# LISTA 1

Thales Freitas Macêdo
DRE: 115 162 177


18 de setembro de 2022

## 1 Exercício 1

### 1.1 (a)

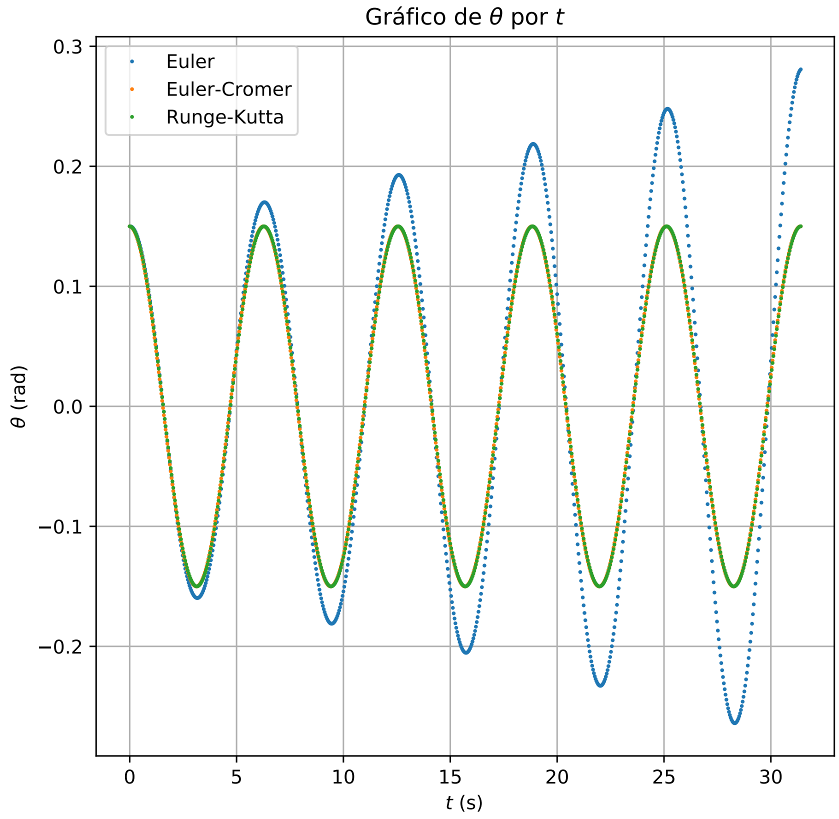



Figura 1: $\theta$ em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os três métodos numéricos.

A figura 1 mostra o gráfico de $\theta$ em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os métodos de Euler, Euler-Cromer e Runge-Kutta. Esperamos que o gráfico seja de forma senoidal, com amplitude igual ao $\theta_0$. O método de Euler se mostra inadequado, visto que a amplitude aumenta com o tempo. Os métodos de Euler-Cromer e Runge-Kutta produziram o resultado esperado, e se mostram equivalentes.

### 1.2 (b)

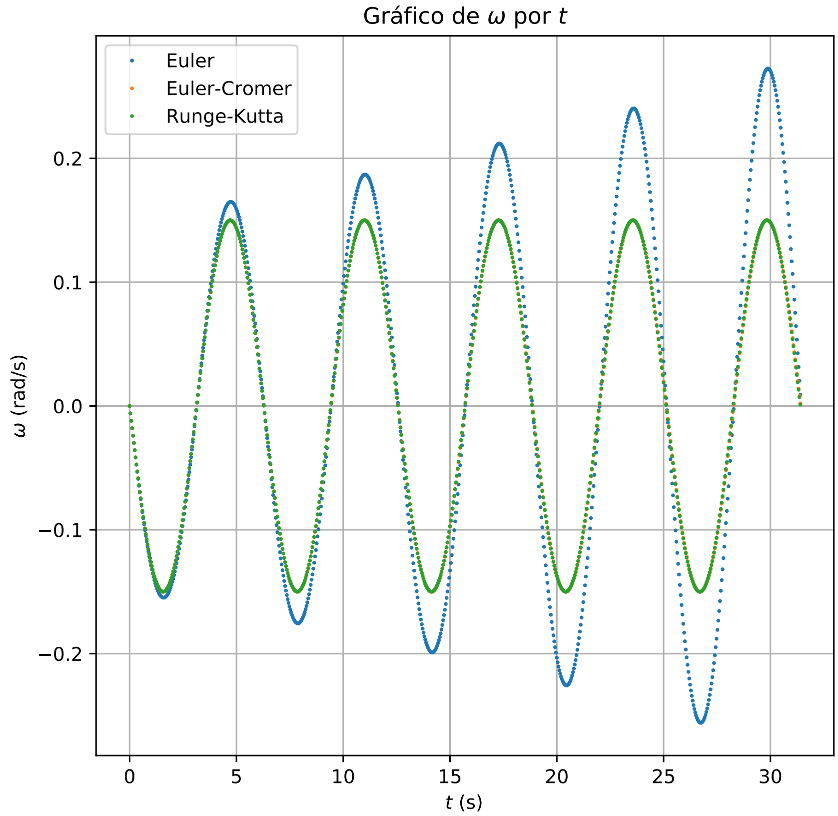



Figura 2: $\omega$ em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os três métodos numéricos.

