

# Vypracované otázky k MSZ pro rok 2022

Specializace NNET

23. dubna 2022

Vladimír Dušek, xdusek27

## **Specializace Počítačové sítě – NNET**

1. Architektura superskalárních procesorů a algoritmy zpracování instrukcí mimo pořadí, predikce skoků.
2. Paměťová konzistence a předbíhání operací čtení a zápisu, podpora virtuálního adresového prostoru.
3. Datový paralelismus SIMD, HW implementace a SW podpora.
4. Architektury se sdílenou pamětí UMA a NUMA, zajištění lokality dat.
5. Problém koherence pamětí cache na systémech se sdílenou pamětí, protokol MSI.
6. Paralelní zpracování v OpenMP: Smyčky, sekce a tasky a synchronizační prostředky.
7. Pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost.
8. Náhodná proměnná, typy náhodné proměnná, funkční a číselné charakteristiky, významná rozdělení pravděpodobnosti.
9. Bodové a intervalové odhady parametrů, testování hypotéz o parametrech.
10. Vícevýběrové testy, testy o rozdělení, testy dobré shody.
11. Regresní analýza.
12. Markovské řetězce a základní techniky pro jejich analýzu.
13. Randomizované algoritmy (Monte Carlo a Las Vegas algoritmy).
14. Problém generalizace strojového učení a přístup k jeho řešení (trénovací, validační a testovací sada, regularizace, předtrénování, multi-task learning, augmentace dat, dropout, ...)
15. Generativní modely a diskriminativní přístup ke klasifikaci (gaussovský klasifikátor, logistická regrese, ...)
16. Neuronové sítě a jejich trénování (metoda gradientního sestupu, účelová (loss) funkce, výpočetní graf, aktivační funkce, zápis pomocí maticového násobení, ...)
17. Neuronové sítě pro strukturovaná data (konvoluční a rekurentní sítě, motivace, základní vlastnosti, použití)
18. Prohledávání stavového prostoru (informované a neinformované metody, lokální prohledávání, prohledávání v nejistém prostředí, hraní her, CSP úlohy)
19. Klasifikace formálních jazyků (Chomského hierarchie), vlastnosti formálních jazyků a jejich rozhodnutelnost.
20. Konečné automaty (jazyky přijímané KA, varianty KA, minimalizace KA, Mihill-Nerodova věta).
21. Regulární množiny, regulární výrazy a rovnice nad regulárními výrazy.
22. Zásobníkové automaty (jazyky přijímané ZA, varianty ZA).
23. Turingovy stroje (jazyky přijímané TS, varianty TS, lineárně omezené automaty, vyčíslitelné funkce).
24. Nerozhodnutelnost (problém zastavení TS, princip diagonalizace a redukce, Postův korespondenční problém).
25. Časová a paměťová složitost (třídy složitosti, úplnost, SAT problém).
26. Postrelační a rozšířené relační databáze (objektový a objektově relační databázový model – struktura a operace; podpora práce s XML a JSON dokumenty v databázích).
27. NoSQL databáze (porovnání relačních a NoSQL; CAP věta a ACID/BASE principy; typy NoSQL databází; dotazování v NoSQL databázích; agregace dat pomocí Map-Reduce a agregační pipeline).
28. Získávání znalostí z dat (pojem znalost; typické zdroje dat; základní úlohy získávání znalostí; analytické projekty a proces získávání znalostí z dat).

29. Porozumění datům (důvod a cíl; popisné charakteristiky dat a vizualizační techniky; korelační analýza).
30. Prostorové DB (problematika mapování prostoru, ukládání, indexace; využití).
31. Indexace (nejen) v prostorových DB (kD-Tree a Grid File (a jejich varianty), R-Tree).
32. Lambda kalkul (definice všech pojmu, operací...).
33. Práce v lambda kalkulu (demonstrace reprezentace čísel a pravdivostních hodnot a operací nad nimi).
34. Haskell – lazy evaluation (typy v jazyce včetně akcí, uživatelské typy, význam typových tříd, demonstrace lazy evaluation).
35. Prolog – způsob vyhodnocení (základní princip, unifikace, chování vestavěných predikátů, operátor řezu – vhodné a nevhodné užití).
36. Prolog – změna DB/programu za běhu (demonstrace na prohledávání stavového prostoru, práce se seznamy).
37. Model PRAM, suma prefixů a její aplikace.
38. Distribuované a paralelní algoritmy – algoritmy nad seznamy, stromy a grafy.
39. Interakce mezi procesy a typické problémy paralelismu (synchronizační a komunikační mechanismy).
40. Distribuované a paralelní algoritmy – předávání zpráv a knihovny pro paralelní zpracování (MPI).
41. Distribuovaný broadcast, synchronizace v distribuovaných systémech.
42. Klasifikace a vlastnosti paralelních a distribuovaných architektur, základní typy jejich topologií.
43. Distribuované a paralelní algoritmy – algoritmy řazení, select, algoritmy vyhledávání.
44. Bezdrátové lokální sítě (Wifi, Bluetooth).
45. Hledání minimální kostry obyčejného grafu (pojmy, stromy a kostry, Kruskalův algoritmus, Primův algoritmus).
46. Hledání nejkratších cest ze zdrojového uzlu do všech ostatních uzel grafu (Bellman-Fordův algoritmus, Dijkstrův algoritmus).
47. Klasifikace algoritmů volby koordinátora, algoritmus Bully a jeho složitost.
48. Podmínky konsistentního globálního stavu distribuovaného systému.
49. Principy distribuovaného zpracování MapReduce, průběh a jednotlivé operace distribuovaného výpočtu pomocí MapReduce, jeho implementace v Apache Hadoop a Apache Spark.
50. Symetrická kryptografie. Vlastnosti, vlastnosti bezpečného algoritmu, délka klíče, útok silou, příklady symetrických algoritmů, Feistelovy šifry, DES, režimy činnosti, proudové šifry.
51. Asymetrická kryptografie, vlastnosti, způsoby použití, poskytované bezpečnostní funkce, elektronický podpis a jeho vlastnosti, hybridní kryptografie, algoritmus RSA, generování klíčů, šifrování, dešifrování.
52. Hašovací funkce, klíčovaný haš a MAC a jejich použití a vlastnosti.
53. Správa klíčů v asymetrické kryptografii (certifikáty X.509).
54. Základní architektury přepínačů, algoritmy pro plánování, řešení blokování, vícestupňové přepínací sítě.
55. Základní funkce směrovače, zpracování paketů ve směrovači, typy přepínání a architektur.
56. Metody pro výpočet směrování v sítích (Bellman-Ford, Dijkstra, Path vector, DUAL).
57. Řízení toku dat (flow-control) a prevence zahlcení (congestion-control) na transportní vrstvě (MP-TCP, QUIC, SCTP, DCCP).
58. Metody detekce síťových incidentů (signatury, statistické metody) a nástroje (IDS/IPS).
59. Sítě Peer-to-Peer: vlastnosti, chování, způsoby směrování. Strukturované a nestrukturované sítě.

60. Události v JavaScriptu (smyčka událostí, asynchronní programování, klientské události, obsluha událostí)

61. Přenos a distribuce webových dat (URI, protokol HTTP, proxy HTTP, CDN, XHR)

62. Bezpečnost webových aplikací (SOP, XSS, CSRF, bezpečnostní hlavičky HTTP)

# Obsah

<b>1</b>	<b>Bezdrátové lokální sítě (Wifi, Bluetooth).</b>	<b>5</b>
1.1	Metadata . . . . .	5
1.2	Úvod a kontext . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Hledání minimální kostry obyčejného grafu (pojmy, stromy a kostry, Kruskalův algoritmus, Primův algoritmus).</b>	<b>6</b>
2.1	Metadata . . . . .	6
2.2	Úvod a kontext . . . . .	6
2.3	Generický algoritmus . . . . .	8
2.4	Kruskalův algoritmus . . . . .	10
2.5	Primův-Jarníkův algoritmus . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Hledání nejkratších cest ze zdrojového uzlu do všech ostatních uzel grafu (Bellman-Fordův algoritmus, Dijkstrův algoritmus).</b>	<b>16</b>
3.1	Metadata . . . . .	16
3.2	Úvod a kontext . . . . .	16
3.3	Pomocné funkce . . . . .	17
3.4	Bellman-Fordův algoritmus . . . . .	18
3.5	Dijkstrův algoritmus . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Klasifikace algoritmů volby koordinátora, algoritmus Bully a jeho složitost.</b>	<b>25</b>
4.1	Metadata . . . . .	25
4.2	Úvod a kontext . . . . .	25
4.3	Problém volby koordinátora . . . . .	25
4.4	Bully algoritmus . . . . .	26
4.5	Ring Algoritmus . . . . .	27
4.6	Algoritmus pro obecnou topologii . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Podmínky konsistentního globálního stavu distribuovaného systému.</b>	<b>31</b>
5.1	Úvod a kontext . . . . .	31
5.2	Model komunikace . . . . .	32
5.3	Konzistentní globální stav . . . . .	32
<b>6</b>	<b>Principy distribuovaného zpracování MapReduce, průběh a jednotlivé operace distribuovaného výpočtu pomocí MapReduce, jeho implementace v Apache Hadoop a Apache Spark.</b>	<b>35</b>
6.1	Metadata . . . . .	35
6.2	Úvod a kontext . . . . .	35
6.3	MapReduce . . . . .	36
6.4	Apache Hadoop . . . . .	39

6.5	Apache Spark . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Symetrická kryptografie. Vlastnosti, vlastnosti bezpečného algoritmu, délka klíče, útok silou, příklady symetrických algoritmů, Feistelovy šifry, DES, režimy činnosti, proudové šifry.</b>	<b>42</b>
7.1	Metadata . . . . .	42
7.2	Úvod a kontext . . . . .	42
7.3	Blokové šifry . . . . .	44
7.4	Provozní režimy činnosti blokových šifer . . . . .	49
7.5	Proudové šifry . . . . .	52

# Kapitola 1

## Bezdrátové lokální sítě (Wifi, Bluetooth).

### 1.1 Metadata

- Předmět: Bezdrátové a mobilní sítě (BMS)
- Přednáška:
  - [[todo]]
- Záznam:
  - [[todo]]

### 1.2 Úvod a kontext

[[todo]]

# Kapitola 2

## Hledání minimální kostry obyčejného grafu (pojmy, stromy a kostry, Kruskalův algoritmus, Primův algoritmus).

### 2.1 Metadata

- Předmět: Grafové algoritmy (GAL)
- Přednáška:
  - 5) Stromy, minimální kostry, Jarníkův a Borůvkův algoritmus.
  - 6) Růst minimální kostry, algoritmy Kruskala a Prima.
- Záznam:
  - 2020-10-22
  - 2020-10-29

### 2.2 Úvod a kontext

**Orientovaný graf** Orientovaný graf je dvojice  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina uzlů a  $E \subseteq V \times V$  je množina hran.

**Neorientovaný graf** Neorientovaný graf je dvojice  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina uzlů a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina hran. (Hrana je tedy dvouprvková množina, avšak běžně se držíme stejného značení jako u orientovaných grafů a používáme dvojici.)

**Ohodnocený graf** Ohodnocený graf je takový graf, jehož každá hrana má přiřazenou nějakou hodnotu, typicky definovanou pomocí váhové funkce  $w : E \mapsto \mathbb{R}$ .

**Podgraf** Graf  $G' = (V', E')$  je podgraf grafu  $G = (V, E)$  jestliže  $V' \subseteq V$  a  $E' \subseteq E$ .

**Sled** Posloupnost uzlů  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ , kde  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  pro  $i = 1, \dots, k$  se nazývá sled délky  $k$  z  $v_0$  do  $v_k$ .

**Uzavřený sled** Sled  $\langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  se nazývá uzavřený, pokud existuje hrana  $(v_0, v_k)$ .

**Dosažitelnost** Pokud existuje sled  $s$  z uzlu  $u$  do uzlu  $v$ , říkáme, že  $v$  je dosažitelný z  $u$  sledem  $s$ , značeno  $u \xrightarrow{s} v$ .

**Tah** Tah je sled ve kterém se neopakují hrany.

**Cesta** Cesta je sled ve kterém se neopakují uzly.

**Souvislý graf** Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje cesta.

**Kružnice** Uzavřená cesta se nazývá kružnice.

**Cyklus** Orientovaná kružnice se nazývá cyklus (první a poslední uzel je shodný).

**Prostý graf** Orientovaný graf bez cyklů se nazývá prostý.

**Acyklický graf** Graf je bez cyklů, resp. kružnic, se nazývá acyklický.

**Strom** Graf, který je souvislý a acyklický, se nazývá strom.

**Kostra** Strom, který tvoří podgraf souvislého grafu na množině všech jeho vrcholů, se nazývá kostra (*spanning tree*).

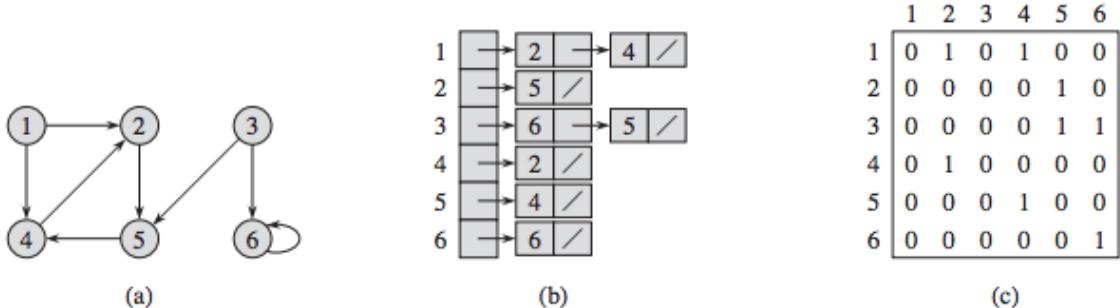
**Minimální kostra** Necht'  $G = (V, E)$  je souvislý neorientovaný graf s váhou funkcí  $w : E \mapsto \mathbb{R}$ . Minimální kostra (*MST, minimum spanning tree*) je strom  $G' = (V, E')$ , kde  $E' \subseteq E$  a

$$w(E') = \sum_{(u,v) \in T} w(u, v)$$

je minimální ze všech možných alternativních kostér.

