Potenciais e campos

Métodos computacionais II

Potencial elétrico

- Encontrando o potencial elétrico e o campo elétrico para em uma região do espaço:
  - A lei de Gauss nos diz que $$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
  - Mas sabemos que $$E = -\nabla V$$
  - E somos levados a equação de Poisson: $$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
  - Para um espaço livre de cargas, ela é conhecida como equação de Laplace $$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

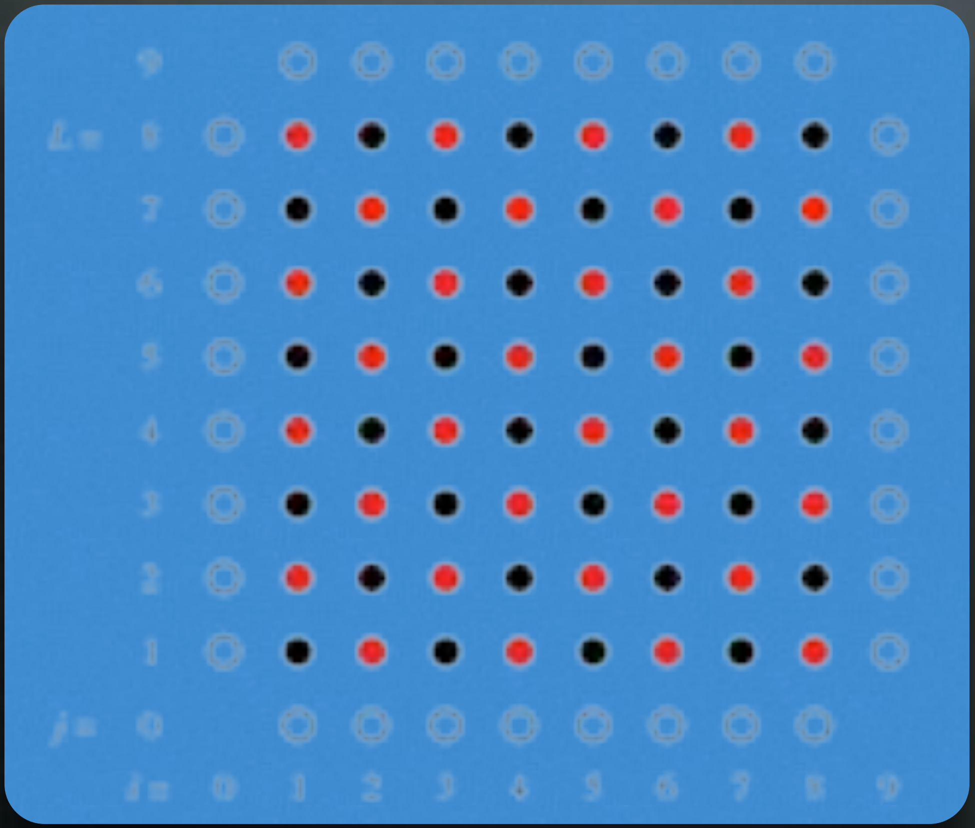
- Para encontrarmos o potencial elétrico em uma região sem cargas
- Precisamos das condições de contorno
- Equação diferencial parcial
    - Não valem os métodos numéricos usados para Eq. diferenciais ordinárias

Como proceder?

- Tentaremos discretizar sistema e reduzir nossa equação diferencial parcial a um sistema de equações algébricas.
- Para resolver o sistema de equações acopladas:
  - Método de relaxação

Como resolver?

Discretização: $x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$



Como resolver?

Discretização: $x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$

Derivada parcial: $$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V(i+1,j,k) - V(i,j,k)}{\Delta x}$$

ou... $$\frac{\partial V}{\partial x}(i - 1/2) = \frac{V(i,j,k) - V(i-1,j,k)}{\Delta x}$$

Usaremos a notação:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i + 1/2) = \frac{V(i+1,j,k) - V(i,j,k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i - 1/2) = \frac{V(i,j,k) - V(i-1,j,k)}{\Delta x}$$

Como resolver?

então

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial V(i+1/2)}{\partial x} - \frac{\partial V(i-1/2)}{\partial x}\right]$$

utilizando as definições dadas

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{V(i+1,j,k) + V(i-1,j,k) - 2V(i,j,k)}{\Delta x}\right.$$

Inserimos a expressão acima na eq. de Laplace (para x,y e z) assumindo que

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z$$

Solução

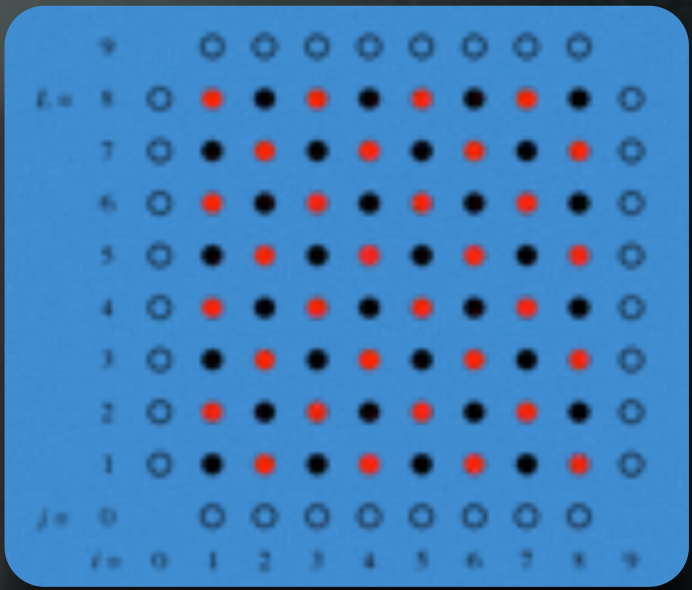
$$
\begin{aligned}
V(i,j) &= \frac{1}{6}[V(i-1,j,k) + V(i+1,j,k) + V(i,j-1,k) \\
&\quad + V(i,j+1,k) + V(i,j,k-1) + V(i,j,k+1)]
\end{aligned}
$$

- A solução de V(i,j,k) é uma média de V em todos seus vizinhos
- Essa condição deve ser satisfeita em todos os pontos
- Precisamos de uma estratégia numérica
  - Método de Jacobi
- Condições de contorno

Geometria e condição de contorno

Condições de contorno

- Dirichlet (fixa V)
- von Neumann (fixa derivada de V)



Estrutura do programa

- Chama sub-rotina inicial que nos dá as condições e contorno e um chute inicial para os valores de V(i,j)
- Chama sub-rotina laplace que calcula V(i,j) convergente
  - laplace chama outra sub-rotina atualiza que a cada passo atualiza o valor de V(i,j) e a variação dV em relação ao passo anterior
  - laplace para de chamar atualiza quando dV é muito pequeno, ou seja, houve convergência

