Inhaltsverzeichnis

1 Aussagenlogik

1.1 Grundbegriffe

Defintion: (Syntax) Eine aussagenlogische Formel ist eine Zeichenkette, die sich aus den Variablen A_0, A_1, ... und den Symbolen $(,), \wedge, \vee, \neg$ zusammensetzt und folgende Regeln einhält:

- Variablen sind Formeln
- Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, dann ist $(F_1 \wedge F_2)$ eine Formel (*Konjunktion*)
- Wenn F_1 und F_2 Formeln sind, dann ist auch $(F_1 \vee F_2)$ eine Formel (*Disjunktion*)
- Wenn F eine Formel ist, ist auch $\neg F$ eine Formel (*Negation*)

Alle Formeln enstehen auf diese Weise.
Beispiel: $(\neg A_0 \wedge A_1)$
Lemma: (Eindeutige Lesbarkeit) Jede Formel ist

- eine Variable
- eine Konjunktion $(F_1 \wedge F_2)$
- eine Disjunktion $(F_1 \vee F_2)$
- eine Negation $\neg F$

Es tritt immer genau einer dieser Fälle ein, und ggf sind F_1 und F_2, bzw. F eindeutig bestimmt.
Beispiel: Wir bezeichnen das erste Zeichen der gegebenen Formel. Es treten die Fälle auf:

- es ist eine Variable A_i. Dann ist A_i nach Definition die ganze Formel.
- es ist das Zeichen "$\neg$", dann ist nach Definition unserer Formel $\neg F$. F ist also der Rest unserer Zeichenkette.
- es ist "(". Nach Definition ist unsere Formel vom Typ $(F_1 \wedge F_2)$ / $(F_1 \vee F_2)$.

Wir nehmen an, dass wir die Formel außerdem auch als $(F_1' \wedge F_2')$ / $(F_1' \vee F_2')$ lesen können. Dann ist entweder F_1' Anfangsstück von F_1 oder umgekehrt. Nach dem folgenden Hilfssatz gilt $F_1 = F_1'$ und das unmittelbar folgende Zeichen muss "$\wedge$" oder "$\vee$" sein und legt den Typ der Formel fest. Wenn man eine Formel nach obigem Lemma zerlegt hat und die Formel keine Variable war, dann wendet man das Lemma anschie´ssend weiter auf F_1 und F_2 bzw. F an bis die Formel komplett zerlegt wurde.
Hilfssatz: Kein echtes Anfangsstück einer Formel ist selbst eine Formel. Mit "*echtem Anfangsstück*" meinen wir ein Anfangsstück, das nicht die ganze Formel ist.
Beispiel: $(F_1$ ist Anfangsstück von $(F_1 \wedge F_2)$.
Beweis: Durch Induktion über die Länge der Formel. Sei F Formel der Länge 1, dann hat F das echte Anfangsstück " " (*leere Formel*), aber das ist keine Formel.

Wir nehmen jetzt an, dass der Hilfssatz für alle kürzeren Formeln bewiesen werden kann. Wir wenden eine Fallunterscheidung nach dem ersten Buchstaben an.

- Variable A_1: Dann hat F die Länge 1.
- "$\neg$": Nach Definition gilt: $F = \neg F_1$. Sei F' echtes Anfangsstück von F_1, dann folgt $F' = \neg F_1$, und F_1' ist echtes Anfangsstück von F_1. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber kein echtes Anfangsstück von F_1 eine Formel. Also kann F' keine Formel sein.
- "(": Wie im obigen Beweis gilt dann $F = (F_1 \wedge F_2)$ / $(F_1 \vee F_2)$. Sei F' echtes Anfangsstück von F, dann folgt $F' = (F_1 \wedge F_2)$ / $(F_1 \vee F_2)$. Da F_1 und F_2 kürzer als F sind und F_1 Anfangsstück von F_1' oder F_1' Anfangsstück von F_1 ist, muss $F_1 = F_1'$ gelten. Dann muss F_2') ein Anfangsstück von F_2) sein, also F_2' ein Anfangsstück von F_2. Nach Induktionsvoraussetzung kann F_2' kein echtes Anfangsstück gewesen sein.

