

# Fractais

Métodos computacionais II  
2010

# O que é um fractal?

- Mandelbrot:

- Uma forma geométrica complexa que pode ser sub-dividida em partes onde cada parte é a cópia reduzida do todo.

- Matemática:

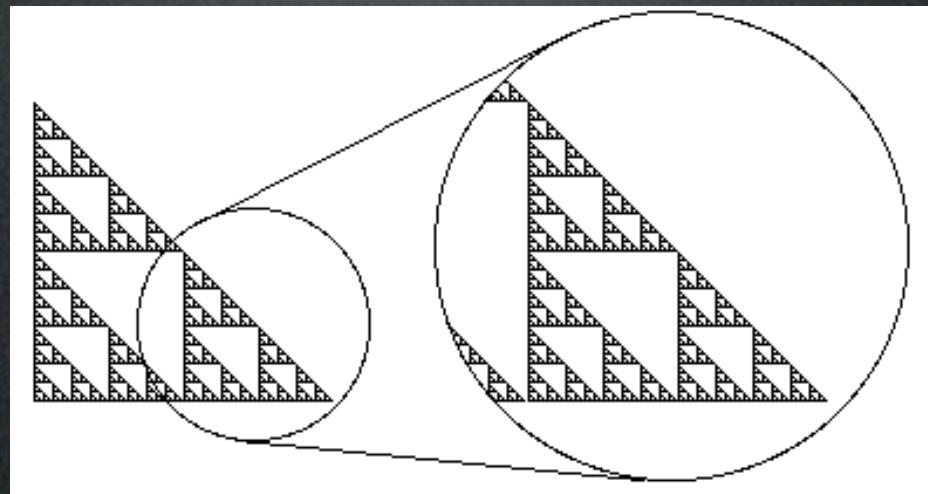
- Conjunto de pontos cuja dimensão fractal excede a dimensão topológica.

# Auto-similaridade

- Os fractais regulares mais simples são construídos por iteração:

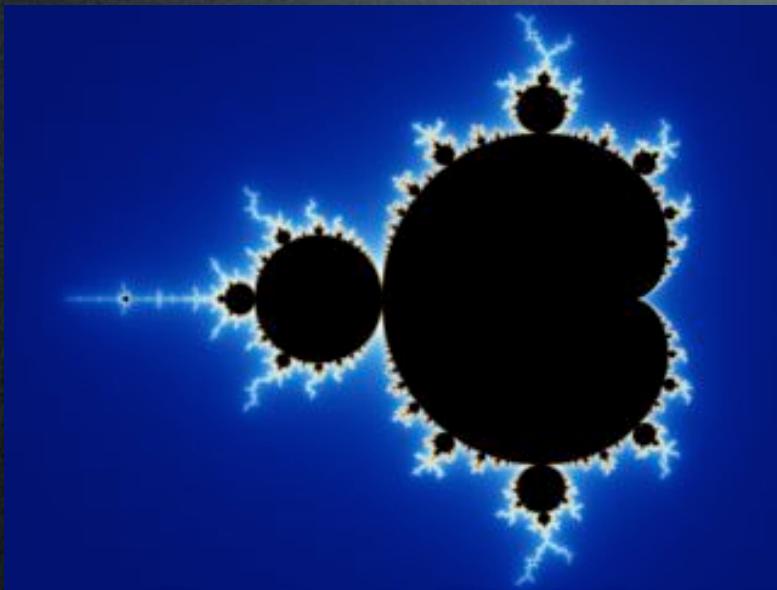


O triângulo de Sierpinski é auto-similar

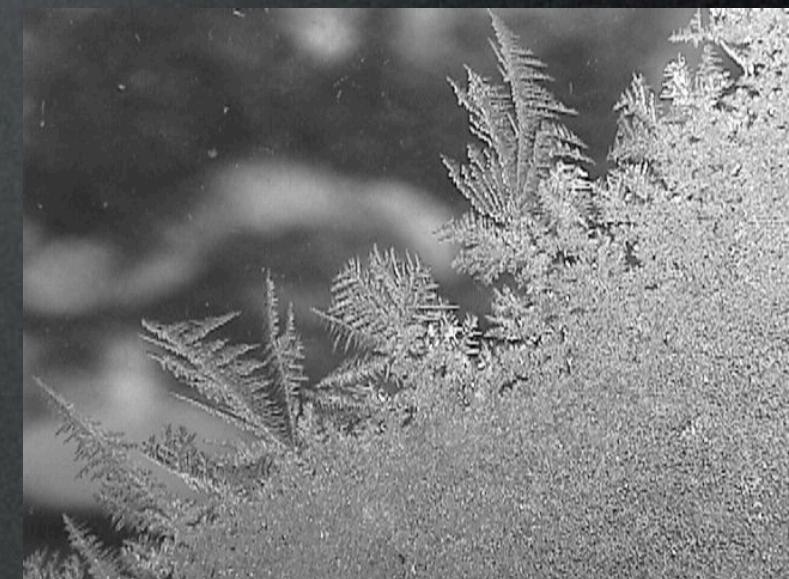


Fractais possuem invariância de escala

# Alguns fractais



Conjunto de Mandelbrot



# Auto-similaridade estatística

- A auto-similaridade pode ser extendida sistemas onde partes apenas “se parecem” com o todo.
  - Fractais aleatórios