Sub-rotina atualiza

- dV é a variação total de V durante a atualização
- inicialmente, dV=0
- loop por todos os pontos (i,j), excluindo a fronteira:
  - $V_{novo}(i,j) = \frac{1}{4}\left[V(i-1,j) + V(i+1,j) + V(i,j-1) + V(i,j+1)\right]$
  - adicionar $|V_{novo}(i,j) - V(i,j)|$ a dV
- retornar o valor de $V_{novo}(i,j)$ e dV

Sub-rotina laplace

- Inicia com um valor $V(i,j)$ dado.
  - ➡ Do chute inicial ou do passo anterior
- Chama atualiza para utilizar $V(i,j)$ para computar um chute melhorado $V_{novo}(i,j)$
- Chama atualiza novamente para armazenar $V_{novo}(i,j)$ na matriz $V(i,j)$
- Checa se dV é pequeno o suficiente. Se for, sai da sub-rotina

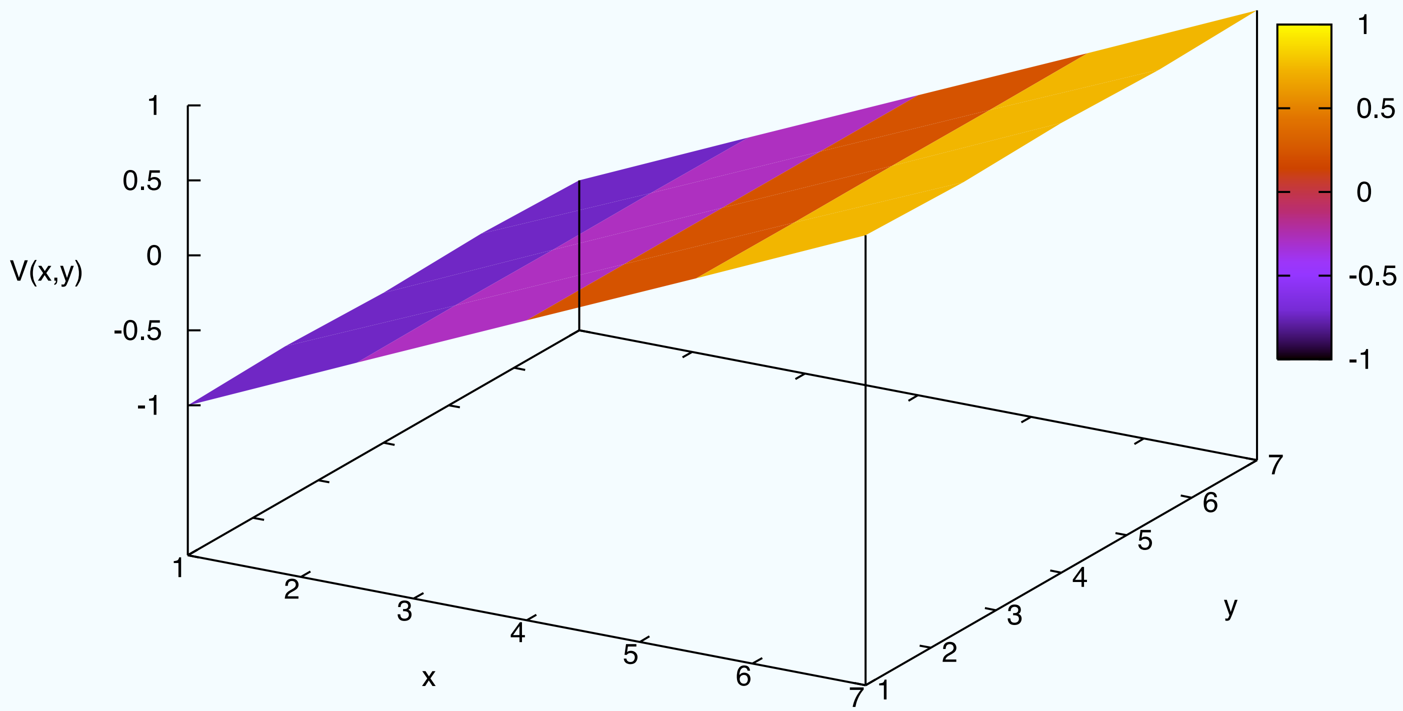
Campo elétrico

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

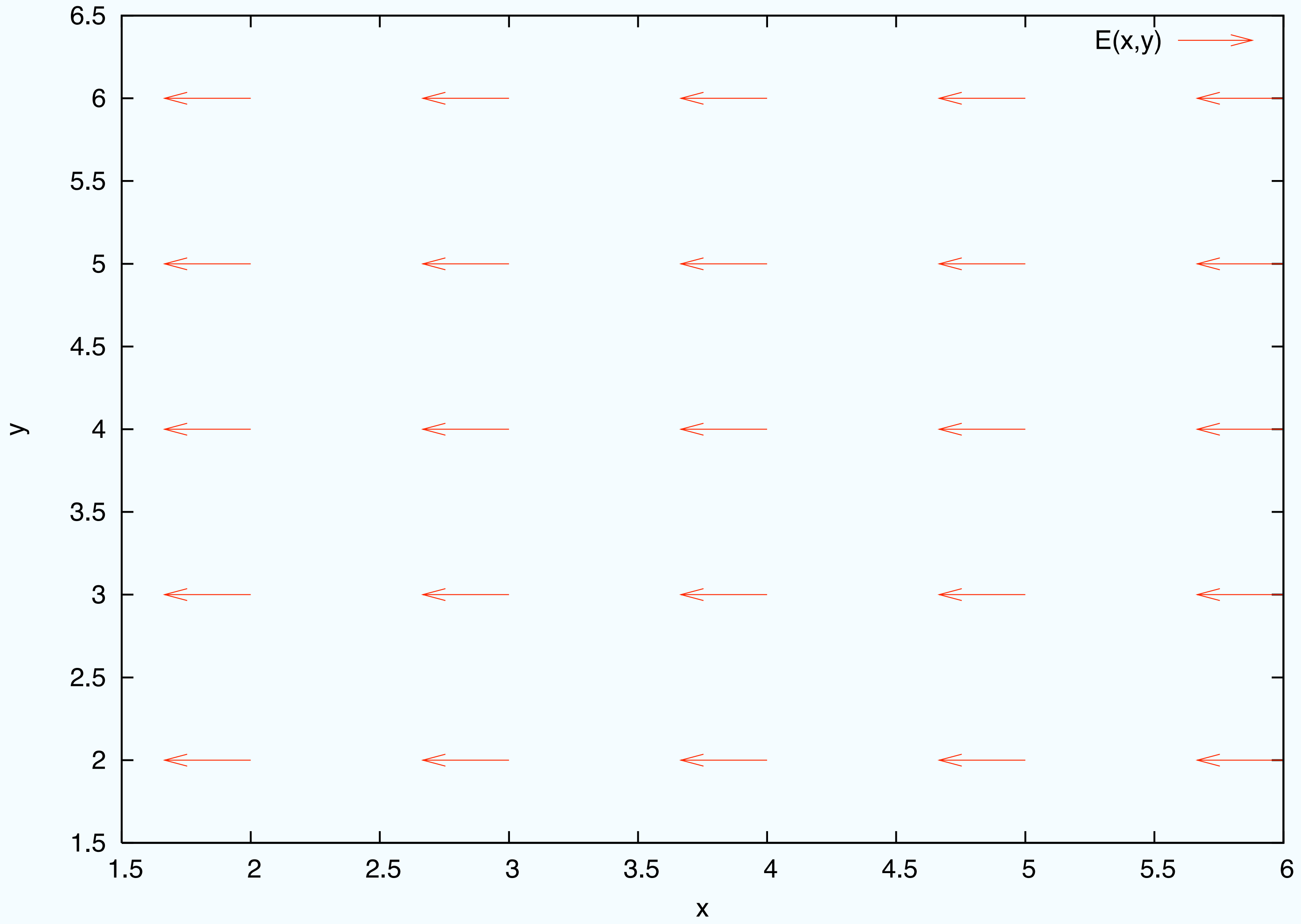
$$E_x(i,j) = -\frac{V(i+1,j) - V(i-1,j)}{2\Delta x}$$