A figura 2 mostra o gráfico de $\omega$ em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os métodos de Euler, Euler-Cromer e Runge-Kutta. Esperamos que o gráfico seja de forma senoidal, com amplitude igual ao $\Omega\theta_0$, onde $\Omega = \sqrt{g/l}$. Novamente o método de Euler se mostra inadequado, visto que a amplitude aumenta com o tempo. Os métodos de Euler-Cromer e Runge-Kutta produziram o resultado esperado, e se mostram equivalentes.

## 1.3 (c)

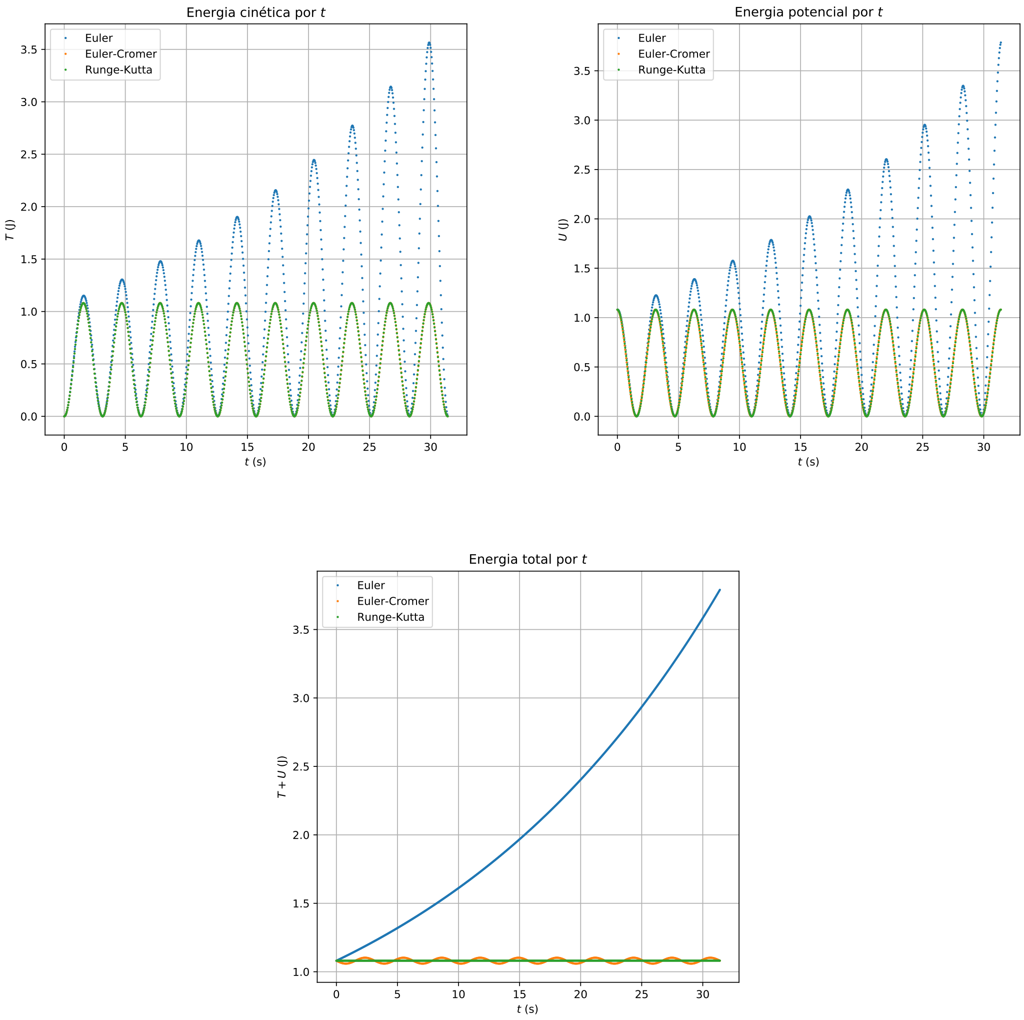



Figura 3: Energias cinética, potencial e total em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os três métodos numéricos.