Damit wäre der Hauptsatz bewiesen. □

Definition: Es sei $\mathcal{D}$ eine Menge von Variablen, dann ist eine Belegung eine Abbildung $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} : \mathcal{D} \to \{0, 1\}$$

Dabei stehen 0, 1 für die Wahrheitswerte "*falsch*" oder "*wahr*". Sei also $A_3 \in \mathcal{D}$ und $\mathcal{A}(A_3) = 1$, dann hat A_3 unter der Belegung $\mathcal{A}$ den Wahrheitswert 1 ("*wahr*"). Wir definieren Verknüpfungen von Wahrheitswerten:

$$w_1 \wedge w_2 = \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ und } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ oder } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$w_1 \vee w_2 = \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ oder } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ und } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\neg w_1 = \begin{cases} 1 & w = 0 \\ 0 & w = 1 \end{cases}$$

Definition: (Semantik) Sei $\mathcal{A}$ eine Belegung der Variablen einer Formel F, dann hat F den Wahrheitswert $\mathcal{A}(F)$ von F:

- $\mathcal{A}(A_1)$, falls $F = A_1$ Variable ist
- $\mathcal{A}(F_1) \wedge \mathcal{A}(F_2)$, falls $F = (F_1 \wedge F_2)$
- $\mathcal{A}(F_1) \vee \mathcal{A}(F_2)$, falls $F = (F_1 \vee F_2)$
- $\neg\mathcal{A}(F')$, falls $F = \neg F'$

Wegen des obigen Lemma ist $\mathcal{A}(F)$ dadurch wohldefiniert. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

- $(F_1 \rightarrow F_2)$ für $(\neg F_1 \vee F_2)$
- $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ für $((F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1))$
- $\bigwedge_{i<n} F_i$ für $(F_1 \wedge ...(Fn-2 \wedge Fn-1)...)$
- $\bigvee_{i<n} F_i$ für $(F_1 \vee ...(Fn-2 \vee Fn-1)...)$
- $\top$ ("*wahr*") für $(\neg A_0 \vee A_0)$
- $\bot$ ("*falsch*") für $(\neg A_0 \wedge A_0)$

Konventionen: Wir können $\top$, $\bot$ auch als "*nicht zusammengesetzte*" Formeln betrachten

- $\bigwedge\limits_{i<0} F_i = \top$
- $\bigvee\limits_{i<0} F_i = \bot$

Außerdem können wir $(F_1 \vee F_2)$ als Abkürzungen für $\neg(\neg F_1 \wedge \neg F_2)$ auffassen. Gelegentlich lassen wir Klammern weg, wenn keine Missverständnisse auftreten. Unsere Abkürzungen haben genau wie alle Formeln Wahrheitswerte unter vorgegebenen Bedingungen.

$$\mathcal{A}(\top) = 1, \bot = 0, \text{ usw.}$$

Sei (A) eine Belegung der Variablen von F. Wenn $\mathcal{A}(F) = 1$, sagen wir, "*$\mathcal{A}$ erfüllt F*", "*$\mathcal{A}$ ist Modell von F*", "$\mathcal{A} \models F$".
Definition: Eine Formel heißt "*allgemeingültig*" oder "*Tautologie*", wenn $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle möglichen Belegungen gilt. Eine Formel F heißt "*erfüllbar*", wenn es eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ gibt.
Beispiel:

- $\top = (\neg A_0 \vee A_0)$ ist allgemeingültig, A_0 ist erfüllbar.
- $\bot = (\neg A_0 \wedge A_0)$ ist nicht erfüllbar. A_0 ist nicht allgemeingültig.

Lemma:

- F ist genau dann eine Tautologie, wenn $\neg F$ nicht erfüllbar ist.
- F ist erfüllbar genau dann, wenn $\neg F$ keine Tautologie ist.

