Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Факультет информационных технологий и прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Отчёт по лабораторным работам по курсу
«Численные Методы»

Студент:	К. О. Вахрамян
Преподаватель:	В. Ю. Гидаспов
Группа:	М8О-406Б
Дата:	
Оценка:	
Подпись:	

Москва, 2021

1 Лабораторная работа №1

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

Вариант 9:
Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x}, a > 0, b > 0$$

Граничные условия

$$u_x(0,t) - u(0,t) = -e^{-at}(cos(bt) + sin(bt)),$$
$$u_x(\pi,t) - u(\pi,t) = e^{-at}(cos(bt) + sin(bt))$$

Начальное условие

$$u(x,0) = cos(x)$$

Аналитическое решение

$$U(x,t) = e^{(-at)}cos(x + bt)$$

Метод решение:
Аппроксимируем вторую производную по значениям нижнего временного слоя t^k:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + b\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h}, j = 1,..,N-1$$

Получим явную схему конечно-разностного метода.
Обозначим $\sigma = \frac{a\tau}{h^2}, \xi = \frac{b\tau}{2h}$ тогда:

$$u_j^{k+1} = (\sigma + \xi)u_{j-1}^k + (1 - 2\sigma)u_j^k + (\sigma + \xi)u_{j+1}^k$$

Граничные значения определяются граничными условиями.

Поскольку решение в зависимости от времени лежит между значениями явно и неявной схемы, введем явно-неявную схему.

Аппроксимируем вторую производную по значениям верхнего временного слоя t^{k+1}

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau} = \theta\left(a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+b\frac{u_{j+1}^{k+1}-u_{j-1}^{k+1}}{2h}\right)+$$

$$+(1-\theta)\left(a\frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}+b\frac{u_{j+1}^{k}-u_{j-1}^{k}}{2h}\right), j=1,..,N-1$$

$\theta = 1/2$ - схема Кранка-Николсона.

$\theta = 1$ - неявная схема.

Приведем подобные слгаемые и сделаем замену: $\sigma = \frac{a\tau}{h^2}, \xi = \frac{b\tau}{2h}$. Получим СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

$$a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, j=1,..,N-1$$

$$a_j = \theta(\sigma+\xi), b_j = (1-2\theta\sigma), c_j = \theta(\sigma-\xi), d_j = -(u_j^k+(1-\theta)((\sigma+\xi)u_{j-1}^k-2\sigma u_j^k+(\sigma-\xi)u_{j+1}^k)$$

Аппроксимация граничных условий.

Двухточечная аппроксимация первого порядка в точке $x=0, x=l$:

$$\alpha\frac{u_1^{k+1}-u_0^{k+1}}{h}+\beta u_0^{k+1} = \phi_0(t^{k+1})\gamma\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h}+\delta u_N^{k+1} = \phi_l(t^{k+1})$$

Граничные условия для t^{k+1} с использованием явной схемы:

$$u_0^{k+1} = -\frac{\alpha/h}{\beta-\alpha/h}u_1^{k+1}+\frac{\phi_0(t^{k+1})}{\beta-\alpha/h}u_N^{k+1} = \frac{\gamma/h}{\delta+\gamma/h}u_{N-1}^{k+1}+\frac{\phi_l(t^{k+1})}{\delta+\gamma/h}$$

Сначала расчиываем значения во внутренних точках, затем на границе.

Граничные условия для t^{k+1} с использованием явно-неявной схемы:

$$b_0u_0^{k+1}+c_0u_1^{k+1} = d_0a_Nu_{N-1}^{k+1}+b_Nu_N^{k+1} = d_N$$

$$b_0 = \beta-\alpha/h, c_0 = \alpha/h, d_0 = \frac{\phi_0(t^{k+1})}{\beta-\alpha/h}a_N = -\gamma/h, b_N = \delta+\gamma/h, d_N = \frac{\phi_l(t^{k+1})}{\delta+\gamma/h}$$

Трёхточечная аппроксимация второго порядка:

$$\alpha\frac{-3u_0^{k+1}+4u_1^{k+1}-u_2^{k+1}}{2h}+\beta u_0^{k+1}=\phi_0(t^{k+1}),$$

$$\gamma\frac{3u_N^{k+1}-4u_1^{k+1}-u_2^{k+1}}{2h}+\delta u_N^{k+1}=\phi_0(t^{k+1}).$$

Граничные условия для t^{k+1} с использованием явной схемы:

$$u_0^{k+1}=\frac{2h\phi_0(t^{k+1})-4\alpha u_1^{k+1}+\alpha u_2^{k+1}}{2\beta h-3\alpha},$$

$$u_N^{k+1}=\frac{2h\phi_l(t^{k+1})+4\gamma u_{N-1}^{k+1}-\gamma u_{N-2}^{k+1}}{2\delta h+3\gamma}$$

Граничные условия для t^{k+1} с использованием явно-неявной схемы:

$$b_0u_0^{k+1}+c_0u_1^{k+1}=d_0,$$

$$a_Nu_{N-1}^{k+1}+b_Nu_N^{k+1}=d_N.$$

$$b_0=\left(-3+\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}+\frac{\beta}{\alpha}2h\right),$$

$$c_0=\left(4-\frac{1+2\theta\sigma}{\theta(\sigma-\xi)}\right),$$

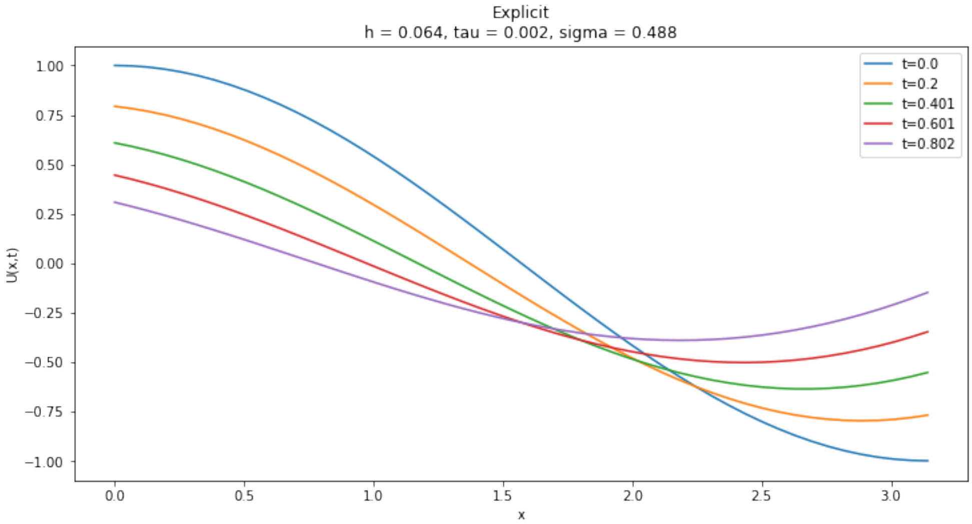
$$d_0=\frac{2h}{\alpha}\phi_0(t^{k+1})-\frac{(u_1^k+(1-\theta)((\sigma+\xi)u_0^k-2\sigma u_1^k+(\sigma-\xi)u_2^k)}{\theta(\sigma-\xi)},$$

$$a_N=\left(3-\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}+\frac{\delta}{\gamma}2h\right),$$

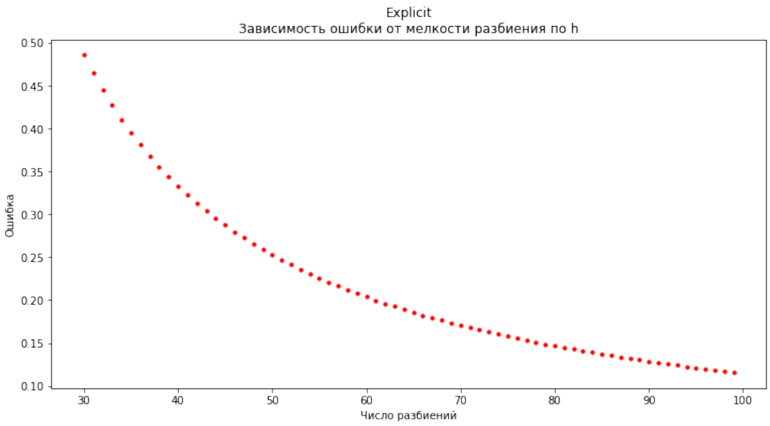
$$b_N=\left(-4+\frac{1+2\theta\sigma}{\theta(\sigma+\xi)}\right),$$

$$d_N=\frac{2h}{\gamma}\phi_l(t^{k+1})+\frac{(u_{N-1}^k+(1-\theta)((\sigma+\xi)u_{N-2}^k-2\sigma u_{N-1}^k+(\sigma-\xi)u_N^k)}{\theta(\sigma+\xi)}$$