**Seznam sousedů** Seznam sousedů (*Adj, adjacency list*) je reprezentace grafu v paměti. Jde o preferovanou variantu pro řídké grafy – kde  $m \ll n^2$ . Pro každý uzel máme definovaný seznam jeho sousedů.

**Matice sousednosti** Matice sousednosti (*adjacency matrix*) je reprezentace grafu v paměti. Jde o preferovanou variantu pro husté grafy – kde  $m$  je skoro  $n^2$ .



Obrázek 2.1: Příklad reprezentace grafu pomocí seznamu sousedů a matice sousednosti.

## 2.3 Generický algoritmus

Hledání minimální kostry je problém, který lze řešit algoritmy, které spadají do kategorie tzv. hladových (*greedy*) deterministických algoritmů. Spočívají v tom, že průběžně odhadují kostru přidáváním dalších hran a nikdy se nemusejí vracet (neprovádí se *backtracking*). Generický algoritmus tvoří jakousi základní kostru pro další, už konkrétní, algoritmy.

**Řez** Necht'  $G = (V, E)$  je graf. Řez grafu  $G$  je dvojice  $(S, V - S)$ , kde  $\emptyset \subseteq S \subseteq V$ .

**Křížení** Hrana  $(u, v) \in E$  kříží řez  $(S, V - S)$ , pokud jeden její konec je v  $S$  a druhý v  $V - S$ .

**Respektování** Necht'  $A \subseteq E$  je množina hran. Řez  $(S, V - S)$  respektuje množinu hran  $A$ , pokud žádná hrana v  $A$  nekříží řez  $(S, V - S)$ .

**Lehkost** Necht'  $(S, V - S)$  je řez a  $B$  je množina hran, která ho kříží. Hrana z množiny  $B$  s nejmenší hodnotou se nazývá lehká.

**Bezpečnost** Necht'  $G = (V, E)$  je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí  $w$ . Necht'  $A \subseteq E$  je součástí nějaké minimální kostry  $G$ . Necht'  $(S, V - S)$  je řez, který respektuje  $A$ . Necht'  $(u, v)$  je lehká hrana křížící  $(S, V - S)$ . Pak hrana  $(u, v)$  je bezpečná pro  $A$ .

```

1 def generic_mst(G):
2     # G je graf
3     A = {}# A je mnozina hran rozpracovane minimalni kostry
4     while netvorí_kostru(A, G):
5         for hrana in G.E:
6             if je_bezpecna(A, hrana):
7                 A += {hrana}
8     return A

```

Výpis 2.1: Generický algoritmus. Před každou iterací algoritmu je množina  $A$  podmnožinou nějaké minimální kostry. Hrana  $(u, v) \in E$  je bezpečná pro  $A$ , pokud  $A \cup \{(u, v)\}$  je podmnožinou nějaké minimální kostry.

Př.  $G = (V, E)$   $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$  (definované obrazem)

1.)



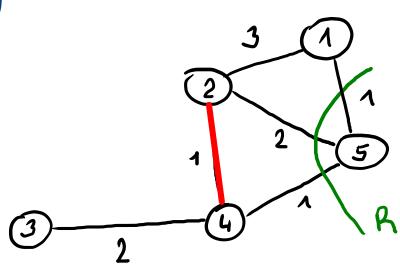
$$A = \{\emptyset\}$$

$$R = (\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\})$$

$$LH = \{(2, 4), (4, 5)\}$$

$$A \leftarrow A \cup \{(2, 4)\}$$

2.)



$$A = \{(2, 4)\}$$

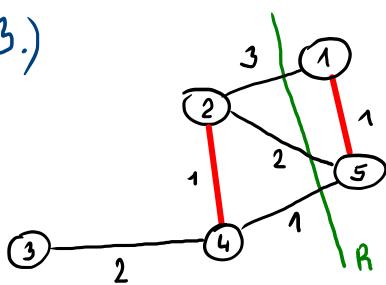
$$R = (\{\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}\})$$

$$LH = \{(1, 5), (4, 5)\}$$

$$A \leftarrow A \cup \{(1, 5)\}$$

Obrázek 2.2: Příklad, část 1.

3.)



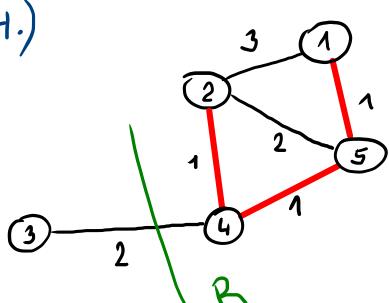
$$A = \{(1, 5), (2, 4)\}$$

$$R = (\{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\})$$

$$LH = \{(4, 5)\}$$

$$A \leftarrow A \cup \{(4, 5)\}$$

4.)



$$A = \{(1, 5), (2, 4), (4, 5)\}$$

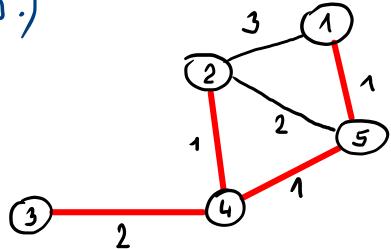
$$R = (\{\{1, 2, 4, 5\}, \{3\}\})$$

$$LH = \{(3, 4)\}$$

$$A \leftarrow A \cup \{(3, 4)\}$$

Obrázek 2.3: Příklad, část 2.

5.)



$$A = \{(3,4), (2,4), (5,4), (1,5)\}$$

*A je minimální kostra*

*(minimál už nemůže učítat  
věz, když by vyspetoval A)*

Obrázek 2.4: Příklad, část 3.

## 2.4 Kruskalův algoritmus

Kruskalův a Primův algoritmus se liší v tom, jakým způsobem vybírají bezpečnou hranu. Kruskalův algoritmus nahlíží na  $A$  jako na les a hledá hranu s nejmenším ohodnocením, která spojuje stromy v lese. Na konci je  $A$  jeden strom.

```

1 def kruskal_mst(G):
2     # G je graf
3
4     # inicializace, kazdy uzel je ve sve mnozine
5     A = {}# A je mnozina hran rozpracovane minimalni kostry
6     for v in G.V:
7         make_set(v)
8
9     # seradit vzestupne podle w
10    E = sort(G.E, G.w)
11
12    for (u, v) in E:
13        if find_set(u) != find_set(v):
14            A += {(u, v)}
15            union(u, v)
16
17    return A

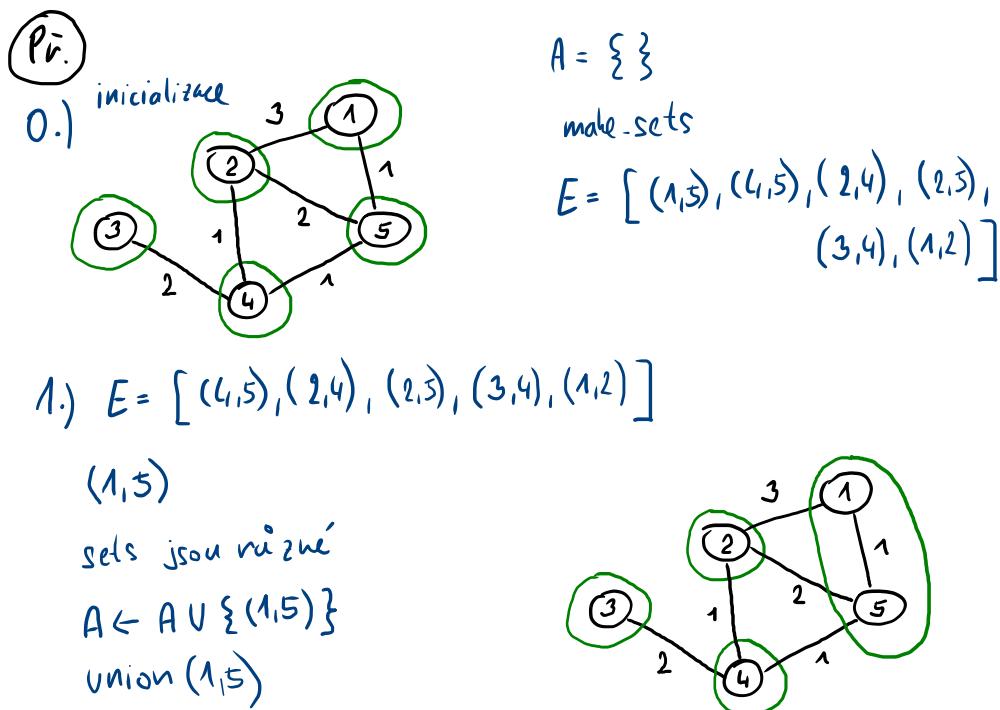
```

Výpis 2.2: Kruskalův algoritmus. Funkce `make_set(v)` vytvoří množinu obsahující  $v$ , `find_set(v)` vrátí reprezentanta množiny ve které se nachází  $v$ , `union(u, v)` sjednotí dvě množiny obsahující  $u$  a  $v$ .

## Složitost

- Řádek 5 –  $O(1)$
- Řádek 6-7 –  $n$ -krát složitost *make\_set* ( $n$  je počet uzlů).
- Řádek 10 –  $O(m \cdot \log(m))$  ( $m$  je počet hran).
- Řádky 12-15 – Závisí na implementaci *find\_set* a *union*.
  - Při implementaci seznamem s heuristickou celkem:  $O(m + n \cdot \log(n))$ .
  - Při stromové implementaci s váhami a zkratkami celkem:  $O((m + n) \cdot \alpha(n))$ .  
Kde  $\alpha$  je velmi pomalu rostoucí funkce ( $\alpha \leq 4$ ).
- Pro souvislý graf platí  $m > n$ . Proto množinové operace stojí  $O(m \cdot \alpha(n))$ . Jelikož  $\alpha(n) = O(\log(n)) = O(\log(m))$ , tak celková složitost je  $O(m \cdot \log(m))$ .
- Dále platí  $m < n^2$ , pak  $\log(m) = O(\log(n))$ , proto celkem:  $O(m \cdot \log(n))$ .

## Příklad



Obrázek 2.5: Příklad, část 1.

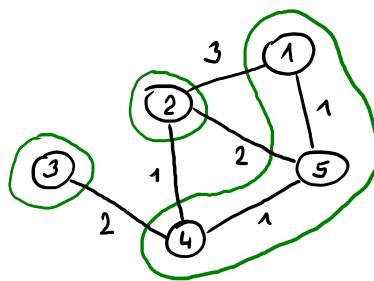
$$2.) E = [(2,4), (2,5), (3,4), (1,2)]$$

(4,5)

sets jsou různé

$$A \leftarrow A \cup \{(4,5)\}$$

union (4,5)



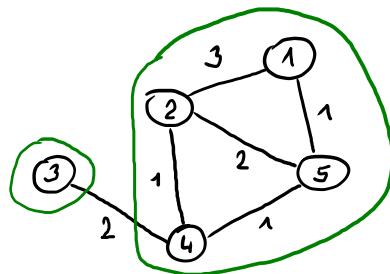
$$3.) E = [(2,3), (3,4), (1,2)]$$

(2,4)

sets jsou různé

$$A \leftarrow A \cup \{(2,4)\}$$

union (2,4)

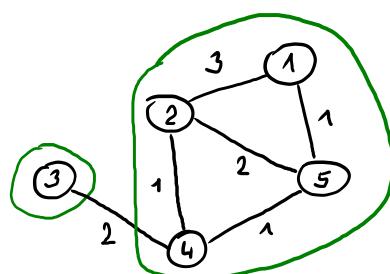


Obrázek 2.6: Příklad, část 2.

$$4.) E = [(3,4), (1,2)]$$

(2,3)

sets nejsou různé



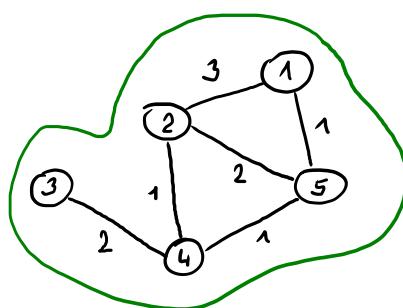
$$4.) E = [(1,2)]$$

(3,4)

sets jsou různé

$$A \leftarrow A \cup \{(3,4)\}$$

union (3,4)



$$5.) E = [ ] , (1,2) , \text{ sets nejsou různé}$$

Obrázek 2.7: Příklad, část 3.

## 2.5 Primův-Jarníkův algoritmus

Primův algoritmus buduje tzv.  $A$  strom. Má zadaný určitý uzel, ze kterého hledá nejbližší další uzel, který by připojil. A pak další a další.

```
1 def prim_mst(G, r):
2     # G je graf
3     # r je výchozí uzel
4
5     for u in G.V:
6         key[u] = INF # pole cen prechodu, kolik stojí prechod do vrcholu na indexu
7         pi[u] = NULL # pole predchudcu, kdo je predchudce vrcholu na indexu
8
9     key[r] = 0
10    Q = Queue(G.V) # prioritní fronta uzlu
11
12    while not Q.empty():
13        u = Q.extract_min(key) # vrati prvek z Q s nejmensi hodnotou v key
14
15        # pro vsechny sousedy uzlu u (Adj je seznam sousedu)
16        for v in Adj[u]:
17            # pokud je levnejsi cesta a jeste to není prozkoumaný uzel
18            if v in Q and w(u, v) < key(v):
19                pi[v] = u
20                key[v] = w(u, v)
21                Q.decrease_key(key) # aktualizace prioritni fronty
22
23    return pi
```

Výpis 2.3: Primův algoritmus.

