

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aussagenlogik</b>	<b>2</b>
1.1	Grundbegriffe . . . . .	2
1.2	Äquivalenz von Formeln und Normalformen . . . . .	5
1.3	Boole'sche Algebren . . . . .	9
1.4	Resolutionsmethode . . . . .	12
1.4.1	Satz . . . . .	14
1.5	Der Satz von Cook . . . . .	15
1.6	Der Kompaktheitssatz . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Prädikatenlogik</b>	<b>20</b>
2.1	Strukturen und Formeln . . . . .	20
2.2	Semantik . . . . .	24
2.3	Allgemeingültige Formeln . . . . .	30
2.4	Der Gödelsche Vollständigkeitssatz . . . . .	32

# 1 Aussagenlogik

## 1.1 Grundbegriffe

**Defintion:** (Syntax) Eine aussagenlogische Formel ist eine Zeichenkette, die sich aus den Variablen  $A_0, A_1, \dots$  und den Symbolen  $(, ), \wedge, \vee, \neg$  zusammensetzt und folgende Regeln einhält:

- Variablen sind Formeln
- Wenn  $F_1$  und  $F_2$  Formeln sind, dann ist  $(F_1 \wedge F_2)$  eine Formel (*Konjunktion*)
- Wenn  $F_1$  und  $F_2$  Formeln sind, dann ist auch  $(F_1 \vee F_2)$  eine Formel (*Disjunktion*)
- Wenn  $F$  eine Formel ist, ist auch  $\neg F$  eine Formel (*Negation*)

Alle Formeln entstehen auf diese Weise.

**Beispiel:**  $(\neg A_0 \wedge A_1)$

**Lemma:** (Eindeutige Lesbarkeit) Jede Formel ist

- eine Variable
- eine Konjunktion  $(F_1 \wedge F_2)$
- eine Disjunktion  $(F_1 \vee F_2)$
- eine Negation  $\neg F$

Es tritt immer genau einer dieser Fälle ein, und ggf sind  $F_1$  und  $F_2$ , bzw.  $F$  eindeutig bestimmt.

**Beispiel:** Wir bezeichnen das erste Zeichen der gegebenen Formel. Es treten die Fälle auf:

- es ist eine Variable  $A_i$ . Dann ist  $A_i$  nach Definition die ganze Formel.
- es ist das Zeichen " $\neg$ ", dann ist nach Definition unserer Formel  $\neg F$ .  $F$  ist also der Rest unserer Zeichenkette.
- es ist " $($ ". Nach Definition ist unsere Formel vom Typ  $(F_1 \wedge F_2) / (F_1 \vee F_2)$ .

Wir nehmen an, dass wir die Formel außerdem auch als  $(F'_1 \wedge F'_2) / (F'_1 \vee F'_2)$  lesen können. Dann ist entweder  $F'_1$  Anfangsstück von  $F_1$  oder umgekehrt. Nach dem folgenden Hilfssatz gilt  $F_1 = F'_1$  und das unmittelbar folgende Zeichen muss " $\wedge$ " oder " $\vee$ " sein und legt den Typ der Formel fest. Wenn man eine Formel nach obigem Lemma zerlegt hat und die Formel keine Variable war, dann wendet man das Lemma anschliesend weiter auf  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $F$  an bis die Formel komplett zerlegt wurde.

**Hilfssatz:** Kein echtes Anfangsstück einer Formel ist selbst eine Formel. Mit "*echtem Anfangsstück*" meinen wir ein Anfangsstück, das nicht die ganze Formel ist.

**Beispiel:**  $(F_1$  ist Anfangsstück von  $(F_1 \wedge F_2)$ .

**Beweis:** Durch Induktion über die Länge der Formel. Sei  $F$  Formel der Länge 1, dann hat  $F$  das echte Anfangsstück " $$ " (*leere Formel*), aber das ist keine Formel.

Wir nehmen jetzt an, dass der Hilfssatz für alle kürzeren Formeln bewiesen werden kann. Wir wenden eine Fallunterscheidung nach dem ersten Buchstaben an.

- Variable  $A_1$ : Dann hat  $F$  die Länge 1.
- " $\neg$ ": Nach Definition gilt:  $F = \neg F_1$ . Sei  $F'$  echtes Anfangsstück von  $F_1$ , dann folgt  $F' = \neg F_1$ , und  $F'_1$  ist echtes Anfangsstück von  $F_1$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist aber kein echtes Anfangsstück von  $F_1$  eine Formel. Also kann  $F'$  keine Formel sein.
- " $\vee$ ": Wie im obigen Beweis gilt dann  $F = (F_1 \wedge F_2) / (F_1 \vee F_2)$ . Sei  $F'$  echtes Anfangsstück von  $F$ , dann folgt  $F' = (F_1 \wedge F_2) / (F_1 \vee F_2)$ . Da  $F_1$  und  $F_2$  kürzer als  $F$  sind und  $F_1$  Anfangsstück von  $F'_1$  oder  $F'_1$  Anfangsstück von  $F_1$  ist, muss  $F_1 = F'_1$  gelten. Dann muss  $F'_2$  ein Anfangsstück von  $F_2$  sein, also  $F'_2$  ein Anfangsstück von  $F_2$ . Nach Induktionsvoraussetzung kann  $F'_2$  kein echtes Anfangsstück gewesen sein.

Damit wäre der Hauptsatz bewiesen.  $\square$

**Definition:** Es sei  $\mathcal{D}$  eine Menge von Variablen, dann ist eine Belegung eine Abbildung  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} : \mathcal{D} \rightarrow \{0, 1\}$$

Dabei stehen 0, 1 für die Wahrheitswerte "*falsch*" oder "*wahr*". Sei also  $A_3 \in \mathcal{D}$  und  $\mathcal{A}(A_3) = 1$ , dann hat  $A_3$  unter der Belegung  $\mathcal{A}$  den Wahrheitswert 1 ("*wahr*"). Wir definieren Verknüpfungen von Wahrheitswerten:

$$w_1 \wedge w_2 = \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ und } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ oder } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$w_1 \vee w_2 = \begin{cases} 1 & w_1 = 1 \text{ oder } w_2 = 1 \\ 0 & w_1 = 0 \text{ und } w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\neg w_1 = \begin{cases} 1 & w = 0 \\ 0 & w = 1 \end{cases}$$

**Definition:** (Semantik) Sei  $\mathcal{A}$  eine Belegung der Variablen einer Formel  $F$ , dann hat  $F$  den Wahrheitswert  $\mathcal{A}(F)$  von  $F$ :

- $\mathcal{A}(A_1)$ , falls  $F = A_1$  Variable ist
- $\mathcal{A}(F_1) \wedge \mathcal{A}(F_2)$ , falls  $F = (F_1 \wedge F_2)$
- $\mathcal{A}(F_1) \vee \mathcal{A}(F_2)$ , falls  $F = (F_1 \vee F_2)$
- $\neg \mathcal{A}(F')$ , falls  $F = \neg F'$

Wegen des obigen Lemma ist  $\mathcal{A}(F)$  dadurch wohldefiniert. Wir verwenden folgende Abkürzungen:

- $(F_1 \rightarrow F_2)$  für  $(\neg F_1 \vee F_2)$
- $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$  für  $((F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1))$
- $\bigwedge_{i < n} F_i$  für  $(F_1 \wedge \dots (F_{n-2} \wedge F_{n-1}) \dots)$
- $\bigvee_{i < n} F_i$  für  $(F_1 \vee \dots (F_{n-2} \vee F_{n-1}) \dots)$
- $\top$  ("wahr") für  $(\neg A_0 \vee A_0)$
- $\perp$  ("falsch") für  $(\neg A_0 \wedge A_0)$

**Konventionen:** Wir können  $\top$ ,  $\perp$  auch als "nicht zusammengesetzte" Formeln betrachten

- $\bigwedge_{i < 0} F_i = \top$
- $\bigvee_{i < 0} F_i = \perp$

Außerdem können wir  $(F_1 \vee F_2)$  als Abkürzungen für  $\neg(\neg F_1 \wedge \neg F_2)$  auffassen. Gelegentlich lassen wir Klammern weg, wenn keine Missverständnisse auftreten. Unsere Abkürzungen haben genau wie alle Formeln Wahrheitswerte unter vorgegebenen Bedingungen.

$$\mathcal{A}(\top) = 1, \perp = 0, \text{ usw.}$$

Sei  $(A)$  eine Belegung der Variablen von  $F$ . Wenn  $\mathcal{A}(F) = 1$ , sagen wir, " $\mathcal{A}$  erfüllt  $F$ ", " $\mathcal{A}$  ist Modell von  $F$ ", " $\mathcal{A} \models F$ ".

**Definition:** Eine Formel heißt "allgemeingültig" oder "Tautologie", wenn  $\mathcal{A}(F) = 1$  für alle möglichen Belegungen gilt. Eine Formel  $F$  heißt "erfüllbar", wenn es eine Belegung  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(F) = 1$  gibt.

**Beispiel:**

- $\top = (\neg A_0 \vee A_0)$  ist allgemeingültig,  $A_0$  ist erfüllbar.
- $\perp = (\neg A_0 \wedge A_0)$  ist nicht erfüllbar.  $A_0$  ist nicht allgemeingültig.

**Lemma:**

- $F$  ist genau dann eine Tautologie, wenn  $\neg F$  nicht erfüllbar ist.
- $F$  ist erfüllbar genau dann, wenn  $\neg F$  keine Tautologie ist.

## 1.2 Äquivalenz von Formeln und Normalformen

**Definition:** Zwei Formeln  $F, G$  in den gleichen Variablen heißen äquivalent, kurz  $F \equiv G$ , wenn  $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$  für alle Belegungen der Variablen.

**Beispiel:**  $F = A$ ,  $G = A \wedge (A \vee B)$

**Bemerkung:**

- $F \equiv G$  genau dann, wenn  $F \leftrightarrow G$  allgemeingültig ist.
- $F$  allgemeingültig (kurz  $\models F$ ) genau dann, wenn  $F \equiv \top$
- $F$  erfüllt (kurz  $\not\models \neg F$ ) genau dann, wenn  $F \not\equiv \perp$
- " $\equiv$ " ist eine Äquivalenzrelation. [d.h.  $F \equiv F$  für alle Formeln  $F$   
 $F \equiv G \Rightarrow G \equiv F$  für alle Formeln  $F, G$   
 $(F \equiv G \text{ und } G \equiv H) \Rightarrow F \equiv H$  für alle Formeln  $F, G, H$   
Das bedeutet: Die Menge aller Formeln zerfällt in Äquivalenzklassen  $[F]$  mit  $G \in [F] \Leftrightarrow F \equiv G$  ]

**Bemerkung:** Methoden um Äquivalenz von Formeln zu zeigen:

- Fallunterscheidungen für die Belegungen (siehe Bsp, mündlich)
- Alle Belegungen einsetzen und vergleichen:  $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

$A \setminus B$	0	1
0	0	0
1	0	1

$A \setminus B$	0	1
0	0	0
1	0	1

- Venn-Diagramme: Für jede Variable  $A$  male eine "Menge"  $M_A$ . Punkte in  $M_A$  entsprechen Belegungen mit  $\mathcal{A}(A) = 1$ , Punkte außerhalb:  $\mathcal{A}(A) = 0$

**Bsp:**  $((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$

**Hier noch Grafik einfügen !!!**

**Definition** Sei  $F$  eine Formel, aufgebaut aus Variablen, den Junktoren  $\neg, \wedge, \vee$ , sowie  $\top, \perp$ . Die zu  $F$  duale Formel  $F^*$  entsteht aus  $F$  durch Vertauschen von  $\wedge, \vee$  sowie von  $\top, \perp$ .