$$E_y(i,j) = -\frac{V(i,j+1) - V(i,j-1)}{2\Delta x}$$

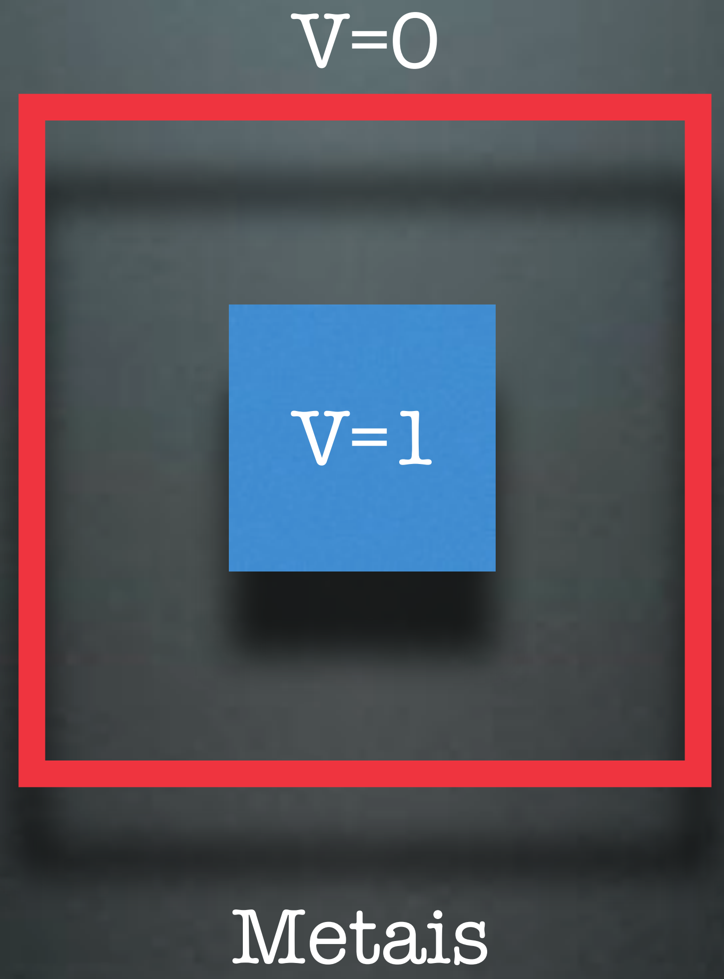
Potencial elétrico



Campo elétrico

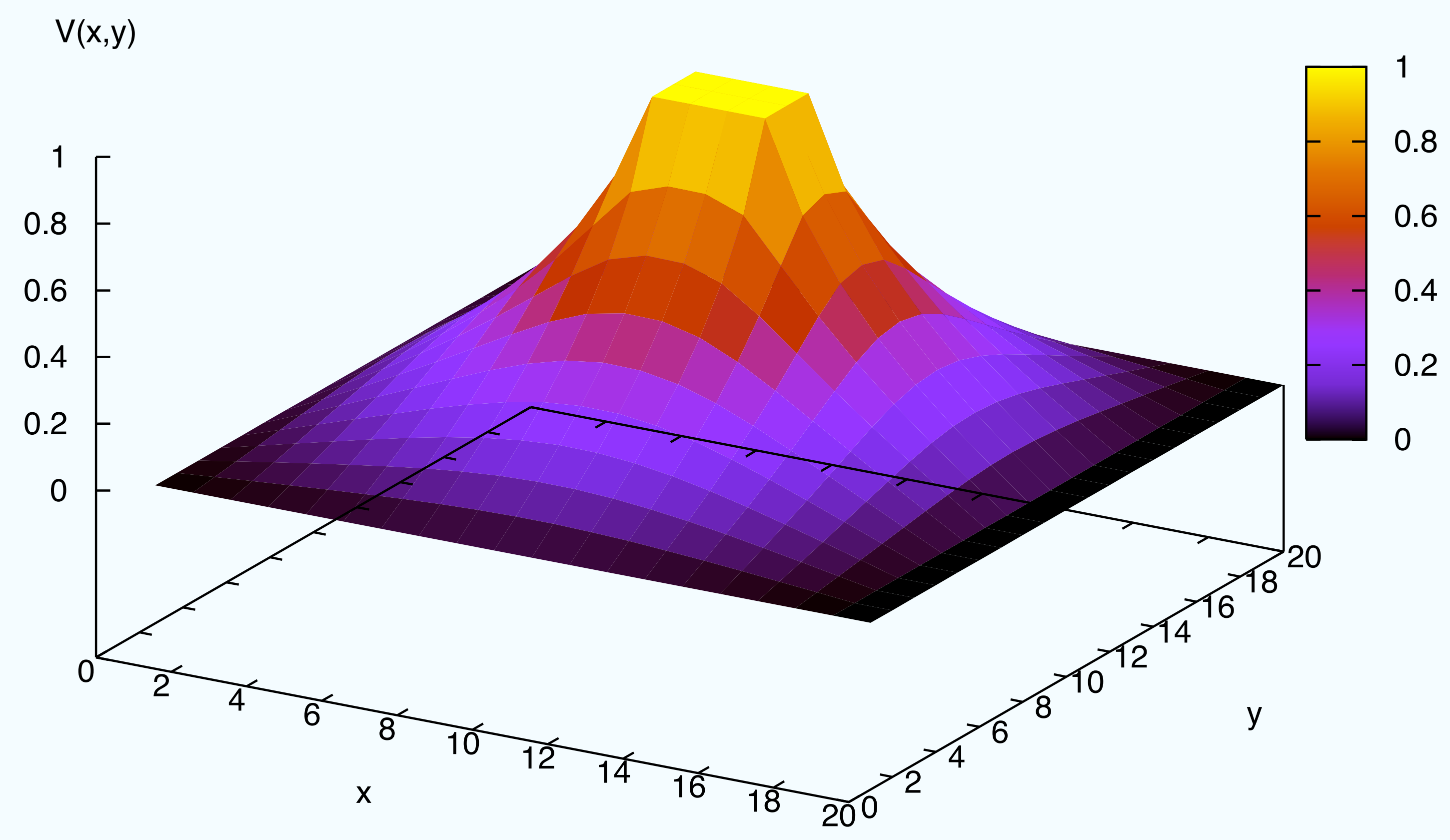


Outra condição de contorno

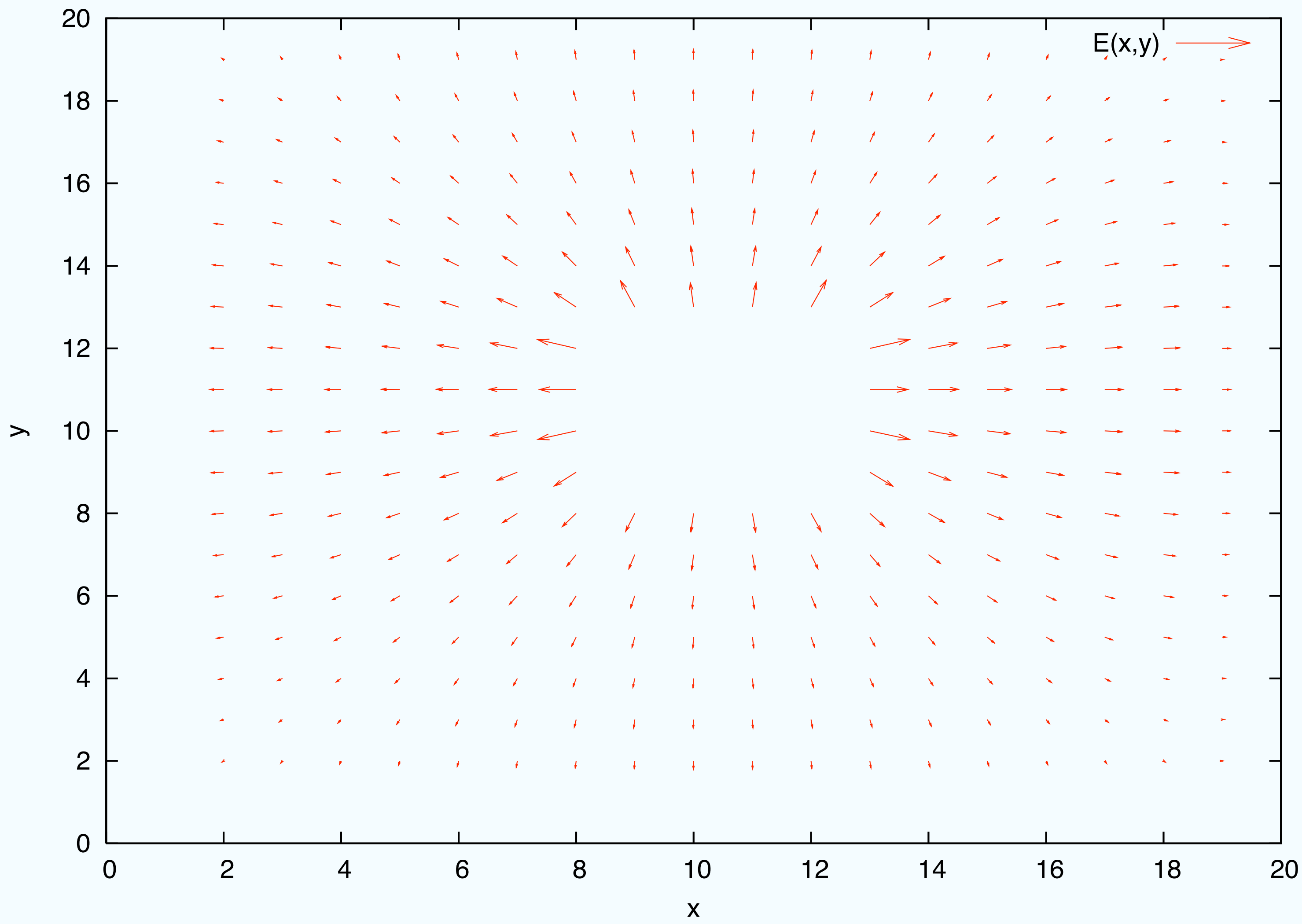


Mudar condições de contorno e atualiza

Potencial elétrico



Campo elétrico



Na presença de cargas

Potencial elétrico

- Encontrando o potencial elétrico e o campo elétrico para em uma região do espaço:
  - A lei de Gauss nos diz que $$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
  - Mas sabemos que $$E = -\nabla V$$
  - E somos levados a equação de Poisson: $$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
  - Para um espaço livre de cargas, ela é conhecida como equação de Laplace $$\nabla^2 V = 0$$

Equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Para encontrarmos o potencial elétrico em uma região com cargas
- Também é uma equação diferencial parcial
- Vale o método numérico usado para a equação de Laplace
  - Método de relaxação de Jacobi

Como resolver?