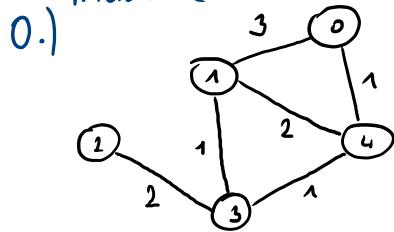
### Složitost

- Řádky 5-10 –  $O(n)$  za použití binární haldy ( $n$  je počet uzlů).
- Řádky 12-13 – While cyklus se provede  $n$ -krát a protože  $extract\_min$  stojí  $O(\log(n))$ , tak je celková složitost  $O(n \cdot \log(n))$ .
- Řádek 16 – For cyklus se provede  $O(m)$  krát, protože délka všech seznamů sousedů je dohromady  $2m$  ( $m$  je počet hran).
- Řádek 18-20 –  $O(1)$ .
- Řádek 21 –  $O(\log(n))$ .
- Jelikož  $m > n$ , tak celkem  $O(n \cdot \log(n) + m \cdot \log(n)) = O(m \cdot \log(n))$ .

## Příklad

Pr.

0.) initialize



$$n = 1$$

$$\text{key} = [\infty, 0, \infty, \infty, \infty]$$

$$\pi = [\text{NULL}, \text{NULL}, \text{NULL}, \text{NULL}, \text{NULL}]$$

$$Q = [0, 1, 2, 3, 4]$$

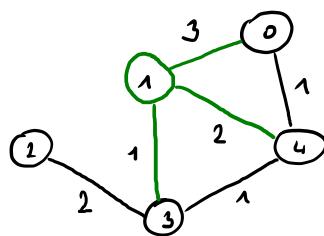
1.)  $u = 1$

$$Q = [0, 1, 3, 4]$$

$$v \in \{0, 3, 4\}$$

$$\text{key} = [3, 0, \infty, 1, 2]$$

$$\pi = [1, \text{NULL}, \text{NULL}, 1, 1]$$



Obrázek 2.8: Příklad, část 1.

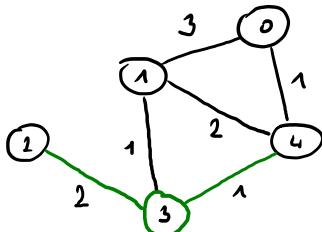
2.)  $u = 3$

$$Q = [0, 1, 4]$$

$$v \in \{1, 2, 4\}$$

$$\text{key} = [3, 0, 2, 1, 1]$$

$$\pi = [1, \text{NULL}, 3, 1, 3]$$



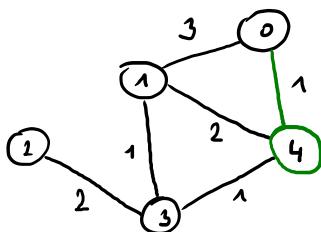
3.)  $u = 4$

$$Q = [0, 1]$$

$$v \in \{0, 1, 3\}$$

$$\text{key} = [1, 0, 2, 1, 1]$$

$$\pi = [4, \text{NULL}, 3, 1, 3]$$



Obrázek 2.9: Příklad, část 2.

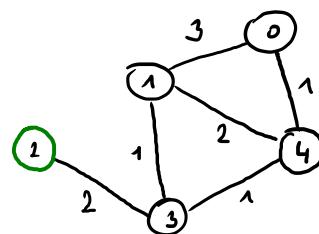
4.)  $u = 0$   
 $Q = [1]$   
 $v \in \{1, 4\}$

$key = [1, 0, 2, 1, 1]$   
 $\pi = [4, \text{NULL}, 3, 1, 3]$



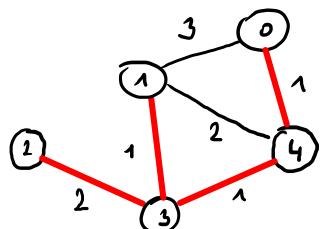
5.)  $u = 2$   
 $Q = []$   
 $v \in \{3\}$

$key = [1, 0, 2, 1, 1]$   
 $\pi = [4, \text{NULL}, 3, 1, 3]$



Obrázek 2.10: Příklad, část 3.

6.)  $key = [1, 0, 2, 1, 1]$   
 $\pi = [4, \text{NULL}, 3, 1, 3]$



Obrázek 2.11: Příklad, část 4.

# Kapitola 3

## Hledání nejkratších cest ze zdrojového uzlu do všech ostatních uzel grafu (Bellman-Fordův algoritmus, Dijkstrův algoritmus).

### 3.1 Metadata

- Předmět: Grafové algoritmy (GAL)
- Přednáška:
  - 7) Nejkratší cesty z jednoho vrcholu, Bellman-Fordův algoritmus, nejkratší cesta z jednoho vrcholu v orientovaných acyklických grafech.
  - 8) Dijkstrův algoritmus. Nejkratší cesty ze všech vrcholů.
- Záznam:
  - 2020-11-05

### 3.2 Úvod a kontext

Viz. „Úvod a kontext“ v předchozí otázce.

**Cena cesty** Necht'  $G = (V, E)$  je ohodnocený graf s váhovou funkcí  $w : E \mapsto \mathbb{R}$ . Cena cesty  $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$  je suma

$$w(p) = \sum_{i=0}^k w(v_i, v_{i+1})$$

**Cena nejkratší cesty** Cena nejkratší cesty z  $u$  do  $v$  je

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min(\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\}) \\ \infty \text{ pokud cesta neexistuje} \end{cases}$$

**Nejkratší cesta** Nejkratší cesta z  $u$  do  $v$  je pak libovolná cesta  $p$  taková, že  $w(p) = \delta(u, v)$ .

**Cena cesty se záporným cyklem** Pokud na cestě z  $u$  do  $v$  existuje záporný cyklus (cyklus jehož celková cena je záporná), pak  $\delta(u, v) = -\infty$ .

**Záporné ohodnocení hran** Pokud na cestě z  $u$  do  $v$  neexistuje záporný cyklus, tak algoritmy pracují dobře i se záporným ohodnocením hran.

**Reprezentace cesty** Cestu reprezentujeme pomocí pole předchůdců  $\pi$ .

**Hledání nejkratších cest ze všech uzlů do jednoho** Tento problém lze řešit stejnými algoritmy. Graf se transponuje (převrácení orientace hran), provede se algoritmus pro problém „hledání nejkratších cest ze jednoho uzlu do všech ostatních uzlů“ a poté se transponuje zpět.

**Reprezentace nejkratší cesty** Nejkratší cestu grafu  $G = (V, E)$  reprezentujeme pomocí pole předchůdců  $\pi$ , kde  $\pi[v]$  označuje předchůdce uzlu  $v \in V$  na nejkratší cestě. Podgraf předchůdců pak je  $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ ,  $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq \text{NULL}\} \cup \{s\}$ ,  $E_\pi = \{(\pi[v], v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$ . V okamžiku dokončení algoritmu výpočtu nejkratších cest je  $G_\pi$  strom nejkratších cest. Tj. kořenový strom obsahující nejkratší cesty ze zdroje  $s$  do všech ostatních uzlů.

### 3.3 Pomocné funkce

Představené algoritmy pracují z důvodu efektivity se sledy a nikoliv s cestami (bylo by nutné stále kontrolovat, zda nebyla porušena podmínka cesty), ačkoliv je problém nazývá hledání nejkratší cesty.

```

1 def initialize_single_source(G, s):
2     # G je graf
3     # s je vychozí uzel
4     for v in G.V:
5         d[v] = INF # d je pole vzdalenosti
6         pi[v] = NULL # pi je pole predchudcu
7         d[s] = 0

```

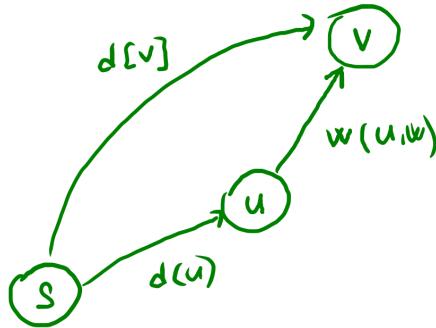
Výpis 3.1: Pomocná inicializační funkce. Složitost je  $\Theta(n)$ , kde  $n$  je počet uzlů.

```

1 def relax(u, v, w):
2     # u a v jsou uzly grafu
3     # w je vahova funkce
4     if d[v] > d[u] + w(u, v):
5         d[v] = d[u] + w(u, v)
6         pi[v] = u

```

Výpis 3.2: Pomocná funkce *relax*. Složitost je  $O(1)$ .



Obrázek 3.1: Ukázka činnosti funkce *relax*.

### 3.4 Bellman-Fordův algoritmus

Slouží pro řešení v obecných grafech, mohou obsahovat cykly a záporné hrany. Záporné cykly je však nutné detektovat a vrátit specifickou hodnotu. V podstatě se jedná o *brute force* algoritmus, provede se relaxace  $n - 1$ -krát pro každou hranu.

```

1 def bellman_ford(G, s, w):
2     # G je graf
3     # s je vychozi uzel
4     # w je vahova funkce
5
6     # faze inicializace
7     initialize_single_source(G, s)
8     n = len(G.V) # pocet uzlu
9
10    # faze relaxace: provedeni (n-1) * m relaxaci (m je pocet hran)
11    for _ in range(0, n-1):
12        for u, v in G.E:
13            relax(u, v, w)
14
15    # faze detekce zaporneho cyklu
16    for u, v in G.E:
17        if d[u] > d[v] + w(u, v):
18            return NULL
19
20    return pi

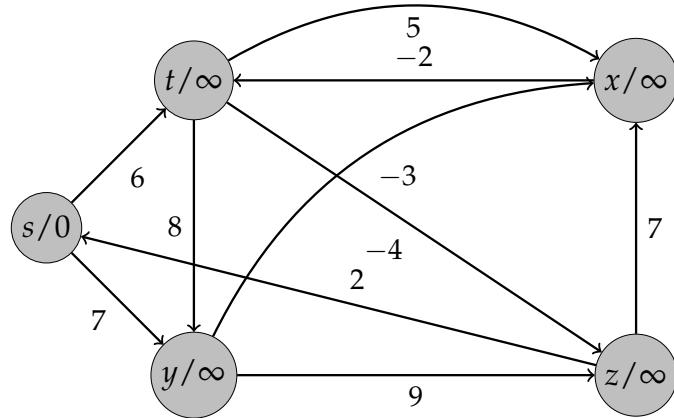
```

Výpis 3.3: Algoritmus Bellman-Ford. Proč  $n - 1$  iterací? Protože mezi libovolnými dvěma uzly v grafu, existuje cesta o maximálním počtu hran  $n - 1$ .

#### Složitost

- Řádek 7, 8 –  $\Theta(1)$ .
- Řádky 11, 12, 13 –  $(n - 1) \cdot \Theta(m) = \Theta(n \cdot m)$ , kde  $n$  je počet uzlů a  $m$  je počet hran grafu.
- Řádek 16, 17, 18 –  $\Theta(m)$ .
- Celkem  $\Theta(n \cdot m)$ .

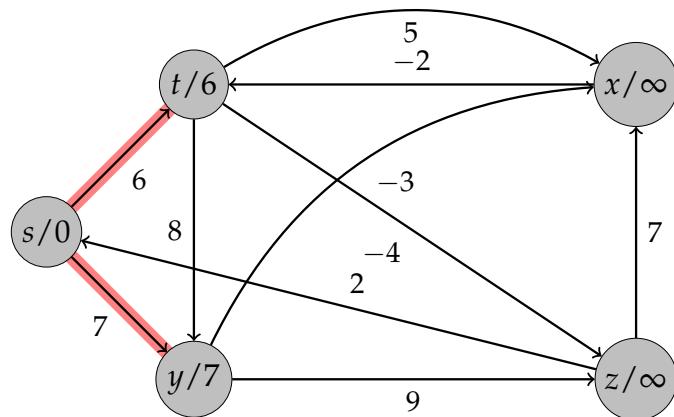
## Příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- ▶ Pokud  $(u, v) \in E$  je označená, pak  $\pi[v] = u$
- ▶ Hrany se relaxují v tomto pořadí:  
 $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$ .

Obrázek 3.2: Příklad, část 1.



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- ▶ Pokud  $(u, v) \in E$  je označená, pak  $\pi[v] = u$
- ▶ Hrany se relaxují v tomto pořadí:  
 $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$ .

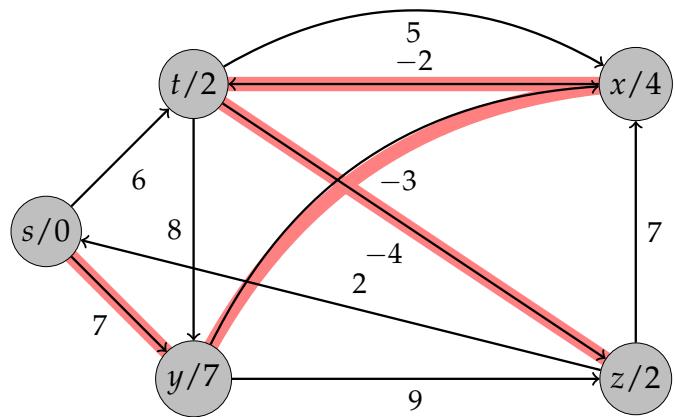
Obrázek 3.3: Příklad, část 2.



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- ▶ Pokud  $(u, v) \in E$  je označená, pak  $\pi[v] = u$
- ▶ Hrany se relaxují v tomto pořadí:  
 $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$ .