1.2 Äquivalenz von Formeln und Normalformen

Def.:Zwei Formeln F,G in den gleichen Variablen heißen äquivalent, kurz $F \equiv G$, wenn $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$ für alle Belegungen der Variablen.
Beispiel: F = A, G = A∧(A∨B)
Bemerkung:

- F$\equiv G$ genau dann, wenn $F \leftrightarrow G$ allgemeingültig ist.

- F allgemeingültig (kurz $\models$F) genau dann, wenn $F \equiv \top$

- F erfüllt (kurz $\not\models \neg$ F) genau dann, wenn F$\not\equiv \bot$

- "$\equiv$"ist eine Äquivalenzrelation. [d.h. F≡F für alle Formeln F
  F$\equiv G \Rightarrow G \equiv F$ für alle Formel n F,G
  (F$\equiv G$ und $G \equiv H) \Rightarrow F \equiv H$ für alle Formeln F,G,H
  Das bedeutet: Die Menge aller Foemeln zerfällt in Äquivalnzklassen [F] mit G∈[F]⇔ $F \equiv G$]

Bemerkung: Methoden um Äquivalenz von Formeln zu zeigen:

- Fallunterscheidungen für die Belegungen (siehe Bsp, mündlich)

- Alle Belegungen einsetzen und vergleichen
  (A∧$B) \equiv (B \wedge A)$

$_A\backslash^B$	0	1	$_A\backslash^B$	0	1
0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1

- Venn-Diagramme: Für jede Variable A male eine "Menge"M_A. Punkte in M_A entsprechen Belegungen mit $\mathcal{A}(A) = 1$, Punkte außerhalb:$\mathcal{A}(A) = 0$
  Bsp: $((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$
  Hier noch Grafik einfügen !!!

Def. Sei F eine Formel, aufgebaut aus Variablen, den Junktoren $\neg, \wedge, \vee$, sowie $\top, \bot$. Die zu F duale Formel F* entsteht aus F durch Vertauschen von $\wedge, \vee$ sowie von $\top, \bot$.
Lemma:F≡G genau dann, wenn F* ≡G
Beweis: Es sei $\mathcal{A}$ eine Belegung . Vertausche in $\mathcal{A}$ die Werte 0,1 und erhalte eine neue Belegung $\mathcal{A}^*$
Behauptung: es gilt $\mathcal{A}(F) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}^*(F^*) = 0$.

Begründung: Durch Induktion über Länge der Formel mit dem Lemma über eindeutige Lesbarkeit.

$$F = A \Rightarrow F^* = A$$

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(A) = 0 = \mathcal{A}^*(F^*))$$

$$F = \top \Rightarrow F^* = \bot$$

$$\mathcal{A}(\top) = 1 \text{gilt immer genau} A^*(\bot) = 0$$

Analog für F=⊥
Induktionsschritt:

- F = ¬ G :

$$\mathcal{A}(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(G) = 0$$
$$\overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathcal{A}^*(G^*) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F^*) = 0$$

- F = $(F_0 \wedge F_1), F^* = (F_0^* \vee F_1^*$:

$$\mathcal{A}(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(F_0) = 1 \; und \; \mathcal{A}(F_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F_0^*) = 0 \; und \; \mathcal{A}^*(F_1^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F^*) = 0$$

- F = $(F_0 \vee F_1)$ analog. □

Satz: Es gelten folgenden Äquivalnzen sowie ihre Duale:

$$(A \wedge A) \equiv A \text{ (Idempotenz)}$$

$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A) \text{ (Kommutativität)}$$

$$((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \text{ (Distributivität)}$$

$$(A \wedge (A \wedge B)) \equiv A \text{ (Absorption)}$$

$$(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C) \text{ Assoziatovität)}$$