Discretização: $x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z$

Usaremos a notação:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i+1/2) = \frac{V(i+1,j,k) - V(i,j,k)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(i-1/2) = \frac{V(i,j,k) - V(i-1,j,k)}{\Delta x}$$

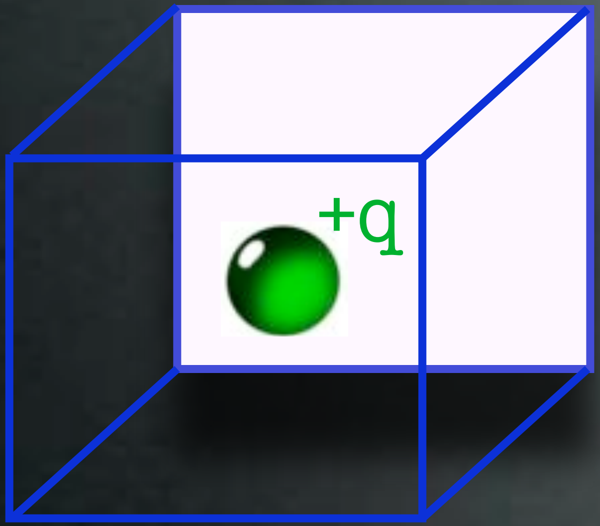
então $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial V(i+1/2)}{\partial x} - \frac{\partial V(i-1/2)}{\partial x}\right]$$

Solução

$$
\begin{aligned}
V(i,j) \quad = \quad & \frac{1}{6}[V(i-1,j,k)+V(i+1,j,k)+V(i,j-1,k) \\
& +V(i,j+1,k)+V(i,j,k-1)+V(i,j,k+1)] \\
& +\frac{\rho(i,j,k)(\Delta x)^2}{6\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

- A densidade de cargas é uma função da posição no grid.
- $\Delta x = \Delta y = \Delta z$
- O algoritmo funciona exatamente como no caso anterior.
- Ainda precisamos das condições de contorno

Geometria e condição de contorno



- Vamos trabalhar em 3D
- Primeiro exemplo:
  - Carga pontual no centro de uma caixa
  - $V=0$ nas faces

Principais mudanças

- Agora teremos arrays tridimensionais como V(i,j,k) e loops em i, j e k.
- Mudam as condições iniciais
- Muda a sub-rotina atualiza

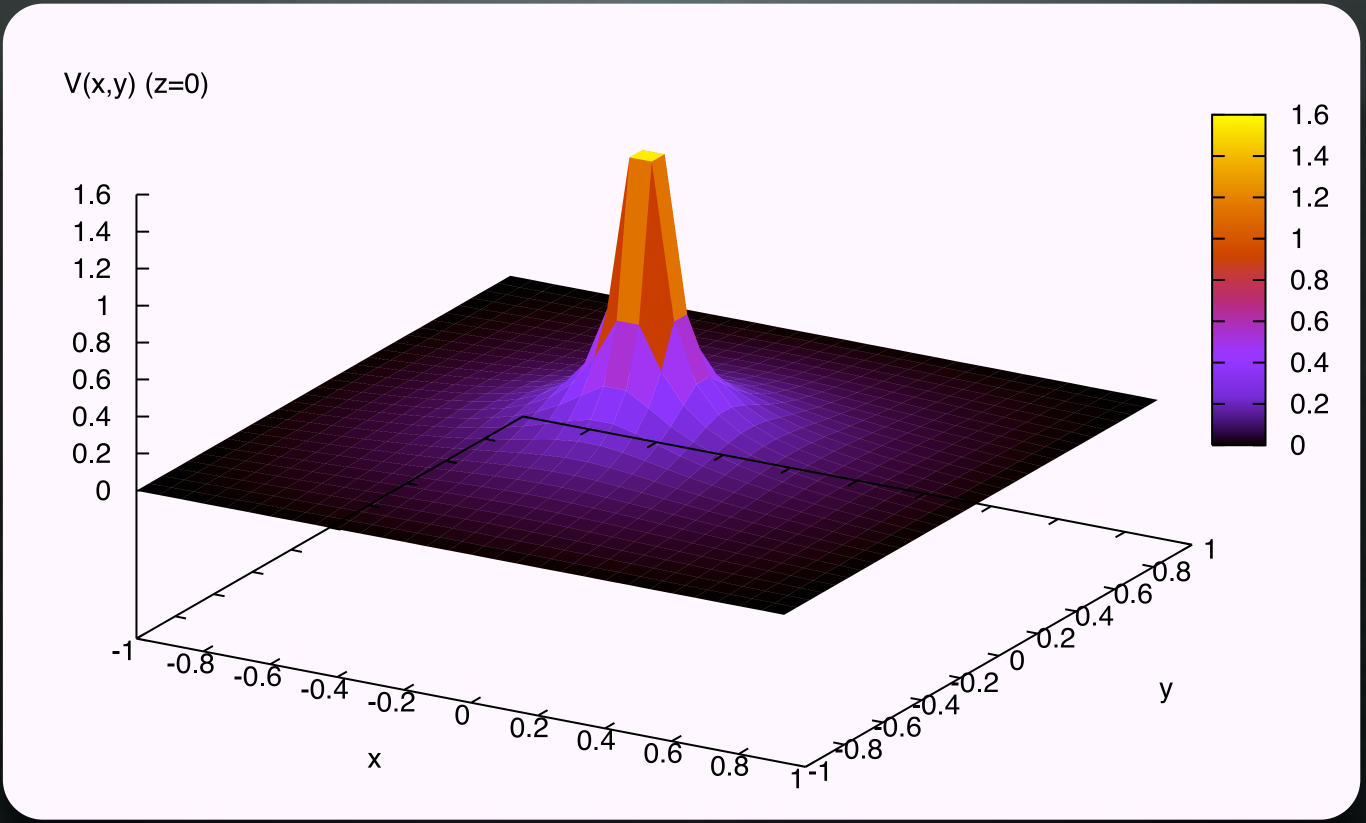
Sub-rotina atualiza

- loop por todos os pontos (i,j,k) excluindo a fronteira:
  - $$\begin{aligned} V_{novo}(i,j,k) &= \frac{1}{6}[V(i-1,j,k)+V(i+1,j,k)+V(i,j-1,k) \\ &+V(i,j+1,k)+V(i,j,k-1)+V(i,j,k+1)] \\ &+\frac{\rho(i,j,k)(\Delta x)^2}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$
  - Array ϱ(i,j,k) contém a densidade de carga por elemento do grid
  - No exemplo, ϱ(i,j,k)=0, exceto em $\varrho(0,0,0)=Q/dx^3$
  - adicionar $|V_{novo}(i,j,k) - V(i,j,k)|$ a dV