**Lemma:**  $F \equiv G$  genau dann, wenn  $F^* \equiv G$

**Beweis:** Es sei  $\mathcal{A}$  eine Belegung. Vertausche in  $\mathcal{A}$  die Werte 0,1 und erhalte eine neue Belegung  $\mathcal{A}^*$

**Behauptung:** es gilt  $\mathcal{A}(F) = 1$  genau dann, wenn  $\mathcal{A}^*(F^*) = 0$ .

**Begründung:** Durch Induktion über Länge der Formel mit dem Lemma über eindeutige Lesbarkeit.

$$F = A \Rightarrow F^* = A$$

$$\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(A) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(A) = 0 = \mathcal{A}^*(F^*)$$

$$F = \top \Rightarrow F^* = \perp$$

Induktionsschritt:

$$\mathcal{A}(\top) = 1 \text{ gilt immer genau } \mathcal{A}^*(\perp) = 0$$

Analog für  $F = \perp$

- $F = \neg G$  :

$$\mathcal{A}(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(G) = 0$$

$$\stackrel{IV}{\Leftrightarrow} \mathcal{A}^*(G^*) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F^*) = 0$$

- $F = (F_0 \wedge F_1), F^* = (F_0^* \vee F_1^*)$ :

$$\mathcal{A}(F) = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}(F_0) = 1 \text{ und } \mathcal{A}(F_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F_0^*) = 0 \text{ und } \mathcal{A}^*(F_1^*) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}^*(F^*) = 0$$

- $F = (F_0 \vee F_1)$  analog.  $\square$

**Satz:** Es gelten folgenden Äquivalenzen sowie ihre Duale:

1.  $(A \wedge A) \equiv A$  (Idempotenz)
2.  $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$  (Kommutativität)
3.  $((A \wedge B) \vee C) \equiv ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$  (Distributivität)
4.  $(A \wedge (A \wedge B)) \equiv A$  (Absorption)
5.  $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$  Assoziativität)
6.  $(\perp \vee A) \equiv A$
7.  $(\top \wedge A) \equiv A$
8.  $(A \wedge \neg A) \equiv \perp$  "(dual zu tertium non datur")

**Beweis:** Kommutativität, Distributivität, Absorption siehe oben. Rest analog.

**Definition:** Es seien  $F, H$  Formeln und  $A$  eine Variable. Dann bezeichnet die Formel  $F(H/A)$  die Formel die aus  $F$  entsteht, indem man jedes Vorkommen der Variable  $A$  durch die Formel  $H$  ersetzt. (Dabei gehen wir nicht rekursiv vor d.h. wenn  $H$  selbst die Variable  $A$  enthält, lassen wir  $A$  danach stehen).

**Beispiel:**  $F=(A \wedge B)$ ,  $G=(B \wedge A)$ ,  $H=(B \vee C)$   
 $F(H/B)=(A \wedge (B \vee C))$ ,  $G(H/B)=((B \vee C) \wedge A)$

**Lemma(Ersetzungslemma):** Es seien  $F, G, H$  Formeln und  $A$  eine Variable. Wenn  $G \equiv H$  gilt, dann gelten auch:

$$F(G/A) \equiv F(H/A) \quad (1)$$

und

$$G(F/A) \equiv H(F/A) \quad (2).$$

**Beweis:** Zu (1) : Bei allen Belegungen  $\mathcal{A}$  gilt  $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(H)$ . Bei der rekursiven Definition von  $\mathcal{A}(F)$  kann ich anstelle  $\mathcal{A}(A)$  kann ich  $\mathcal{A}(G)$  oder  $\mathcal{A}(H)$  einsetzen und erhalte beidemale das gleiche Ergebniss für alle Belegungen  $\Rightarrow$  (1).

Zu (2): In der rekursiven Definition von  $\mathcal{A}(G)$ ,  $\mathcal{A}(H)$  ersetze wieder  $\mathcal{A}(A)$  durch  $\mathcal{A}(F)$ , es folgt wieder die Äquivalenz (2).  $\square$

**WARNUNG:** Im Allgemeinen folgt aus (1) oder (2) nicht, dass  $G \equiv H$ .

**Satz:** Es gelten die de Morgenschen Regeln:

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

$$\text{dual dazu: } \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg\neg\neg A \equiv A.$$

**Beweis:** Wie oben, siehe auch Beweis des Dualitätslemma.  $\square$

**Satz:** Ein Literal ist eine Variable  $A$ , oder  $\neg A$ . Ein Ausdruck der Form:

$$\bigvee_{i < m} \bigwedge_{j < n_i} L_{ij}$$

wobei  $L_{ij}$  Literale sind, heißt "disjunktive Normalform". Dual dazu heißt:

$$\bigwedge_{i < m'} \bigvee_{j < n'_i} L'_{ij}$$

”konjunktive Normalform”.

**Satz:** Jede Formel  $F$  ist zu einer Formel in konjunktiver, bzw. disjunktiver Normalform äquivalent.

**WARNUNG:** Diese Normalformen sind nicht eindeutig, z.B. sind:

$$A \equiv A \vee (B \wedge A)$$

beide in disjunktiver Normalform.

**Beweis:** Induktiv für beide Normalformenzusammen:

Sei etwa  $F = (F_0 \wedge F_1)$ , dann bringe zunächst  $F_0$  und  $F_1$  in die gewünschte Normalform. Für die konjunktive Normalform hänge die beiden großen Konjunktionen zusammen:

$$\bigwedge_{i < m_0} \bigvee \dots L'_{ij} \wedge \bigwedge_{i < m_1} \bigvee \dots L''_{ij}$$

$$\rightarrow \bigwedge_{i < m_0 + m_1} \bigvee \dots L_{ij}$$

Für die disjunktive Normalform benutzt man das Distributivgesetz:

$$\bigvee_{i < m_0} \bigwedge \dots L'_{ij} \wedge \bigvee_{i < m_1} \bigwedge \dots L''_{ij}$$

$$\rightarrow \bigvee_{i < m_0 \cdot m_1} (\bigwedge \dots L'_{ij} \wedge \bigwedge \dots L''_{ij})$$

Analog verfahren mit  $F = (F_0 \vee F_1)$  (Beides ist analog zum Ausmultiplizieren von Polynomen in mehreren Veränderlichen ...)

Um  $F = \neg G$  in konjunktive Normalform zu bringen, bringe  $G$  in disjunktive Normalform und wende dann die de Morgenschen Regeln:

$$\neg(\bigvee_{i < m} \bigwedge_{j < n_i} L_{ij}) = \bigwedge_{i < m} \bigvee_{j < n_i} \neg L_{ij}$$

anschließend beseitige doppelte Verneinungen:  $\neg\neg A \equiv A$ . Analog für disjunktive Normalform.  $\square$



### 1.3 Boole'sche Algebren

**Definition:** Eine boole'sche Algebra  $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, \complement)$  besteht aus einer Menge  $B$ , Elementen  $0, 1 \in B$ , Verknüpfungen  $\sqcap, \sqcup : B \times B \rightarrow B$  und einem Komplement  $\complement \in B : a \mapsto a^\complement$ , so dass folgende Axiome für  $\forall a, b, c \in B$  gelten:

- |       |  |  |                   |
|-------|--|--|-------------------|
| (1.1) | $a \sqcup a = a$   | $a \sqcap a = a$   | (Idempotenz)      |
| (1.2) | $a \sqcup b = b \sqcup a$                                  | $a \sqcap b = b \sqcap a$                                  | (Kommutativität)  |
| (1.3) | $(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$            | $(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$            | (Assoziativität)  |
| (1.4) | $a \sqcup (a \sqcap b) = a$                                | $a \sqcap (a \sqcup b) = a$                                | (Absorption)      |
| (1.5) | $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ | $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ | (Distributivität) |
| (1.6) | $0 \sqcap a = 0$   | $1 \sqcup a = 1$   |                   |
| (1.7) | $a \sqcap a^\complement = 0$                               | $a \sqcup a^\complement = 1$                               |                   |

**Bemerkungen:**

- Eines der Distributivitätsgesetze (1.5) ist überflüssig
- Es gelten die de Morgan'schen Regeln

**Beispiel einer Folgerung:**

$$a \sqcup 0 \stackrel{1.6}{=} a \sqcup (a \sqcap 0) \stackrel{1.4}{=} a$$

Analog für  $a \sqcap 1 = a$

**Beispiel 1:** Es sei  $X$  eine Menge. Dann ist die Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  eine boole'sche Algebra  $(\mathcal{P}(X), \emptyset, X, \cap, \cup, \setminus)$ .

Für  $A \subset X$  ist  $A^\complement = X \setminus A$

**Beispiel 2:** Ein n-Byte sei eine Folge von  $n$  Bits aus  $\{0, 1\}$ . Dann bildet die Menge aller n-Bytes eine boole'sche Algebra mit AND, OR, NOT.

Diese Beispiele sind isomorph. Dabei entspricht dem n-Byte  $(b_0, \dots, b_{n-1})$  die Teilmenge  $\{i \in \{0, \dots, n-1\} \mid b_i = 1\} \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n-1\})$

Es gibt für boole'sche Algebren das Prinzip der Dualität:

Wenn eine Gleichung gilt, dann gilt sie auch nach Vertauschen von  $\sqcap$  und  $\sqcup$ , sowie von 0 und 1.

**Definition:** Eine Struktur  $(M, \sqcap, \sqcup)$  heißt Verband, wenn (1.1) bis (1.4) gelten.

**Bemerkung:** Zu jedem Verband gehört eine partielle Ordnung  $\leq$  mit:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \sqcap b = a$$

Es gelten:

**Reflexivität:**  $a \sqcap a = a \Rightarrow a \leq a$

**Antisymmetrie:** Es gelte  $a \leq b, b \leq a; a \sqcap b = a, b \sqcap a = b$

Aus (1.2) folgt  $a = a \sqcap b = b$

**Transitivität:** Es gelte  $a \leq b, b \leq c$

$$a \sqcap b = a, b = b \sqcap c$$

$$a = a \sqcap b = a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap c$$

**Beispiel:** Die Potenzmenge ist ein Verband mit  $A \leq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

Umgekehrt sei  $(M, \leq)$  eine Menge mit partieller Ordnung

Ein Infimum von  $a, b \in M$  ist ein Element

$$c = \inf(a, b) \text{ mit } c \leq a, c \leq b$$

so dass

$$\forall d \in M : c \leq d \leq a, c \leq d \leq b \Rightarrow d = c$$

Ein Supremum von  $a, b \in M$  ist ein Element

$$c = \sup(a, b) \text{ mit } a \leq c, b \leq c$$

so dass

$$\forall d \in M : a \leq d \leq c, b \leq d \leq c \Rightarrow d = c$$

Wenn in einer partiellen Ordnung  $(M, \leq)$  je zwei  $a, b \in M$  ein Infimum oder Supremum haben, erhalten wir einen Verband mit  $a \sqcap b = \inf(a, b)$  und  $a \sqcup b = \sup(a, b)$ .

Wenn es Elemente  $0, 1$  mit  $0 \leq a \leq 1 \forall a \in M$  gibt, dann gilt (1.6).

Zu einer boole'schen Algebra fehlen noch die Komplemente, sowie die Distributivität.

**Beispiel:** (Verband, aber keine boole'sche Algebra)

Sei  $V$  ein Vektorraum. Dann bilden die Untervektorräume von  $V$  einen Verband  $U(V)$  mit  $U \leq W \Leftrightarrow U \subseteq W$ .

Dann

$$U \sqcap W = U \cap W$$

$$U \sqcup W = U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

Aber (1.5) ist verletzt! Sei  $V = \mathbb{R}^2$ :

$$U = \mathbb{R} \times \{0\}, W = \{0\} \times \mathbb{R} \text{ (x- und y-Achse)}$$

Sei  $X = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}$ , dann:

$$U \sqcup W = \mathbb{R}^2$$

$$X \sqcap (U \sqcup W) = X$$

$$X \sqcap U = \{0\}$$

$$X \sqcap W = \{0\}$$

$$(X \sqcap U) \sqcup (X \sqcap W) = \{0\}$$

**Satz:** (Stone'scher Darstellungssatz)

Jede boole'sche Algebra ist Unter algebra einer Potenzmengen algebra und jede endliche boole'sche Algebra ist isomorph zu einer Potenzmengen algebra.