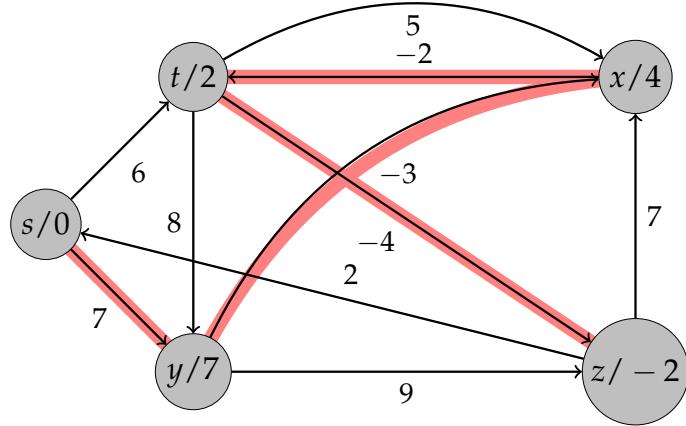
Obrázek 3.4: Příklad, část 3.



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- ▶ Pokud  $(u, v) \in E$  je označená, pak  $\pi[v] = u$
- ▶ Hrany se relaxují v tomto pořadí:  
 $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$ .

Obrázek 3.5: Příklad, část 4.



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- ▶ Pokud  $(u, v) \in E$  je označená, pak  $\pi[v] = u$
- ▶ Hrany se relaxují v tomto pořadí:  
 $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$

Obrázek 3.6: Příklad, část 5.

### 3.5 Dijkstrův algoritmus

Slouží pro řešení v acyklických grafech bez záporných hran. Pro takto omezený problém existují rychlejší algoritmy než pro problém v obecných grafech.

```

1 def dijkstra(G, s, w):
2     # G je graf
3     # s je výchozí uzel
4     # w je vahová funkce
5
6     # fáze inicializace
7     initialize_single_source(G, s)
8     Q = Queue(G.V) # prioritní fronta uzlu
9     S = {}# množina uzlu, která už byla prozkoumána
10
11    # fáze relaxace
12    while not Q.empty():
13        u = Q.extract_min(d) # vrátí prvek z Q s nejménší hodnotou v d
14        S += {u}
15        # pro všechny sousedy uzlu u (Adj je seznam sousedů)
16        for v in Adj[u]:
17            relax(u, v, w)
18
19        Q.decrease_key(d) # aktualizace prioritní fronty
20
21    return d, pi

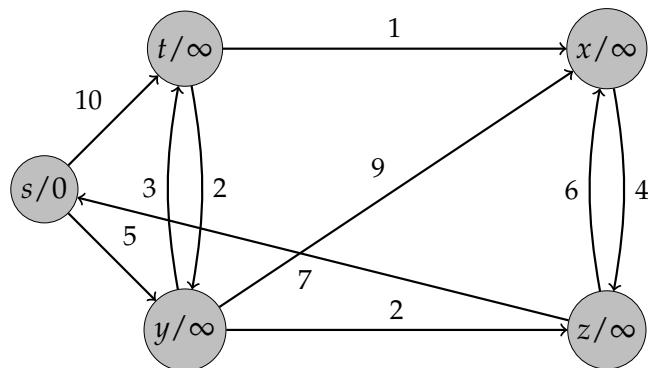
```

Výpis 3.4: Algoritmus Dijkstra.

## Složitost

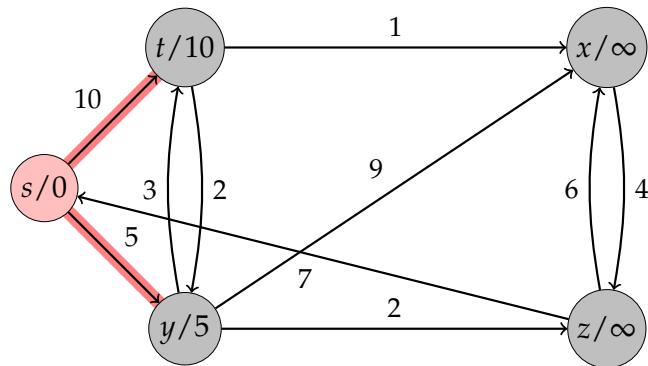
- Předpokládejme implementaci prioritní fronty pomocí pole.
- Řádek 8, 18 –  $O(1)$ .
- Řádek 11 – While cyklus se provede  $n$ -krát, kde  $n$  je počet uzelů.
- Řádek 12 –  $O(n)$ , najítí minima v poli uzelů. Celkově (s cyklem)  $O(n^2)$ .
- Řádek 16 –  $O(m)$ , pro všechny hrany. Celkově (s cyklem)  $O(m \cdot n)$ .
- Celkem  $O(n^2 + m) = O(n^2)$ .
- Pro řídké grafy lze využít implementaci fronty pomocí binární haldy a získat tak  $O(m \cdot \log(n))$ .
- Při implementaci fronty pomocí Fibonacciho haldy dostaneme časovou složitost  $O(n \cdot \log(n) + m)$ .

## Příklad



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.7: Příklad, část 1.



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.8: Příklad, část 2.



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.9: Příklad, část 3.



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.10: Příklad, část 4.



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.11: Příklad, část 5.



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny  $S$ .

Obrázek 3.12: Příklad, část 6.

## Kapitola 4

# Klasifikace algoritmů volby koordinátora, algoritmus Bully a jeho složitost.

### 4.1 Metadata

- Předmět: Prostředí distribuovaných aplikací (PDI)
- Přednáška:
  - 7) Synchronizace
- Záznam:
  - 2020-11-02

### 4.2 Úvod a kontext

- Mějme množinu procesů v rámci distribuovaného systému. Řešíme problém nalezení shody na nějaké věci (synchronizační problém). Problém můžeme rozdělit na dvě situace:
  - **Problém volby koordinátora** – Výběr jednoho z procesů, který bude vedoucím procesem (koordinátor). Tento proces pak může vykonat určitou činnost nebo může sloužit ostatním procesům k realizaci význačné role v systému.
  - **Problém vzájemného vyloučení** – Předpokládejme, že konkrétní zdroj může v daném okamžiku používat pouze jeden proces. Tento problém se běžně vyskytuje ve víceprocesorových systémech, ale také v distribuovaných systémech.
- Synchronizační problémy lze v rámci operačních systémů nebo multiprocesorových systémů řešit pomocí provádění atomických operací, sdílené paměti apod. (je pro ně podpora v rámci operačního systému nebo hardwaru). V distribuovaných systémech nic takového není z principu možné a proto se synchronizační problémy řeší pomocí zasílání zprav, resp. algoritmicky.

### 4.3 Problém volby koordinátora

- Předpokládáme:

- Každý proces má unikátní ID.
- Procesy neznají stav (běžící, neběžící) dalších procesů.
- Každý proces zná ID dalších procesů (záleží na topologii).

- Cíl:

- Dosáhnutí shody mezi všemi procesy na procesu, který je koordinátor.
- Kritérium výběru koordinátora může být různé. Např. na základě proces ID (proces s největším ID se stane koordinátorem).

## 4.4 Bully algoritmus

Pro topologii každý s každým – každý proces může komunikovat s každým dalším procesem. Používá tři druhy zpráv: ELECTION, OK, COORDINATOR.

### Postup

- Proces P, který má podezření, že chybí koordinátor, může zahájit volby.
  1. Proces P odešle zprávu ELECTION všem procesům s větším ID.
  2. Pokud nikdo neodpoví, P vyhrává volby a stává se koordinátorem.
  3. Pokud některý z procesů s větším ID odpoví (zpráva OK), tak přebírá řízení a práce P je ukončena.
  4. Pokud P obdrží zprávu ELECTION od procesů s menším ID, pošle jim odpověď OK na zablokování procesů.
- Nakonec zůstane pouze P (nový koordinátor), který o tom informuje ostatní zasláním zprávy COORDINATOR.
- Pokud se proces probudí nebo je restartován, první akcí je vyvolání voleb.

### Složitost

Složitost z hlediska počtu zpráv.

Nejhorší případ (iniciátor s nejmenším ID):

- $(n - 1)$  iterací
- $2(n - 1)$  zpráv ELECTION a OK pro každou iteraci
- $(n - 1)$  zpráv COORDINATOR
- Celkem:  $(n - 1) \times 2(n - 1) + (n - 1) \approx n^2$

Nejlepší případ (iniciátor s největším ID):

- $(n - 1)$  zpráv COORDINATOR
- Celkem:  $(n - 1)$

## Příklad



**Figure 5-11.** The bully election algorithm. (a) Process 4 holds an election. (b) Processes 5 and 6 respond, telling 4 to stop. (c) Now 5 and 6 each hold an election. (d) Process 6 tells 5 to stop. (e) Process 6 wins and tells everyone.

Obrázek 4.1: Příklad činnosti Bully algoritmu.

## 4.5 Ring Algoritmus

Pro kruhovou topologii – procesy jsou uspořádané do kruhu podle svého proces ID. Každý proces musí vědět nejenom o svém následovníkovi, ale také o jeho následníkovi, který funguje jako „záloha“, v případě že by se přímý následník stal nedostupný. Používá dva druhy zpráv: ELECTION, COORDINATOR.

### Postup

- Proces P, který má podezření, že chybí koordinátor, může zahájit volby.
  1. Zašle zprávu ELECTION obsahující jeho ID dalšímu procesu (pokud další proces nereaguje, proces P zašle stejnou zprávu dalšímu v kruhu).
  2. Každý člen topologie přijme zprávu ELECTION, přidá do ní své ID a přepošeď zprávu dalšímu procesu.

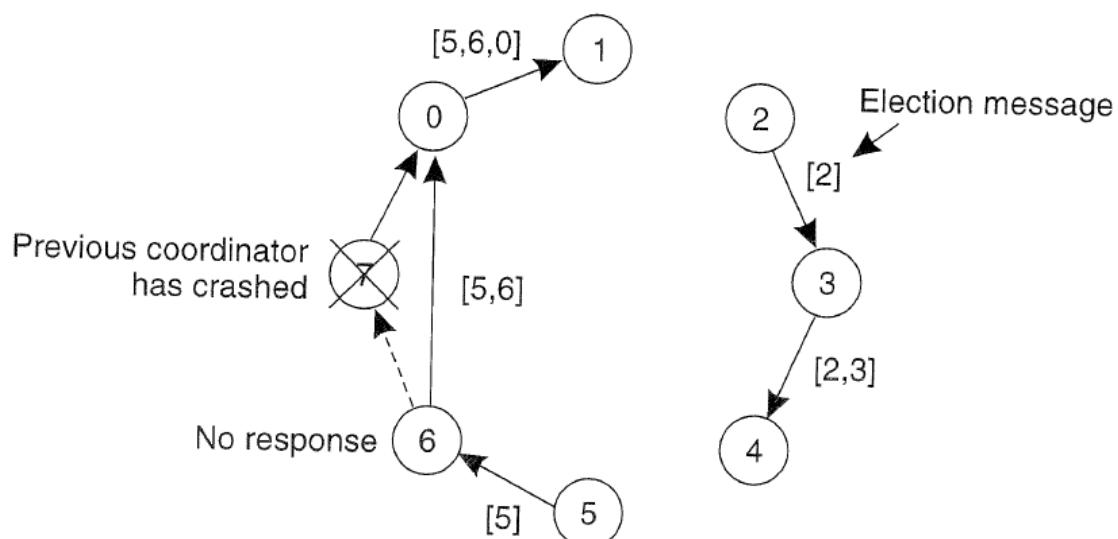
- Když se zpráva vrátí k procesu P, je zpráva převedena na zprávu COORDINATOR a poslána následujícímu procesu v topologii, aby bylo možné nahlásit:
  1. Novým koordinátorem se stává proces s nejvyšším ID.
  2. Členové sítě jsou stále aktivní.
- Po síti může obíhat více zpráv zároveň.

### Složitost

Složitost z hlediska počtu zpráv.

Vždy  $2n \approx n$  zpráv. Jedno kolečko „oběhne“ zpráva ELECTION a druhé zpráva COORDINATOR.

### Příklad



**Figure 5-12.** Election algorithm using a ring.

Obrázek 4.2: Příklad činnosti Ring algoritmu.

## 4.6 Algoritmus pro obecnou topologii

Předpokládáme, že nemáme ani kruhovou topologii ani spojení každý s každým. Např.: peer-to-peer sítě, sensorové sítě, ...

### Postup

- V první iteraci se broadcastem posílá zpráva ELECTION.
- Každý uzel si uloží od kterého souseda dostal zprávu ELECTION jako první. Tím vzníká kostra grafu (*spanning tree*).

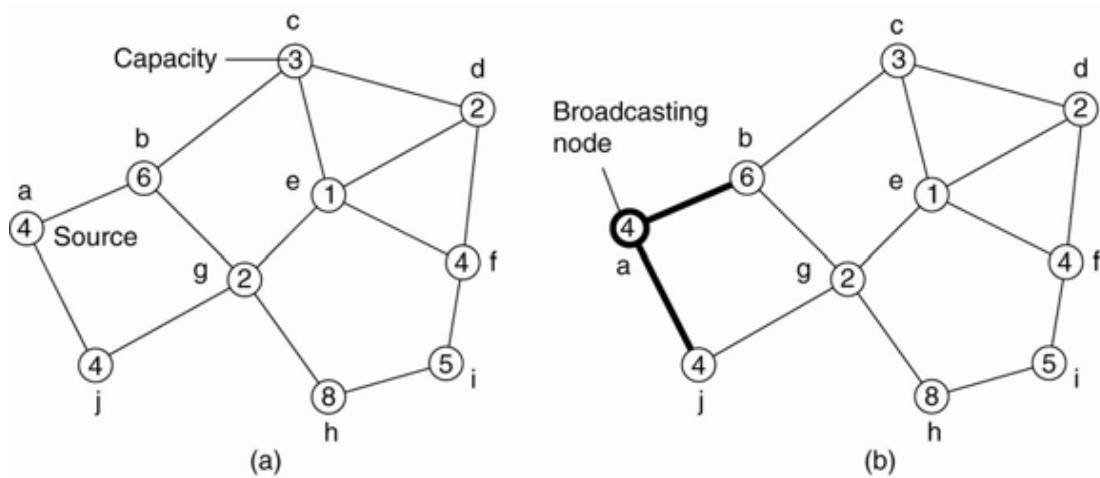
- Uložený soused je poté využijí pro zpětnou komunikaci. To znamená, že další komunikace už probíhá přes strom, nikoliv přes broadcast. Tím je ušetřena některé komunikace.