A figura 3 mostra o gráfico das energias cinética, potencial e total em função do tempo ao longo de 5 períodos, para os métodos de Euler, Euler-Cromer e Runge-Kutta. Esperamos que o gráfico das energias cinética e potencial sejam de forma senoidal, com amplitude igual à energia inicial, e que o gráfico da energia total seja constante, visto que o sistema é conservativo. Novamente método de Euler se mostra inadequado, visto que as amplitudes das energias cinética e potencial aumentam com o tempo, e que a energia total aumenta com o tempo. Os métodos de Euler-Cromer e Runge-Kutta produziram o resultado esperado para as energias cinética e potencial, e se mostram equivalentes nesses casos. Para a energia total, o método de Euler-Cromer produz um gráfico senoidal com pequena amplitude em torno do valor correto, enquanto que o método de Runge-Kutta produz o resultado esperado.

## 1.4 (d)

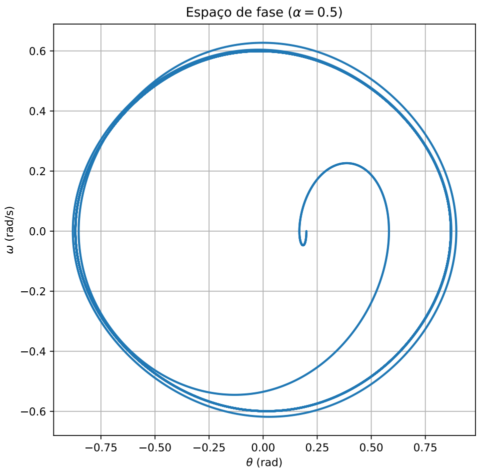
O pior método para esse sistema físico é o método de Euler, que não conserva a energia. O método de Euler-Cromer produz um resultado aceitável, já que conserva a energia na média. O método de Runge-Kutta produziu o melhor resultado, já que dentro da escala do problema, a energia se manteve constante.

## 2 Exercício 2

### 2.1 (a)

Foi escolhido o método de Runge-Kutta, com um intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$. A escolha do método de Runge-Kutta se deu pelo fato de ser o mais adequado para um sistema físico similar ao usado nesse exercício, enquanto que a escolha do intervalo é devida ao balanço entre precisão e tempo de execução do programa.

### 2.2 (b)



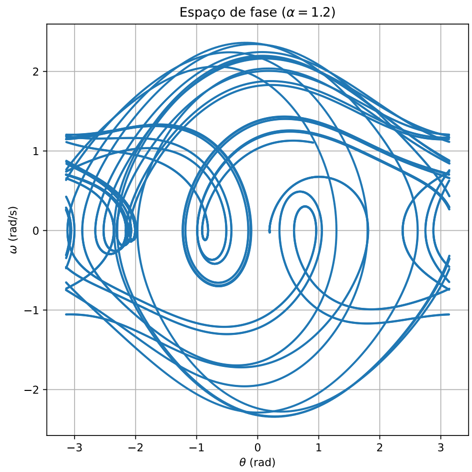
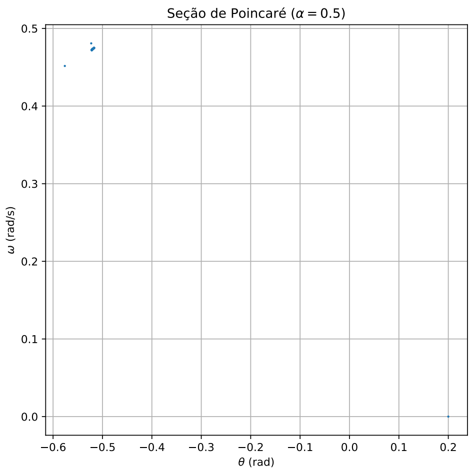




Figura 4: Trajetória no espaço de fase do pêndulo para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

A figura 4 apresenta a trajetória no espaço de fase do pêndulo para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

### 2.3 (c)



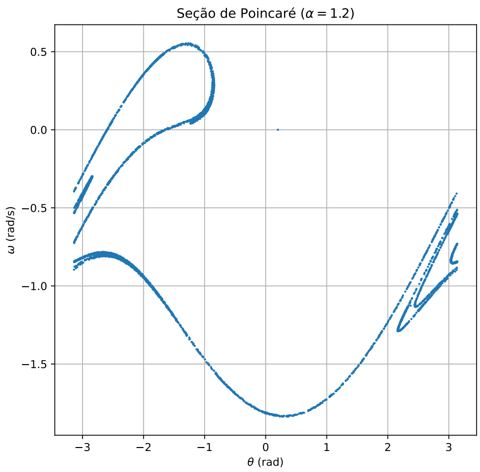




Figura 5: Seções de Poincaré do pêndulo para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