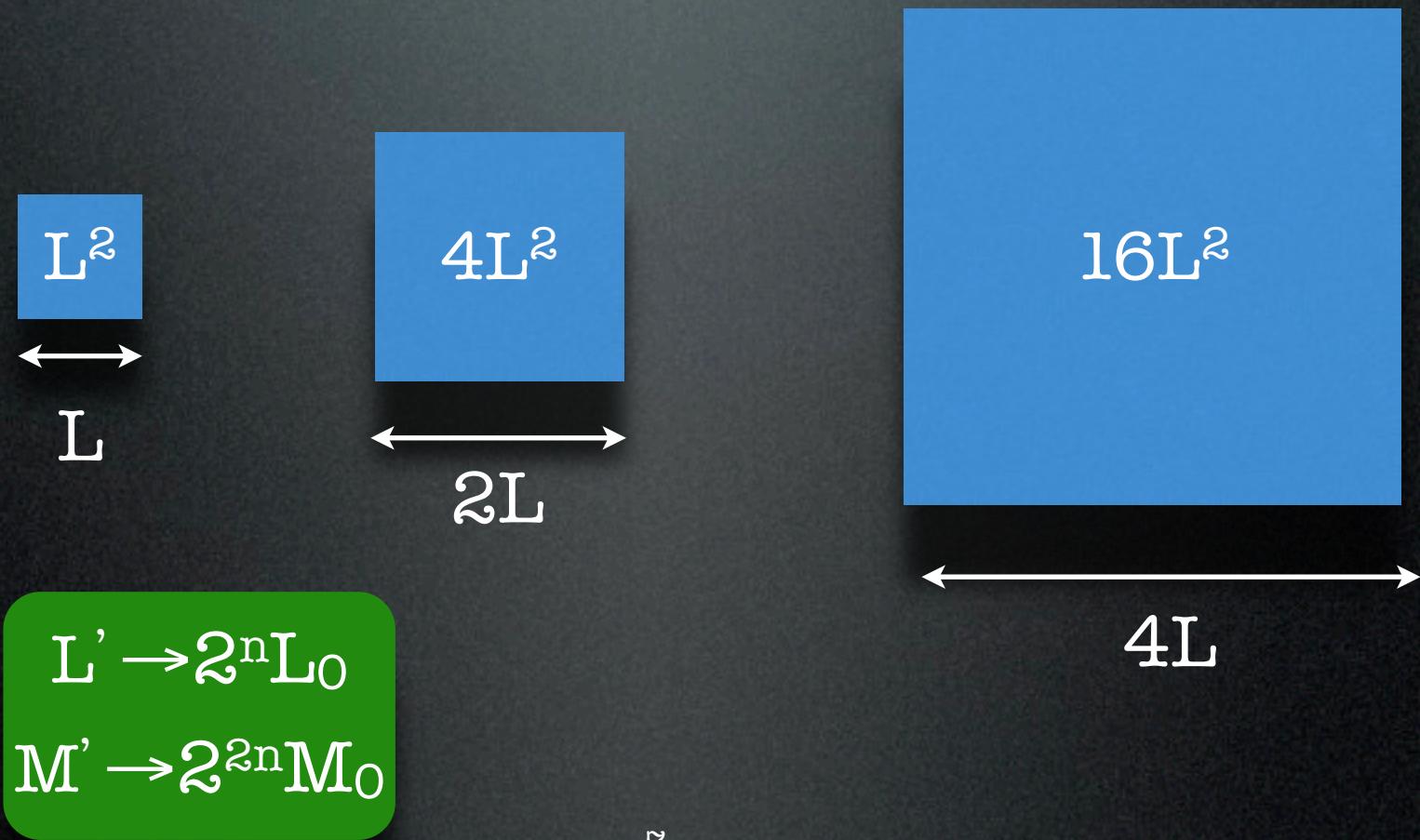


# Geometria

- Formas produzidas pelo homem: geometria euclidiana
  - Linhas, planos, esferas e cilindros pertencem a uma dimensão inteira, seja 1,2 ou 3
- Conceito intuitivo e matemático de dimensão
  - Intuitivamente...
  - $n D \rightarrow n$  números para definir univocamente um ponto.
  - $1D \rightarrow$  linha, círculo, curva.
  - $2D \rightarrow$  Plano, superfície de uma esfera, etc.