## Složitost

Složitost z hlediska počtu zpráv.

- Inicializační broadcast: počet hran grafu.
- Odpověď: počet hran kostry grafu.
- Result broadcast: počet hran kostry grafu.

## Příklad



Node *a* initiates an election.

Obrázek 4.3: Příklad činnosti algoritmu pro obecnou topologii, část 1.



In the end, source *a* notes that *h* is the best leader and broadcasts this info to all nodes.

Obrázek 4.4: Příklad činnosti algoritmu pro obecnou topologii, část 2.

# Kapitola 5

## Podmínky konsistentního globálního stavu distribuovaného systému.

### Metadata

- Předmět: Prostředí distribuovaných aplikací (PDI)
- Přednáška:
  - 4) Globální stav a snapshots
- Záznam:
  - 2020-10-12

### 5.1 Úvod a kontext

**Distribuovaný systém** Distribuovaný systém je množina procesů  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , které jsou propojeny komunikačními kanály. V systému neexistuje žádná globální paměť ani globální hodiny. Procesy spolu komunikují pouze zasláním zpráv skrze komunikačními kanály.

**Komunikační kanál** Komunikační kanál mezi procesy  $p_i$  a  $p_j$  značíme  $C_{ij}$ .

**Událost** Rozlišujeme tři typy událostí: interní událost procesu, zaslání zprávy a přijetí zprávy.

**Zpráva** Zpráva  $m_{ij}$  značí zprávu zaslanou procesem  $p_i$  procesu  $p_j$ .  $send(m_{ij})$  značí odeslání zprávy a  $recv(m_{ij})$  přijetí.

**Stav procesu** Lokální stav procesu  $p_i$  značíme  $LS_i$ . Lokální stav je definován jako sekvence všech událostí, o kterých proces  $p_i$  ví. Necht'  $e$  je libovolná událost,  $e \in LS_i$  značí, že událost  $e$  patří do lokálního stavu procesu  $p_i$ ,  $e \notin LS_i$  značí, že událost  $e$  nepatří do lokálního stavu procesu  $p_i$ .

**Stav komunikačního kanálu** Stav komunikačního kanálu  $C_{ij}$  značíme  $SC_{ij}$  a je definován množinou zpráv, které obsahuje. Pro kanál  $C_{ij}$  můžeme definovat jeho stav na základě lokálních stavů procesů  $LS_i$  a  $LS_j$ :

$$transit(LS_i, LS_j) = \{m_{ij} \mid send(m_{ij}) \in LS_i \wedge rec(m_{ij}) \notin LS_j\}$$

## 5.2 Model komunikace

- FIFO – Komukační kanál funguje jako fronta zpráv *first in, first out*. Kanál tedy zachovává pořadí zpráv sám o sobě.
- non-FIFO – Komunikační kanál se chová jako datová struktura množina, do které odesílatel vkládá zprávy a příjemce je odebírá v náhodném pořadí.
- Causal ordering (kauzální uspořádání) – Systém, který podporuje kauzální doručení zpráv splňuje následující vlastnost. Pro jakékoli dvě zprávy  $m_{ij}$  a  $m_{kj}$  platí, pokud  $send(m_{ij}) \rightarrow send(m_{kj})$ , pak i  $recv(m_{ij}) \rightarrow recv(m_{kj})$ .

## 5.3 Konzistentní globální stav

**Globální stav** Globální stav distribuovaného systému je kolekce lokálních stavů procesů a komunikačních kanálů.

$$GS = \left\{ \bigcup_i LS_i, \bigcup_{i,j} SC_{ij} \right\}$$

**Časoprostorový diagram** Diagram pro vizualizaci komunikace procesů v distribuovaném systému. Viz obrázek 5.1 a 5.2.

**Konzistentní globální stav** Konzistentní globální stav (*snapshot*) je stav systému v určitém časovém okamžiku. Lze si jej představit jako řez v časoprostorovém diagramu, který rozděluje diagram na dvě části: minulost a budoucnost. Aby byl řez (globální stav) konzistentní, tak pokud je doručení nějaké zprávy v minulosti, musí být v minulosti i její odeslání. Formálně jde o globální stav, který splňuje následující podmínky:

$$send(m_{ij}) \in LS_i \Rightarrow m_{ij} \in SC_{ij} \oplus recv(m_{ij}) \in LS_j$$

,

$$send(m_{ij}) \notin LS_i \Rightarrow m_{ij} \notin SC_{ij} \wedge recv(m_{ij}) \notin LS_j$$

**K čemu je *snapshot*** *Snapshot* lze využít např. pro tvorbu záloh systému nebo při zavazování systému po chybách.

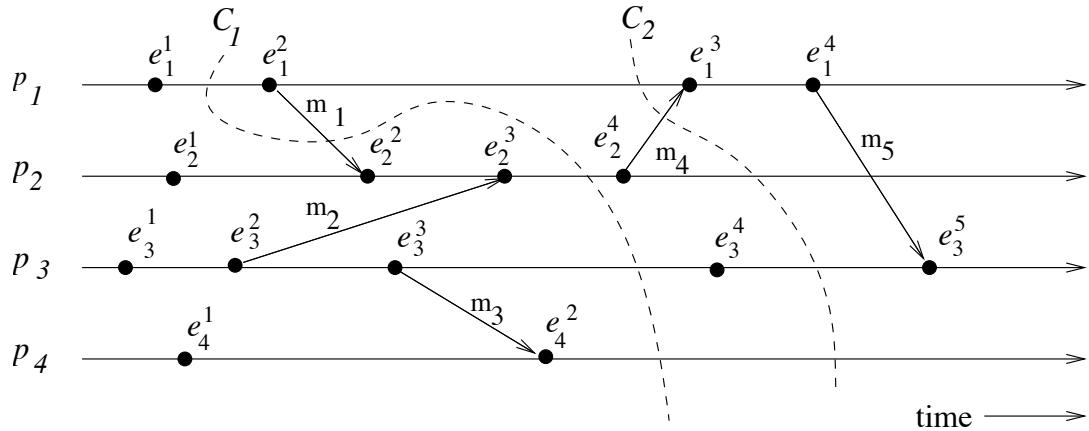
**Jak lze *snapshot* vytvořit** Absence globální sdílené paměti, globálních hodin a nepředvídatelná délka zpoždění v odesílání zpráv v distribuovaném systému činí problém vytváření snapshotů netriviálním. Způsob vytváření lze rozdělit do dvou kategorií: na základě algoritmů a na základě checkpointů.

**Problémy při zaznamenávání snapshotu** Jak rozlišit mezi zprávami, které mají být součástí snapshotu a které nikoliv?

- Zprávy, které jsou odeslány procesem před zaznamenáním svého snapshotu, jsou zaznamenány do stavu.
- Zprávy, které jsou odeslány procesem po zaznamenání svého snapshotu, nejsou zaznamenány do stavu.

Jak rozpoznat okamžik, ve kterém má proces zaznamenat snapshot?

- Proces  $p_j$  musí zaznamenat svůj snapshot před zpracováním zprávy  $m_{ij}$ , která byla poslána procesem  $p_i$  po zaznamenání jeho snapshotu.



Obrázek 5.1: Příklad řezu v časoprostorovém diagramu. Řez  $C_1$  je nekonzistentní, kvůli zprávě  $m_1$ . Řez  $C_2$  je konzistentní a zpráva  $m_4$  je zachycena ve stavu kanálu  $Ch_{21}$ .

(48)



$$GS_{C_1} = \left\{ LS_{P_1} \cup LS_{P_2} \cup LS_{P_3} \cup SC_{12} \cup SC_{13} \cup SC_{23} \right\} \quad SC_{12} = \{\}, \quad SC_{13} = \{m_{21}\}, \quad SC_{23} = \{\}$$

$$LS_{P_1} = (send(m_{12}), e_{11}) \quad LS_{P_2} = (e_{21}, recv(m_{12})) \quad LS_{P_3} = (e_{31}, send(m_{13}))$$

Obrázek 5.2: Příklad konzistentního globální stavu formálně.

# Kapitola 6

## Principy distribuovaného zpracování MapReduce, průběh a jednotlivé operace distribuovaného výpočtu pomocí MapReduce, jeho implementace v Apache Hadoop a Apache Spark.

### 6.1 Metadata

- Předmět: Prostředí distribuovaných aplikací (PDI)
- Přednáška:
  - 9) Programovací model MapReduce a Apache Hadoop
  - 10) Distribuované souborové systémy
  - 11) Apache Spark
- Záznam:
  - 2020-11-16
  - 2020-11-23

### 6.2 Úvod a kontext

**OLTP** OLTP (*Online Transactional Processing*, provozní databáze, systémy pro online zpracování transakcí) jsou standardní databázové systémy s pevnou strukturou dat definovou pomocí databázového schématu. Jsou navrženy a optimalizovány pro chod provozních aplikací s primáním cílem zajistit rychlý a souběžný přístup k datům. To vyžaduje transakční zpracování, řízení souběžnosti a techniky obnovy (rollback), které zaručují konzistence dat. Díky této vlastnosti mají OLTP databáze špatný výkon při provádění složitých dotazů, které potřebují spojit mnoho relačních tabulek dohromady nebo agregovat velké objemy dat. Kromě toho obsahují typicky podrobná data a neobsahují historická data, která jsou při datové analýze potřeba.

**OLAP** OLAP (*Online Analytical Processing*, online analytické zpracování) je databázové paradigma specificky zaměřené na dotazy, zejména na analytické dotazy. Používají se zde jiné techniky indexování a optimalizace dotazů. Normalizace není pro toto paradigma žádoucí, protože rozděluje databázi na mnoho tabulek. Složité dotazy v takovém případě vyžadují rekonstrukci dat a s tím spojený vysoký počet spojování tabulek. Pracuje se s tzv. multidimenzionálními kostkami, avšak v pozadí jsou stále relační databáze.

**NoSQL** Potřeba ukládat proudy dat (zpracovávané v reálném čase bez možnosti poza-stavení), obrázky, multimédia, velké JSON soubory, ..., vedla ke vzniku NoSQL databází. NoSQL databáze používají jiné prostředky než tabulková schémata tradiční relační data-báze. Často jde o „hloupé“, nestrukturované uložiště klíč-hodnota.

**BigData** Velká, nestrukturovaná (různorodá), rychle rostoucí data, která není možné uložit ani zpracovávat běžnými přístupy (na jednom uzlu, jedním uzlem). Produkují je např.: IoT senzory, sociální sítě, chatovací aplikace, webové vyhledávače, ... Pro jejich zpracování je nutné využít distribuované systémy (pro uložení i zpracování).

**Distribuované zpracování dat** Distribuované zpracování dat je zpracování velkých dat (*big data*) pomocí distribuovaných systémů. To s sebou přináší problémy. Jak zaručit vhodnou distribuci dat a výpočtu mezi uzly? Jak řešit nespolehlivost a výpadky uzlů? Jak a kam zajistit doručení výsledků výpočtu? ...

## 6.3 MapReduce

Algoritmy pro indexování webových stránek (Page Rank) přestávaly být udržitelné, bylo potřeba zvýšit jejich škálovatelnost. Google vydal příspěvek „MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters“, kde bylo představeno paradigma MapReduce. Jde o para-digma distribuovaného výpočtu založené na funkcích *map* a *reduce* z funkcionálního pro-gramování.

**Map** Funkce *map* má ve funkcionálním programování 2 vstupní parametry a vrací seznam hodnot. První parametr je unární operátor (nebo funkce fungující jako unární operátor) a druhý je seznam hodnot. Výstupní seznam je spočítán jako aplikace unárního operátoru na vstupní seznam. Příklad:

$$\text{map}(\text{square}, [1, 2, 3, 4]) = [1, 4, 9, 16]$$

. V paradigmata MapReduce *map* vrací data jako seznam dvojic klíč-hodnota, přesněji:

$$\text{map}((\text{key}, \text{value})) \rightarrow [(\text{key}, \text{value})]$$

**Reduce** Funkce *reduce* má ve funkcionálním programování 2 vstupní parametry a vrací jednu hodnotu. První parametr je binární operátor (nebo funkce fungující jako binární operátor) a druhý je seznam hodnot. Výstupní hodnota je spočítána jako postupná aplikace binárního operátoru na všechny hodnoty ve vstupním seznamu. Příklad:

$$\text{reduce}(+, [1, 4, 9, 16]) = 30$$

. V paradigmata MapReduce *reduce* bere na vstupu klíč a seznam hodnot a vrací opět seznam dvojic klíč-hodnota, přesněji:

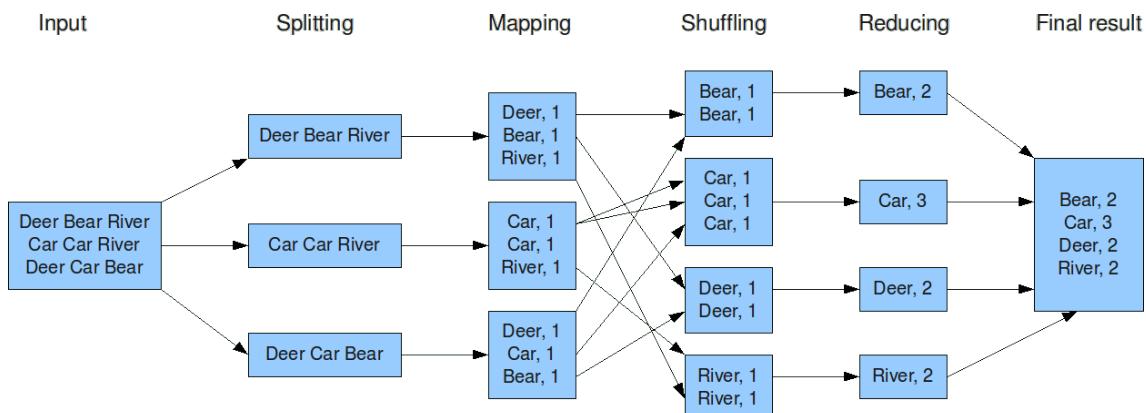
$$\text{reduce}(\text{key}, [\text{value}]) \rightarrow [(\text{key}, \text{value})]$$

```

1 def map(input_key: str, input_value: str) -> list[tuple[str, int]]:
2     # input_key - document name
3     # input_value - document content (etc. line)
4     result = []
5     for word in input_value.split(' '):
6         result.append((word, 1))
7     return result
8
9 def reduce(input_key: str, input_value: list[int]) -> tuple[str, int]:
10    result = 0
11    for val in input_value:
12        result += value
13    return (input_key, result)

```

Výpis 6.1: Příklad implementace funkcí *map* a *reduce* v paradigmatu MapReduce pro počítání četnosti slov ve vstupu v Pythonu.

