**Lemma 9.1** Pro neprázdné, konečné $\Sigma$ je množina $2^{\Sigma^*}$ nespočetná.

*Důkaz.* Důkaz provedeme tzv. diagonalizací (poprvé použitou Cantorem při důkazu rozdílné mohutnosti $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$).

- Předpokládejme, že $2^{\Sigma^*}$ je spočetná. Pak dle definice spočetnosti existuje bijekce $f : \mathbb{N} \longleftrightarrow 2^{\Sigma^*}$.
- Uspořádejme $\Sigma^*$ do nějaké posloupnosti $w_1, w_2, w_3, \ldots$, např. $\varepsilon$, $x$, $y$, $xx$, $xy$, $yx$, $yy$, $xxx$, ... pro $\Sigma = \{x, y\}$. Nyní můžeme $f$ zobrazit nekonečnou maticí:

$$\begin{array}{lcccccc} & w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_i & \ldots \\ L_0 = f(0) & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0i} & \ldots \\ L_1 = f(1) & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ L_2 = f(2) & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \ldots & & & & & & \end{array} \text{, kde } a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jestliže } w_j \notin L_i, \\ 1, \text{ jestliže } w_j \in L_i. \end{cases}$$

- Uvažujme jazyk $\overline{L} = \{w_i \mid a_{ii} = 0\}$. $\overline{L}$ se liší od každého jazyka $L_i = f(i)$, $i \in \mathbb{N}$:
  - je-li $a_{ii} = 0$, pak $w_i$ patří do jazyka,
  - je-li $a_{ii} = 1$, pak $w_i$ nepatří do jazyka.
- Současně ale $\overline{L} \in 2^{\Sigma^*}$, $f$ tudíž není surjektivní, což je spor.

$\square$