# Uma descrição matemática

- Como o tamanho do sistema (ou massa) se comporta quando sua **dimensão linear** varia.

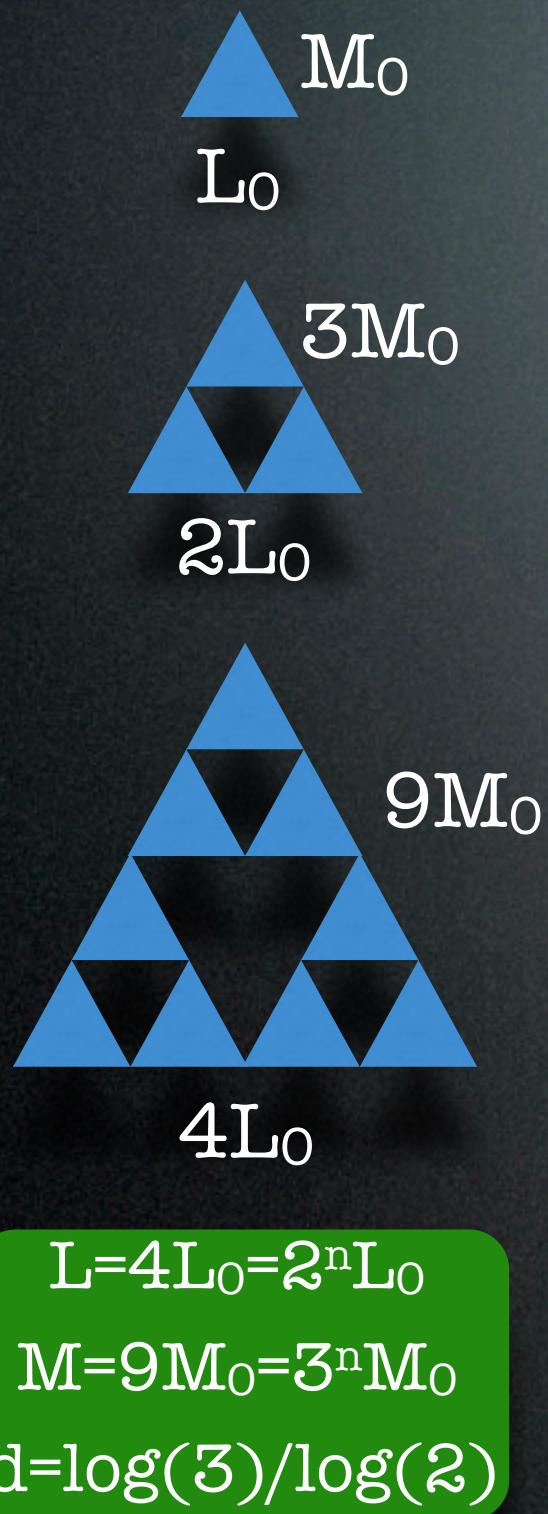


# definindo dimensão fractal

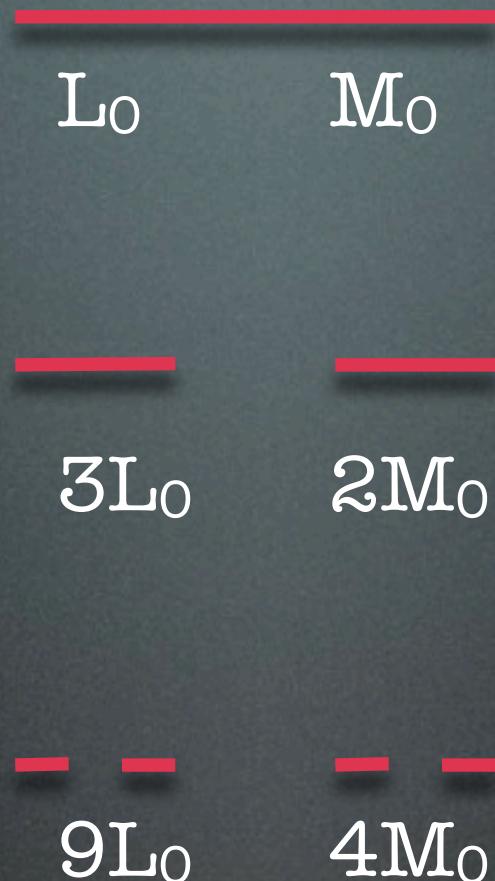
Lembrando que  $L' \rightarrow 2^n L_0, M' \rightarrow 2^{2n} M_0$