**Beweis** der zweiten Aussage:

Sei  $(B, 0, 1, \sqcap, \sqcup, \complement)$  eine boole'sche Algebra, so dass  $B$  eine endliche Menge ist.

Dann ist  $B$  ein Verband mit Minimum 0.

Ein Atom in  $B$  ist ein Element  $a \in B \setminus \{0\}$ , so dass aus  $0 \leq b \leq a$  stets  $b = 0$  oder  $b = a$  folgt.

Sei  $x$  die Menge der Atome in  $B$ .

Definiere  $\Phi : B \rightarrow \mathcal{P}(X)$  durch

$$\Phi(b) = \{a \in X \mid a \leq b\} \in \mathcal{P}(X)$$

Zeige zunächst:  $\Phi$  ist bijektiv:

Surjektivität: Sei  $U \subset X$ , dann betrachte

$$b = \bigsqcup_{a \in U} a = a_0 \sqcup \dots \sqcup a_{k-1}, \text{ falls } U = \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$$

Sei  $a \in X$ , so gilt

$$a \leq b \Leftrightarrow a \sqcap (a_0 \sqcup \dots \sqcup a_{k-1}) = a = (a \sqcap a_0) \sqcup \dots \sqcup (a \sqcap a_{k-1})$$

Da  $a \sqcap a_i \leq a, a \sqcap a_i \leq a_i$  und  $a, a_i$  Atome gilt entweder

$$a \sqcap a_i = 0 \Leftrightarrow a \neq a_i$$

oder

$$a = a \sqcap a_i = a_i$$

ist der obige Ausdruck entweder 0 (falls  $a \notin U$ ) oder  $a = a_i \in U$   
 $\Rightarrow \Phi(b) = U$

Injektivität:

Es gelte  $\Phi(b) = \Phi(a)$ ,

dann gilt  $\Phi(b \sqcap c) = \Phi(c)$ , denn

Sei  $a \leq b, a \leq c, a$  Atom:

$$a = a \sqcap b = a \sqcap c = (a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c),$$

also o.B.d.A.  $b \leq c$ .

Betrachte  $c \sqcap b^\complement$ :

Falls  $b \leq c$  und  $c \sqcap b^\complement = 0$  folgt  $b = c$ ,

Falls  $c \sqcap b^\complement \neq 0$ , finden wir  $a \in X$

mit  $a \leq c \sqcap b^\complement \Rightarrow a \in \Phi(c) \setminus \Phi(b)$   $\nLeftarrow$

Dazu nutzen wir aus, dass  $B$  endlich ist:

jede Kette  $0 < a < \dots < c \sqcap b^\complement$  hat höchstens Länge  $\#B$  und für längstmögliche Kette ist  $a$  ein Atom.

$\Rightarrow \Phi$  ist bijektiv

Noch zu zeigen:  $\Phi(0) = \emptyset, \Phi(1) = X$ , usw.  $\square$

**Beispiel:** Lindenbaum-Algebra

Die Lindenbaum-Algebra in  $n$  Variablen  $A_0, \dots, A_{n-1}$  ist die Menge der Äquivalenzklassen aussagenlogischer Formeln in den Variablen  $A_0, \dots, A_{n-1}$  bezüglich der Äquivalenzen(?) aus 1.2.

Schreibe Elemente als  $F/\equiv$  (z.B.  $(\neg A_0 \vee A_1)/\equiv$ ) also

$$LA_n = \{F/\equiv \mid F \text{ ist aussagenlogische Formel in } A_0, \dots, A_{n-1}\}$$

Wir setzen

- $0 = \perp/\equiv = (A_0 \wedge \neg A_0)/\equiv$
- $1 = \top/\equiv = (A_0 \vee \neg A_0)/\equiv$
- $(F/\equiv) \sqcup (G/\equiv) = (F \vee G)/\equiv$
- $(F/\equiv) \sqcap (G/\equiv) = (F \wedge G)/\equiv$
- $(F/\equiv)^c = \neg F/\equiv$

Aus den elementaren Äquivalenzen (Abschnitt 1.2) und dem Ersetzungslemma folgt, dass alle Axiome einer boole'schen Algebra gelten.

**Warnung:**  $LA_n$  ist nicht isomorph zu  $\mathcal{P}(\{0, \dots, n-1\})$

## 1.4 Resolutionsmethode

**Bemerkung:** Um  $F$  durch eine Formel in KNF zu ersetzen, braucht man nur 'elementare Äquivalenzen' und das Ersetzungslemma. Die 'elementaren Äquivalenzen' (Satz 1.2) entsprechen den Axiomen der Booleschen Algebra (für die Lindenbaum Algebra).

**Bemerkung:** Um die konjunktive Normalform eindeutig zu machen, vereinbaren wir, dass in

$$\bigwedge_{i < m} \bigvee_{j < n_i} L_{ij}$$

die Ausdrücke  $\bigvee_{j < n_i} L_{ij}$  Atome sind.

Das heißt  $(\neg) A_0 \vee (\neg) A_1 \vee \dots \vee (\neg) A_{n-1}$  falls  $A_0, \dots, A_{n-1}$  alle vorkommenden Variablen sind.

**Beispiel:**  $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$  nicht erfüllbar

**Beispiel:** Falls  $\{A, B\}$  die Variablen sind:

$$A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(Fallunterscheidung nach  $\mathcal{A}(B)$ )

**Beweis:** Diese Zerlegung in Atome macht die konjunktive Normalform eindeutig (bis auf Reihenfolge), aber die neue Formel hat Länge

$$O(2^{\# \text{Variablen}})$$

- Eine solche Formel  $F$  ist allgemeingültig genau dann, wenn sie alle mögliche keine Atome enthält
- Eine solche Formel  $F$  ist nicht erfüllbar genau dann, wenn sie alle mögliche Atome enthält

Wir erhalten einen Algorithmus, der 'Allgemeingültigkeit' entscheidet, aber mit einer Laufzeit von  $O(2^{\# \text{Variablen}})$ .

Äquivalenz zu diesem Verfahren ist die 'Brute Force'-Methode:

Es gibt  $2^{\# \text{Variablen}}$  viele Belegungen. Berechne  $\mathcal{A}(F)$  für jede Belegung  $\mathcal{A}$ , um Allgemeingültigkeit (oder Erfüllbarkeit) zu entscheiden.

**Notation:** Schreibe eine Formel

$$\bigwedge_{i < m} \bigvee_{j < n_i} L_{ij}$$

$$\bigwedge_{i < m} \bigvee_{j < n_i} L_{ij}$$

in KNF als Menge von Klauseln

$$\bigvee_{j < n_i} L_{ij} = \{L_{i,0}, \dots, L_{i,n-1}\}$$

Eine Klausel ist also eine Menge von Literalen (Variablen oder negierte Variablen).

Sei also  $\mathcal{C} = \{C_0, \dots, C_{m-1}\}$  eine Menge von Klauseln und  $\mathcal{A}$  eine Belegung, dann gilt:

$\mathcal{A} \models \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models C_i$  für alle  $i < m$ .

$\mathcal{A} \models C_i = \{L_{i,0}, \dots, L_{i,n-1}\} \Leftrightarrow$  Es gibt ein  $j < n$  mit  $\mathcal{A} \models L_{ij}$

**Definition:** Es seien

$$C_1 = \{A\} \cup P$$

$$C_2 = \{\neg A\} \cup Q$$

wobei die Klauseln  $P, Q$  weder  $A$  noch  $\neg A$  enthalten.

Dann heißt  $C = P \cup Q$  eine Resultante von  $C_1, C_2$ .

Eine Menge  $\mathcal{C}$  von Klauseln heißt unter Resultanten abgeschlossen, wenn sie mit je zwei Klauseln  $C_1, C_2$  auch alle ihre Resultanten enthält.

**Lemma:** Es sei  $\mathcal{A}$  eine Belegung der Variablen von  $C_1, C_2$ .

Dann gilt für die Resultante  $C$ , dass  $\mathcal{A} \models \{C_1, C_2\} \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \{C_1, C_2, C\}$ .

**Beweis:** Fallunterscheidung nach  $\mathcal{A}(A)$

1.  $\mathcal{A}(A) = 0$ : Dann gilt  $\mathcal{A} \models C_1 \Leftrightarrow \mathcal{A} \models P$ , mit  $C_1 = \{A\} \cup P$

Insbesondere folgt  $\mathcal{A} \models P \cup Q = C$

2.  $\mathcal{A}(A) = 1$ : Dann gilt  $\mathcal{A} \models C_2 = \{\neg A\} \cup Q \Leftrightarrow \mathcal{A} \models Q$ , also folgt  $\mathcal{A} \models P \cup Q = C$

Daraus folgt:

$\mathcal{A} \models \{C_1, C_2\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \{C_1, C_2, C\}$

Umgekehrt ist klar:

$\mathcal{A} \models \{C_1, C_2, C\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \{C_1, C_2\}$

### 1.4.1 Satz

Es sei  $\mathcal{C}$  eine Menge von Klauseln die unter Resultanten abgeschlossen ist. Dann ist  $\mathcal{C}$  erfüllbar genau dann, wenn  $\emptyset \notin \mathcal{C}$ .

**Beweis:** Klausel  $\emptyset \notin \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A} \models \mathcal{C}$  für alle  $\mathcal{A}$  dann  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

Für ' $\Leftarrow$ ' sei  $\mathcal{C}$  unter Resultanten abgeschlossen.

Induktion über Anzahl der Variablen:

Es sei  $A = A_{n-1}$  die 'größte' Variable (größter Index), die in  $\mathcal{C}$  vorkommt.

Wäre  $\{A\}, \{\neg A\} \in \mathcal{C}$ , dann wäre  $\emptyset$  als Resultante in  $\mathcal{C}$  enthalten.

Also dürfen wir annehmen, dass  $\{\neg A\} \notin \mathcal{C}$  (ohne Einschränkung).

Wir betrachten jetzt nur noch Belegungen  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A} = 1$ .

Dann bearbeite  $\mathcal{C}$  wie folgt:

- Falls  $C \in \mathcal{C}$  weder  $A$  noch  $\neg A$  enthält, behalte  $C \in \mathcal{C}'$
- Falls  $C \in \mathcal{C}$  die Variable  $A$  enthält, gilt  $\mathcal{A} \models C$ . Dann streiche  $C$  in  $\mathcal{C}$
- Falls  $C \in \mathcal{C}$  die Variable  $\neg A$  enthält, sei  $C \models \{\neg A\} \cup Q$ , dann streiche  $\neg A$ , somit sei  $Q \in \mathcal{C}'$

- (Falls  $C \in \mathcal{C}$  weder  $A$  noch  $\neg A$  enthält, wenn  $c$  bereits allgemeingültig, wir hätten also  $\mathcal{C} \setminus \{C\}$  betrachten können)

So erhalten wir eine neue Klauselmeng  $\mathcal{C}'$ , und es gilt  $\mathcal{A}' \models \mathcal{C}' \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{A \rightarrow 1\} \models \mathcal{C}$   
 Wenn also  $\mathcal{C}'$  erfüllbar ist, ist  $\mathcal{C}$  erst recht erfüllbar

- $\mathcal{C}' \notin \emptyset$  dann nach Annahme  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  und  $\{\neg A\} \notin \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}'$  ist unter Resultanten abgeschlossen.

Dann sei  $B$  eine Variable ( $B \neq A$ ) und  $\mathcal{C}'_1 = \{B\} \cup P' \in \mathcal{C}'$ ,  $\mathcal{C}'_2 = \{\neg B\} \cup Q' \in \mathcal{C}'$

Dann bekommen  $\mathcal{C}'_{\in}$ ,  $\mathcal{C}'_{\in}$  von Klauseln der Form

$$C_1 = \{\neg A, B\} \cup P' \text{ oder } C_1 = C'_1$$

$$C_2 = \{\neg A, \neg B\} \cup Q' \text{ oder } C_2 = C'_2$$

Somit enthielt  $\mathcal{C}$  die Resultante  $\{\neg A\} \cup P' \cup Q'$  oder  $P' \cup Q'$ .