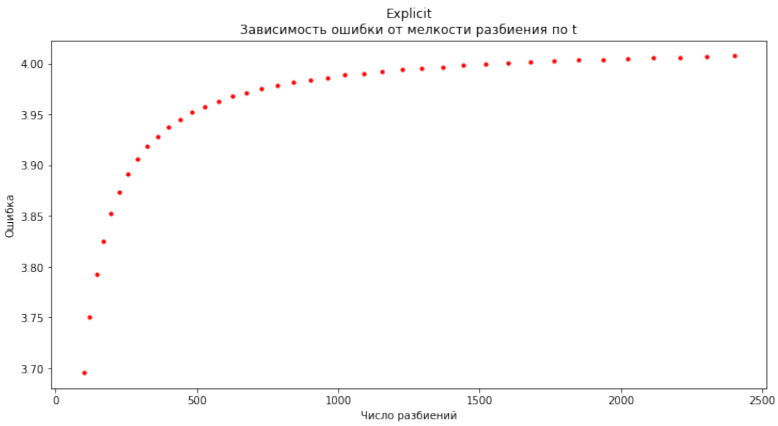
Результат работы программы:
$a=1,b=1,T=1$, Мелкость разбиения: $h=50,\tau=500$
Явная схема:



Посмотрим на зависимость ошибки от мелкости разбиения по пространству:



Теперь от мелкости разбиения по времени:



Неявная схема:

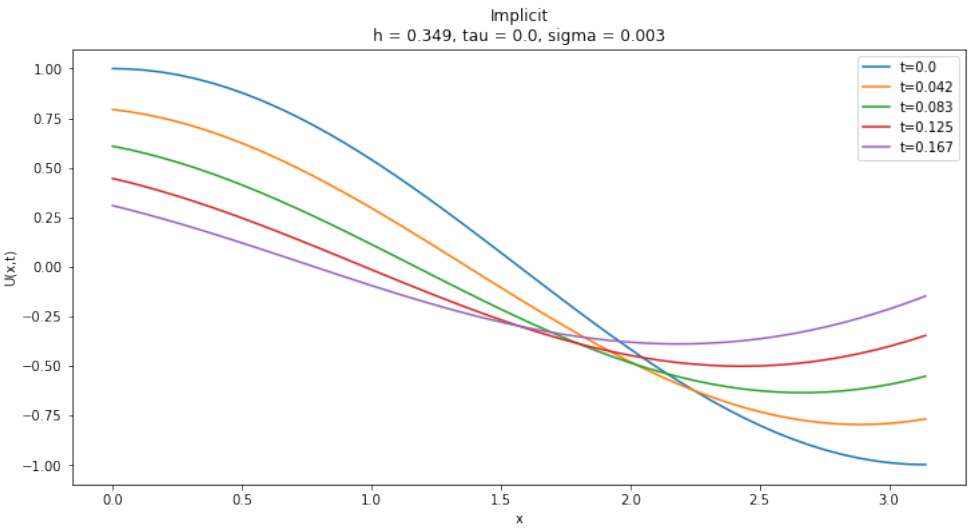
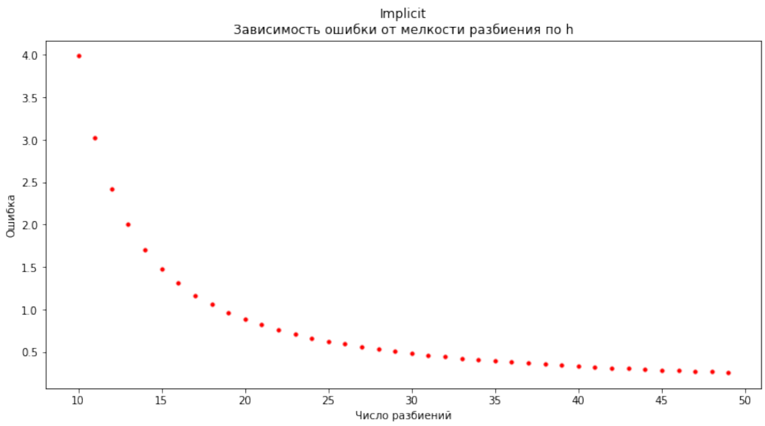


График зависимости ошибки от мелкости разбиения по x:



По T:

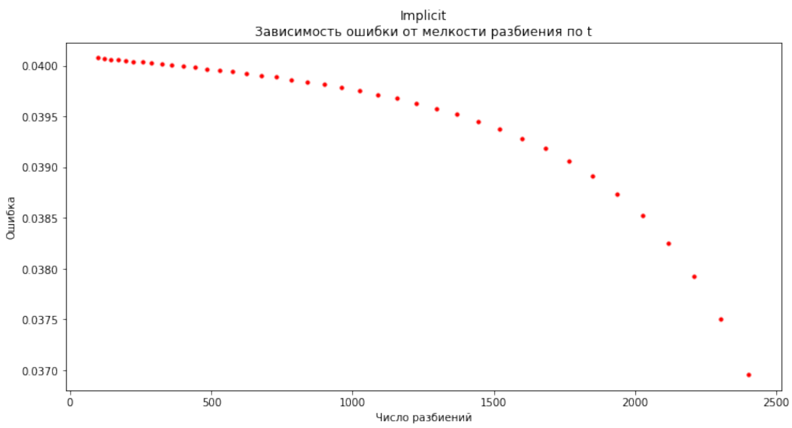
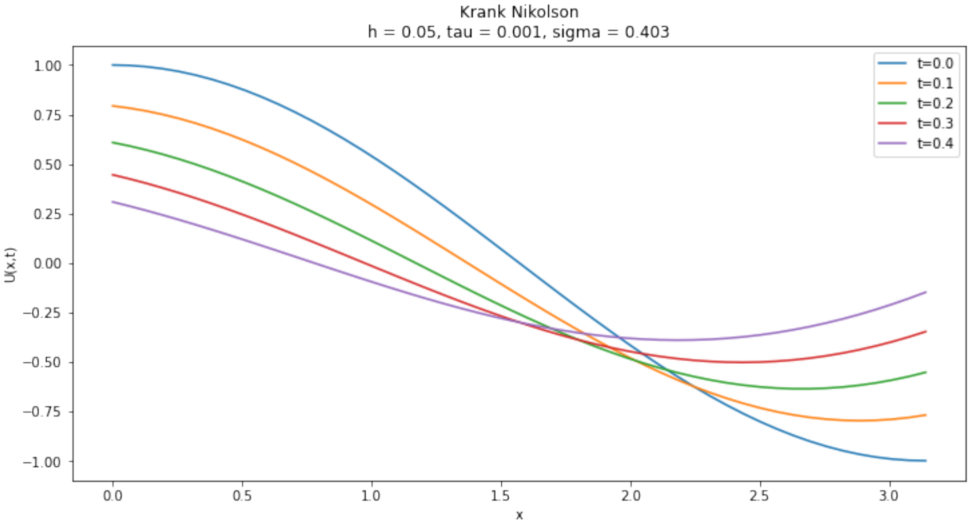
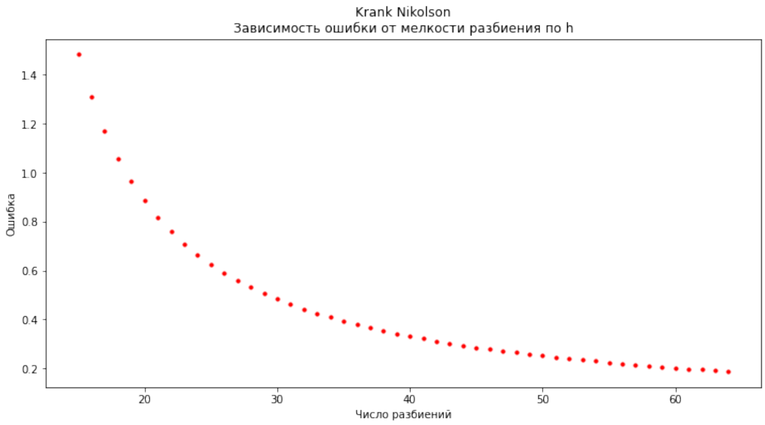