Se definirmos a dimensão do espaço como

$$M \sim L^d \quad (L_0 = M_0 = 1), \\ d = \log(M) / \log(L) = 2$$



Conjunto de Cantor



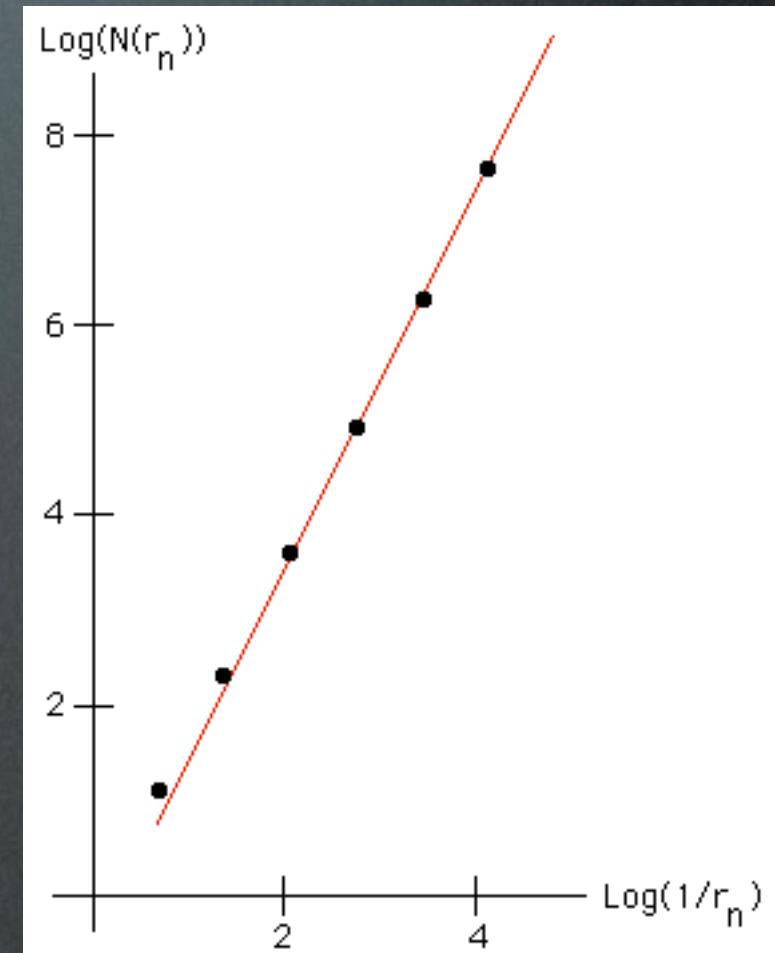
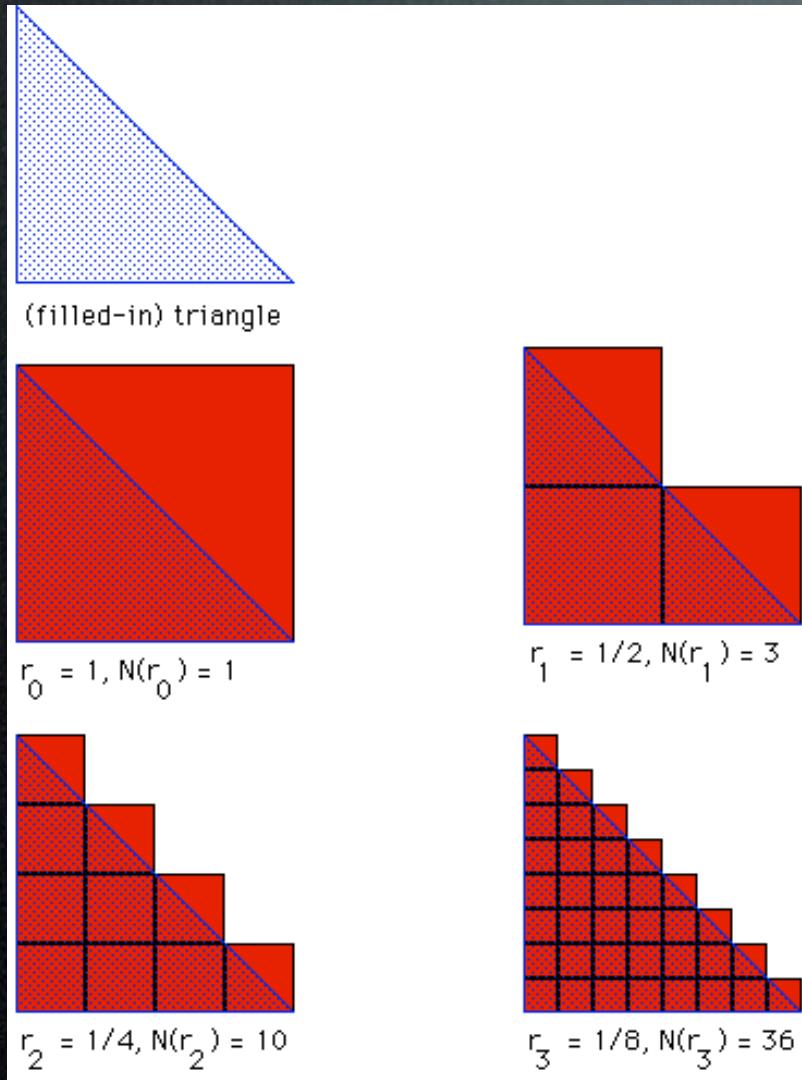
Curva de Koch

