Cadeia de Ising com campo transverso

Thales Freitas Macêdo

18 de dezembro de 2022

Modelo de Ising clássico

O modelo de Ising é um modelo de spins $S_i = \pm 1$ localizados, formando uma rede, sob ação de um campo magnético externo H, alinhado com os spins.

$$E = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu H \sum_i S_i$$

Cadeia de Ising com campo transverso

O modelo de Ising com campo transverso é obtido ao impor que a direção do campo magnético seja transversa à direção dos spins. Agora, não podemos mais tratar o problema classicamente, e temos que usar a mecânica quântica. Vou abordar o problema unidimensional da cadeia de Ising.

$$H = -\sum_i \left[\Gamma S_i^x + J S_i^z S_{i+1}^z\right] = -\sum_i \left[S_i^x + \lambda S_i^z S_{i+1}^z\right] \tag{1}$$

onde S^α é o operador de spin de Pauli na direção α, J é a constante de interação entre os spins, Γ é a constante do campo, e $\lambda = J/\Gamma$, com $\Gamma = 1$.

Cadeia de Ising com campo transverso

Definimos o gap de massa $\Delta(\lambda)$ como a diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado. Numa transição de fase quântica, $\Delta = 0$, e o comprimento de correlação $\xi = 1/\Delta$ diverge.

Método *Finite-Size Scaling*

Nesse método, diagonalizamos exatamente o Hamiltoniano para cadeias com $N = 2, 3, 4, \ldots$ spins. A princípio, uma cadeia com muitos spins aproximaria o limite termodinâmico $N \to \infty$ mais adequadamente, mas pode ser numericamente muito custoso. Podemos usar a seguinte relação para estimar os parâmetros no limite termodinâmico:

$$\lambda_c(L) = \lambda_c + AL^{-1/\nu}, \tag{2}$$

onde λ_c é valor crítico de λ para uma transição de fase quântica, L representa os tamanhos das cadeias, A é uma constante e ν é um expoente crítico relacionado ao comprimento de correlação ξ.

Método *Block Renormalisation Group*

A ideia por trás do método é gerar um procedimento iterativo que produza o Hamiltoniano (1) na n-ésima iteração

$$H^{(n)} = -\sum_i \left(J^{(n)} S_i^{z(n)} S_{i+1}^{z(n)} + \Gamma^{(n)} S_i^{x(n)} \right) + c^{(n)} \sum_i I_i^{(n)}. \qquad (3)$$

Método *Block Renormalisation Group*

Começamos dividindo a cadeia de N sítios em N/b blocos com b spins em cada bloco e reescrevemos o Hamiltoniano como a soma de uma parte intra-bloco H_B e outra inter-bloco H_{IB}, com

$$H_B = \sum_{p=1}^{N/b} H_p, \quad H_{IB} = \sum_{p=1}^{N/b-1} H_{p,p+1} \tag{4}$$

com

$$H_p = -\sum_{i=1}^{b-1} J S^z_{i,p} S^z_{i+1,p} + \Gamma \sum_{i=1}^{b} S^x_{i,p} \tag{5}$$

$$H_{p,p+1} = -J S^z_{n,p} S^z_{1,p+1} \tag{6}$$

onde os índices i e p se referem ao i-ésimo spin no p-ésimo bloco.

Método *Block Renormalisation Group*

Diagonalizamos o Hamiltoniano H_p, obtendo os estados fundamental $|0\rangle$ e primeiro excitado $|1\rangle$, de energias E_0 e E_1. Para efetuar o processo de renormalização, introduzimos um novo conjunto de operadores de spin $S_p^{\alpha(1)}$ associado ao bloco p, tal que os autoestados de $S_p^{x(1)}$ sejam $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Assim, podemos reescrever H_p, na primeira iteração, na forma renormalizada

$$H_p^{(1)} = -\Gamma^{(1)} S_p^{x(1)} + c^{(1)} I_p^{(1)}, \tag{7}$$

onde

$$\Gamma^{(1)} = \frac{E_1 - E_0}{2}, \quad c^{(1)} = \frac{E_1 + E_0}{2}. \tag{8}$$

Método *Block Renormalisation Group*

Para reescrever o Hamiltoniano total na forma renormalizada, incluímos a parte inter-bloco de forma perturbativa. Assim obtemos as relações de recursão para a $(n+1)$-ésima iteração,

$$\Gamma(n+1) = \frac{E_1^{(n)} - E_0^{(n)}}{2} \tag{9}$$

$$J(n+1) = \left(\eta_1^{(n)}\right)^2 J^{(n)} \tag{10}$$

$$c(n+1) = bc^{(n)} + \frac{E_1^{(n+1)} + E_0^{(n+1)}}{2} \tag{11}$$

com as condições iniciais

$$J(0) = J, \quad \Gamma(0) = \Gamma, \quad c(0) = 0. \tag{12}$$

Referências

Michael E. Fisher and Michael N. Barber.
Scaling theory for finite-size effects in the critical region.
Phys. Rev. Lett., 28:1516–1519, Jun 1972.

P. Pfeuty, R. Jullien, and K. A. Penson.
Renormalization for Quantum Systems, pages 119–147.
Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982.

S. Suzuki, J. Inoue, and B.K. Chakrabarti.
Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Models.
Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.