series. — 2008. (ссылка на стр. [4])
- <sup>9</sup> Devoret M. H., Martinis J. M. Implementing qubits with superconducting integrated circuits // Experimental Aspects of Quantum Computing. — 2005. — P. 163–203. (ссылка на стр. [4])
- <sup>10</sup> Devoret M. H. Quantum fluctuations in electrical circuits // Les Houches, Session LXIII. — 1995. — URL: [http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum\\_circuit\\_theory-1.pdf](http://www.physique.usherb.ca/tremblay/cours/PHY-731/Quantum_circuit_theory-1.pdf). (ссылка на стр. [4])
- <sup>11</sup> Clarke J., Wilhelm F. K. Superconducting quantum bits. // Nature. — 2008. — Vol. 453, no. 7198. — P. 1031–42. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/18563154>. (ссылка на стр. [4])

- <sup>12</sup> Superconducting persistent-current qubit / T. Orlando, J. Mooij, Lin Tian et al. // Physical Review B. — 1999. — Vol. 60, no. 22. — P. 15398–15413. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.15398>. (ссылки на стр. [4 и 9])
- <sup>13</sup> Charge insensitive qubit design derived from the Cooper pair box / J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta et al. — 2007. — P. 21. — 0703002. (ссылка на стр. [5])
- <sup>14</sup> Implementation of a quantum metamaterial using superconducting qubits. / P. Macha, G. Oelsner, J.-M. Reiner et al. // Nature communications. — 2014. — Vol. 5. — P. 5146. — URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/25312205>. (ссылка на стр. [5])
- <sup>15</sup> Clarke J., Braginski A. I. The SQUID Handbook. — 2006. — Vol. 2. — P. 1–634. — ISBN: 9783527404087. (ссылка на стр. [5])
- <sup>16</sup> Resonance Fluorescence of a Single Artificial Atom / O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov et al. // Science. — 2010. — Vol. 327, no. 5967. — P. 840–843. (ссылка на стр. [5])
- <sup>17</sup> Xia K., Vanner M. R., Twamley J. An opto-magneto-mechanical quantum interface between distant superconducting qubits. // Scientific reports. — 2014. — Vol. 4. — P. 5571. — arXiv:1407.2324v1. (ссылка на стр. [5])
- <sup>18</sup> Schrieffer J. R., Tinkham M. Superconductivity // Reviews Of Modern Physics. — 1999. — Vol. 71. — P. S313–S317. (ссылка на стр. [6])
- <sup>19</sup> Ginzburg V.L., Landau L.D. On the theory of superconductivity // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20, 1064. — 1950. (ссылка на стр. [6])
- <sup>20</sup> Gorkov L. P. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity // Sov. Phys. JETP. — 1959. — Vol. 9, no. 6. — P. 1364–1367. (ссылка на стр. [6])
- <sup>21</sup> Josephson B. Coupled Superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 216–220. (ссылка на стр. [7])
- <sup>22</sup> Golubov A. A., Kupriyanov M. Y., Il'ichev E. The current-phase relation in Josephson junctions // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76. — P. 411–469. (ссылка на стр. [7])
- <sup>23</sup> Quantum theory of three-junction flux qubit with non-negligible loop inductance: Towards scalability / T. Robertson, B. Plourde, P. Reichardt et al. // Physical Review B. — 2006. — Vol. 73, no. 17. — P. 174526. — URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.73.174526>. (ссылки на стр. [10 и 13])
- <sup>24</sup> Johansson R. Reproduce: Orlando et al., Phys. Rev. B 60, 15398 (1999). — URL: <http://nbviewer.ipython.org/github/jrjohansson/reproduced-papers/blob/master/Reproduce-PRB-60-15398-1999-Orlando.ipynb>. (ссылка на стр. [13])

- <sup>25</sup> Nonlinear response of the vacuum Rabi resonance / L. S. Bishop, J. M. Chow, J. Koch et al. // Nature Physics. — 2009. — Vol. 5, no. 2. — P. 105–109. (ссылки на стр. [16 и 28])
- <sup>26</sup> Carmichael H. J. Quantum Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations. — Springer Verlag, 1999. (ссылки на стр. [18 и 19])
- <sup>27</sup> Markovian master equations: a critical study / A. Rivas, A. D. K. Plato, S. F. Huelga, M.B. Plenio // New Journal of Physics. — 2010. — Vol. 12, no. 11. — P. 113032. (ссылка на стр. [18])
- <sup>28</sup> Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48, no. 2. — P. 119–130. — URL: <http://link.springer.com/10.1007/BF01608499>. (ссылка на стр. [18])
- <sup>29</sup> Dynamics of the dissipative two-state system / A. J. Leggett, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher et al. // Reviews of Modern Physics. — 1987. — Vol. 59, no. 1. — P. 1. (ссылка на стр. [19])
- <sup>30</sup> Hsu D., Skinner J. L. General quantum mechanical theory of pure dephasing // Journal of luminescence. — 1987. — Vol. 37, no. 6. — P. 331–337. (ссылка на стр. [19])
- <sup>31</sup> Jerger M. Experiments on Superconducting Qubits Coupled to Microwave Resonators : PhD Thesis / M. Jerger ; Karlsruhe Institute of Technology. — 2013. — 130 p. (ссылки на стр. [20 и 25])
- <sup>32</sup> Bishop L. Circuit Quantum Electrodynamics : Doctoral Thesis / L. Bishop ; Yale Institute. — 2010. — 168 p. (ссылки на стр. [20, 26 и 27])
- <sup>33</sup> Bauer D. Theory of intense laser-matter interaction.— Max-Planck-Institut für Kernphysik, 2006. — P. 106. (ссылки на стр. [20 и 21])
- <sup>34</sup> Braak D. Integrability of the Rabi model // Physical review letters. — 2011. — Vol. 107, no. 10. — P. 100401. (ссылка на стр. [22])
- <sup>35</sup> Circuit quantum electrodynamics in the ultrastrong-coupling regime / T. Niemczyk, F. Deppe, H. Huebl et al. // Nature Physics. — 2010. — Vol. 6, no. 10. — P. 772–776. (ссылки на стр. [24 и 28])
- <sup>36</sup> Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime / P. Forn-Díaz, J. Lisenfeld, D. Marcos et al. // Physical review letters. — 2010. — Vol. 105, no. 23. — P. 237001. (ссылки на стр. [24 и 28])
- <sup>37</sup> Novotny L. Strong coupling, energy splitting, and level crossings: A classical perspective // American Journal of Physics. — 2010. — Vol. 78, no. 11. — P. 1199–1202. (ссылка на стр. [25])
- <sup>38</sup> Beaudoin F., Gambetta J. M., Blais A. Dissipation and ultrastrong coupling in circuit QED // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 4. — P. 043832. (ссылка на стр. [25])

<sup>39</sup> Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: an architecture for quantum computation / A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff et al. — 2004. — P. 14. — 0402216. (ссылка на стр. [27])

<sup>40</sup> Introduction to quantum noise, measurement, and amplification / A. A. Clerk, M. H. Devoret, S. M. Girvin et al. // Reviews of Modern Physics. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 1155. (ссылка на стр. [27])

<sup>41</sup> Gardiner CW, Collett MJ. Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation // Physical Review A. — 1985. — Vol. 31, no. 6. — P. 3761. (ссылка на стр. [27])