Damit enthält  $\mathcal{C}'$  dann die Resultante  $P' \cup Q'$  von  $\mathcal{C}'_1$  und  $\mathcal{C}'_2$ .

Also ist  $\mathcal{C}'$  unter Resultanten abgeschlossen mit  $\emptyset \notin \mathcal{C}'$  und enthält eine Variable weniger, so dass wir die Induktionsvoraussetzung anwenden dürfen. Wenn wir keine Variablen übrig haben, gibt es nur die leere Klausel  $\emptyset$ , aber  $\emptyset \notin \mathcal{C}$  nach Annahme, also  $\mathcal{C} = \emptyset$ , und  $\mathcal{C}$  steht dann

$$\bigwedge_{i < 0} ? = \top$$

also ist  $\mathcal{C}$  erfüllbar.

**Bemerkung:** Der Beweis liefert auch eine Belegung  $\mathcal{A}$ , die die ursprüngliche Klauselmeng  $\mathcal{C}$  erfüllt.

Aber: Abschließen unter Resultanten kann eine Laufzeit bis zu  $4^{\# \text{Variablen}}$  ( $3^{\# \text{Variablen}}$ , falls  $A_i, \neg A_i$  nicht simultan vorkommen) haben = nicht sehr effizient.

## 1.5 Der Satz von Cook

**Ziel:** SAT = 'Saturierbarkeit', 'Erfüllbarkeit von Formeln' der Aussagenlogik ist ein NP-vollständiges Problem.

**Definition:** Es sei  $\mathbb{A}$  ein Alphabet, also eine endliche Menge von Zeichen.

Dann bezeichnet  $\mathbb{A}^*$  die Menge aller endlichen Wörter mit Symbolen aus  $\mathbb{A}$  und  $W \subset \mathbb{A}^*$  heißt ein Problem.

**Beispiel:** Es sei  $\mathbb{A} = \{\wedge, \vee, \neg, (, ), A_0, \dots, A_{n-1}\}$

$W \subset \mathbb{A}^*$  sei die Menge aller Aussagenlogischen Formeln. Sei  $w \in \mathbb{A}$  ein Wort der Länge  $n$ . Dann können sie in  $O(n)$  Schritten entscheiden, ob  $w \in W$ .

Betrachte dazu ein Unterprogramm 'Formel', das sich anhand des nächsten Zeichens wie folgt verhält:

- $\vee, \wedge, )$  - Fehler
- $\neg$  - lasse das Programm 'Formel' ab dem nächsten Zeichen laufen. Wenn nicht  $\vee$  oder  $\wedge$  kommt - Fehler. Lasse 'Formel' ab dem Zeichen danach weiterlaufen.
- $)$  - Überspringe und ok. Wenn  $)$  kommt, überspringe und ok, ansonsten Fehler
- Sonst - Zeichen ist Variable, überspringe sie und ok.

**Wiederholung:** Erfüllbarkeit

- brute force -  $O(2^k)$
- Resolutionsmethode -  $O(3^k)$

$k$  - Anzahl der Variablen

Auf der anderen Seite - gegeben  $\mathcal{A}$  lässt sich  $A \models F$  in polynomialer Zeit (in  $|F|$ ) prüfen.

**Ziel:** Erfüllbarkeit ist ein NP-vollständiges Problem.

**Bemerkung:**  $F$  ist Tautologie  $\Leftrightarrow \neg F$  nicht erfüllbar.

$F \models G \Leftrightarrow F \rightarrow G$  allgemeingültig.

$\Leftrightarrow F \wedge \neg G$  nicht erfüllbar

**Erinnerung:** Turing Maschinen.

- $\Gamma$  - Alphabet  $\Gamma \supset \mathbb{A} \cup \{ \_ \}$  (Leerzeichen)
- $Q$  - Zustände,  $q \in Q$ ,  $A \subset F \subset Q$
- $F$  - Haltezustände
- $A$  - Akzeptable Zustände,  $\delta \subset ((Q \setminus F) \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\})$
- "Programm"

Dabei muss jedem  $g \in Q \setminus F, a \in \Gamma$  Werte,  $g \in Q, a \in \Gamma, d = +1/-1$  existieren, sodass  $(g, a, q', a', d) \in \delta$ . Eine Turing-Maschine heißt deterministisch, wenn für alle  $g, a$  wie oben die Werte  $(q', a', d)$  eindeutig sind. Wenn wir von nicht-deterministischen Turing-Maschinen sprechen, meinen wir alle.

Eine Eingabe ist ein Wert der Länge  $n$  aus  $\mathbb{A}$ , den wir auf das Band schreiben und mit "auffüllen. Ein "Lauf ist eine Folge von Zuständen des Bandes und der Maschine



und Position des Schreiblesekopfes, sodass wenn auf der Position des Kopfes "a" steht und die Maschine im Zustand " $q_n$ " ist und im nächsten Schritt an der Stelle " $a_{n+1}$ " steht und die Maschine im Zustand " $q_{n+1}$ " ist und der Kopf sich um  $d$  bewegt, das Tupel  $(q_n, a_n, q_{n+1}, a_{n+1}, d) \in \delta$ . Außerdem verändert sich der Zustand nicht, wenn  $q_n \in F$ .

**Definition:** Ein Problem  $w \in \mathbb{A}$  ist von der Klasse  $P$ , wenn es eine deterministische Turing-Maschine gibt, die für jedes Wort  $w \in \mathbb{A}^*$  der Länge  $n$  in  $P(n)$  Schritten entscheidet, ob  $w \in W$  oder nicht. NP, wenn es eine nicht deterministische Turing-Maschine gibt, sodass für alle  $w \in \mathbb{A}^*$ ,  $n = |w|$  einen Lauf gibt, sodass für alle  $w \in \mathbb{A}^*$ ,  $n = |w|$  einen Lauf gibt, der in  $P(n)$  Schritten entscheidet ob  $w \in W$ . NP-vollständig, wenn es in NP liegt und jedes andere NP-Problem  $w' \in \mathbb{A}^*$  sich in polynomialer Zeit in ein äquivalentes Problem aus  $w \in \mathbb{A}^*$  überführen lässt, d.h. zu jedem  $w' \in \mathbb{A}^*$  lässt sich in  $P(|w'|)$  Schritten ein  $w \in \mathbb{A}^* \Leftrightarrow w \in W$  bilden.

**Bemerkung:** Ein Problem ist in NP, wenn man einen Lösungsweg (z.B. eine Belegung  $\mathcal{A}$  im Falle der Erfüllbarkeit) raten kann und dann innerhalb polynomialer Zeit prüfen kann ob es korrekt ist.

**Beispiel:** Primfaktorzerlegung ist in NP. Primzahltest in P.

**Bemerkung:** Vermutung:  $P \neq NP$ .  $P \subset NP$  gilt.  
 Falls  $P \neq NP$ :  $P \subset NP$  und  $NP\text{-vollständig} \subset NP$ .  
 Falls  $P = NP$ :  $NP\text{-vollständig} \subset P = NP$ .

**Satz (Cook):** Erfüllbarkeit ist NP-vollständig.

**Bemerkung:** Erfüllbarkeit ist in NP, denn man kann zu jeder möglichen Belegung in polynomialer Zeit prüfen, ob  $\mathcal{A} \models F$ .

Zu NP-Vollständigkeit sei  $W \subset \mathbb{A}^*$  ein NP-Problem und  $\delta \subset (Q \setminus F \times P) \times (Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\})$  eine Turing-Maschine, die das Problem im Sinne der Definition löst. Dabei sei  $P(n)$  die Laufzeit des gesuchten Laufes, dabei ist  $n$  die Länge des Wortes. Wir brauchen die Variablen:

- $T_{ijk}$  für  $-P(n) \leq i \leq P(n)$ ,  $j \in \Gamma$ ,  $0 \leq k \leq P(n)$ , für Zeit  $k$  steht an der Stelle  $i$  des Bandes der Buchstabe  $j$ . -  $O(P(n)^2)$
- $H_{ik}$  wie oben "der Schreiblesekopf steht zur Zeit  $k$  an der Stelle  $i$ " -  $O(P(n)^2)$
- $Q_{qk}$  wie oben,  $q \in Q$  "Maschine ist zur Zeit  $k$  im Zustand  $q$ " -  $O(P(n))$

Wir geben die Formel als Menge von Klammern an, dabei gibt es verschiedene Typen:

- $T_{ij0}$  für alle  $i$  wie oben, wobei  $j$  jetzt der  $i$ -te Buchstabe des Eingabewortes  $w \in \mathbb{A}^*$  sei.  $O(P(n))$
- $H_{00}$  Startpunkt (Initialisierung)
- $Q_{q0}$  Startzustand (Initialisierung)
- $\neg T_{ijk} \vee \neg T_{ij'k}$  für alle  $i, k$  wie oben und alle  $j \neq j' \in \Gamma$   $O(P(n)^2)$  (Eindeutigkeit der Zustände)
- $\neg Q_{qk} \vee \neg Q_{q'k}$  für alle  $k$  wie oben und alle  $q, q' \in Q$  (Eindeutigkeit der Zustände)
- $\neg H_{ik} \vee \neg H_{i'k}$  für  $k$  wie oben und alle  $i \neq i'$  (Eindeutigkeit der Zustände)
- $\neg T_{ijk} \vee \neg T_{ij',k+1} \vee H_{ik}$  für alle  $j \neq j'$  wie oben "Band ändert sich nur am Schreibsekkopf"
- $\neg H_{ik} \vee Q_{qk} \vee \neg T_{ijk} \vee (H_{i+0,k+1} \wedge Q_{q',k+1} \wedge T_{ij'k})(q, j, q', j', d) \in \delta$  (Lauf)
- "Übergangsfunktion" lässt sich umwandeln in insgesamt  $O(P(n)^2)$  Klauseln (Lauf)
- Analoge Klauseln, die besagen, dass sich der Zustand nicht ändert, wenn  $Q_{qk}$  mit  $q \in F$  gilt.  $O(P(n)^2)$  Stück (Lauf)
- Schluss  $\bigvee_{q \in A} Q_q P(n)$  beschränkte Anzahl

Eine Belegung  $\mathcal{A}$  der obigen Variablen erfüllt diese Aussage genau dann, wenn sie einen Lauf der Turing-Maschine mit Eingabe  $w$  beschreibt, der nach maximal  $P(n)$  Schritten in einem akzeptablen Zustand terminiert. Also ist die Klauselmenge äquivalent. Zu " $w \in W$ " Zeitaufwand zur Erstellung der Klauselmenge ist polynomial in  $|n|$ . Also: Erfüllbarkeit ist NP-vollständig.  $\square$

**Bemerkung:**  $P = NP$  gilt genau dann, wenn es einen polynomialen Algorithmus gibt, das die Erfüllbarkeit testet. Ein Problem  $w \in \mathbb{A}^*$  ist genau dann NP-vollständig wenn sich jede Formel  $F$  in polynomialer Zeit  $P(|F|)$  in ein Wort  $w \in \mathbb{A}^*$  übersetzen lässt, sodass  $F$  erfüllbar  $\Leftrightarrow w \in W$ .

## 1.6 Der Kompaktheitssatz

**Satz:** Eine beliebige Menge  $X$  von Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.

**Bemerkung:** Wenn  $X$  unendlich ist, muss man unendlich lange arbeiten um Erfüllbarkeit von Hand zu beweisen.

**Aber:** Um zu zeigen, dass  $X$  **nicht** erfüllbar ist, muss man nur die richtige endliche Teilmenge raten und dann mit der Resolutionmethode einen Widerspruch herleiten.

Wdh: Turing Maschinen, P, NP, SAT (Erfüllbarkeit in Aussagenlogik) ist NP-Vollständig.