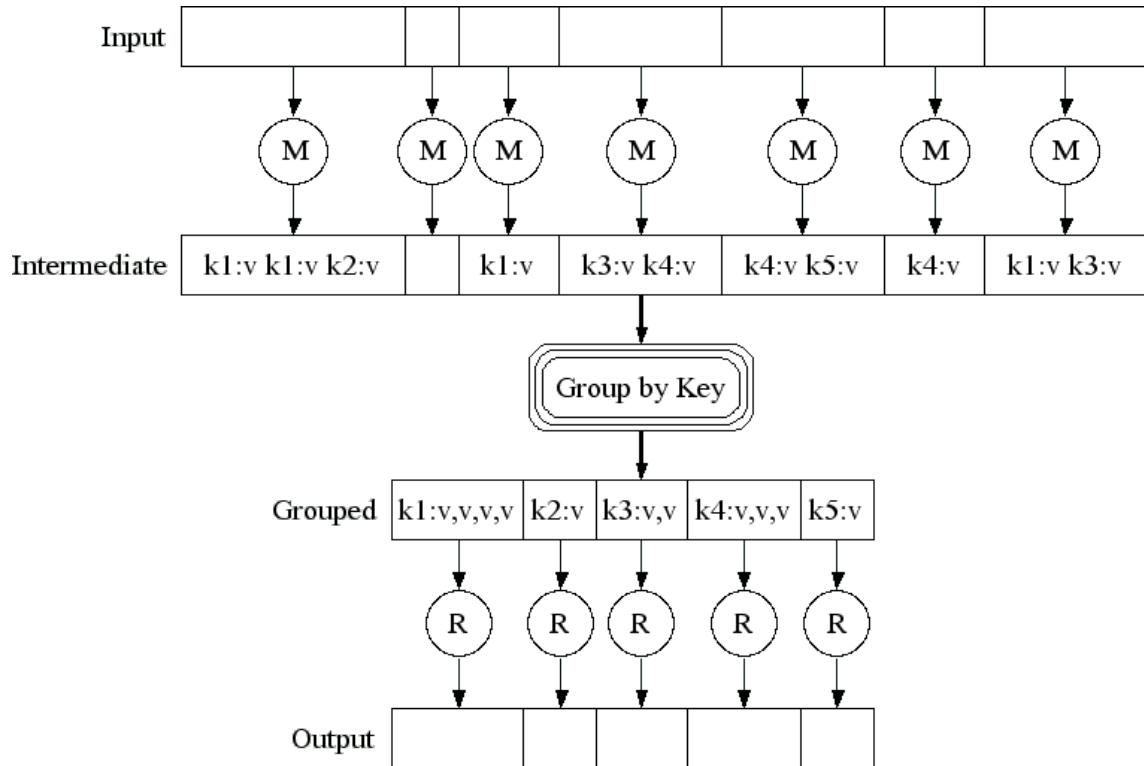


Obrázek 6.1: Úloha počítání četnosti slov v paradigmatu MapReduce v diagramu.

**Průběh MapReduce** Celý MapReduce probíhá v několika krocích, viz obrázek 6.1.

1. Input – Přípravený vstup pro distribuovaný výpočet (např. soubory ve virtuálním distribuovaném souborovém systému, viz dále HDFS).
2. Splitting – Rozdelení vstupu na části, které budou přiděleny jednotlivým uzlům. Může být výchozí (např. rozdelení textového souboru po řádcích) nebo definováno uživatelem.
3. Mapping – Každý uzel aplikuje funkci *map* na svoji přidělenou část. Uživatel definuje jak má funkce *map* vypadat.
4. Shuffling (také Grouping, Partitioning, Comparing) – Výpočetní uzly si mezi sebou vyměňí hodnoty, které spočítaly, na základě klíče. Tento krok zařizuje platforma pro distribuovaný výpočet sama o sobě, typicky na základě hashů klíčů. Tento krok je většinou *bottleneck*.

5. Reducing – Každý uzel zapojený do tohoto kroku (často je v tomto kroku potřeba méně uzlů, než v kroku mapping) aplikuje funkci *reduce* na svoji přidělenou část. Uživatel definuje jak má funkce *reduce* vypadat.
6. Final Result – Finální výsledek (např. zapsán do do virtuálního distribuovaného souborového systému, viz dále HDFS).



Obrázek 6.2: Výpočet MapReduce v obecném schématu.

**Combiner** Optimalizační krok, jde o „jakési“ provedení operace *reduce* už ve fázi *map* (každým uzlem). Tím je snížen počet mezivýsledků ve fázi Shuffling. Typicky funkce *combine* je stejná jako *reduce*.

**Virtuální distribuovaný souborový systém** Pro realizaci distribuovaného výpočtu je rovněž potřeba distribuovaný souborový systém (DFS). Ten je typicky realizován jako virtuální souborový systém nad jednotlivými souborovými systémy uzlů. Např.: GFS – Google File System, HDFS – Hadoop File System (viz dále). DFS obsahuje data samotná (*data nodes*) a metadata o tom, která data jsou na jakých uzlech (*name nodes*).



Obrázek 6.3: Výpočet MapReduce v obecném schématu a rozdělením práce na jednotlivé uzly (uzel je typicky víceprocesorový).

## 6.4 Apache Hadoop

Apache Hadoop je *open-source* implementace MapReduce paradigmatu vyvíjená Apache Software Foundation. Jde o implementaci v Java, ta je vhodná, jelikož díky JVM (Java Virtual Machine) je spouštění uživateli definovaných funkcí *map* a *reduce* snadné.

**Hadoop MapReduce** – Implementace MapReduce paradigmata. Data jsou čtena a ukládána na HDFS (včetně mezivýsledků). To znamená, můžeme pracovat v podstatě neomezenými daty, ale ukládání a načítání výpočet zpomalují.<sup>1</sup>

**HDFS** HDFS (*Hadoop Distribute File System*) je virtuální distribuovaný souborový systém. Standardní soubor je rozdělen na datové bloky které jsou distribuovány na různé datové uzly. Architektura HDFS se skládá ze dvou typů uzlů – Name Node a Data Node. Name Node obsahuje alokační tabulkou pro souborový systém. Ví které datové bloky patří kterému souboru a kde jsou uloženy. Obsahuje další metadata jako názvy souborů, cesty, ... Data Node obsahuje datové bloky. Typicky redundancy a replikace, počítá se s možným selháním uzlů. Pro **čtení dat** se klient zeptá Name Nodu na konkrétní soubor v HDFS. Name Node vrátí metadata o souboru, na jakých Data Nodech se vyskytuje. Klient požádá příslušné Data Nody, ty mu pošlou data, která se na klientovi „poskládají“ do výsledného souboru. Pro **zápis dat** se klient zeptá Name Nodu, kam by měl zapisovat. Klient zapíše na příslušný Data Node. Data Node poté vyřeší replikace s dalšími uzly.

<sup>1</sup> Nebylo přednášeno podrobněji, pravděpodobně stačí princip obecného MapReduce, který byl vysvětlen v předchozí sekci.

**Hadoop YARN** Hadoop YARN je plánovač (*scheduler*). Plánuje výpočet tak, aby proběhl co nejlepším způsobem na konkrétní distribuované architektuře. Plánovač má obecné obecné rozhraní a Hadoop YARN lze nahradit za jiný.

**Hadoop Common** Hadoop Common jsou další knihovny a ovladače pro klienty.

**Další nástroje** Nad Apache Hadoop existuje mnoho dalších nástrojů. Apache Pig pro *high level* programování map-reduce úloh. Apache Hive pro dolování dat nad Apache Hadoop. Apache HBase jako distribuovaná databáze nad Apache Hadoop, ...

## 6.5 Apache Spark

Apache Spark je *open-source* nástroj pro distribuované zpracování rozsáhlých dat vyvíjený Apache Software Foundation. Hlavní cíl je zvýšení rychlosti. Spark na to jde přesunutím co nejvíce výpočtů do operační paměti jednotlivých uzlů a tím pádem zminimalizovat počet zápisů a čtení z DFS (snaha odstranit *bottleneck* v kroku shuffling u Hadoopu). Tím ale vzniká jiný problém, a sice výpadek uzlu znamená, že data jsou ztraceny.



Obrázek 6.4: Architektura Apache Spark. Hlavní je Spark Core, zbytek funguje na systému pluginů a může používat HDFS, Hadoop YARN a Hadoop Common.

**Resilient Distributed Dataset** Resilient Distributed Dataset (RDD) je základní datová struktura Sparku. Jedná se o typované kolekce n-tic, které jsou neměnné (*read only*). Vstup je transformován na RDD a každá operace je pak transformace jednoho RDD na jiné.

$$RDD_1 \rightarrow map() \rightarrow RDD_2 \rightarrow reduce() \rightarrow RDD_3$$

**Strategie vyhodnocování** Spark uplatňuje strategii vyhodnocování *lazy evaluation*. Vyhodnocování výrazu je odkládáno až do doby, dokud není potřeba jeho hodnota. Zabraňuje opakování vyhodnocování. Je vyhodnocována pouze ta část, která je potřeba. RDD funguje jako abstraktní datová struktura, nemusí obsahovat data uvnitř, ale pouze předpis jak data získat a získá je, až když jsou potřeba.

**Struktura výpočtu** Struktura výpočtu odpovídá orientovanému acyklickému grafu (DAG, *Directed Acyclic Graph*). Uzly jsou RDD a hrany jsou transformace. DAG je znám i dalším uzlům, takže pokud nastane výpadek uzlu a výpočet je ztracen, může být uzel snadno zastoupen.

**Klíčové vlastnosti** Klíčové vlastnosti Sparku jsou *lazy evaluation*, *in-memory* a *parallel computing*.



Obrázek 6.5: Příklad výpočtu v Apache Spark.

# Kapitola 7

**Symetrická kryptografie. Vlastnosti, vlastnosti bezpečného algoritmu, délka klíče, útok silou, příklady symetrických algoritmů, Feistelovy šifry, DES, režimy činnosti, proudové šifry.**

## 7.1 Metadata

- Předmět: Kryptografie (KRY)
- Přednáška:
  - 3) Symetrická kryptografie. Vlastnosti, vlastnosti bezpečného algoritmu, délka klíče, útok silou.
  - 4) Příklady symetrických algoritmů, Feistelovy šifry, DES, struktura, činnost, slabiny, režimy činnosti.
  - 5) Typické aplikace symetrické kryptografie.
- Záznam:
  - 2021-02-22

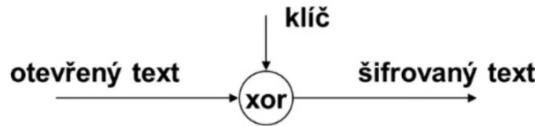
## 7.2 Úvod a kontext

**Caesarova šifra** Princip Caesarovy šifry je založen na tom, že všechna písmena zprávy jsou během šifrování zaměněna za písmeno, které se abecedně nachází o pevně určený počet míst dále (tj. posun je pevně zvolen). Caesarova šifra spadá do kategorie substitučních šifer (stejný znak je při více výskyttech vždy zašifrován na stejný znak).

**Vigenerova šifra** Rozšíření Caesarovy šifry, klíč je delší než 1 znak. Klíč je řetězec, který reprezentuje posuny. V případě že vstup je delší než klíč, je klíč perioricky opakován. Vigenerova šifra spadá do kategorie polyalfabetických substitučních šifer (stejný znak může být při více výskyttech zašifrován na jiný znak).

**Vernamova šifra (One Time Pad)** Vernamova šifra spadá do kategorie polyalfabetických substitučních šifer a je i dnes nerozluštitelná pokud:

- klíč je delší než vstupní text,
- klíč se nepoužije opakováně,
- klíč je náhodný.



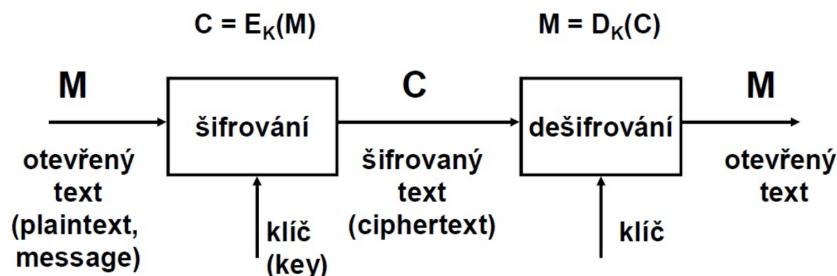
Obrázek 7.1: Vernamova šifra.