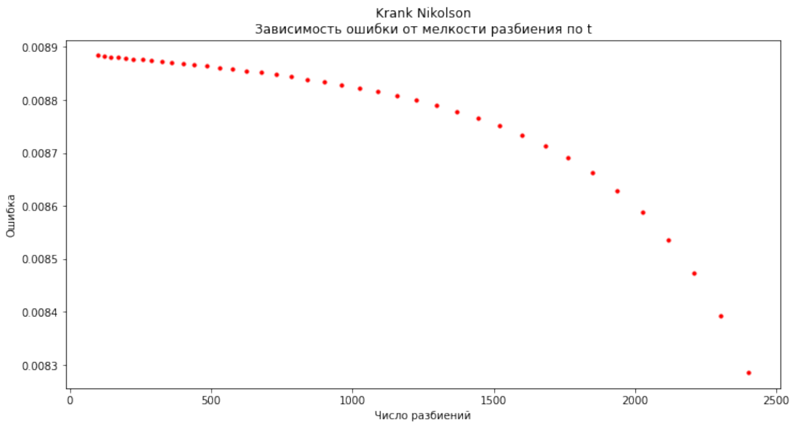
Схема Кранка-Николсона:



Ошибка от мелкости разбиения по x:



Ошибка от мелкости разбиения по T:



2 Лабораторная работа №2

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.
Вариант 9:
Уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + sin(x)e^{-t}$$

Граничные условия

$$u(0,t) = e^{-t}$$

$$u(\pi,t) = -e^{-t}$$

Начальные условия

$$u(x,0) = cos(x)$$

$$u_t(x,0) = -cos(x)$$

Аналитическое решение

$$U(x,t) = e^{-t}cos(x)$$

Явная схема:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} + 3\frac{u_j^{k+1} - u_j^{k-1}}{\tau} = \frac{u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k}{h^2} + \frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{h} - u_j^k + sin(x)e^{-t}$$

$$u_j^{k+1} = \frac{\sigma(u_{j-1}^k - 2u_j^k + u_{j+1}^k) + \sigma h(u_{j+1}^k - u_{j-1}^k) + u_j^k(2-\tau^2) - u_j^{k-1}(1-1.5\tau) + \tau^2 sin(x)e^{-t}}{1+1.5\tau}$$

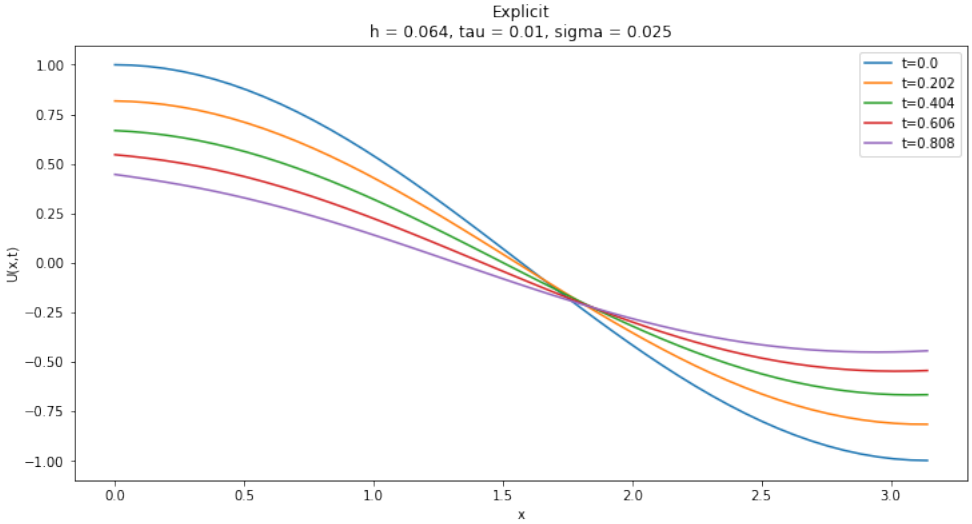
Неявная схема:
СЛАУ умеет вид:

$$u_{j+1}^{k+1}(-\sigma - \sigma h) = \tau^2 sin(x)e^{-t} + 2u_j^k + u_j^{k-1}(1.5\tau - 1)$$

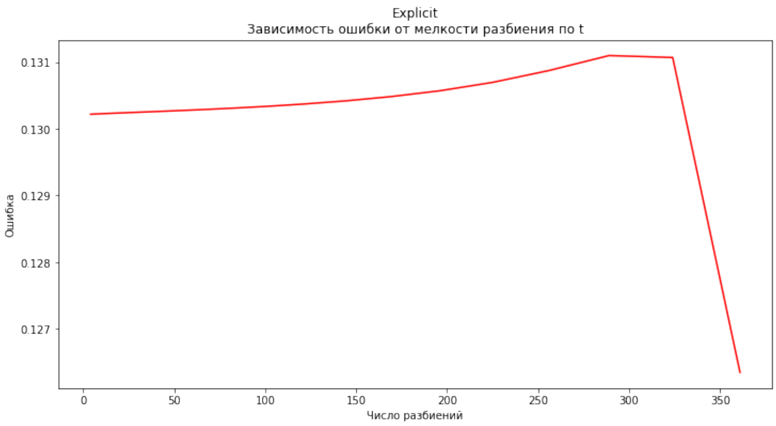
Граничные условия первого рода, аппроксимация не требуется.

Результаты работы программы:

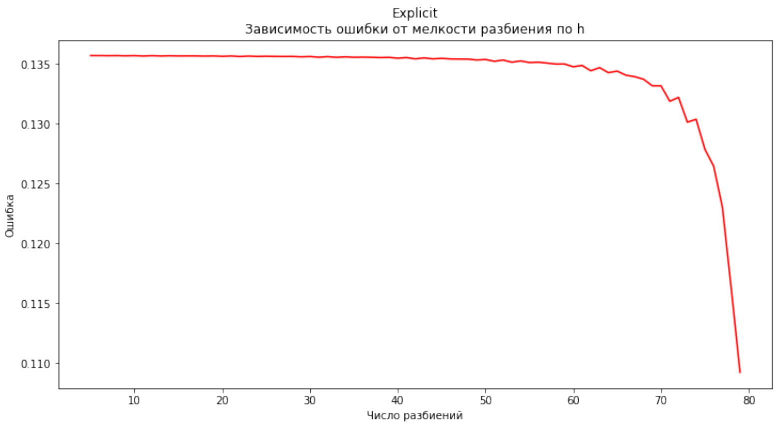
Явная схема:



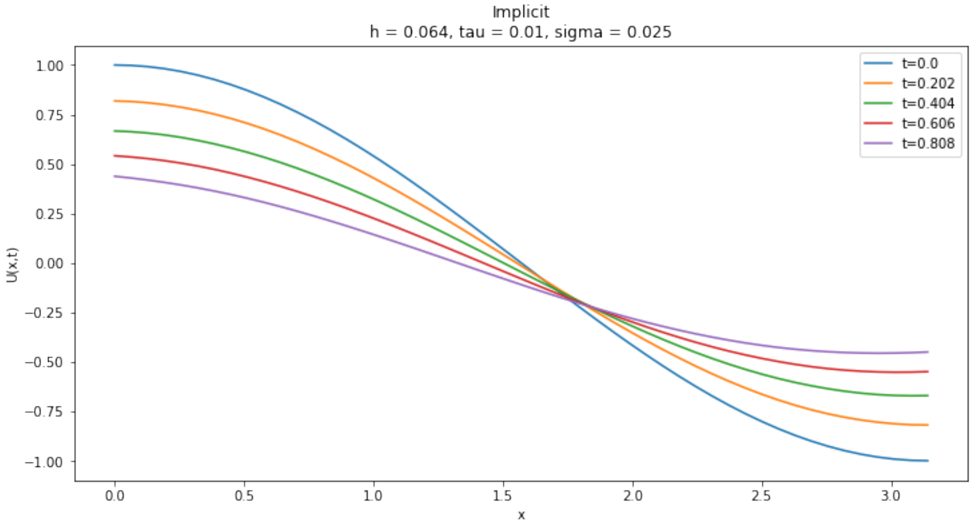
Ошибка от мелкости разбиения по T:



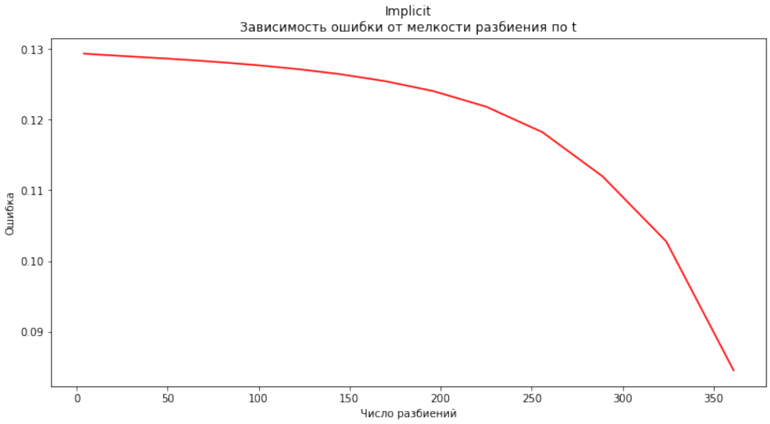
Ошибка от мелкости разбиения по x:



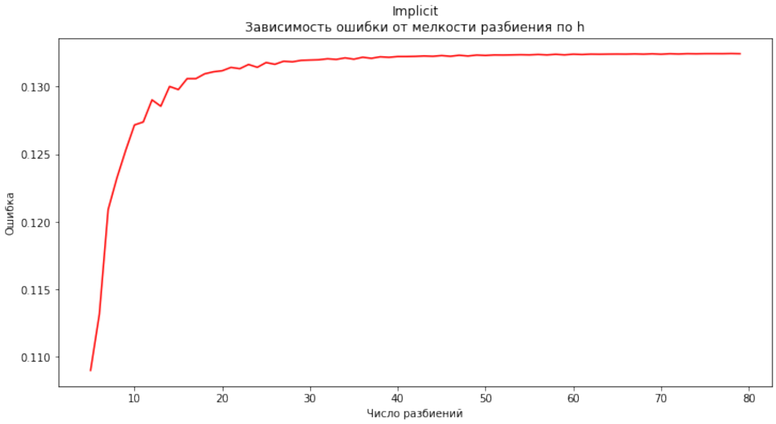
Неявная схема:



Ошибка от мелкости разбиения по T:



Ошибка от мелкости разбиения по x:



3 Лабораторная работа №3

Решить краевую задачу для дифференциального уравнения эллиптического типа. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием центрально-разностной схемы. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров h_x, h_y.

Вариант 9:

Уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial y} - 3u.$$

Граничные условия:

$$u(0, y) = e^{-y}cos(y)$$
$$u(\pi/2, y) = 0$$
$$u(x, 0) = cos(x)$$
$$u(x, \pi/2) = 0.$$

Аналитическое решение:

$$U(x, y) = e^{-y}cos(x)cos(y)$$

Подставим аппроксимации в основное уравнение

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} = b_x\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + b_y\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j_1}}{2h_y} + cu_{i,j}$$

Домножим на $2h_x^2h_y^2$, сгруппируем коэффициенты при $u_{i,j}$ и получим формулу для вычисления $u_{i,j}^{k+1}$

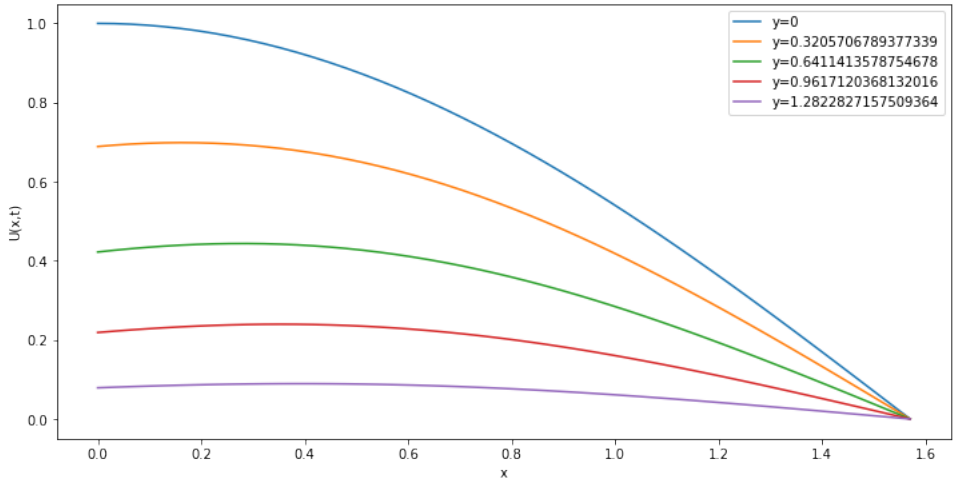
$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{b_xh_xh_y^2(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + b_yh_yh_x^2(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) - 2h_y^2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) - 2h_x^2(u_{i,j-1} + u_{i,j+1})}{-4h_y^2 - 4h_x^2 - 2h_x^2h_y^2c}$$

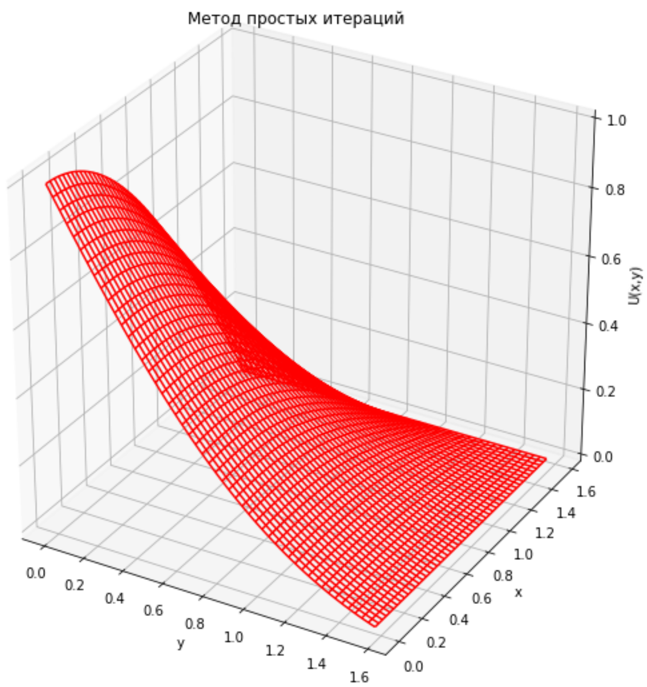
Для аппроксимации производных в граничных условиях используется двухточечная аппроксимация с 1 порядком точности

$$(h_x\beta_1 - \alpha_1)u_{0,j} + \alpha_1u_{1,j} = h_x\phi_1(y)$$
$$-\alpha_2u_{N_x-1,j} + (\alpha_2 + h_x\beta_2)u_{N_x,j} = h_x\phi_2(y)$$
$$(h_y\beta_3 - \alpha_3)u_{i,0} + \alpha_3u_{i,1} = h_y\phi_3(x)$$
$$-\alpha_4u_{i,N_y-1} + (\alpha_4 + h_y\beta_4)u_{i,N_y} = h_y\phi_4(x)$$

