1. Aussagenlogik

1. 1. Grundbegriffe

Defintion: (Syntax) Eine aussagenlogische Formel ist eine Zeichenkette, die sich aus den Variablen A_0, A_1, ... und den Symbolen $(,), \wedge, \vee, \neg$ zusammensetzt und folgende Regeln einhält:

- Variablen sind Formeln
- Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, dann ist $(F_1 \wedge F_2)$ eine Formel (*Konjunktion*)
- Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, dann ist auch $(F_1 \vee F_2)$ eine Formel (*Disjunktion*)
- Wenn F eine Formel ist, ist auch $\neg F$ eine Formel (*Negation*)

Alle Formeln enstehen auf diese Weise.
Beispiel: $(\neg A_0 \wedge A_1)$
Lemma: (Eindeutige Lesbarkeit) Jede Formel ist

- eine Variable
- eine Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$
- eine Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$
- eine Negation $\neg F$

Es tritt immer genau einer dieser Fälle ein, und ggf sind F_1 und F_2, bzw. F eindeutig bestimmt.
Beispiel: Wir bezeichnen das erste Zeichen der gegebenen Formel. Es treten die Fälle auf:

- es ist eine Variable A_i. Dann ist A_i nach Definition die ganze Formel.
- es ist das Zeichen "$\neg$", dann ist nach Definition unserer Formel $\neg F$. F ist also der Rest unserer Zeichenkette.
- es ist "(". Nach Definition ist unsere Formel vom Typ $(F_1 \wedge F_2)$ / $(F_1 \vee F_2)$.

Wir nehmen an, dass wir die Formel außerdem auch als $(F_1' \wedge F_2')$ / $(F_1' \vee F_2')$ lesen können. Dann ist entweder F_1' Anfangsstück von F_1 oder umgekehrt. Nach dem folgenden Hilfssatz gilt $F_1 = F_1'$ und das unmittelbar folgende Zeichen muss "$\wedge$" oder "$\vee$" sein und legt den Typ der Formel fest. Wenn man eine Formel nach obigem Lemma zerlegt hat und die Formel keine Variable war, dann wendet man das Lemma anschießsend weiter auf F_1 und F_2 bzw. F an bis die Formel komplett zerlegt wurde.
Hilfssatz: Kein echtes Anfangsstück einer Formel ist selbst eine Formel. Mit "*echtem Anfangsstück*" meinen wir ein Anfangsstück, das nicht die ganze Formel ist.
Beispiel: $(F_1$ ist Anfangsstück von $(F_1 \wedge F_2)$.
Beweis: Durch Induktion über die Länge der Formel. Sei F Formel der Länge 1, dann hat F das echte Anfangsstück " " (*leere Formel*), aber das ist keine Formel.

Wir nehmen jetzt an, dass der Hilfssatz für alle kürzeren Formeln bewiesen werden kann. Wir wenden eine Fallunterscheidung nach dem ersten Buchstaben an.

- Variable A_1: Dann hat F die Länge 1.
- "$\neg$": Nach Definition gilt: $F = \neg F_1$. Sei F' echtes Anfangsstück von F_1, dann folgt $F' = \neg F_1$, und F_1' ist echtes Anfangsstück von F_1. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber kein echtes Anfangsstück von F_1 eine Formel. Also kann F' keine Formel sein.
- "(": Wie im obigen Beweis gilt dann $F = (F_1 \wedge F_2)\ /\ (F_1 \vee F_2)$. Sei F' echtes Anfangsstück von F, dann folgt $F' = (F_1 \wedge F_2)\ /\ (F_1 \vee F_2)$. Da F_1 und F_2 kürzer als F sind und F_1 Anfangsstück von F_1' oder F_1' Anfangsstück von F_1 ist, muss $F_1 = F_1'$ gelten. Dann muss $F_2')$ ein Anfangsstück von $F_2)$ sein, also F_2' ein Anfangsstück von F_2. Nach Induktionsvoraussetzung kann F_2' kein echtes Anfangsstück gewesen sein.

Damit wäre der Hauptsatz bewiesen. $\square$

Definition: Es sei $\mathcal{D}$ eine Menge von Variablen, dann ist eine Belegung eine Abbildung $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$$

Dabei stehen 0, 1 für die Wahrheitswerte "*falsch*" oder "*wahr*". Sei also $A_3 \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{A}(A_3) = 1$, dann hat A_3 unter der Belegung $\mathcal{A}$ den Wahrheitswert 1 ("*wahr*"). Wir definieren Verknüpfungen von Wahrheitswerten:

$$w_1 \wedge w_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ und } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ oder } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$w_1 \vee w_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ oder } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ und } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\neg w_1 = \begin{cases} 1 & w = 0 \\ 0 & w = 1 \end{cases}$$

Definition: (Semantik) Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung der Variablen einer Formel F, dann hat F den Wahrheitswert $\mathcal{A}(F)$ von F:

- $\mathcal{A}(A_1)$, falls $F = A_1$ Variable ist
- $\mathcal{A}(F_1) \wedge \mathcal{A}(F_2)$, falls $F = (F_1 \wedge F_2)$
- $\mathcal{A}(F_1) \vee \mathcal{A}(F_2)$, falls $F = (F_1 \vee F_2)$
- $\neg\mathcal{A}(F')$, falls $F = \neg F'$

Wegen des obigen Lemma ist $\mathcal{A}(F)$ dadurch wohldefiniert. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

- $(F_1 \to F_2)$ für $(\neg F_1 \vee F_2)$
- $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ für $((F_1 \to F_2) \wedge (F_2 \to F_1))$
- $\bigwedge_{i<n} F_i$ für $(F_1 \wedge ...(Fn-2 \wedge Fn-1)...)$
- $\bigvee_{i<n} F_i$ für $(F_1 \vee ...(Fn-2 \vee Fn-1)...)$
- $\top$ ("*wahr*") für $(\neg A_0 \vee A_0)$
- $\bot$ ("*falsch*") für $(\neg A_0 \wedge A_0)$

Konventionen: Wir können $\top$, $\bot$ auch als "*nicht zusammengesetzte*" Formeln betrachten

- $\bigwedge_{i<0} F_i = \top$
- $\bigvee_{i<0} F_i = \bot$

Außerdem können wir $(F_1 \vee F_2)$ als Abkürzungen für $\neg(\neg F_1 \wedge \neg F_2)$ auffassen. Gelegentlich lassen wir Klammern weg, wenn keine Missverständnisse auftreten. Unsere Abkürzungen haben genau wie alle Formeln Wahrheitswerte unter vorgegebenen Bedingungen.

$$\mathcal{A}(\top) = 1, \bot = 0, \text{ usw.}$$

Sei (A) eine Belegung der Variablen von F. Wenn $\mathcal{A}(F) = 1$, sagen wir, "*$\mathcal{A}$ erfüllt F*", "*$\mathcal{A}$ ist Modell von F*", "$\mathcal{A} \models F$".
Definition: Eine Formel heißt "*allgemeingültig*" oder "*Tautologie*", wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle möglichen Belegungen gilt. Eine Formel F heißt "*erfüllbar*", wenn es eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ gibt.
Beispiel:

- $\top = (\neg A_0 \vee A_0)$ ist allgemeingültig, A_0 ist erfüllbar.
- $\bot = (\neg A_0 \wedge A_0)$ ist nicht erfüllbar. A_0 ist nicht allgemeingültig.

Lemma:

- F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ nicht erfüllbar ist.
- F ist erfüllbar genau dann, wenn $\neg F$ keine Tautologie ist.