## 1.6 Der Kompaktheitssatz

**Satz:** Eine Menge  $X$  von Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.

**Beweis:** Falls  $X$  nicht abzählbar ist, benötigen wir Zorn's Lemma (äquivalent zum Auswahlaxiom).

Sei  $X$  abzählbar, dann ist auch die Menge  $V$  der Variablen, die in  $X$  vorkommen, abzählbar:

$$V = \{A_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Annahme: Jede endliche Teilmenge von  $X$  ist erfüllbar. Wir suchen induktiv  $w_i \in \{0, 1\}$ , für alle  $i \in \mathbb{N}$ , so dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  folgendes gilt:

Für jede endliche Teilmenge  $Y \subset X$  existiert eine Belegung  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A} \models Y$  und  $\mathcal{A}(A_i) = w_i$  für alle  $i < n$ .

**Induktionsanfang:**  $n=0$  ✓

Seien  $w_0, \dots, w_{n-1}$  wie oben konstruiert.

Annahme: das gesuchte  $w_i$  existiert nicht. Das heißt, für alle  $w_n = 0$  existiert eine endliche Teilmenge  $Y_0$ , so dass  $\mathcal{A} \not\models Y_0$  für alle  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(A_i) = w_i$  für  $i < n$ , und  $\mathcal{A}(A_n) = 0$ .

Analog:  $Y_1 \subset X$  endlich, so dass für alle  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(A_i) = w_i$  für alle  $i < n$  und  $\mathcal{A}(A_n) = 1$  gilt:

$$\mathcal{A} \not\models Y_1$$

Dann ist  $Y_0 \cup Y_1$  endlich, und es existiert keine Belegung  $\mathcal{A}$  mit  $\mathcal{A}(A_i) = w_i$  für  $i < n$  und  $\mathcal{A} \models Y_0 \cup Y_1$ , denn  $A_n$  lässt sich nach Annahme nicht so belegen, dass die Formel aus  $Y_0$  und  $Y_1$  erfüllt werden. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von  $w_0, \dots, w_{n-1}$ . Also

lassen sich die  $w_n$  indukt festlegen, und wir erhalten eine Belegung  $\mathcal{A}$ . Sei jetzt  $F \in X$ , dann sei  $n$  der maximale Index einer Variablen, die in  $F$  vorkommt ( $F$  ist endlich!). Aus der Wahl der  $w_0, \dots, w_{n-1}$  folgt  $\mathcal{A} \models \{F\}$ .  $\square$

**Beispiel:** " $A_{X,r} = 1 \Leftrightarrow \text{Var. } X \text{ hat den Wert } r \in \mathbb{R}$ "

$X$  heißt abzählbar genau dann, wenn es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt so dass:

$$X = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

$\mathbb{Q}$  abzählbar,  $\mathbb{R}$  überabzählbar (=nicht abzählbar)

**Folgerung:** Es sei  $X$  eine Menge von Formeln, und es sei  $G$  eine Formel, so dass  $X \models G$ , dann existiert eine endliche Teilmenge  $X_0 \subset X$  und  $X_0 \models G$ .

**Beweis:** ÜBUNG!!!  $\square$

**Beispiel:** Ein Graph ist eine Menge von Punkten Ecken und eine Menge von Kanten (=Linien zwischen diesen Punkten). Er heißt " $n$ -färbbar", wenn ich jeder Ecke eine "Farbe"  $0, \dots, n-1$  zuordnen kann, so dass eine Kante zwei Ecken gleicher Farbe verbindet (z.B. Eine pro Land auf der Landkarte, eine Kante pro gemeinsamer Grenze). Ein unendlicher Graph ist genau dann  $n$ -färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph  $n$ -färbbar ist. Färbungen: Fehlen im Ziegler-Skript!!

## 2 Prädikatenlogik

"Logik der ersten Stufe"

" $\forall x \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} (|y - x| < \varepsilon \rightarrow |f(y) - f(x)| < \delta)$ " "f ist stetig".

### 2.1 Strukturen und Formeln

**Definition:** Eine Sprache  $L$  besteht aus:

- einer Menge von Konstanten
- einer Menge von Funktionszeichen
- einer Menge von Relationszeichen

Funktionen und Relationen haben eine feste "Stelligkeit" (Zahl der erlaubten Argumente)  $\geq 1$

**Beispiel:** Um Körper zu beschreiben, wählen wir Konstanten  $\{0, 1\}$ , Funktionen  $\{+, \cdot, -\}$  dabei haben  $+$ ,  $\cdot$  Stelligkeit 2 und  $-$  hat Stelligkeit 1. Für angeordnete Körper nehmen wir

die Relation  $\{<\}$  hinzu. Funktionen und Relationen werden in Präfix-Notation benutzt:

$$+ab \text{ statt } a + b$$

**Definition:** Sei  $L$  eine Sprache. Eine L-Struktur  $\mathfrak{A} = \{A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L}\}$  wobei  $A$  eine Menge ist und  $Z^{\mathfrak{A}}$  je nach Typ von  $Z$ :

- $Z^{\mathfrak{A}} \in A$  falls  $Z$  Konstante ist
- $Z^{\mathfrak{A}}: A^n \rightarrow A$  Abbildung, falls  $Z$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol ist
- $Z^{\mathfrak{A}} \subset A^n$  falls ein  $n$ -stelliges Relationssymbol ist

**Beispiel:**  $L$  wie oben, dann sind

$$(\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, -_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}})$$

$$(\mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, -_{\mathbb{Q}}, <_{\mathbb{Q}})$$

Beispiele von L-Strukturen.

**Definition:** Ein Isomorphismus zwischen L-Strukturen  $\mathfrak{A} = (A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L})$  und  $\mathfrak{B} = (B, (Z^{\mathfrak{B}})_{Z \in L})$  ist eine bijektive Abbildung  $F: A \rightarrow B$ , die mit den Interpretationen der Zeichen aus  $L$  verträglich ist:

- $F(Z^{\mathfrak{A}}) = Z^{\mathfrak{B}}$  für Konstanten
- $F \circ Z^{\mathfrak{A}} = Z^{\mathfrak{B}} \circ F^n : A^n \rightarrow B$  für Funktionssymbole
- $F^n(Z^{\mathfrak{A}}) = Z^{\mathfrak{B}}$  für Relationssymbole

Ein L-Automorphismus von  $\mathfrak{A}$  ist ein L-Isomorphismus von  $\mathfrak{A}$  nach  $\mathfrak{A}$ . Die Menge der L-Automorphismen bildet eine Gruppe  $\text{Aut } \mathfrak{A}$ .

Fixiere eine Menge von Variablen  $v_0, v_1, v_2, \dots$

**Definition:** Ein L-Term ist eine Zeichenfolge, die nach folgenden Regeln gebildet ist:

1. Jede Konstante ist ein L-Term
2. Jede Variable ist ein L-Term

3. Sei  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol und seien  $t_1, \dots, t_n$  Terme, dann ist auch  $ft_1, \dots, t_n$  ein Term.

**Beispiel:** " $+ \cdot 2\pi v_0$ " bedeutet  $2 \cdot \pi + v_0$

" $\cdot + v_0 v_1 \pi$ " bedeutet  $(v_0 + v_1) \cdot \pi$

**Lemma:** Für jeden term gilt genau einer der drei folgenden Fälle:

- $t$  ist eine (eindeutige) Konstante
- $t$  ist eine (eindeutige) Variable
- $t$  ist von der Form  $t = f t_1 \dots t_n$ , dabei ist  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol und  $t_1, \dots, t_n$  sind eindeutig bestimmte Terme.

**Beweis:** Analog zu eindeutigen Lebarkeit aussagenlogischer Formeln.  $\square$

**Hilfsatz:** Kein Term ist ein echtes Anfangsstück eines anderen Termes.

**Beweis:** Analog zur Aussagenlogik...  $\square$

Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir manchmal  $f(t_1, \dots, t_n)$  für  $ft_1 \dots t_n$

**Definition** Sei  $L$  eine Sprache. Eine  $L$ -Formel ist

- $t_0 \doteq t_1$ , wobei  $t_0, t_1$  Terme. " $t_0$  ist gleich  $t_1$ "
- $Rt_0 \dots t_{n-1}$ ,  $t_0, \dots, t_{n-1}$  Terme,  $R$   $n$ -stelliges Relationssymbol
- $\neg F_0$ ,  $F_0$  Formel
- $(F_0 \wedge F_1)$ , wobei  $F_0, F_1$  Formeln
- $\exists v F$ , wobei  $v$  Variable,  $F$  Formel

Alle Formeln entstehen auf diese Weise.

**Beispiel:**  $L = (0, f, +, <)$

$\forall v_0 \forall v_1 (< 0 v_1 \rightarrow \exists v_2 (< 0 v_2 \wedge ((< v_0 + v_2 v_3 \wedge < v_3 + v_0 v_2) \rightarrow (< f v_0 + v_1 f v_3 \wedge < f v_3 + f v_0 v_1))))$

" $f$  ist stetig" mit  $v_0 = x, v_1 = \epsilon, v_2 = \delta, v_3 = y$

**Abkürzungen:**

Abkürzung	Bedeutung
$\forall v F$	$\neg \exists v \neg F$
$(F_0 \vee F_1)$	$\neg(\neg F_0 \wedge \neg F_1)$
$(F_0 \rightarrow F_1)$	$(\neg F_0 \vee F_1)$
$(F_0 \leftrightarrow F_1)$	$((F_0 \rightarrow F_1) \wedge (F_1 \rightarrow F_0))$
$(F_0 \wedge \dots \wedge F_{n-1})$	$(F_0 \wedge \dots \wedge (F_{n-2} \wedge F_{n-1}) \dots)$
$(F_0 \vee \dots \vee F_{n-1})$	$(F_0 \vee \dots \vee (F_{n-2} \vee F_{n-1}) \dots)$
$\exists v_0 \dots v_{n-1}$	$\exists v_0 \exists v_1 \dots \exists v_{n-1}$
$\forall v_0 \dots v_{n-1}$	$\forall v_0 \forall v_1 \dots \forall v_{n-1}$

Wenn Klammern weggelassen werden, gelten folgende Präzedenzregeln in absteigender Priorität:

1.  $\exists, \forall, \neg$
2.  $\wedge$
3.  $\vee$
4.  $\rightarrow, \leftrightarrow$

**Lemma:**  $L$ -Formeln sind eindeutig lesbar.

Das heißt: Auf jede Formel trifft genau einer der Fälle aus obiger Definition zu und die dort eventuell vorkommenden Terme und Teilformeln sind ebenfalls eindeutig.

**Hilfssatz:** Keine Formel ist echtes Anfangsstück einer anderen Formel.

**Beweis:** Lemma und Hilfssatz durch Induktion über Länge der Formeln.

Fallunterscheidung nach erstem Symbol der Formel  $F$ :

- Falls erstes Symbol eine Variable, Konstante oder Funktion ist, muss  $F$  vom Typ  $F = t_0 \doteq t_1$  sein. Da Terme eindeutig lesbar sind, ist klar, wie  $t_0$  und  $t_1$  aufgebaut sind und wo  $F$  aufhört.
- Falls erstes Symbol ein Relationssymbol ist, gilt  $F = R t_0 \dots t_{n-1}$ . Dabei legt  $R$  die Stelligkeit  $n$  fest und  $t_0 \dots t_{n-1}$  sind eindeutig.
- Falls erstes Symbol  $\neg$  ist, gilt  $F = \neg F_0$ . Da  $F_0$  kürzer als  $F$  ist, ist  $F_0$  nach IV eindeutig lesbar.
- Falls erstes Symbol  $($  ist, gilt  $F \in \{(F_0 \wedge F_1), (F_0 \vee F_1), \dots\}$
- Falls erstes Symbol ein Quantor ist, gilt  $F = \exists v_1 F_0$  bzw.  $F = \forall v_1 F_0$ . Nach IV ist  $F$  eindeutig lesbar.