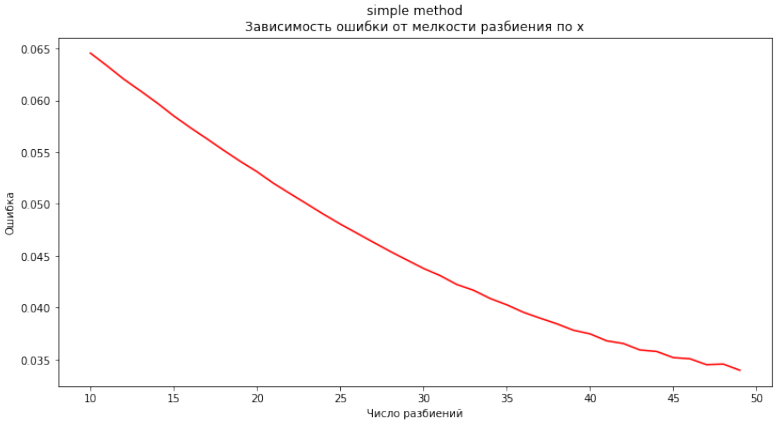
В методе простых итераций для вычисления $u_{i,j}^{k+1}$ используются значения с предыдущей итерации
В методе Зейделя для вычисления $u_{i,j}^{k+1}$ по возможности используются значения, уже вычесленные на $k+1$ итерации.

Результаты работы программы:
Метод простых итераций:
Количество итераций метода простых итераций = 634

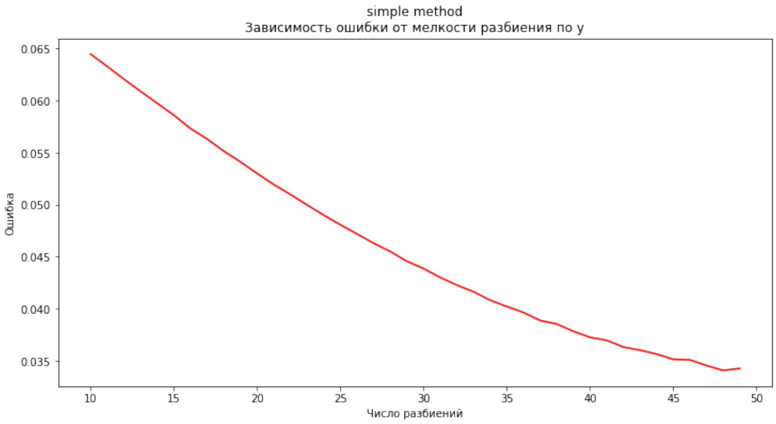




Зависимость ошибки от мелкости разбиения по x

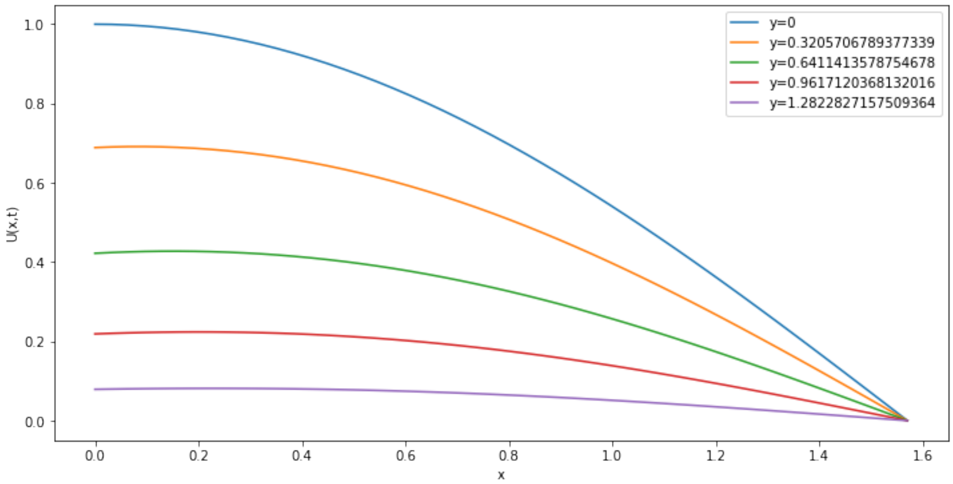


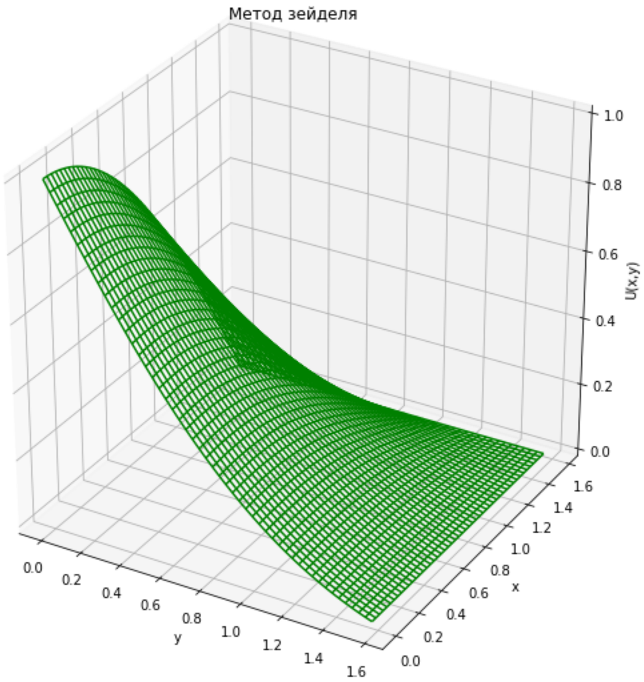
Зависимость ошибки от мелкости разбиения по y



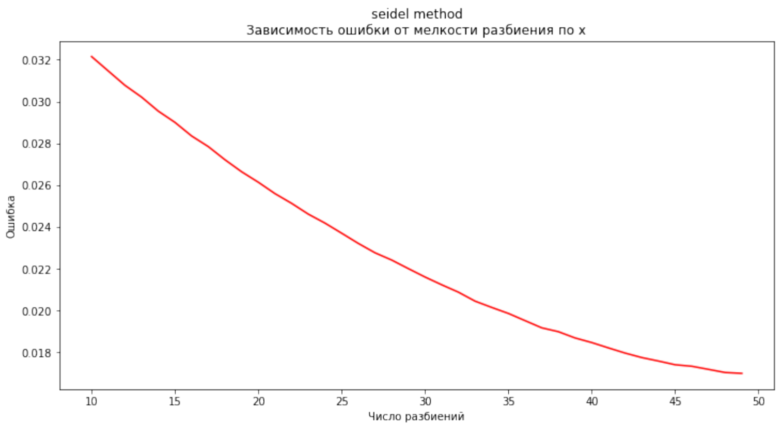
Метод Зейделя:

Количество итераций метода Зейделя $= 550$

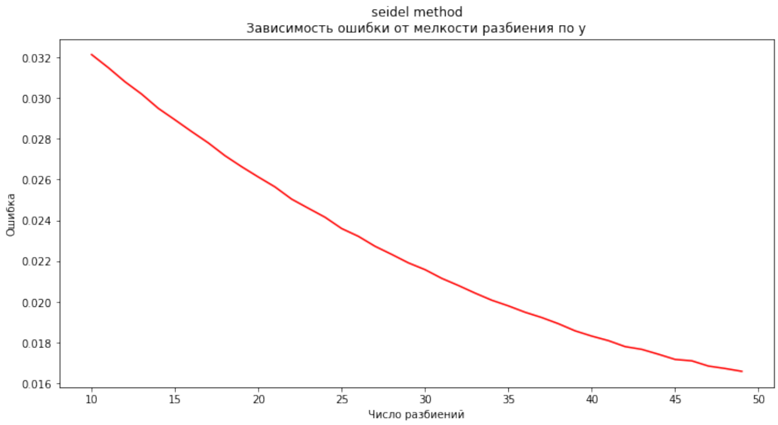




Зависимость ошибки от мелкости разбиения по x

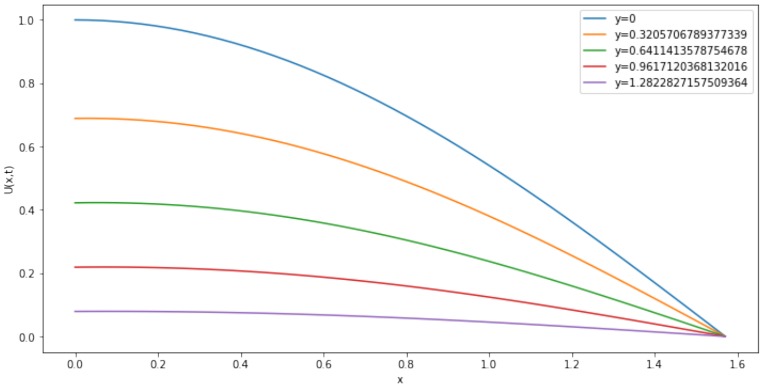


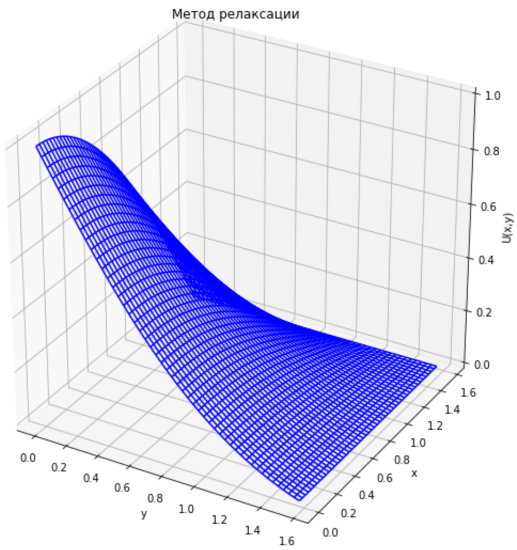
Зависимость ошибки от мелкости разбиения по y



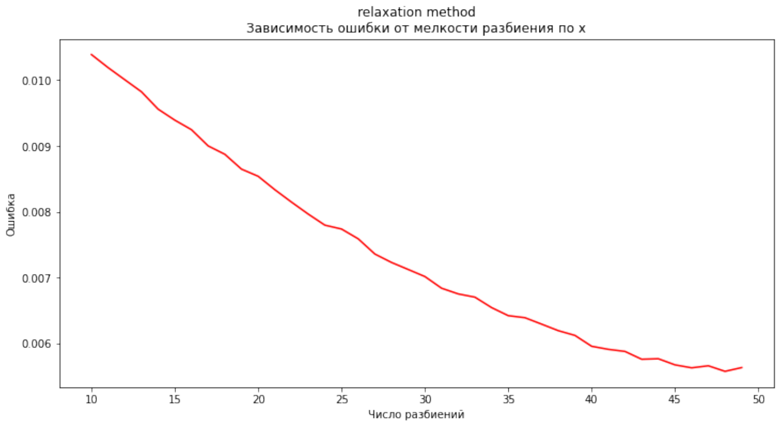
Метод релаксации:

Количество итераций метода релаксаций $= 305$

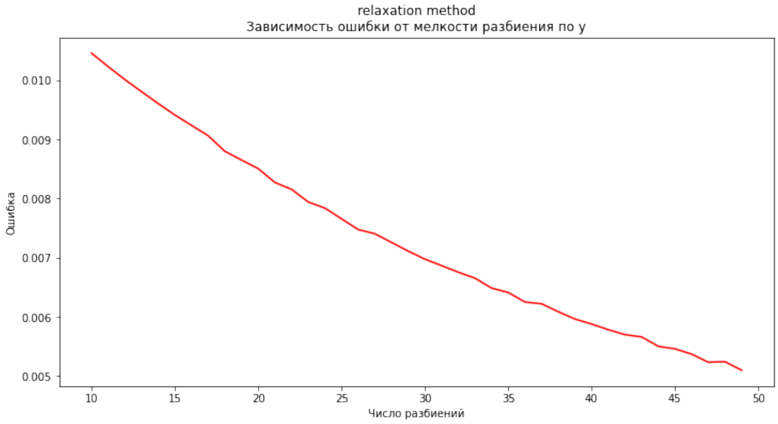




Зависимость ошибки от мелкости разбиения по x



Зависимость ошибки от мелкости разбиения по y



4 Лабораторная работа №4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, y, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y.

Вариант 9:
Уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + sin(x)sin(y)(\mu cos(\mu t) + (a+b)sin(\mu t)$$

Граничные условия:

$$u(0,y,t)=0u(\pi/2,y,t)=sin(y)sin(\mu t)u(x,0,t)=0u_y(x,\pi,t)=-sin(x)sin(\mu t)$$

Начальное условие:

$$u(x,y,0)=0$$

Аналитическое решение:

$$U(x,y,t)=sin(x)sin(y)sin(\mu t)$$

$$a=1,b=1,\mu=1$$

Метод переменных направлений

Схема метода имеет вид

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2}-u_{i,j}^{k}}{\tau/2}=a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2}+b\frac{u_{i,j-1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k}}{h_y^2}+f(x_i,y_j,t^{k+1/2})$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2}=a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2}+b\frac{u_{i,j-1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2}+f(x_i,y_j,t^{k+1})$$

Проведем ряд преобразований и получим следующие формулы

$$(-a\tau h_y^2)u_{i-1,j}^{k+1/2}+(2h_x^2h_y^2+2ah_y^2\tau)u_{i,j}^{k+1/2}+(-a\tau h_y^2)u_{i+1,j}^{k+1/2}=(u_{i,j-1}^{k}-2u_{i,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k})bh_x^2\tau+2h_x^2h_y^2u_{i,j}^{k}+h_x^2h_y^2\tau f(x_i,y_j,t^{k+1/2})$$

$$(-b\tau h_x^2)u_{i,j-1}^{k+1}+(2h_x^2h_y^2+2bh_x^2\tau)u_{i,j}^{k+1}+(-b\tau h_x^2)u_{i,j+1}^{k+1}=(u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2})ah_y^2\tau+2h_x^2h_y^2u_{i,j}^{k+1/2}+h_x^2h_y^2\tau f(x_i,y_j,t^{k+1})$$

Метод дробных шагов

Схема метода имеет вид

$$\frac{u_{i,j}^{k+1/2}-u_{i,j}^{k}}{\tau}=a\frac{u_{i-1,j}^{k+1/2}-2u_{i,j}^{k+1/2}+u_{i+1,j}^{k+1/2}}{h_x^2}+\frac{f(x_i,y_j,t^{k})}{2}$$

$$\frac{u_{i,j}^{k+1}-u_{i,j}^{k+1/2}}{\tau}=b\frac{u_{i,j-1}^{k+1}-2u_{i,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k+1}}{h_y^2}+\frac{f(x_i,y_j,t^{k+1})}{2}$$

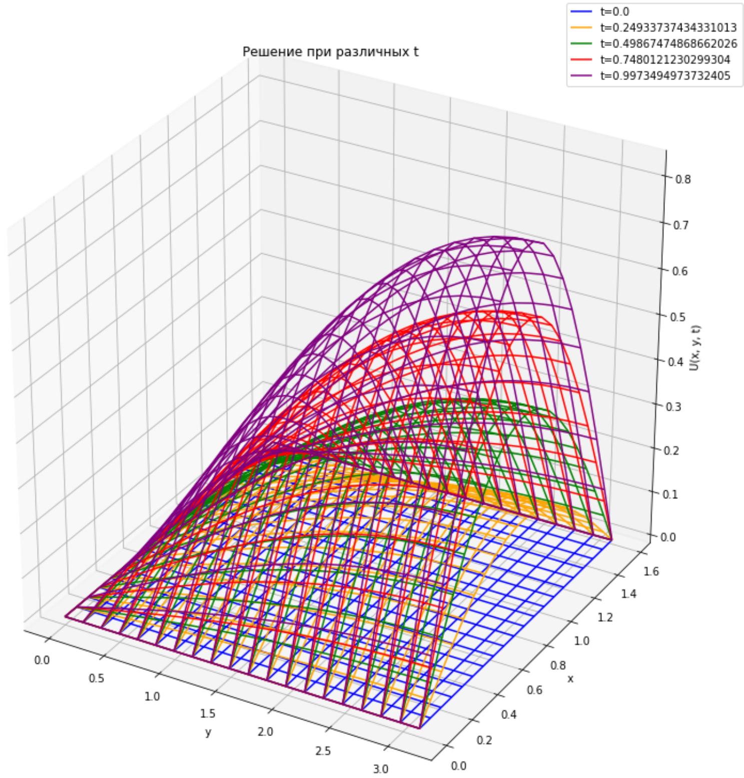
Проведем ряд преобразований и получим следующие формулы