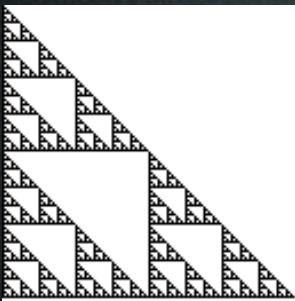


# Calculando numericamente

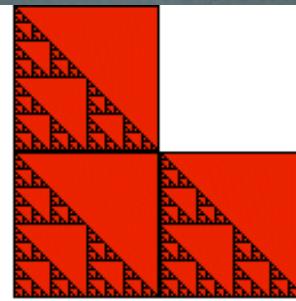
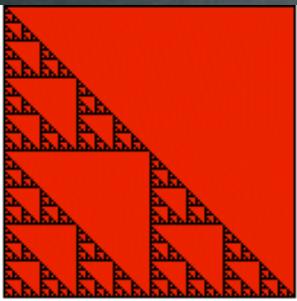
- Em geral, para calcular a dimensão fractal de fractais não-determinísticos inseridos em d dimensões:
  1. Posicione N caixas de tamanho L sobre o fractal
  2. Conte quantas caixa de tamanho L contém um pedaço de fractal,  $M(L)$
  3. Faça a média sobre diferentes posições de caixa
  4. Repita 1-3 para um novo tamanho L