□

## 2.2 Semantik

**Definition:** Sei  $\mathfrak{A} = (A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L})$  eine  $L$ -Struktur. Eine Belegung  $\beta$  ist eine Abbildung

$$\beta: (v_0, v_1 \dots) \rightarrow A$$

wobei  $(v_0, v_1 \dots)$  die Menge der Variablen ist.

**Definition:** Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $L$ -Struktur,  $\beta$  eine Belegung.

Dann definiere für  $L$ -Terme  $t$  rekursiv

- $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = \beta(v_i)$  falls  $t = v_i$
- $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = c^{\mathfrak{A}}$  falls  $t = c$  Konstantensymbol
- $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\beta])$

**Beispiel:**  $L = (e, 0, \text{Inv})$  Sprache für Gruppen.

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Dann kann man 2  $L$ -Strukturen betrachten:

$$\mathfrak{A} = (\mathbb{K}, 0, +, -)$$

$$\mathfrak{L} = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1})$$

Sowie jede Menge möglicher anderer Strukturen.

**Definition:** Sei  $\mathfrak{A}$  eine  $L$ -Struktur,  $\beta$  eine Belegung.

Der Wahrheitswert von Formeln wird rekursiv wie folgt definiert:

- $\varphi = F_0 \doteq t_1$ , dann ist  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr, gdw.  $t_0^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_1^{\mathfrak{A}}[\beta] \in A$
- $\varphi = R t_0 \dots t_{n-1}$ , dann ist  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr, gdw.  $(t_0^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\beta]) \in R^{\mathfrak{A}} \subset A^n$
- $\varphi = \neg \varphi_0$ , dann ist  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr, gdw.  $\varphi_0^{\mathfrak{A}}[\beta]$  falsch ist
- $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$  dann ist  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr, gdw. sowohl  $\varphi_0^{\mathfrak{A}}[\beta]$  als auch  $\varphi_1^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr sind
- $\varphi = \exists v_i \varphi_0$ , dann ist  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  wahr, gdw.  $\exists a \in A: \varphi_0^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{v_i}], (\beta \frac{a}{v_i})(v_j) = \begin{cases} a & i = j \\ \beta[v_j] & i \neq j \end{cases}$

Also hat  $\exists$  in  $\exists v_i \varphi_0$  den Gültigkeitsbereich  $\varphi_0$ . Dort wird die "globale" Bedeutung  $\beta(v_i) \in A$  durch eine "lokale" Bedeutung  $a \in A$  ersetzt.

Globale Variablen: frei

Lokale Variablen: gebunden

**Definition:**

Sei  $v_i$  eine Variable,  $\varphi$  eine  $L$ -Formel. Dann kommt  $v_i$  in  $\varphi$  frei vor, wenn

- $\varphi = t_0 \doteq t_1$  und  $v_i$  kommt in  $t_0$  oder  $t_1$  vor.
- $\varphi = R t_0 \dots t_{n-1}$  und  $v_i$  kommt in einem der Terme vor.



- $\varphi = \neg\varphi_0$  und  $v_i$  kommt in  $\varphi_0$  frei vor.
- $\varphi = \varphi_0 \wedge \varphi_1$  und  $v_i$  kommt in  $\varphi_0$  oder  $\varphi_1$  frei vor.
- $\varphi = \exists v_j \varphi_0$  und  $v_i \neq v_j$  und  $v_i$  kommt frei in  $\varphi_0$  vor.

Insbesondere ist  $v_j$  in  $\exists v_j \varphi_0$  nicht frei.

### Lemma

Seien  $\beta, \gamma$  Belegungen in  $L$ -Struktur  $\mathfrak{A}$ .

- Für einen  $L$ -Term  $t$  gilt  
 $t^{\mathfrak{A}}[\beta] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ , wenn  $\beta$  und  $\gamma$  auf allen Variablen, die in  $t$  vorkommen übereinstimmen.
- Für eine Formel  $\varphi$  gilt  
 $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  gdw.  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ , falls  $\beta$  und  $\gamma$  auf allen Variablen, die in  $\varphi$  frei vorkommen übereinstimmen.

### Beweis:

Erste Aussage folgt induktiv über Länge von  $t$ .

Zweite Aussage folgt ebenfalls induktiv:

Klar, falls  $\varphi = t_0 \doteq t_1, \varphi = Rt_0 \dots t_{n-1}, \varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1), \varphi = \neg\varphi_0$ .

Sei  $\varphi = \exists v_i \varphi_0$  und  $a \in A$  so, dass  $\varphi_0^{\mathfrak{A}}[\beta \frac{a}{v_i}]$  wahr ist. Dann stimmt  $\gamma \frac{a}{v_i}$  mit  $\beta \frac{a}{v_i}$  auf allen Variablen überein, die in  $\varphi_0$  frei vorkommen.

Somit gilt auch  $\varphi_0^{\mathfrak{A}}[\gamma \frac{a}{v_i}]$ , somit  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\beta] \Rightarrow \varphi^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ .

Genau so:  $\varphi^{\mathfrak{A}}[\gamma] \Rightarrow \varphi^{\mathfrak{A}}[\beta]$  □

**Definition:** Eine Aussage ist eine  $L$ -Formel ohne freie Variablen.

Eine Aussage  $\varphi$  gilt in  $\mathfrak{A}$  also unabhängig von Belegungen.

Dafür schreibt man  $\mathfrak{A} \models \varphi$ , was man "Aussage ist Modell von  $\varphi$ ", " $\varphi$  gilt in  $\mathfrak{A}$ " oder " $\mathfrak{A}$  erfüllt  $\varphi$ " liest.

Terme:  $v_i, c, ft_0 \dots t_{n-1}$

Formeln:  $t_0 \doteq t_1, Rt_0 \dots t_{n-1}, \neg\varphi, (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$

Abkürzungen (z.B):  $(\varphi - \psi), \varphi \Leftrightarrow \psi$

$\forall v, \psi \Leftrightarrow \neg \exists v_i \neg \psi$

Sei  $\mathfrak{A} = ((A, c^{\mathfrak{A}}))_{c \in L}, f(\mathfrak{A})_{f \in L}, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in L}$  eine  $L$ -Struktur,

$\beta : \{Var\} \rightarrow A$  eine Belegung

Dann erhalten wir  $t^{\mathfrak{A}}[\beta] \in A$

$\phi^{\mathfrak{A}}[\beta] \in \{wahr, falsch\}$   $\mathfrak{A} \models \phi[\beta], \mathfrak{A} \not\models \phi[\beta]$  freie Variable

Aussage = Formel ohne freie Variable

$\phi$  Aussage:  $\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models [\gamma]$  unabhängig von der Belegung bedeutet:

$x_1, \dots, x_n$  sind paarweise verschiedene Variablen (die durchaus gleiche Werte haben können) und in  $t$  kommen diese Variablen vor.

$\phi(x_1, x_n)$  bedeutet  $x_1, \dots, x_n$  wie oben, und in  $\phi$  kommen nur  $x_1, \dots, x_n$  frei vor.

Für  $a_1 \dots a_n \in A$  schreibe  $t^{\mathfrak{A}}[a_1 \dots a_n]$  bzw.  $\phi^{\mathfrak{A}}[a_1 \dots a_n]$  für  $t^{\mathfrak{A}}[\beta]$ ,  $\phi^{\mathfrak{A}}[\beta]$ , wobei  $\beta(x_i) = a_i$  für  $i = 1, \dots, n$

Wiederholung:

$F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  Isomorphismus von L-Strukturen, falls

$F : A \rightarrow B$  bijektiv ist, und  $F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$

$F(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(F(a_0), \dots, F(a_{n-1}))$ ,

$(a_0 \dots a_{n-1}) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (F(a_0), \dots, F(a_{n-1})) \in R^{\mathfrak{B}}$  für alle  $c, f, R \in L$

**Definition:**

Zwei L-Strukturen heißen elementar äquivalent, wenn für alle L-Aussage gilt:

$\mathfrak{A} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi$

**Lemma:**

Isomorphe L-Strukturen sind elementar äquivalent.

**Beweis:**

Durch Rekursion, dazu brauchen wir zwischendurch auch Belegung  $\beta$ .

Sei  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  ein Isomorphismus.

Sei  $\beta : \{Var\} \rightarrow A$  Belegung in  $\mathfrak{A}$ , dann ist  $F \circ \beta : \{Var\} \rightarrow B$  eine Belegung in  $\mathfrak{B}$ .

1. Für Terme  $t$  gilt:

$$F(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = t^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta]$$

$$t = c : F(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$$

$$t : v : F(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = F(\beta(v)) = (F \circ \beta)(v) = t^{\mathfrak{B}}[f \circ \beta]$$

$t : f_{t_0}, \dots, f_{t_n}$  Hier unklar

$$F(t^{\mathfrak{A}}[\beta]) = F(t^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}[\beta], \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\beta]))$$

$$f^{\mathfrak{B}}(F(t_0^{\mathfrak{A}}[\beta]), \dots, F(t_{n-1}^{\mathfrak{A}}[\beta]))$$

$$f^{\mathfrak{B}}(t_0^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta], \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta]) = t^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta]$$

2. Für jede Formel  $\phi$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[F \circ \beta]$$

$$\phi = t_0 \doteq t_1 :$$

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow t_0^{\mathfrak{A}}[\beta] = t_1^{\mathfrak{A}}[\beta]$$

$F$  injektiv:

$$\mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow t_0^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta] = F(t_0^{\mathfrak{A}}[\beta]) = F(t_1^{\mathfrak{A}}[\beta])$$

$$t_1^{\mathfrak{B}}[F \circ \beta] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[F \circ \beta]$$

$$\phi = R_{t_0 \dots t_{n-1}} \text{ analog}$$

$$\phi = \neg\psi : \mathfrak{A} \models \phi[\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi[\beta]$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{B} \not\models \psi[F \circ \beta] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \phi[F \circ \beta]$$

$$\phi = (\phi_0 \wedge \phi_1) \text{ analog}$$

$$\phi = \exists v \phi :$$

$$">\Rightarrow": \mathfrak{A} \models \phi[\beta]$$

$$\Rightarrow \exists a \in A \text{ mit } \mathfrak{A} \models \phi[\beta \frac{a}{v}]$$

Es gilt:

$$F \circ (\beta \frac{a}{v}) = (F \circ \beta) \frac{F(a)}{v} \text{ also folgt}$$

$$\mathfrak{A} \models \psi \left[ (F \circ \beta) \frac{F(a)}{v} \right] \text{ also}$$

$$\mathfrak{A} \models \phi[F \circ \beta]$$

" $\Leftarrow$ ":

$$\mathfrak{A} \models \psi[F \circ \beta] \frac{b}{v}$$

$$F \text{ surjektiv} \leftarrow \exists a \in A \text{ mit } F(a) = b$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi \beta \left[ \beta \frac{a}{v} \right] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi[\beta]$$

Bemerkung: Zwei endliche L-Strukturen  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sind genau dann äquivalent, wenn sie äquivalent sind.

Es sei also  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  endlich.

Es reicht eube Aussage  $\phi$  auszugeben mit  $\mathfrak{B} \models \phi \Leftrightarrow \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  sind isomorph.

Dazu sei

**WIEDERLICHEFORMEL!**

[Diese Formel hat die Länge  $O(N^{Max(k,L)})$  wobei k die maximale Stellenanzahl einen L-Symbols sei.]

Gegeben  $\mathfrak{A}$  und  $L$ , braucht man  $O(M^{c(N,L)})$  Schritte, um festzustellen, ob  $\mathfrak{B}$  zu  $\mathfrak{A}$  isomorph ist. D.h.:  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  bei festen  $\mathfrak{A}$  ist ein P-Problem, bei  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  beliebig ein NP-Problem.