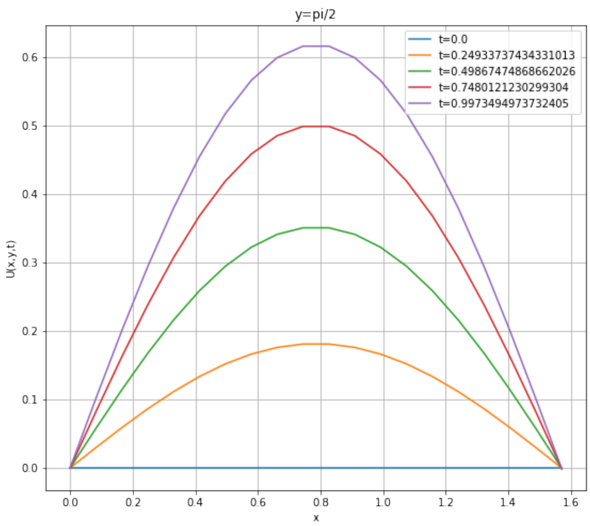
$$(-2\tau a)u_{i-1,j}^{k+1/2}+(2h_x^2+4\tau a)u_{i,j}^{k+1/2}+(-2\tau a)u_{i+1,j}^{k+1/2}=2h_x^2u_{i,j}^{k}+\tau h_x^2f(x_i,y_j,t^{k})$$

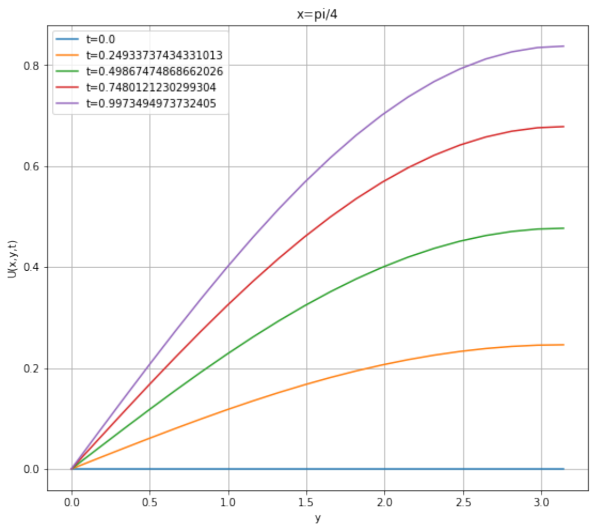
$$(-2\tau b)u_{i,j-1}^{k+1}+(2h_y^2+4\tau b)u_{i,j}^{k+1}+(-2\tau b)u_{i,j+1}^{k+1}=2h_y^2u_{i,j}^{k+1/2}+\tau h_y^2f(x_i,y_j,t^{k+1})$$

Результаты работы программы:

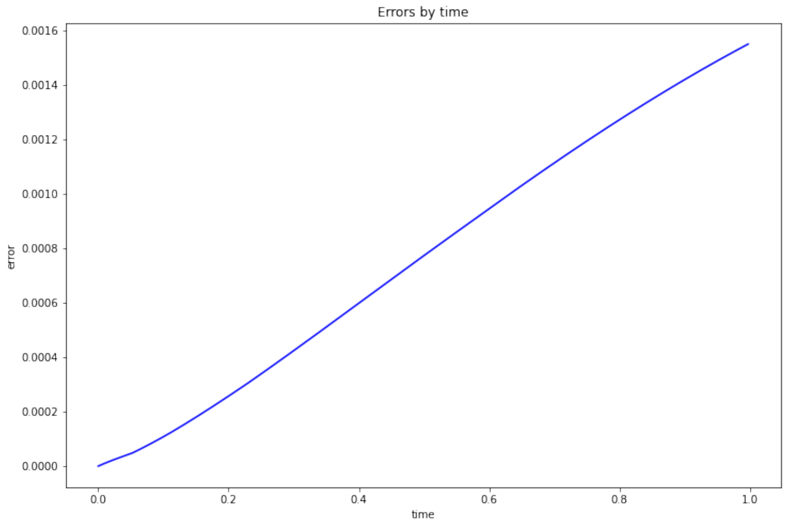
Метод переменных направлений:



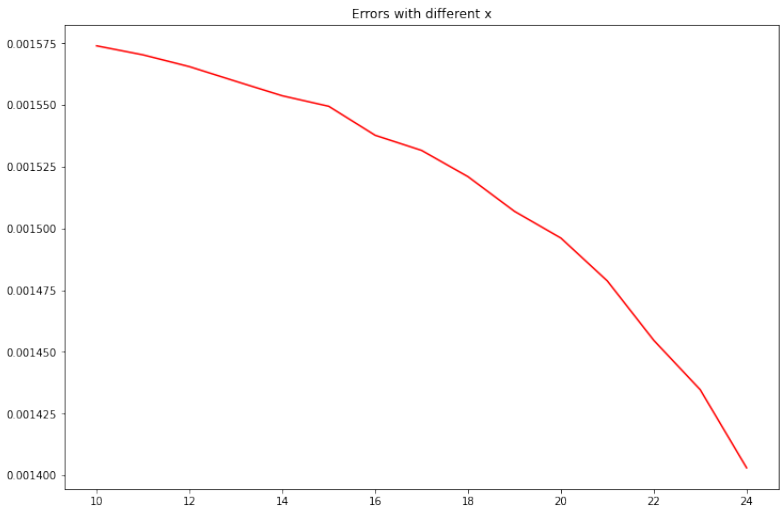




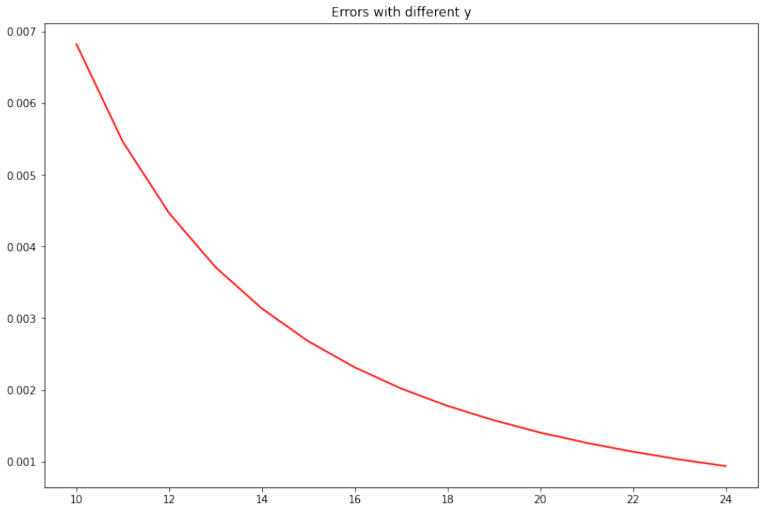
Зависимость ошибки от времени:



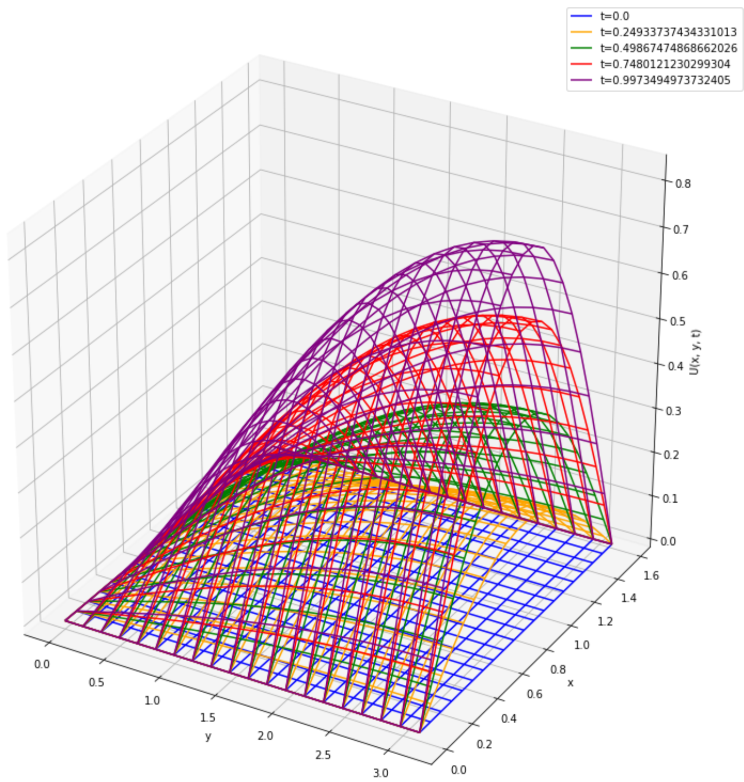
Зависимость ошибки от мелкости разбиения по x

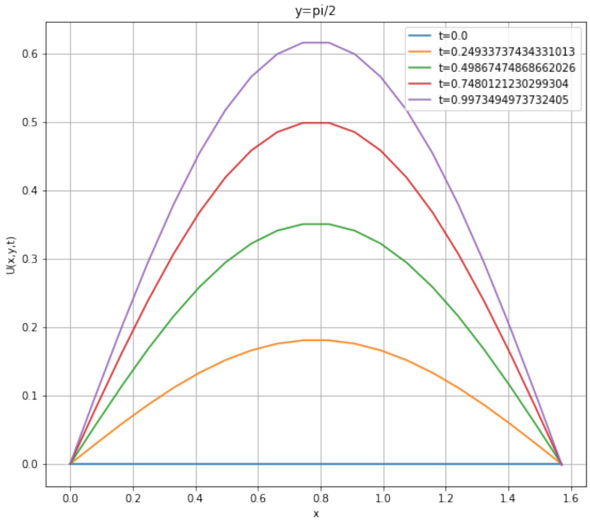


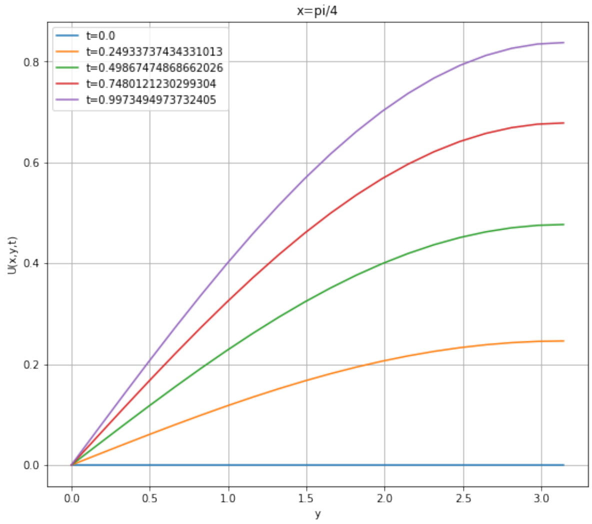
Зависимость ошибки от мелкости разбиения по y



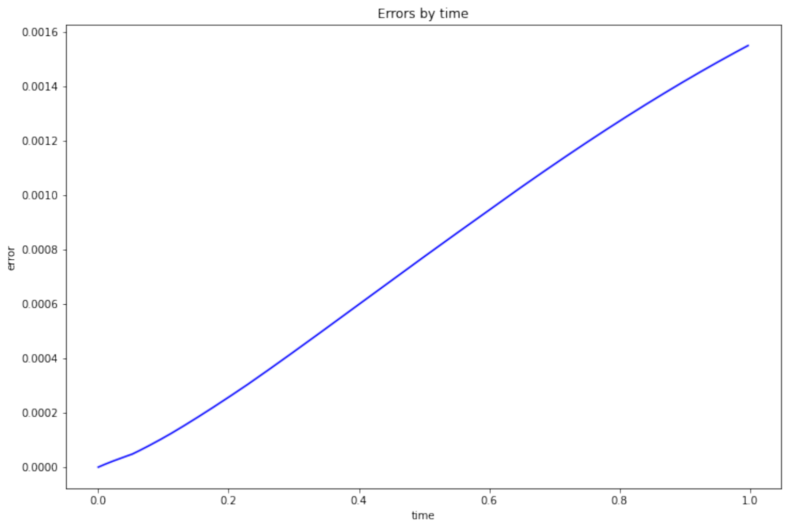
Метод дробных шагов:



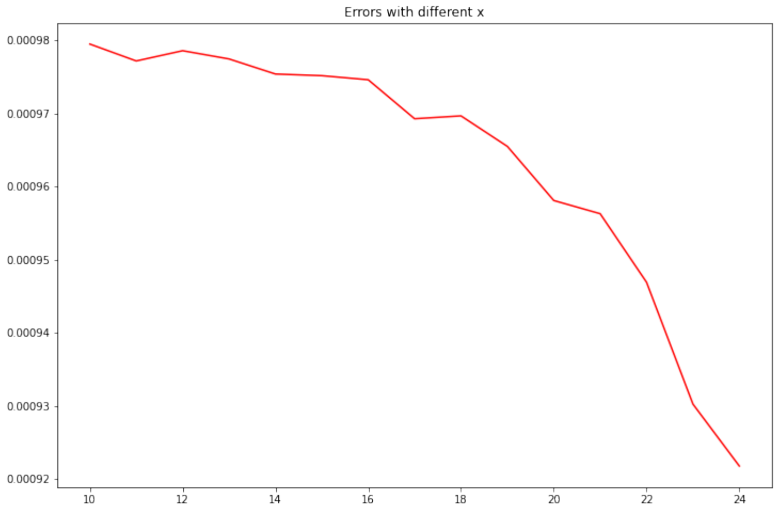




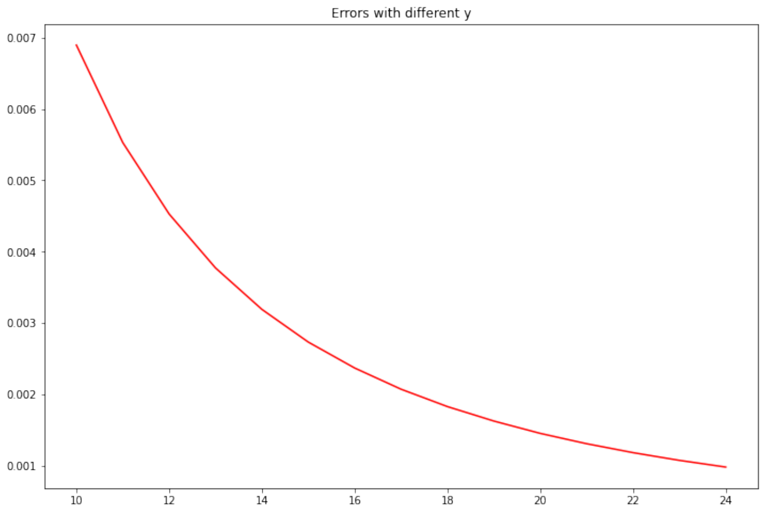
Зависимость ошибки от времени:



Зависимость ошибки от мелкости разбиения по x



Зависимость ошибки от мелкости разбиения по y



5 Выводы

Выполнив лабораторные работы по курсу Численные методы, я закрепил знания математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений. Реализовал множество алгоритмов численного решения всевозможных дифференциальных уравнений в частных производных на языке Python.