# Na prática

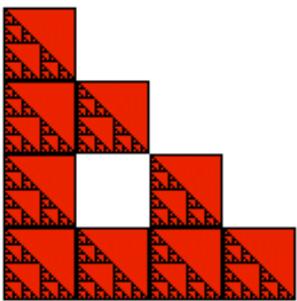




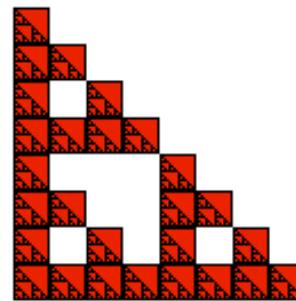
Sierpinski gasket



$r_1 = 1/2, N(r_1) = 3$

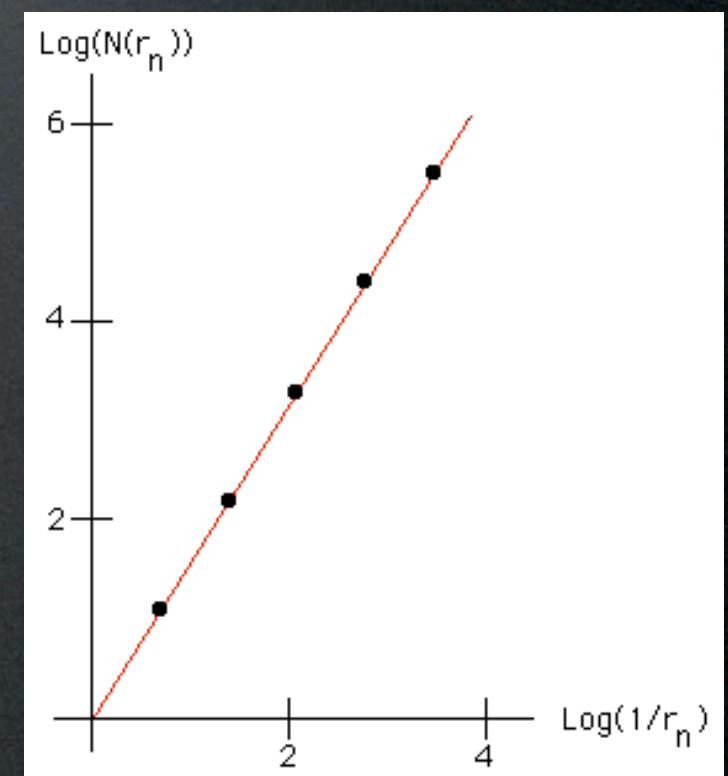


$r_2 = 1/4, N(r_2) = 9$

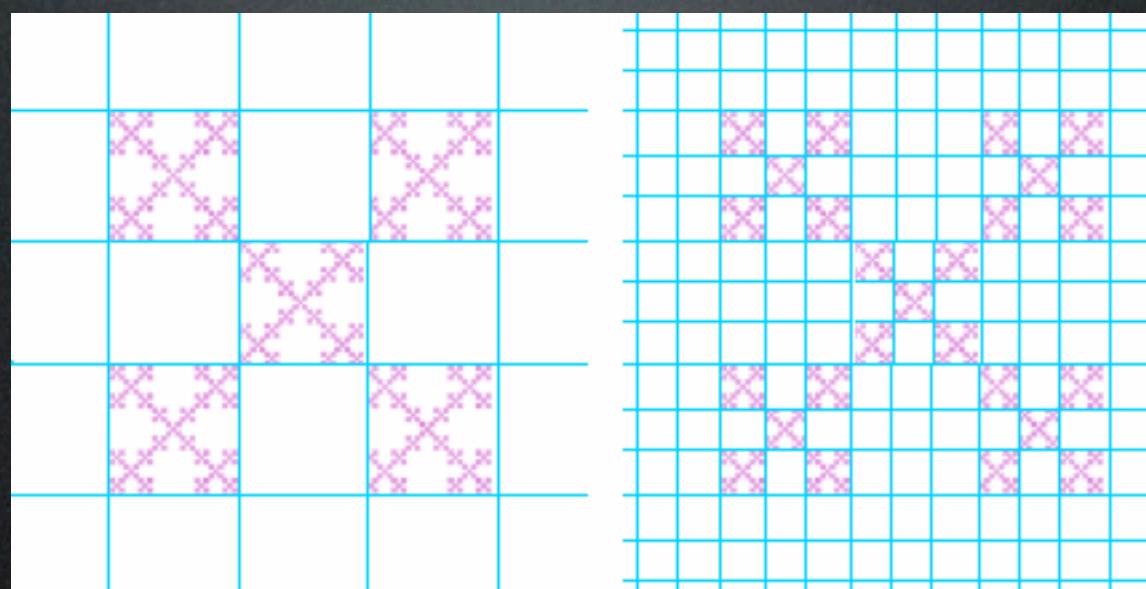
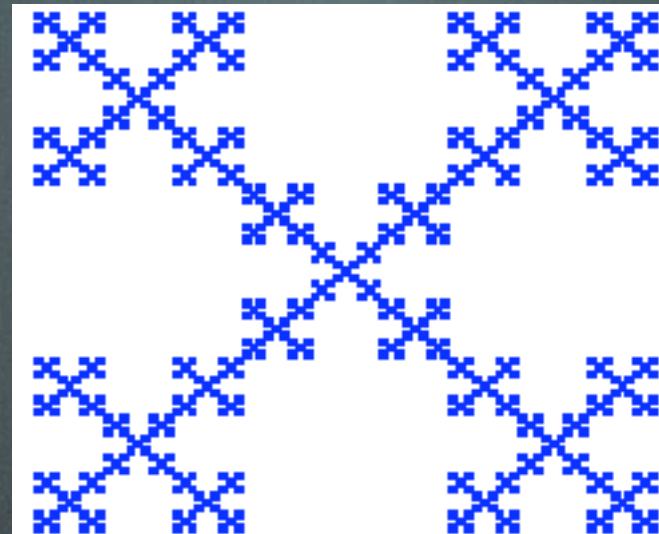


$r_3 = 1/8, N(r_3) = 27$

$d=1.59$



12



# Leis de escala

- Em geral, para cada comprimento  $L$ ,
  - $M \sim L^{d_f}$ ,  $d_f = \log(M(L))/\log(L)$
- A densidade se escreve
  - $\rho(L) = M/L^d = L^{d_f-d}$
- Porque a relação tipo lei de potência é relevante?
- Temos que  $\rho(\lambda L) = \lambda^{d_f-d} \rho(L)$ ,
- ou seja, as propriedades estatísticas em uma dada escala são identicas as do sistema em outra escala, multiplicadas por um fator de escala