**Autoklíč (autokey)** Šifrování klíčem a když vstupní text je delší než klíč, tak se pokračuje šifrováním otevřeným nebo šifrovaným textem. Lze použít u Vigenerovy nebo Vernamovy šifry.

**Symetrická kryptografie** Algoritmy používají k šifrování i dešifrování stejný klíč. Výhodou symetrických šifer je jejich nízká výpočetní náročnost. Asymetrické šifry mohou být i stotisíckrát pomalejší. Nevýhodou je nutnost sdílení tajného klíče, takže jedna strana musí klíč vygenerovat a potom ho bezpečným způsobem předat druhé straně.

### Typy útoků

- Ciphertext Only Attack (COA) – Útočník zná pouze zašifrovaný text a snaží se zjistit klíč nebo otevřený text. Nejčastější případ.
- Known Plaintext Attack (KPA) – Útočník zná zašifrovaný text a otevřený text a snaží se zjistit klíč.
- Chosen Plaintext Attack (CPA) – Útočník zná to co v KPA a navíc si text může zvolit.
- Brute force – Útok silou, zkouší se všechny možné klíče, dokud se nenajde ten správný.



Obrázek 7.2: Princip kryptografie, podle typu klíčů dělíme na symetrickou (tajný klíč) a asymetrickou (veřejný klíč, soukromý klíč).

**Bezpečný algoritmus** V moderní kryptografii je nepřijatelné utajování algoritmů (*security by obscurity*) – předpokládáme, že útočník zná šifrovací algoritmus. Bezpečnost musí záviset pouze na utajení klíče (Kerckhoffuv princip, *security by design*). Symetrický algoritmus je považován za bezpečný, pokud neexistuje rychlejší útok než útok silou.

**Délka klíče** Dnes je považováno 80 bitů a více za dostačné. Typicky se délka zaokrouhuje na mocninu 2. Klíče symetrických algoritmů jsou kratší než asymetrických. Konkrétně: DES – 56b, 3DES – 112, AES – variabilní.

**Využití** Symetrická kryptografie je vhodná pro šifrování většího objemu dat. Narozdíl od asymetrické, která je pro tento účel příliš pomalá. Proto např. HTTPS využívá asymetrickou kryptografií pro výměnu symetrických klíčů a poté symetrickou kryptografií pro šifrování provozu.

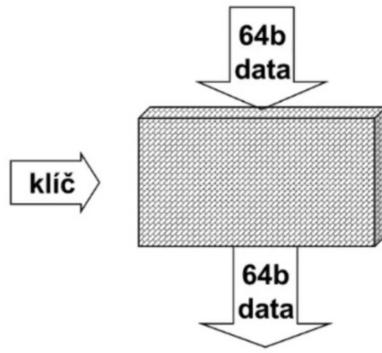
### Vlastnosti moderní kryptografie

- Důvernost – Utajení informace. Bez znalosti klíče, není možné data číst.
- Autentizace – Prokázání, že zprávu skutečně poslal odesílatel a nikoliv útočník, který se za odesílatele vydává.
- Integrita – Prokázání, že nikdo nemohl data po cestě od odesílatele k příjemci změnit. Ochrana proti neoprávněné, neodhalené modifikaci zprávy.
- Nepopiratelnost – Pokud odesílatel data poslal, nemůže tuto skutečnost popřít.

## 7.3 Blokové šifry

Blokové šifry šifrují data po blocích pevně stanovené délky (64b, 128b, 256b, ...). Pokud je dat více, rozdělí se na více bloků, přičemž do zbylého místa v posledním je umístěno zarovnání *padding* (informace o délce zarovnání může být obsažena v posledním bytu). Příklady blokových šifer:

- Feistelova šifra (spíše princip)
- Data Encryption Standard (DES)
- Triple Data Encryption Algorithm (3DES)
- International Data Encryption Algorithm (IDEA)
- Blowfish
- Tiny Encryption Algorithm (TEA)
- Advanced Encryption Standard (AES)



Obrázek 7.3: Princip blokových šifer.

### Feistelova šifra

Feistelova šifra (Feistelův princip) je koncept šifrování, který konkrétní algoritmy využívají. Jedná se o substituční-permutační síť'. Vstupní blok je rozdělen na dvě poloviny  $L$  a  $R$ , výpočet výstupu pak vypadá následovně.

$$L_i = R_{i-1} \quad (7.1)$$

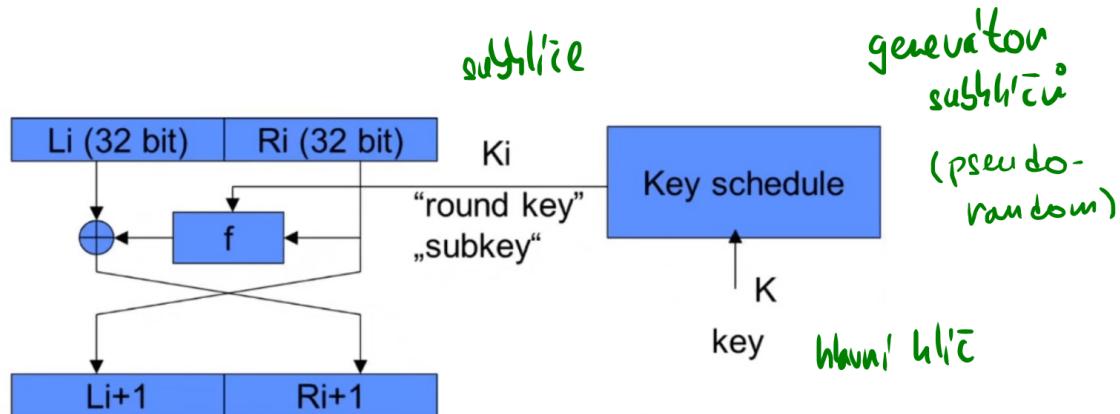
$$R_i = L_{i-1} \oplus F(R_{i-1}, K_i) \quad (7.2)$$

**Funkce  $F$**   $F$  je funkce, na kterou Feistelova šifra neklade žádné požadavky. Jednotlivé algoritmy, využívající Festelovu šifru, funkci samy definují. Požadavky na funkci  $F$ , aby algoritmus byl bezpečný:

- skrytí vlastností zprávy;
- skrytí vlastností zprávy.

**Subklíč**  $K$  je tzv. subklíč, který je generován typicky nějakým pseudonáhodným generátorem na základě inicializačního klíče (hlavní).

**Dešifrování** Dešifrování se provádí stejným způsobem, pouze pořadí subklíčů je opačné.



Obrázek 7.4: Jeden krok opakování (Feistelův krok) vizuálně.

## Příklad

9. Nakreslit a popísať Feistelovu šifru, napísať algoritmus ktorý to používa.

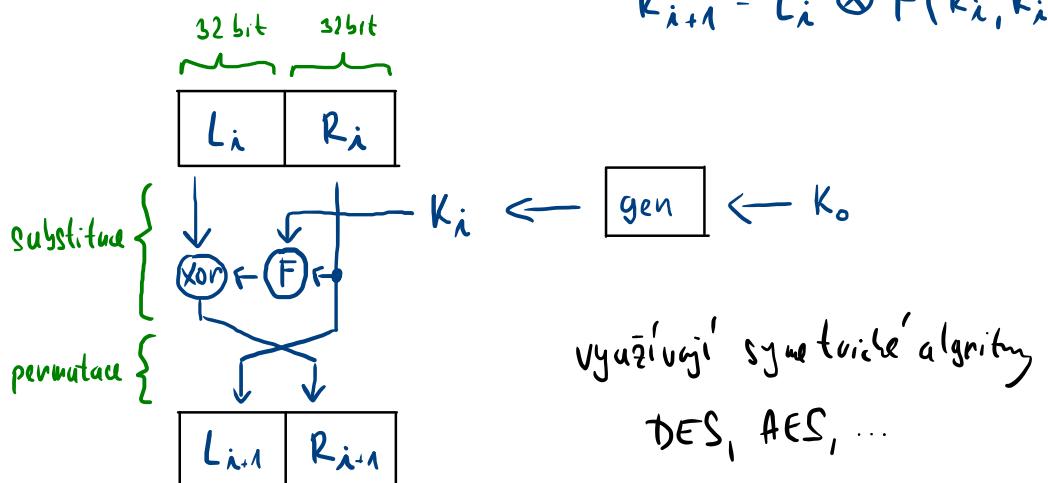
- Princip blokových symetrických šifier

- Vstup rozdelen na bloky o 64 bitach

↳ vstup rozdělen

$$L_{i+1} = R_i$$

$$R_{i+1} = L_i \otimes F(R_i, K_i)$$



Obrázek 7.5: Feistelova šifra – příklad a rekapitulace.

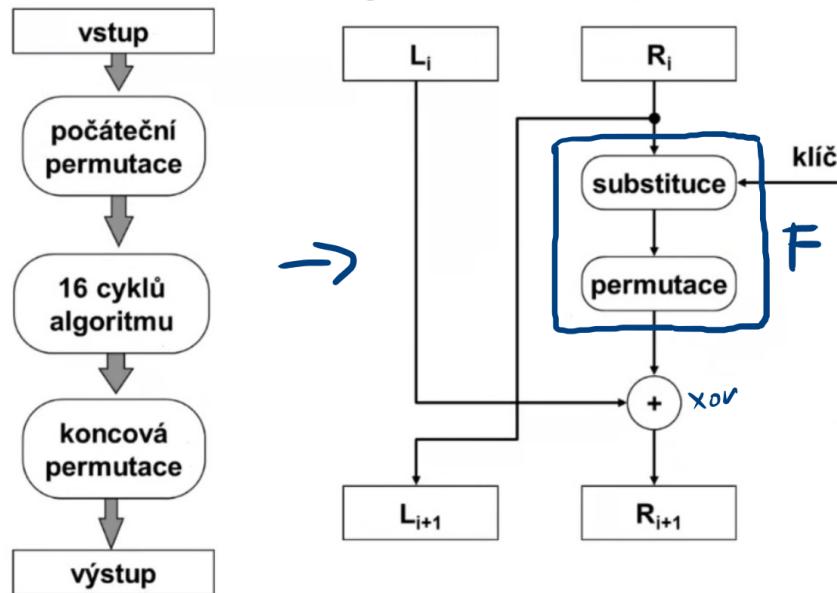
## Data Encryption Standard (DES)

DES byl první algoritmus s veřejnou specifikací (*security by design*). Využívá princip Feistelovy šifry – 16 kol. Dodatečně přidává na začátek a konec permutaci navíc. Klíč je dlouhý 64b (resp. 56 významových bitů a 8 paritních).

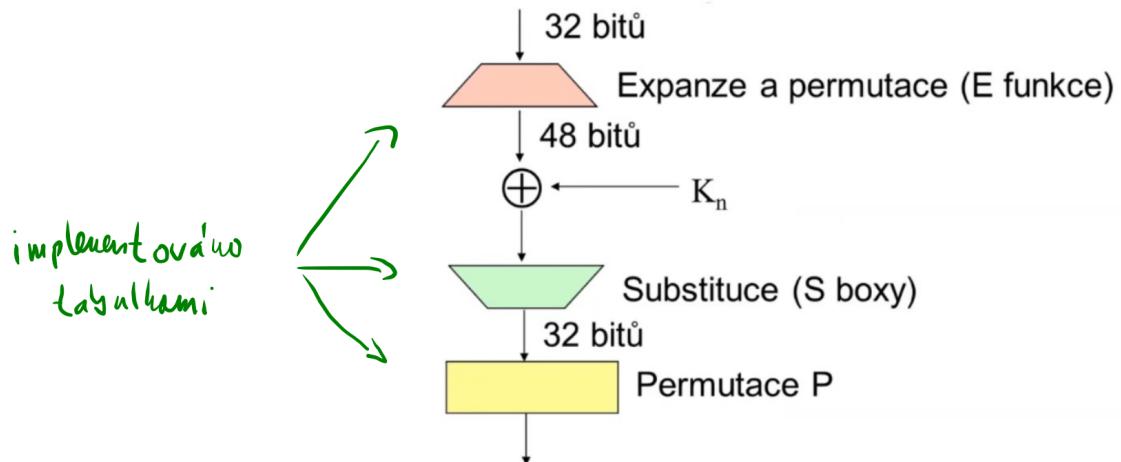
### Slabiny

- 56 bitový klíč je příliš krátky a je možný útok silou.
- Rozdílná velikost bloku a klíče (zvláštnost).
- Existence slabých a poloslabých klíčů.
- Není jasné proč zrovna 16 iterací a zda je to dostatečné.

jedna iterace



Obrázek 7.6: DES – Schéma fungování algoritmu.



Obrázek 7.7: DES – funkce F.



Obrázek 7.8: DES – generování subklíčů.