A figura 5 apresenta a seção de Poincaré do pêndulo para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

## 2.4 (d)

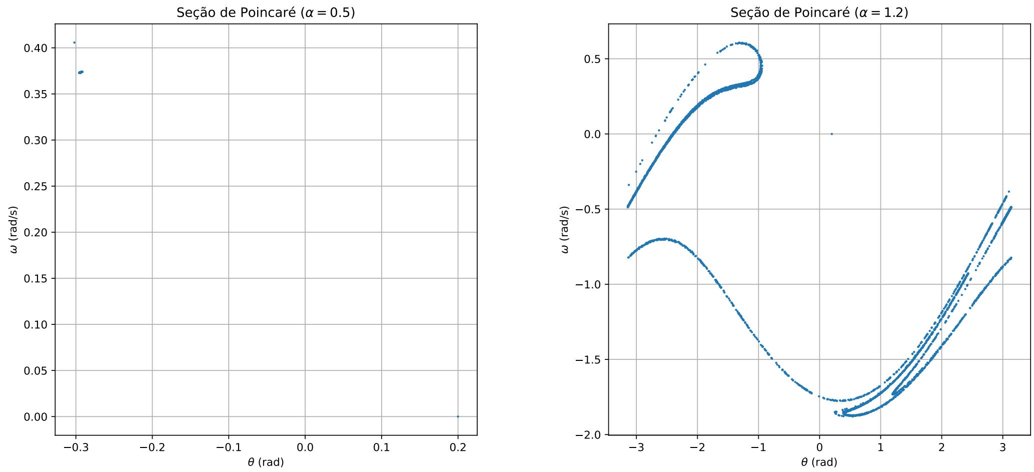



Figura 6: Seções de Poincaré do pêndulo com $\Omega_D = 0{,}55\,\mathrm{rad/s}$ para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

A figura 6 apresenta a seção de Poincaré do pêndulo com $\Omega_D = 0{,}55\,\mathrm{rad/s}$ para $\alpha = 0{,}5\,\mathrm{rad/s^2}$ e $\alpha = 1{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$.

## 2.5 (e)

Podemos observar que para o caso não-caótico, após o transiente acabar e o sistema oscilar com a frequência $\Omega_D$, o sistema passa a se encontrar no mesmo estado físico com o mesmo período da força externa. Também podemos observar que mesmo no caso caótico, ainda existe alguma estrutura previsível, com a formação do atrator estranho.

# 3 Exercício 3

## 3.1 (a)

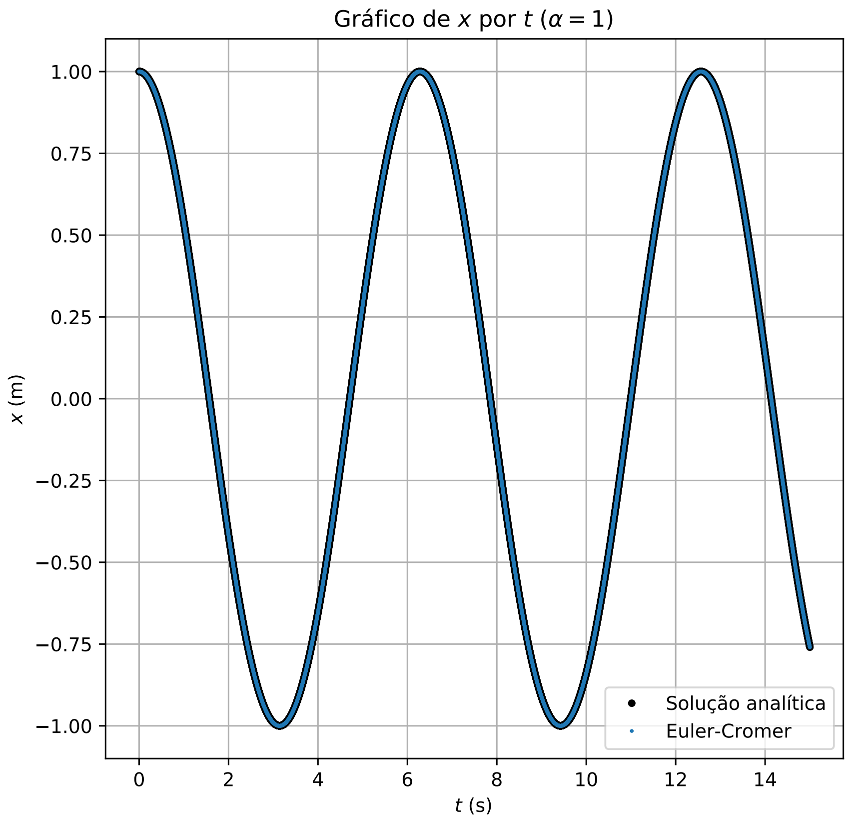



Figura 7: Gráfico de $x$ por $t$ para o oscilador com $\alpha = 1$.