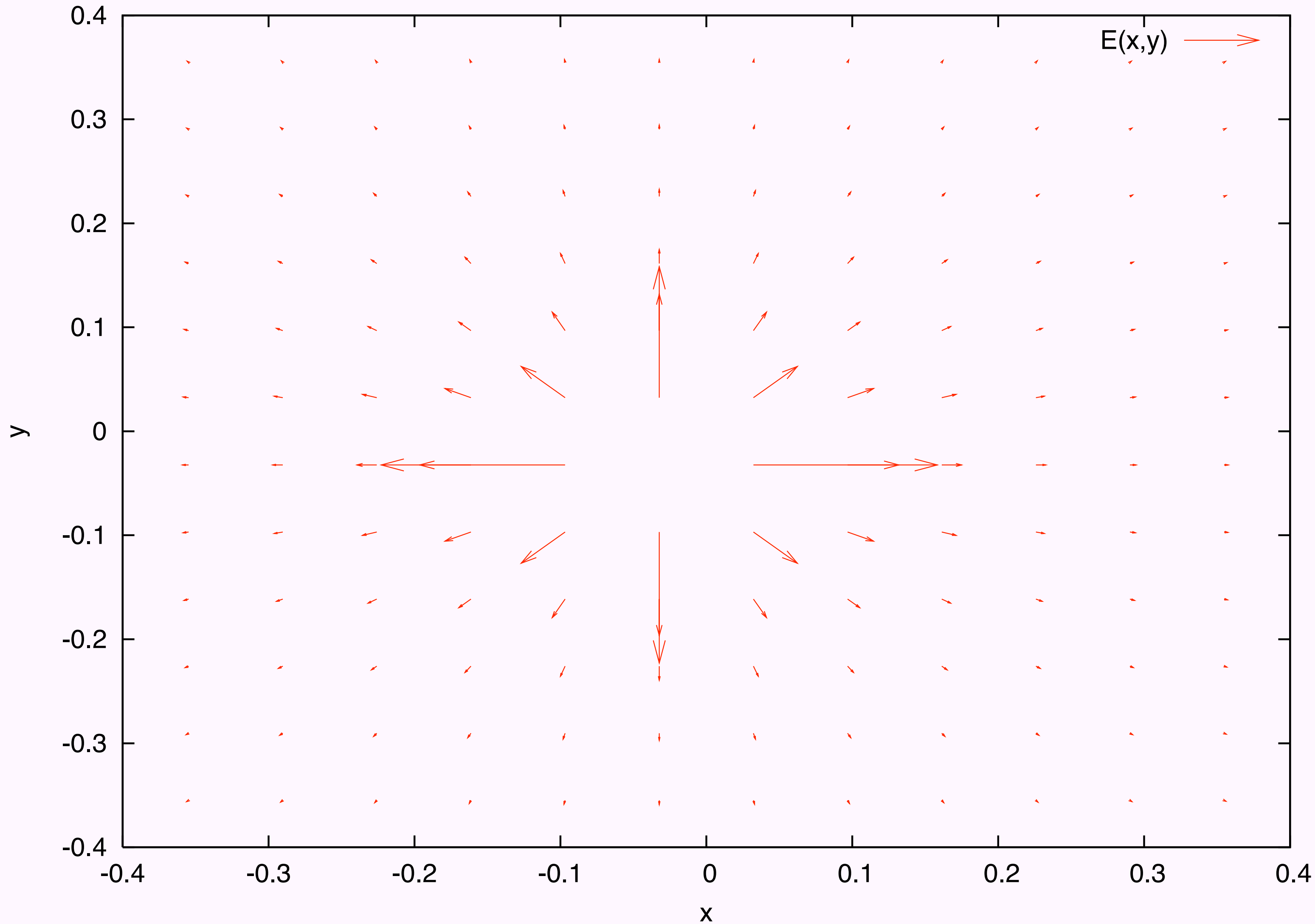
Resultados

- Agora temos campos e potenciais que dependem de 3 variáveis
- Visualização?
- Teremos que utilizar fatias de planos xy, por exemplo.