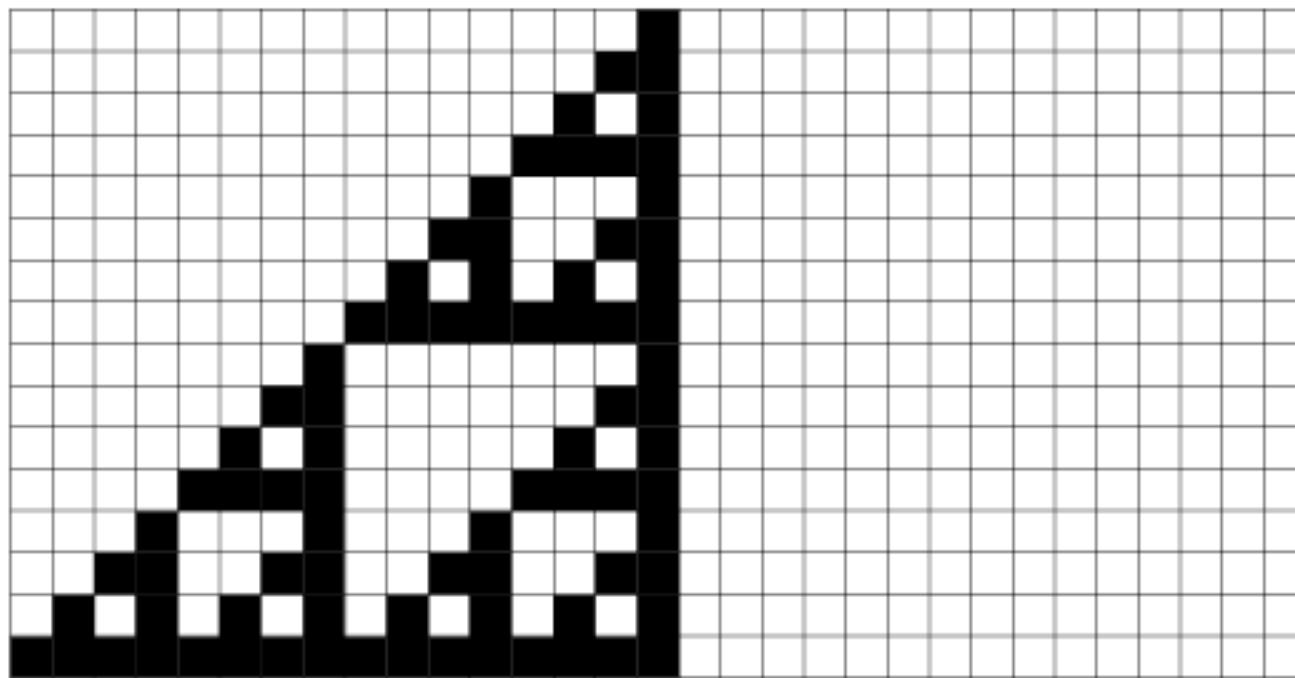
# Como fazer um fractal?

- Método mais simples: Autômatos celulares
  - Conjunto de células onde cada uma se encontra em um determinado estado, que pode se alterar a passos de tempo discretos, dependendo do próprio estado e do estado dos seus vizinhos