A figura 7 mostra o gráfico da posição em função do tempo para o oscilador no caso $\alpha = 1$, que é um oscilador harmônico. Para que a equação de movimento faça sentido, é necessário que a unidade de $k$ seja

$$\frac{\mathrm{m/s^2}}{\mathrm{m}^\alpha} = \mathrm{m}^{1-\alpha}/\mathrm{s}^2 = \mathrm{N/kgm}^\alpha.$$

O gráfico é idêntico ao do exercício 1, e é mostrada a solução analítica para comparação, que mostra que o método de Euler-Cromer é adequado para esse caso.

### 3.2 (b)

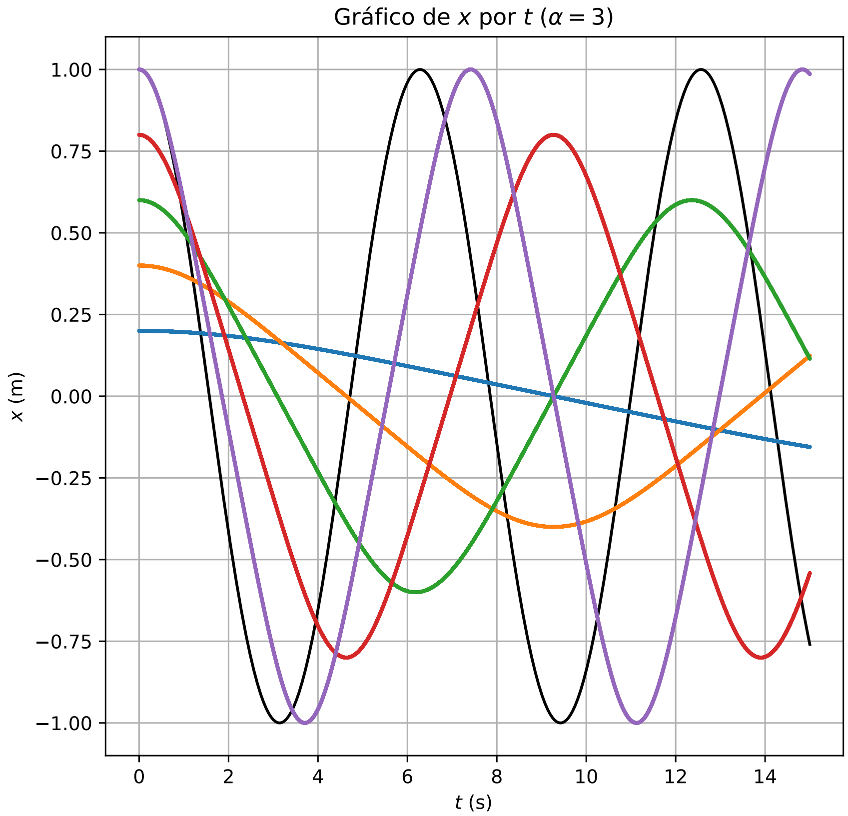



Figura 8: Gráficos de $x$ por $t$ para o oscilador com $\alpha = 3$ com diferentes condições iniciais e com a solução analítica do caso $\alpha = 1$ em preto para comparação.

A figura 8 mostra os gráficos da posição em função do tempo para o oscilador no caso $\alpha = 3$ com as condições iniciais $x_0 = 0{,}2\,\mathrm{m}$, $0{,}4\,\mathrm{m}$, $0{,}6\,\mathrm{m}$, $0{,}8\,\mathrm{m}$ e $1{,}0\,\mathrm{m}$. É possível ver que conforme a amplitude aumenta, o período diminui, diferentemente do caso harmônico.

### 3.3 (c)

Ao comparar o caso $\alpha = 3$ com o $\alpha = 1$, para distâncias mais próximas da posição de equilíbrio, a força restauradora é muito mais fraca, e para distâncias maiores da posição de equilíbrio, a força restauradora é muito mais intensa. Isso faz com que o oscilador passe menos tempo nas extremidades e muito mais tempo próximo da posição de equilíbrio do que o caso harmônico, introduzindo a dependência do período com a amplitude.