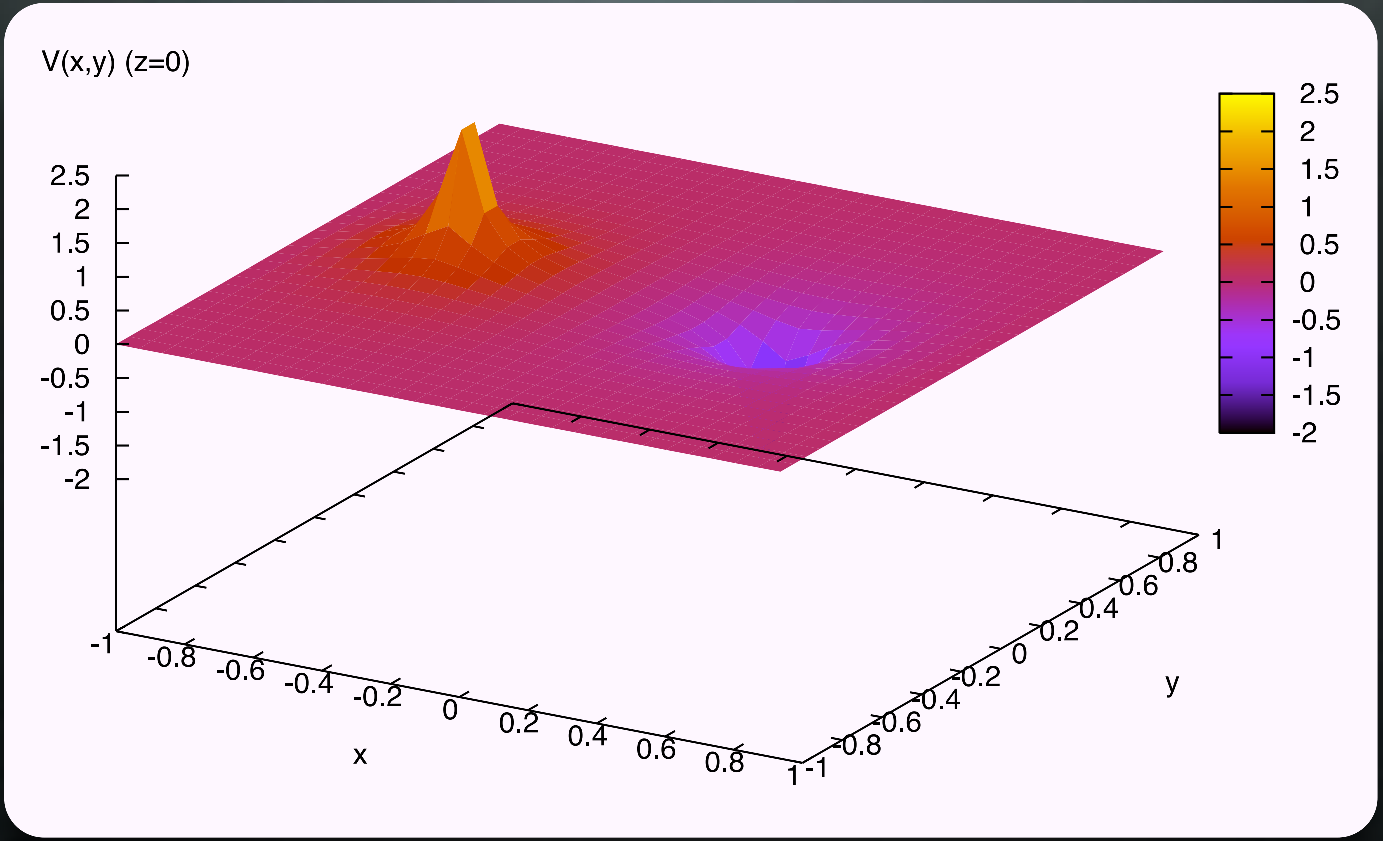
Potencial Elétrico



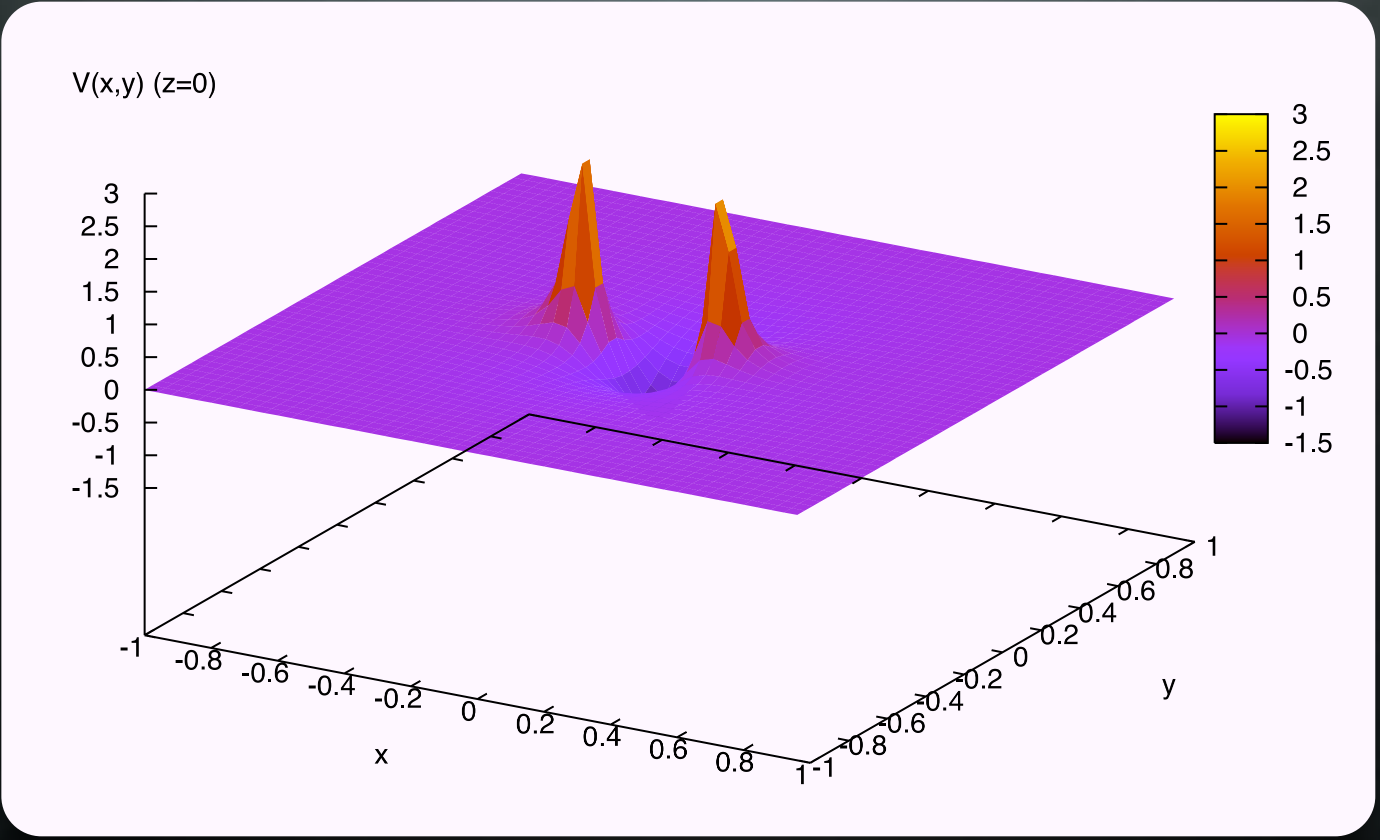
Campo Elétrico



Duas cargas (+q e -q)