*rule 102*

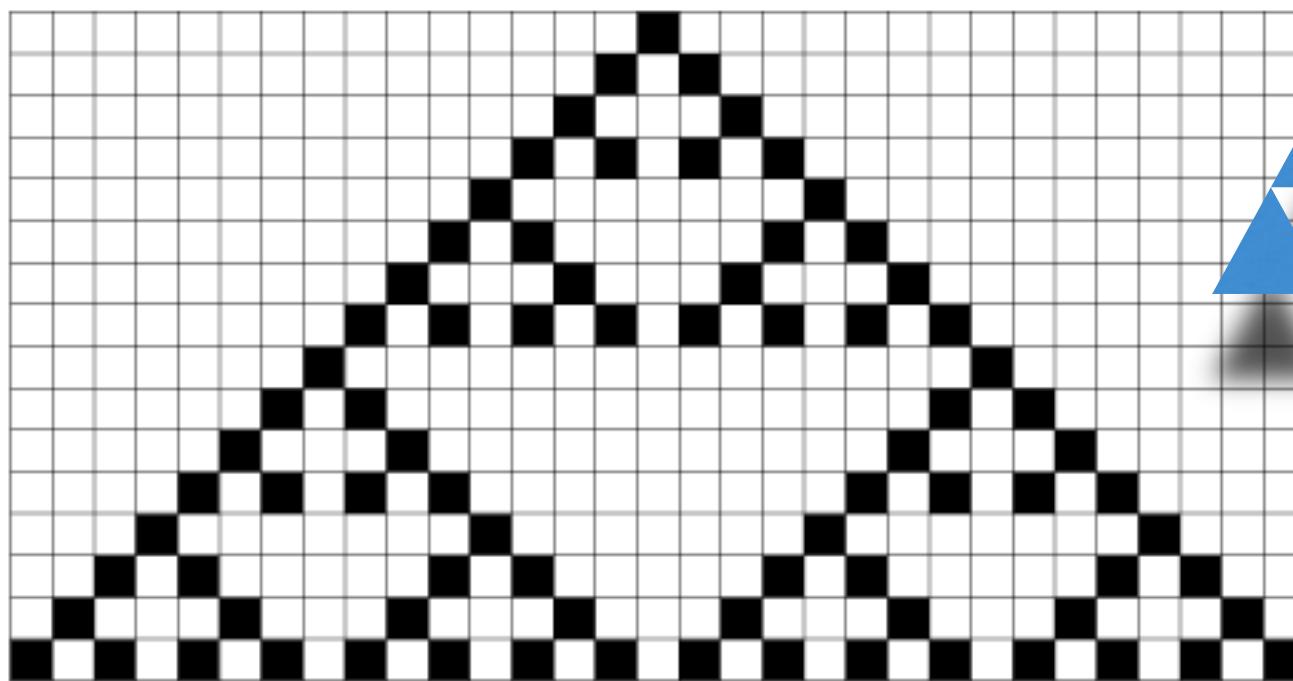


0      1      1      0      0      1      1      0



*rule 90*

							
0	1	0	1	1	0	1	0



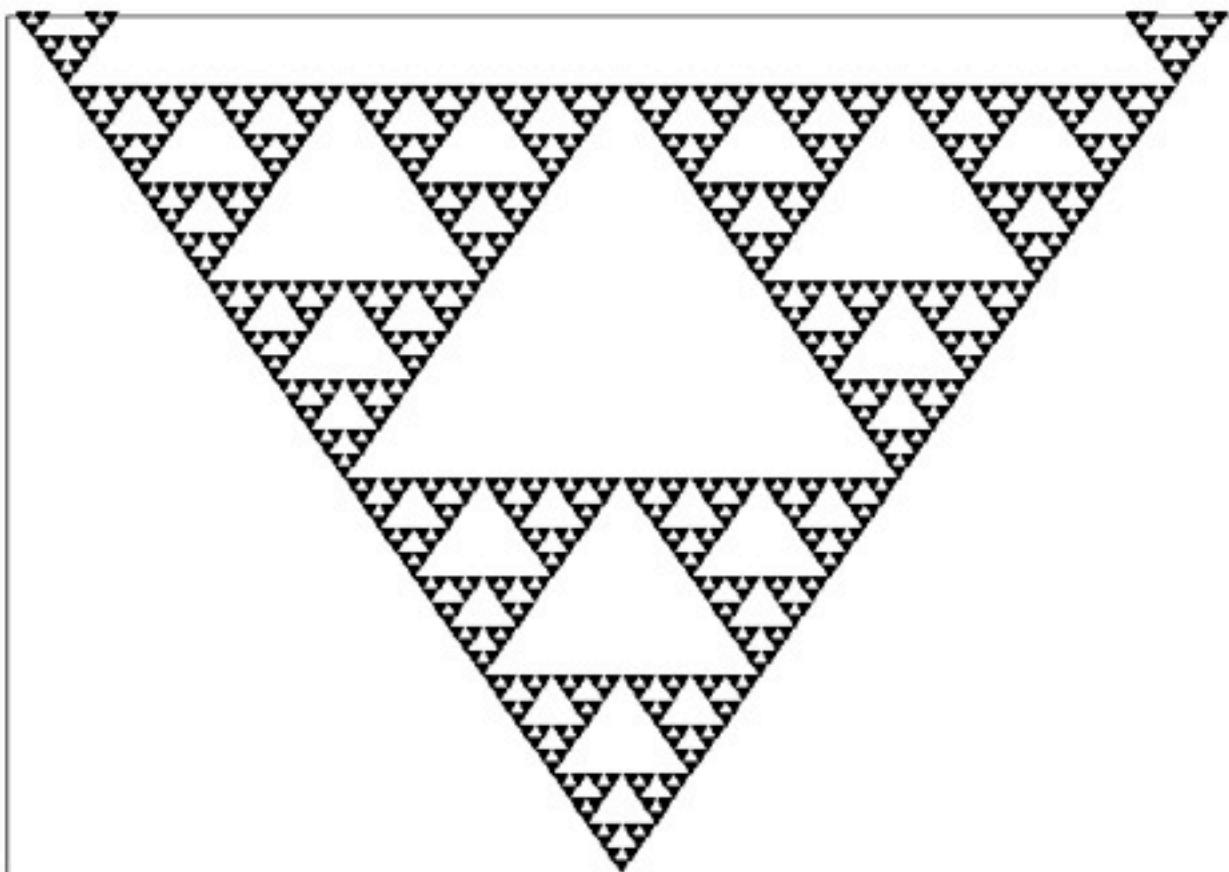
Ops!

# Implementação da regra 90

- O programa tem aproximadamente 10 linhas. É realmente muito simples.
- Utilizando o XOR:
  - $1 \text{ XOR } 1 = 0 \mid 0 \text{ XOR } 0 = 0 \mid 1 \text{ XOR } 0 = 1 \mid$



- $H(i,t) = \text{XOR}(H(i-1,t-1), H(i+1,t-1))$



# Dimensão fractal na prática.

- Vamos medir a dimensão fractal de uma bola de papel amassado.
- Para isso consideramos diferentes bolas de papel, e graficamos o logaritmo da área vs. o diâmetro.
- O coeficiente angular da reta obtida vai medir  $d$ .
- Finalmente, faremos o histograma de todos os resultados obtidos para  $d$ .