$$(\bot A) \equiv A$$

$$(\top \wedge A) \equiv \top$$

$$(A \wedge \neg A) \equiv \bot \text{ "(dual zu tertum non datur")}$$

Beweis: Kommutativität, Distributivität, Absorption siehe oben. Rest analog.
Def.: Es seien F,H Formeln und A eine Variable. Dann bezeichnet die Formel F(H/A) die Formel die aus F entsteht, indem man jedes Vorkommen der Variable A durch die Formel H ersetzen. (Dabei gehen wir nicht rekursiv vor d.h. wenn H selbst die Variable A enthält, lassen wir A danach stehen).
Bsp.: F=$(A \wedge B)$, G=$(B \wedge A)$, H=$(B \vee C)$
F(H/B)=$(A \wedge (B \vee C))$, G(H/B)=$((B \vee C) \wedge A)$
Lemma(Ersetzungslemma): Es seien F,G,H Formeln und A eine Variable. Wenn G$\equiv$ H gilt, dann gelten auch:

$$F(G/A) \equiv F(H/A)(1)$$

und

$$G(F/A) \equiv H(F/A)(2).$$

Beweis: Zu (1) : Bei allen Belegungen $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(H)$. Bei der rekursiven Definition von $\mathcal{A}(F)$ kann ich anstelle $\mathcal{A}(A)$ kann ich $\mathcal{A}(G)$ *oder* $\mathcal{A}(H)$ einsetzen und erhalte beidemal das gleiche Ergebniss für alle Belegungen $\Rightarrow$ (1).
Zu (2): In der rekursiven Definition von $\mathcal{A}(G), \mathcal{A}(H)$ ersetze wieder $\mathcal{A}(A)$ *durch* $\mathcal{A}(F)$, es folgt wieder die Äquivalenz (2). □
WARNUNG: Im Allgemeinen folgt aus (1) oder (2) nicht, dass G≡H.
Satz: Es gelten die de Morgenschen Regeln:
$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
dual dazu: $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge B)$
$\neg\neg\neg A \equiv A$.
z **Beweis**: Wie oben, siehe auch Beweis des Dualitätslemma.□
Satz: Ein Literal ist eine Variable A, oder ¬A. Ein Ausdruck der Form:
$\bigvee_{i<m} \bigwedge_{j<n_i} L_{ij}$
wobei L_{ij} Literale sind, heißt "disjunktive Normalform". Dual dazu heißt:
$\bigwedge_{i<m'} \bigvee_{j<n'_i} L'_{ij}$
"konjunktive Normalform".
Satz: Jede Formel F ist zu einer Formel in konjunktiver, bzw. disjunktiver Normalform äquivalent.
WARNUNG: Diese Normalformen sind nicht eindeutig, z.B. sind:

$$A \equiv A \vee (B \wedge A)$$

beide in disjunktiver Normalform.
Beweis: Induktiv für beide Normalformenzusammen:
Sei etwa F = $(F_0 \wedge F_1)$, dann bringe zunächst F_0 und F_1 in die gewünschte Normalform.
Für die konjunktive Normalform hänge die beiden großen Konjunktionen zusammen:
$\bigwedge_{i<m_0} \bigvee_{...} L'_{ij} \wedge \bigwedge_{i<m_1} \bigvee_{...} L''ij$
$\rightarrow \bigwedge_{i<m_o+m_1} \bigvee_{...} L_{ij}$.
Für die disjunktive Normalform benutzt man das Distributivgesetz:
$\bigvee_{i<m_0} \bigwedge_{...} L'_{ij} \wedge \bigvee_{i<_m 1} \bigwedge_{...} L''_{ij}$
$\rightarrow \bigvee_{i<m_0 \cdot m_1} (\bigwedge_{...} L'_{ij} \wedge \bigwedge_{...} L''_{ij})$
Analog verfahre mit F=$(F_0 \vee F_1)$ (Beides ist analog zum Ausmultiplizieren von Polynomen in mehreeren Veränderlichen ...)
Um F=¬ G in konjunktive Normalform zu bringen, bringe G in disjunktive Normalform und wende dann die de Morgenschen Regeln:
$\neg(\bigvee_{i<m} \bigwedge_{j<n_i} L_{ij}) = \bigwedge_{i<m} \bigvee_{j<n_i} \neg L_{ij}$
anschließend beseitige doppelte Veneinungen:$\neg\neg A \equiv A$. Analog für disjunktive Normalform. □