### Substitution

Ersetze eine Variable x durch einen Term s

Für Terme:

$$t = c : t \frac{s}{x} = c$$

$$t = v : t \frac{s}{x} \begin{cases} s, & v = x \\ v, & v \neq x \end{cases}$$

$$t = f_{t_0} \dots f_{t_{N-1}} : t \frac{s}{x} = f_{t_0} \frac{s}{x} \dots f_{t_{N-1}} \frac{s}{x}$$

**Lemma:**

Es sei  $t$  ein L-Term und  $\mathfrak{A}$  eine L-Struktur,  $x$  eine Variable,  $\beta$  eine Belegung, dann gilt:

$$(t \frac{s}{x}) [\beta] = t^{\mathfrak{A}} \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right]$$

**Beweis:**

Beweis durch Rekursion

Entscheidender Schritt:

$$t = x : t \frac{s}{x} = s, \text{ also } (t \frac{s}{x})^{\mathfrak{A}} [\beta] = s^{\mathfrak{A}} [\beta]$$

$$= t^{\mathfrak{A}} \left[ \beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x} \right]$$

*Substitution für Formeln:*

$$\phi = t_0 \doteq t_1 : \phi \frac{s}{x} = t_0 \frac{s}{x} = t_1 \frac{s}{x}$$

$$\phi = R_{t_0 \dots t_{N-1}} \text{ analog}$$

$$\phi = \neg \psi : \phi \frac{s}{x} = \neg \psi \frac{s}{x}$$

$$\phi = (\phi_0 \wedge \phi_1) \text{ analog}$$

$$\phi \frac{s}{x} \begin{cases} \phi & v = x \\ \exists v \psi \frac{s}{x} & v \neq x \end{cases}$$

Das heißt, nur freie Variablen werden ersetzt.

Problem: Was ist mit Formeln wie:

$$\exists v_0 R v_0 v_1 \text{ und } s = f v_0?$$

$$\text{Dann ist } \phi \frac{s}{v_1} = \exists v_0 R v_0 f v_0 \quad (v \neq x)$$

Wenn  $\beta_0 = a$ , aber  $\phi$  richtig ist für  $v_0 = b_1, v_1 = c$  also  $\phi[v_0 \rightarrow a, v_1 \rightarrow c] = \exists v_0 R v_0 c$ ,  
sei  $f(a) = c$ .

$$\phi = \phi(v_0, v_1) = \exists v_0 \psi$$

$$\psi = \psi(v_0, v_1) = R v_0 v_1$$

Seien  $a, b, c$  paarweise verschieden

$$f(a) = c$$

$$f(b) = d$$

und  $R(b, c)$  sei wahr, alle anderen  $R(\dots)$  falsch

$\Rightarrow \phi[a, c] = \exists v_0 Rv_0 f v_0$  und  $\phi[a, c] = \exists v_0 Rv_0 f v_0$  ist falsch, da man nicht  $v_0 = b, Rv_0 = c$  erreichen kann.

**Definition:**

Eine Variable  $x$  ist frei für  $s$  in  $\phi$ , wenn an den Stellen in  $\phi$ , an denen  $x$  frei vorkommt keine Variable von  $s$  im Gültigkeitsbereich eines Quantors liegt.

Rekursiv:

$\phi = t_0 \doteq t_1, \phi R t_0 \dots t_n - 1 - x$  frei für  $s$

$\phi = \neg \phi, \phi(\phi_0 \wedge \phi_1) - x$  frei für  $s$  in  $\phi \Leftrightarrow x$  frei für  $s$  in  $\phi$  bzw. in  $\phi_0$  und  $\phi_1$

$\phi = \exists v \psi - x$  frei für  $s$  in  $\phi \Leftrightarrow$

$v = x$  oder  $(v = x \text{ und } v \text{ kommt nicht in } \psi \text{ vor})$

**Lemma:**

Wenn  $x$  frei für  $s$  in  $\phi$  ist und  $\mathfrak{A}$  eine L-Struktur,  $\beta$  eine Belegung, dann gilt:

$$\mathfrak{A} \models \phi \frac{s}{x} [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \phi \left[ \beta \frac{s \mathfrak{A} \beta}{x} \right]$$

**Beweis:**

Analog zum obigen. Entscheidend ist der Schritt für  $\phi = \exists v \phi$

**Wdh:**  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  elementar äquivalent  $\Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$  für alle L-Aussagen  $\varphi$ )

Substitution: Es sei  $x$  eine Variable und  $s$  ein Term

- Term  $t \rightarrow t \frac{s}{x}$  (nicht rekursives Ersetzen)
- Formel  $\varphi \rightarrow \varphi \frac{s}{x}$   
Wichtig: nur frei vorkommende  $x$  werden durch  $s$  ersetzt.
- $x$  ist frei für  $s$  in  $\varphi \Leftrightarrow$  überall dort, wo  $x$  frei vorkommt, ist keine Variable von  $s$  in  $\varphi$  gebunden.

**Lemma**  $(t \frac{s}{x}) \mathfrak{A} [\beta] = t \mathfrak{A} [\beta \frac{s \mathfrak{A} \beta}{x}]$

Wenn  $x$  für  $s$  in  $\varphi$  frei ist, gilt

$$\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x}) [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta \frac{s \mathfrak{A} \beta}{x}]$$

**Beweis (für Formeln):** Durch Induktion über die Länge von  $\varphi$ .

- $\varphi = t_0 \doteq t_1$  Dann gilt:  
 $\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x}) [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (t_0 \frac{s}{x} \doteq t_1 \frac{s}{x}) [\beta]$

- $$\Leftrightarrow (t_0 \frac{s}{x} [\beta] = (t_1 \frac{s}{x})^{\mathfrak{A}} [\beta] \in A$$
- $$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (t_0 \doteq t_1) [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}] \in A$$
- $$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (t_0 \doteq t_1) [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}]$$
- $\varphi = R t_0 \dots t_{n-1}$ : Analog.
  - $\varphi = \neg \psi$ :  $\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x}) [\beta]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models (\psi \frac{s}{x}) [\beta]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \psi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}]$
  - $\varphi = (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$ : Analog
  - Existenz quantifizierte Formeln:
    1. Fall  $\varphi = \exists x \phi$ .  $x$  ist nicht mehr frei in  $\psi$ , also  $\varphi \frac{s}{x} = \varphi$ . Außerdem spielt der Wert von  $x$  in  $\beta$  bzw.  $\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}$  keine Rolle.  
 $\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x}) [\beta] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}]$ .
    2. Fall:  $\varphi = \exists y \phi$ ,  $x, y$  verschiedene Variable und  $x$  sei frei in  $\psi$ .  $\Rightarrow \varphi \frac{s}{x} = \exists y \psi \frac{s}{x}$   
 $\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x}) [\beta] \Leftrightarrow$  Es gibt  $b \in A$ , so dass:  $\mathfrak{A} \models (\psi \frac{s}{x}) [\beta \frac{b}{y}]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi [\beta \frac{b}{y} \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta \frac{b}{y}]}{x}]$  nach Induktion, mit der neuen Belegung  $\beta \frac{b}{y}$ . Nach Voraussetzung ( $x$  frei für  $s$  in  $\varphi$ ) kommt  $y$  nicht in  $s$  vor, also gilt  $s^{\mathfrak{A}} [\beta \frac{b}{y}] = s^{\mathfrak{A}} [\beta] \in A$ . Somit:  
 $\dots \Leftrightarrow$  Es gibt  $b$ , so dass  $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x} \frac{b}{y}]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\exists y \psi) [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi [\beta \frac{s^{\mathfrak{A}} [\beta]}{x}] \quad \square$

### 2.3 Allgemeingültige Formeln

Ziel: Begriff der Beweisbarkeit, zunächst: Beweis. Bausteine dafür?

**Def.:** Eine Formel  $\varphi$  heißt allgemeingültig, kurz  $\models \varphi$ , wenn für alle L-Strukturen  $\mathfrak{A}$  und alle Belegungen  $\beta$  gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi [\beta]$$

Äquivalent dazu gilt:

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

(Also sind  $x_1, \dots, x_n$  mind. die freien Variablen von  $\varphi$ ) für alle L-Strukturen  $\mathfrak{A}$

**Def.:** Eine Tautologie entsteht, indem man eine aussagenlogische Tautologie  $F = F(A_0, \dots, A_{n-1})$  in den aussagenlogischen Variablen  $A_0, \dots, A_{n-1}$  die Variablen  $A_0, \dots, A_{n-1}$  durch L-Formeln  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$  ersetzt.

**Beispiel:**  $(A_0 \vee \neg A_0)$  ist eine aussagenlogische Tautologie,  $\varphi = Rv_0 v_1$  ist eine L-Formel

(R zweistellige Relation)

$\Rightarrow (R_v 0 v_1 \vee \neg R v_0 v_1)$  ist eine Tautologie. Oder  $\varphi_0 = (\exists v_0 R v_0 v_1 \wedge \neg v_1 \doteq c)$

$\Rightarrow ((\exists v_0 R v_0 v_1 \wedge \neg v_1 \doteq c) v \neg \exists v_0 R v_0 v_1 \wedge v_1 \doteq c)$  ist eine Tautologie

**Lemma** Tautologien sind allgemeingültig.

**Beweis:** klar. (Anmerkung des Authors: Natürlich darf er einfach trivial sagen ...)

**Lemma (Gleichheitsaxiome):** Die folgenden Formeln sind allgemeingültig, dabei stehen  $x_0, x_1, \dots$  für beliebige Variablen.

Reflexivität:  $x_0 \doteq x_0$

Symmetrie:  $x_0 \doteq x_1 \leftrightarrow x_1 \doteq x_0$

Transitivität:  $((x_0 \doteq x_1 \wedge x_1 \doteq x_2) \rightarrow x_0 \doteq x_2)$

- Für jede k-stellige Relation R  
 $((x_0 \doteq x_k \wedge \dots \wedge x_{k-1} \doteq x_{2k-1})$   
 $\rightarrow (R x_0 \dots x_{k-1} \leftrightarrow R x_k \dots x_{2k-1}))$
- Für jede k-stellige Funktion f in L  
 $((x_0 \doteq x_k \wedge \dots \wedge x_{k-1} \doteq x_{2k-1})$   
 $\rightarrow f x_0 \dots x_{k-1} \doteq f x_k \dots x_{2k-1})$

**Beweis:** Die ersten drei Axiome gelten in allen Strukturen  $\mathfrak{A}$ , da  $\doteq$  eine Äquivalenzrelation ist: z.B. seien  $a, b \in A$ , dann gilt  $a \doteq b \Leftrightarrow b \doteq a$ .

Sei jetzt R eine K-stellige Relation.

$a_0 = a_l, \dots, a_{k-1} = a_{2k-1} \Rightarrow (a_0, \dots, a_{k-1}) = (a_k, \dots, a_{2k-1}) \in A^k$ , somit  $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in R^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (a_k, \dots, a_{2k-1}) \in R^{\mathfrak{A}}$

Analog für Funktionen.  $\square$

**Lemma (Existenzquantoraxiome):** Für alle Formeln  $\varphi$ , alle Variablen  $x$  und alle Terme  $s$ , so dass  $x$  für  $s$  in  $\varphi$  frei ist, ist allgemeingültig:

$(\varphi \frac{s}{x} \rightarrow \exists x \varphi)$

**Beweis:** Interessant sind nun  $\mathfrak{A}, \beta$ , so dass  $\mathfrak{A} \models (\varphi \frac{s}{x})[\beta]$ . Nach dem Substitutionslemma gilt  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta \frac{s^{\mathfrak{A}}[\beta]}{x}]$ . Also gilt es  $a = s^{\mathfrak{A}}[\beta] \in A$ , so dass  $\varphi[\beta \frac{a}{x}]$ . Also gilt  $\mathfrak{A} \models (\exists x \varphi)[\beta]$ .  $\square$

**Lemma (Modus Ponens):** Seien  $\varphi$  und  $\psi$  Formeln. Aus  $\mathfrak{A} \models \varphi$  und  $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)$  folgt dann auch  $\mathfrak{A} \models \psi$

**Beweis:** Klar  $\square$

Insbesondere: Seien  $\varphi$  und  $(\varphi \rightarrow \psi)$  allgemeingültig, dann ist auch  $\psi$  allgemeingültig.