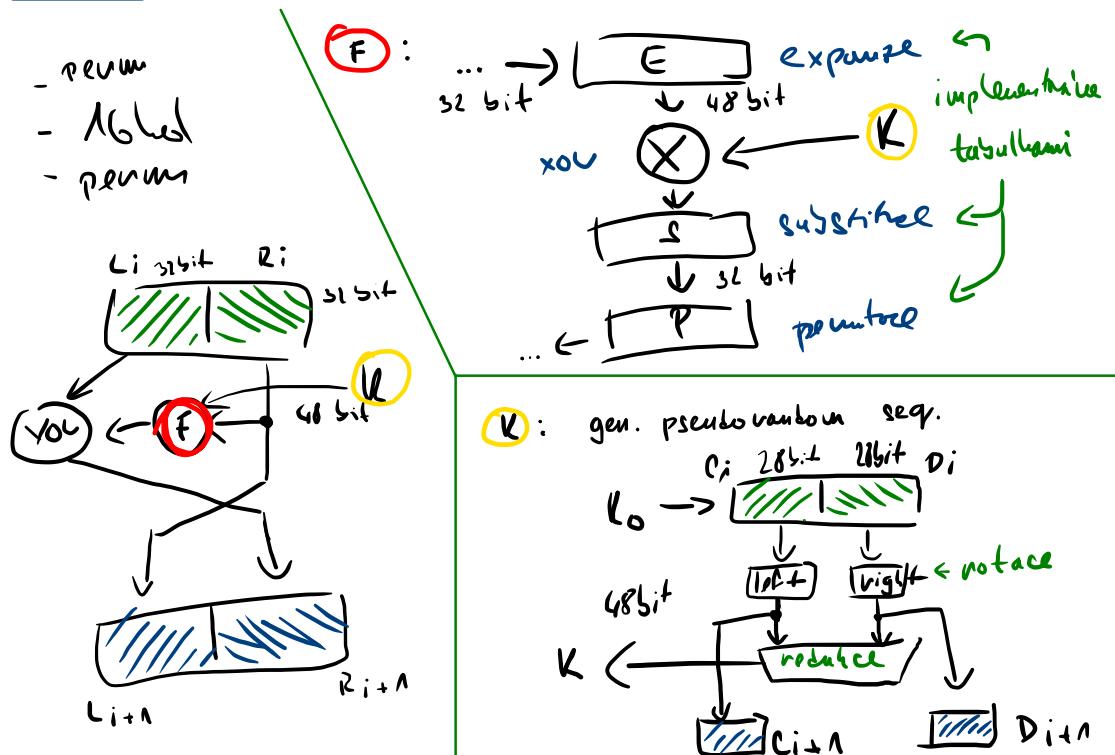


Figure 2.4 Single Round of DES Algorithm

Obrázek 7.9: DES – jedno kolo algoritmu. *Left shift* je ve skutečnosti bitová rotace.

## Příklad

3. Nakreslete schema DES, včetně key scheduler, popište všechny 3 části funkce F, jaký mají účel a napишите proč je treba pochybovat o bezpečnosti DESu



Obrázek 7.10: DES – příklad a rekapitulace.

## 7.4 Provozní režimy činnosti blokových šifer

Jak použít blokové šifry abychom byli schopni šifrovat data delší než jeden blok?

### Electronic Code Book (ECB)

ECB („kódová kniha“) je výchozí *naivní* režim. Bloková šifra se při něm přímo aplikuje nezávisle na jednotlivé bloky, tedy při daném klíči odpovídá stejnemu bloku otevřeného textu stejný blok šifrového textu. To má nežádoucí důsledky z hlediska bezpečnosti, v datech zůstane původní struktura, např. šifrovaný obrázek je rozpoznatelný.



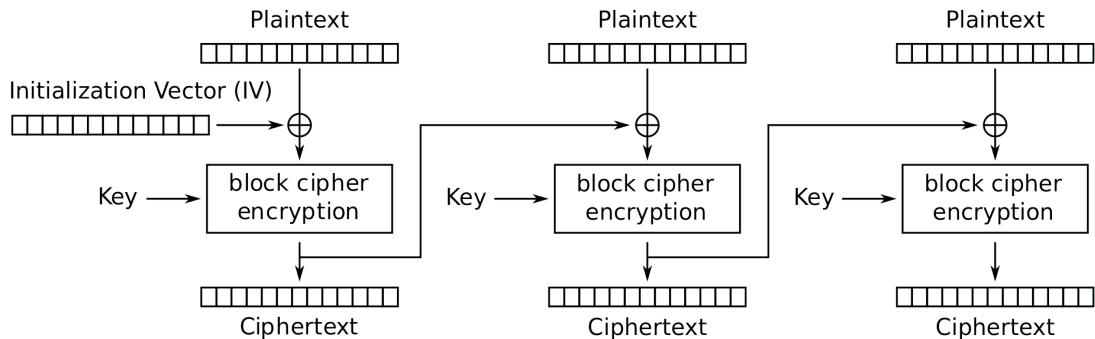
Electronic Codebook (ECB) mode encryption

Obrázek 7.11: Ukázka režimu ECB.

### Cipher Block Chaining (CBC)

V režimu CBC („řetězení šifrových bloků“) je každý blok před šifrováním xorován zašifrovaným předchozím blokem a první blok je xorován inicializačním vektorem. Tento režim je široce používán. Nevýhody plynou ze zřetězené závislosti (šifrový blok závisí na všech předcházejících): Šifrování nelze paralelizovat a při poškození šifrového bloku nelze dešifrovat ani blok přímo následující. Dešifrování paralelizovat lze.

$$\begin{aligned} C_i &= E_K(P_i \oplus C_{i-1}) \\ P_i &= D_K(C_i) \oplus C_{i-1} \\ C_0 &= IV \end{aligned} \quad (7.3)$$



Cipher Block Chaining (CBC) mode encryption

Obrázek 7.12: Ukázka režimu CBC.

### Cipher Feedback (CFB)

Režim CFB (šifrová zpětná vazba) je velmi podobný režimu CBC. Rozdíl je v prohození pořadí operací xor a šifrování – nejprve se zašifruje předchozí šifrový blok a výsledek se xoruje s otevřeným blokem. Toto prohození má významné implementační dopady: díky symetrii operace XOR vypadá dešifrovací funkce obdobně jako šifrovací. Šifruje pomaleji než CBC. Vstup není nutné zarovnávat. Plynou stejné nevýhody jako pro CBC.

$$\begin{aligned}
 C_i &= E_K(C_{i-1}) \oplus P_i \\
 P_i &= E_K(C_{i-1}) \oplus C_i \\
 C_0 &= IV
 \end{aligned} \tag{7.4}$$



Cipher Feedback (CFB) mode encryption

Obrázek 7.13: Ukázka režimu CFB.

### Output Feedback (OFB)

Režim OFB (*výstupní zpětná vazba*) se liší od CFB pouze v tom, kde bere zpětnou vazbu. Šifrování probíhá pouhým xorováním otevřeného bloku s heslem, které je v každém kroku zašifrováno použitou blokovou šifrou. První blok hesla je získán zašifrováním inicializačního vektoru. Režim převádí blokovou šifru na synchronní proudovou šifru.

**Slabina** Celý blok encryption je pouze generátor pseudonáhdon posloupnosti (je nezávislá na otevřeném nebo šifrovaném textu). To umožňuje Known Plaintext Attack. Z toho plyne, že jedním klíčem není bezpečné šifrovat více než jednu zprávu.

$$\begin{aligned}
 C_i &= E_K(C_{i-1}) \\
 P_i &= P_i \oplus C_i \\
 C_0 &= IV
 \end{aligned} \tag{7.5}$$



Obrázek 7.14: Ukázka režimu OFB.

### Counter (CTR)

Režim CTR („čítačový režim“) převádí stejně jako OFB blokovou šifru na synchronní proudovou. Heslo, se kterým se blok otevřeného textu xoruje, je však získáno zašifrováním čítače, který se každou iteraci zvětšuje o pevně danou hodnotu, zpravidla o 1. Obsah čítače je opět před šifrováním nastaven inicializačním vektorem. Každý blok je šifrován nezávisle na ostatních, díky tomu je možné paralelizovat.

$$\begin{aligned} CTR_i &= CTR_{i-1} + 1 \\ P_i &= P_i \oplus E_k(CTR_i) \\ CTR_0 &= IV \end{aligned} \tag{7.6}$$



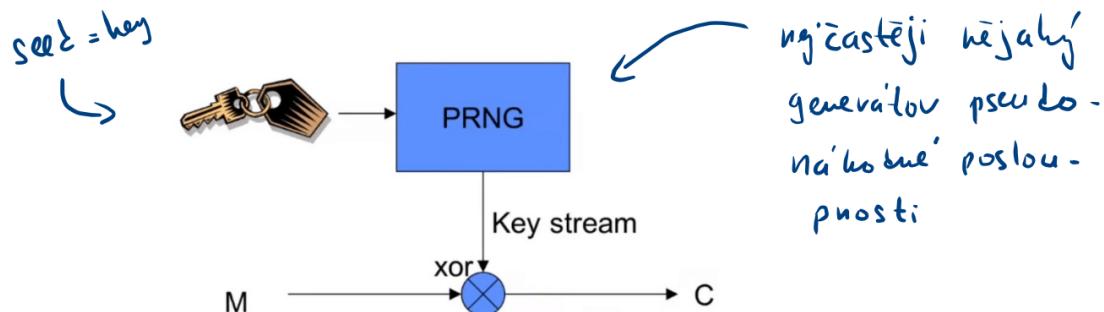
Obrázek 7.15: Ukázka režimu CTR.

## 7.5 Proudové šifry

Proudové šifry šifrují data jako *proud* (stream), nejčastěji po jednotlivých bytech. Dešifrování vždy probíhá stejným způsobem. Proudové šifry jsou rychlejší než blokové šifry a pro implementaci potřebují jednodušší hardware.

## Problémy

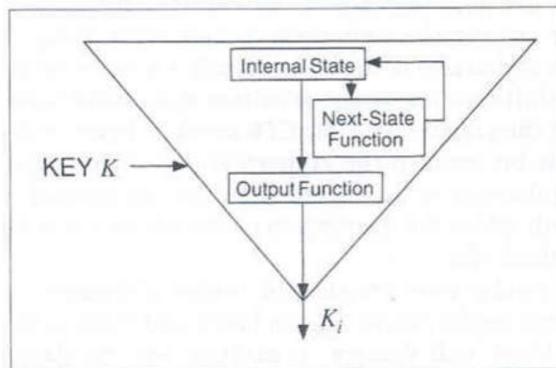
- Nezajišťují samy o sobě integritu.
- Na rozdíl od blokových šifer jsou náchylnější ke kryptoanalytickým útokům, pokud jsou nevhodně implementovány (počáteční stav nesmí být použit opakován) – „problém s inicializačním vektorem“.



Obrázek 7.16: Princip proudových šifer.

## Rozdělení proudových šifer

**Synchronní proudové šifry** Proud pseudonáhodných čísel *key stream* je generován nezávisle na vstupním textu nebo zašifrované zprávě. Poté dochází ke kombinaci vygenerovaných čísel se vstupujícím textem (k zakódování) nebo se šifrovaným textem (k dekódování). Nejběžnější formou kombinace keystreamu a vstupního textu je použití operace XOR. Např.: Vernamova šifra, DES v režimu OFB. Pokud se průběhu dešifrování něco ztratí, je konec.



Obrázek 7.17: Princip synchronní proudové šifry.

**Samosynchronizující proudové šifry** Proud pseudonáhodných čísel *key stream* závisí na pevném počtu předcházejících bytů šifrovaného (nebo otevřeného) textu. To znamená, že se šifra dokáže po chybě sama *zotavit* (resynchronize)<sup>1</sup>. Např.: Vigenere Autokey, DES v řežimu CFB.

<sup>1</sup>Dnes se nesnášíme dešifrovat poškozená data, pokud nastane chyba v přenosu, vyžádáme si data znova.



Obrázek 7.18: Princip samosynchronizující proudové šifry.

## Generátory PRNG

Generátory PRNG (*pseudo-random number generator*) generují pseudo-náhodnou posloupnost (*key stream*) z malého klíče (*seed*).

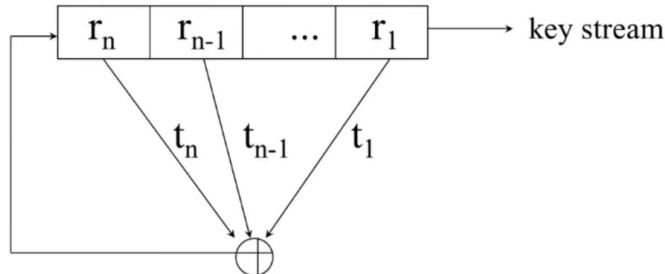
**Blokové šifry v režimu OFB** Blokové šifry v režimu OFB jsou pomalé.

**Linear Feedback Shift Registers (LSFR)** LFSR (posuvný registr s lineární zpětnou vazbou) je posuvný registr, jehož výstup je lineárně závislý na jeho předchozích výstupech a stavu. Mějme

- posuvný registr  $R = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ ,
- sekvenci zpětných vazeb  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

Alternativně lze zapsat polynomem:

$$T(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$



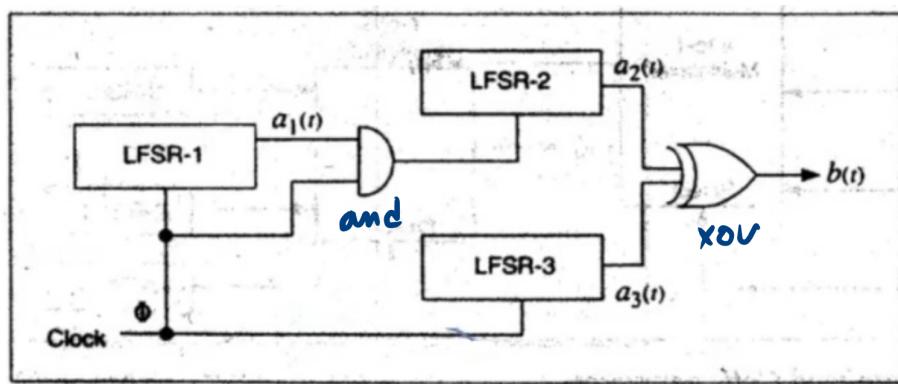
Obrázek 7.19: Příklad LFSR.

**Geffe generátor** Geffe generátor (kombinovaný generátor) je využití 2 a více LFSR propojených multiplexorem.



Obrázek 7.20: Příklad Geffe generátoru.

**Stop and Go generátor** Stop and Go generátor je několik LSFR s různým zdrojem hodin.



Obrázek 7.21: Příklad Stop and Go generátoru.