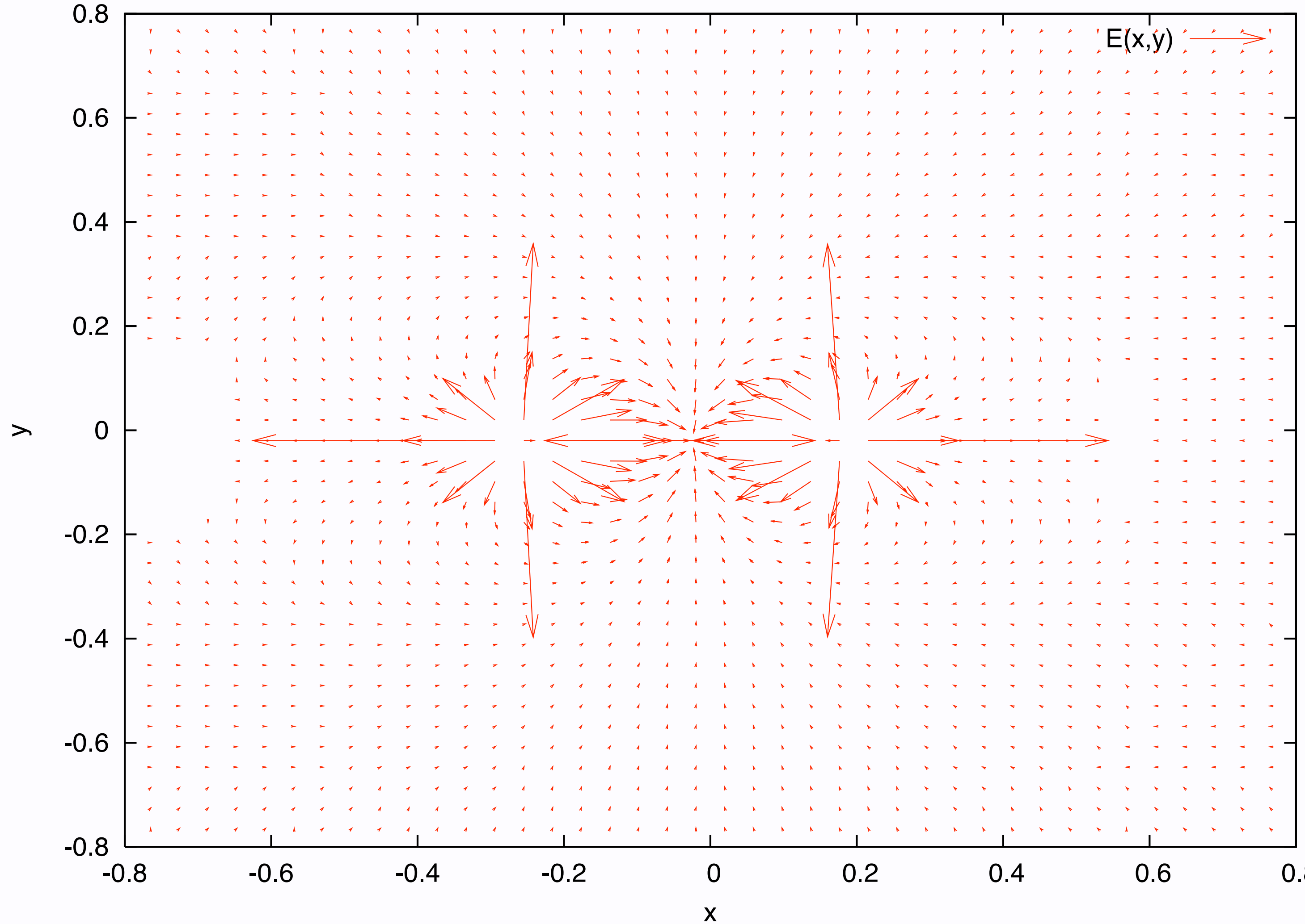


Três cargas

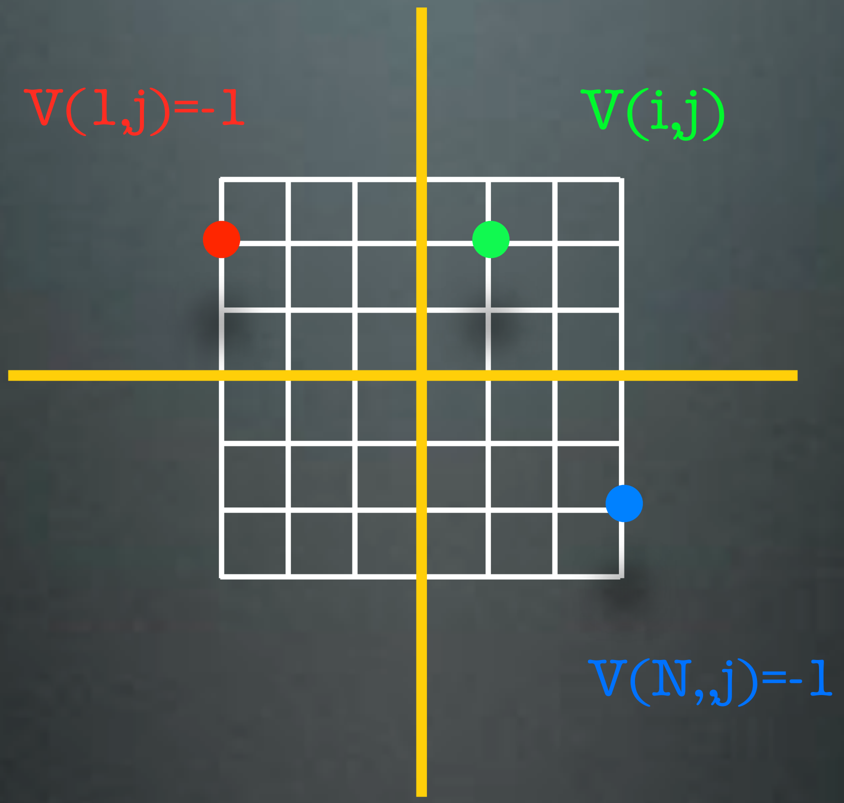


V(x,y) (z=0)
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
x
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Campo Elétrico



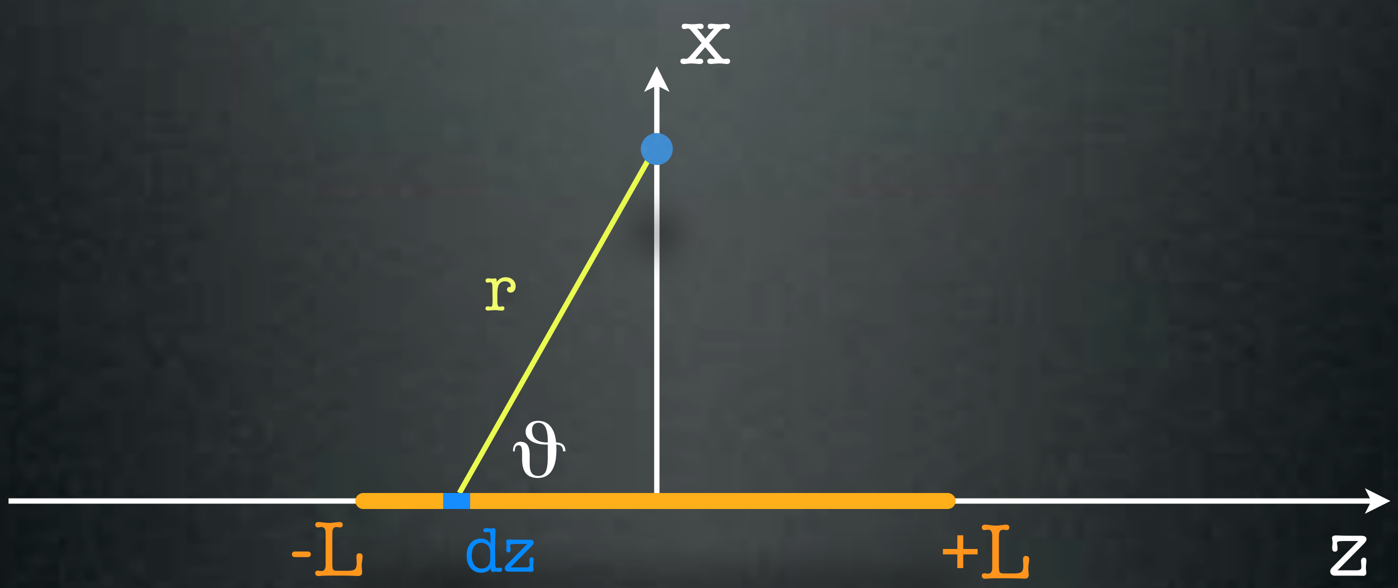
Simetrias



Campos magnéticos

- Segundo a lei de Biot Savart, o campo magnético produzido B produzido por uma corrente I é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{z} \times \vec{r}}{r^3}$$



Campo magnético

- Seguindo a simetria do problema:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \sin(\theta)}{r^2}$$

- Escrevendo tudo em termos de x e z e fazendo a discretização:

$$B \approx \sum \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x \Delta z}{(z^2 + x^2)^{3/2}}$$

Computando...

- Integração pode ser feita de diversas formas
- Curso de Métodos Computacionais I, aula 8
  - Método de Simpson

Resultados