**Lemma**(Existenzeinführung): Seien  $\varphi, \psi$  Formeln und  $x$  eine Variable, die in  $\psi$  nicht frei vorkommt. Wenn  $\varphi \rightarrow \psi$  allgemeingültig ist, dann ist auch  $(\exists x\varphi) \rightarrow \psi$  allgemeingültig. Zur Erinnerung:  $A \neq \emptyset$  in jeder Struktur.

**Beweis:** Interessant sind nur  $\mathfrak{A}, \beta$  mit  $\mathfrak{A} \models (\exists x\varphi)[\beta]$ . Also existiert  $a \in A$  mit  $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta \frac{a}{x}]$ . Nach dem Modus Ponem gilt  $\mathfrak{A} \models \psi[\beta \frac{a}{x}]$ . Da  $x$  in  $\psi$  nicht vorkommt, gilt  $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$ . Also auch  $\mathfrak{A} \models (\exists x\varphi \rightarrow \psi)[\beta]$ .  $\square$

**Verschärfung des Lemmas:** Seien  $\varphi, \psi$  Formeln,  $x$  nicht frei in  $\psi$ . Aus  $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[\beta]$  folgt dann auch  $\mathfrak{A} \models (\exists x\varphi \rightarrow \psi)[\beta]$ .

## 2.4 Der Gödelsche Vollständigkeitssatz

**Definition**(Hilbertkalkül): Eine Formel  $\phi$  in einer Sprache  $L$  heißt beweisbar, wenn sie entweder ein Axiom der folgenden Typen (B1 - B3) ist, oder aus beweisbaren Formeln durch eine der folgenden Schlussregeln (B4, B5) ergibt.

- **B1 (Tautologie)** Es sei  $f(a_0, \dots, a_{n-1})$  eine allgemeingültige Formel der Aussagenlogik und  $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$  Formeln, dann ist  $f(\phi_0, \dots, \phi_{n-1})$  eine Tautologie.
- **B2 (Gleichheitsaxiome)**
  - Äquivalenzaxiome, z.B.  $(x = y \wedge y = z) \rightarrow y = z$
  - Kongruenzaxiome, z.B.  $x = y \rightarrow f(x) \doteq f(y)$
- **B3 (Existenzaxiome)** Es sei  $x$  frei für  $t$  in  $\phi$ , dann ist  $\phi \frac{t}{x} \rightarrow \exists x\phi$  ein Existenzaxiom.
- **B4 (Modus ponens)** Wenn  $\phi \rightarrow \psi$  und  $\phi$  beweisbar ist, ist  $\psi$  beweisbar.
- **B5 (Existenzführung)** Es seien  $\phi, \psi$  Formeln und  $x$  sei nicht frei in  $\psi$ . Wenn  $\phi \rightarrow \psi$  beweisbar ist, dann ist auch  $\exists x\phi \rightarrow \psi$  beweisbar.

Ein Beweis von  $\phi$  ist also ein Tupel von Formeln  $\phi_0, \dots, \phi_n$  mit  $\phi_n = \phi$ , so dass für alle  $i$  die Formel  $\phi_i$  ein Axiom vom Typ B1 - B3 ist, oder aus den Formeln  $\phi_1$  bzw.  $\phi_j$  und  $\phi_k$  und  $j, k < i$  durch einen Schluss vom Typ B4 oder B5 hervorgeht.

**Satz (Gödelscher Vollständigkeitssatz 1):** Eine Formel  $\phi$  in einer Sprache  $L$  ist genau dann beweisbar, wenn sie allgemeingültig ist:

$$\vdash \phi \Leftrightarrow \models \phi$$



**Notation:** " $t \subset \phi$ " bedeutet: " $\phi$  ist in der Sprache L beweisbar."

Die Richtung " $\Leftarrow$ " folgt aus Abschnitt 2.3.

**Lemma:** (abgeleitete Axiome und Schlussregeln).

- **1. Aussagenlogik:** Seien  $\phi_1, \dots, \phi_n$  beweisbar und  $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$  eine Tautologie, dann ist  $\psi$  beweisbar.
- **2. All-Axiom:** Sei  $x$  frei für  $t$  in  $\phi$ , dann ist  $\forall x\phi \rightarrow \phi_x^t$  beweisbar.
- **3. All-Einführung:** Es sei  $x$  frei in  $\phi$ . Wenn  $\phi \rightarrow \psi$  beweisbar ist, dann auch  $\phi \rightarrow \forall x\psi$ .

**Beweis:** Zu 1.)  $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$  ist eine andere Schreibweise für  $\neg\phi_1 \vee \dots \vee \neg\phi_n \vee \psi$ , bzw. für  $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\phi_3 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow \psi) \dots))$ . Insbesondere ist  $(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow \psi) \dots))$  eine Tautologie, somit auch  $\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \phi_n \rightarrow \psi) \dots$

Mit Modus ponens sind dann auch  $\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow \psi)$  und  $\phi_n \rightarrow \psi$  beweisbar.

Zu 2.  $\forall x\phi \rightarrow \phi_x^t$  ist "Makro" für  $\neg(\neg\exists x\neg\phi) \vee \phi_x^t$  und das ist äquivalent zu  $\neg\phi_x^t \rightarrow \exists x\neg\phi$ .

Da  $x$  für  $t$  frei in  $\phi$  ist, ist  $x$  für  $t$  frei in  $\exists x\neg\phi$ , und  $\neg\phi_x^t \rightarrow \exists x\neg\phi$  ist ein Existenzaxiom.

Daraus folgt  $\forall x\phi \rightarrow \phi_x^t$  mit Aussagenlogik.

Zu 3. Es ist  $\phi \rightarrow \forall x\psi$  äquivalent zu  $\neg\phi \vee \neg\exists x\neg\psi$  und  $x$  ist nicht frei in  $\neg\phi$ . Aus  $\phi \rightarrow \psi$  folgt  $\neg\psi \rightarrow \neg\phi$  mit Aussagenlogik und daraus  $\exists x\neg\psi \rightarrow \neg\phi$  mit Existenzeinführung. Mit Aussagenlogik folgt  $\phi \rightarrow \neg\exists x\neg\psi$ , also  $\phi \rightarrow \forall x\psi$ .  $\square$

**Beispiel:** Beweise  $\exists x\forall yRxy \rightarrow \forall y\exists xRxy$ .

- 1)  $\forall yRxy \rightarrow Rxy$  (All-Axiom)
- 2)  $Rxy \rightarrow \exists xRxy$  (Existenz-Axiom)
- 3)  $\forall yRxy \rightarrow \exists xRxy$  (Aussagenlogik aus 1, 2)
- 4)  $\exists x\forall yRxy \rightarrow \exists xRxy$  (Existenz-Einführung)
- 5)  $\exists x\forall yRxy \rightarrow \forall y\exists xRxy$  (All-Einführung)

All-Einführung: Sei  $\phi = T$  (z.B.  $\phi = (x = y)$ ). Dann ist  $\phi \rightarrow \psi$  äquivalent zu  $\psi$ . Also ist mit  $\psi$  auch  $\forall x\psi$  beweisbar. Um den Gödelschen Vollständigkeitssatz zu beweisen, reicht es, Aussagen zu betrachten.

**Lemma:** Es sei  $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n)$  eine L-Formel. Es sei  $L = \{c_1, \dots, c_n\}$  distinkt zu L: Dann gilt  $\forall_L \phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \vdash_L \forall c\phi(c_1, \dots, c_n)$ . **Beweis:** " $\Rightarrow$ " Mit der All-Einführung folgt: Wenn  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  beweisbar ist, dann ist  $\forall x \dots \forall y_n \phi(x_1, \dots, x_n)$  beweisbar in L. Dann ist der zugehörige L-Beweis auch ein  $(L \cup C)$ -Beweis, in dem aber  $c_1, \dots, c_n$  (noch) nicht vorkommen. Folgt  $\forall x_1 \dots \forall y_n \phi(x_1, \dots, y_n) \rightarrow \phi(c_1, \dots, c_n)$  wird Modus ponens gewählt " $t_{L \cup C} \phi(c_1, \dots, c_n)$ ".

" $\Leftarrow$ " Es sei  $B = (\phi_1, \dots, \phi_n = \phi(c_1, \dots, c_n))$  ein  $L \cup C$ -Beweis von  $\phi(c_1, \dots, c_n)$ . Es seien  $y_1, \dots, y_n$  Variablen, die noch nicht vorkommen. Ersetzen von  $c_1, \dots, c_n$  durch  $y_1, \dots, y_n$  liefert einen L-Beweis von  $\phi(y_1, \dots, y_n)$ . All-Einführung liefert einen L-Beweis  $\forall y_1 \dots \forall y_n \phi(y_1, \dots, y_n)$ . Mit All-Axiomen und Modus ponens folgt  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ .  $\square$

Weitere Schritte im Beweis des Vollständigkeitssatzes.

- 1) Erweitere  $\{\neg\phi\}$
- 2) Vervollständige Theorie
- 3) Versuche ein Modell für die Theorie zu finden

**Definition:** Eine L-Theorie ist eine Menge von L-Aussagen. Eine L-Struktur  $a$  ist ein Modell von  $T$ ,  $a \models T$ , wenn alle Aussagen aus  $T$  im Modell  $a$  gelten. Eine Aussage  $\psi$  folgt logisch aus  $T$ ,  $T \models \psi$ , wenn  $\psi$  in allen Modellen von  $T$  gilt.

**Definition:** Eine Formel  $\phi$  ist in  $T$  beweisbar in der Sprache L, kurz  $T \vdash_L \phi$ , wenn es Aussagen  $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$  gibt, sodass  $\vdash_L ((\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n) \rightarrow \phi)$

Eine Theorie  $T$  ist widersprüchlich, wenn  $T \vdash_L \perp$ , das heißt, wenn  $\phi_1, \dots, \phi_n \in T$  existieren mit  $\vdash_L \neg(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n)$ .  $T$  widerspruchsfrei  $\Leftrightarrow T$  ist nicht mehr widersprüchlich. Wir kennen  $T$  vollständig, wenn für jede L-Aussage  $\psi$  gilt:  $\psi \in T$  oder  $\neg\psi \in T$ . Eine Formel  $\psi$  heißt in  $T$  konsistent, wenn  $\models \cup\{\psi\}$  widerspruchsfrei ist.

**Satz (Gödelscher Vollständigkeitssatz 2):** Eine Theorie ist genau dann widerspruchsfrei, wenn sie ein Modell besitzt.

**Behauptung):** "Gödel 2 impliziert "Gödel 1". Zu Gödel 1 sei  $\phi$  eine L-Aussage. Klar:  $\vdash_L \phi \Rightarrow \models \phi$  (Abs. 2.3). Wir nehmen an, dass  $\models \phi$ . Also existiert kein Modell für  $\neg\phi$ . Nach Gödel 2 ist  $\{\neg\phi\}$  widersprüchlich  $\vdash_L \neg\neg\phi$ . Mit Aussagenlogik folgt  $\vdash_L \phi$ .  $\square$  **Beweis:** Es sei  $a$  eine L-Struktur. Das vollständige Diagramm von  $a$  ist die Theorie  $\vdash_a = \{\phi \mid \phi \text{ ist L-Aussage und } a \models \phi\}$ . Dann ist  $\vdash_a$  vollständig, denn in  $a$  gilt entweder  $\phi$  oder  $\neg\phi$ .

**Definition:** Es sei  $L$  eine Sprache  $C$  eine Menge von Konstanten. Dann heißt  $T$  eine Henkin-Theorie zu  $L \cup C$ , wenn für alle  $L \cup C$ -Formeln  $\phi(x)$  eine Konstante  $c \in C$  entsteht, sodass  $\exists x \phi(x) \rightarrow \phi_c$