Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

В. М. Марченко, О. Н. Пыжкова

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Рекомендовано
учебно-методическим объединением
по химико-технологическому образованию
в качестве учебно-методического пособия
для студентов учреждений высшего образования
по специальности 1-53 01 01 «Автоматизация
технологических процессов и производств»*

Минск 2013

УДК 517.9:53(075.8)
ББК 22.311я75
М30

Рецензенты:
кафедра математической физики Белорусского
государственного университета
(доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой, член-корреспондент НАН Беларуси,
заведующий отделом математической физики
Института математики НАН Беларуси *В. И. Корзюк*);
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики и информатики
Белорусского государственного университета *С. В. Пономарева*

Марченко, В. М.
М30 Уравнения математической физики : учеб.-метод. пособие для студентов специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств» / В. М. Марченко, О. Н. Пыжкова. – Минск : БГТУ, 2013. – 160 с.
ISBN 978-985-530-289-7.

Учебный комплекс, написанный в соответствии с уровневой методологией преподавания математических дисциплин, содержит программу курса «Уравнения математической физики», лекционный материал, практикум, теоретический и практический минимум с примерами решения типовых задач, индивидуальные задания, вопросы для самоконтроля, справочный материал. Комплекс будет полезен всем, кто интересуется уравнениями математической физики.

УДК 517.9:53(075.8)
ББК 22.311я75

ISBN 978-985-530-289-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

В курсе рассматриваются дифференциальные уравнения (ДУ) с частными производными (ЧП), т. е. уравнения, содержащие неизвестную функцию нескольких переменных и ее частные производные.

ДУ с ЧП находят широкое применение в прикладных науках: квантовая механика, электродинамика, термодинамика, теория тепло- и массопереноса при математическом описании и моделировании различных физических процессов. Поэтому такие уравнения в теории ДУ с ЧП объединяются под общим названием уравнений математической физики. Они, как правило, имеют бесчисленное множество решений. При исследовании конкретной физической задачи необходимо из этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Итак, *задачи уравнений математической физики состоят в отыскании решений уравнений с частными производными, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.* Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой области, и *начальные условия*, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Совокупность граничных и начальных условий называют краевыми условиями задачи. Краевая задача уравнения математической физики считается *поставленной корректно*, если решение задачи, удовлетворяющее краевым условиям, существует, единственно и устойчиво к малым возмущениям, т. е. малые изменения любого из исходных данных задачи вызывают соответственно малое изменение решения. Это важно для приложений ДУ с ЧП, поскольку реальные данные прикладной задачи часто получены из опыта и, таким образом, содержат некоторую погрешность. Поэтому необходимо, чтобы малые погрешности в данных задачи приводили к малым изменениям в ее решении (понятие малости требует математического уточнения в каждой конкретной задаче).

Учебно-методический комплекс написан в соответствии с разрабатываемой и внедряемой на кафедре высшей математики Белорусского государственного технологического университета уровневой технологией преподавания математических дисциплин.

Целью уровневой технологии организации учебного процесса является *создание условий для включения каждого обучаемого в деятельность, соответствующую зоне его ближайшего развития*, обеспечение условий для самостоятельного (и/или под контролем преподавателя) усвоения программного материала в том размере и с той глубиной, которую позволяют индивидуальные особенности обучаемого.

Отметим некоторые принципиальные моменты уровневой технологии организации учебного процесса по математике в БГТУ.

Весь материал курса классифицируется по трем уровням: **А**, **Б**, **С**.

Материал первого уровня **А** (базовый) – обязательное поле знаний по предмету (программа-минимум) – уровень знаний, необходимый для успешного продолжения обучения.

Второй уровень **Б** (или *) содержит задания, расширяющие представление студента об изучаемых темах, устанавливает связи между понятиями и методами различных разделов, дает их строгое математическое обоснование, а также примеры применения при решении прикладных задач.

Материал **А+Б** (профильный) уровней А и Б охватывает всю стандартную программу – программу-максимум – и является достаточным для обеспечения самостоятельной (или под контролем преподавателя) работы обучаемого с учебной литературой.

Уровень **С** (или ** – необязательный) содержит материал повышенной трудности. Материал **А+Б+С** трех уровней – углубленная программа – открывает путь научным исследованиям в области математического моделирования производственных процессов по избранной специальности. Отметим, что материал более низкого уровня не требует обращения к более высокому уровню.

Важным достоинством этой методики является ее направленность на работу со студентами, обладающими способностями к творческой работе и ярко выраженной мотивацией к получению хорошего образования.

Структурно комплекс организован следующим образом: уровневая программа курса, материал лекций с выделением соответствующих уровней глубины его усвоения, практикум, содержащий теоретический и практический минимум с примерами решения типовых задач, задания для самоконтроля, индивидуальные занятия.

В конце комплекса приводится справочный материал – некоторые основные сведения, определения и формулы из курса уравнений математической физики, а также рекомендуемая основная и дополнительная литература.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА 1

1.1. Пояснительная записка

1.1.1. Актуальность изучения учебной дисциплины в вузе и ее роль в профессиональной подготовке выпускника вуза

Для характеристики различных процессов, происходящих в природе и технике, все шире используется математический аппарат, разрабатываются специальные математические методы. Математические методы позволяют дать унифицированный научный подход к изучению различных явлений реального мира путем составления их математических моделей, которые во многих случаях формализуются в рамках одних и тех же математических структур. Развитие количественных методов анализа реальных физических процессов показало, что одна и та же физическая величина (свойство) в разных точках исследуемого объекта и даже в одной в разные моменты времени может принимать различные значения, и поэтому при математическом описании этих величин приходится рассматривать функции, зависящие от времени и пространственных переменных.

Инженер по автоматизации технологических процессов и производств должен владеть основами математического моделирования и его реализации в компьютерных информационных технологиях, чтобы быть конкурентоспособным на рынке труда и выдерживать темпы научно-технического прогресса. Эти процессы, как уже отмечалось, являются динамическими и зависят от многих факторов и, таким образом, описываются дифференциальными уравнениями относительно функций нескольких переменных, т. е. дифференциальными уравнениями с частными производными.

Постоянно возрастающая роль математических моделей во многих областях естественных и технических наук требует от современного инженера владения рядом специальных разделов математики. Уравнения математической физики представляют один из таких разделов.

Дисциплина «Уравнения математической физики» предназначена для ознакомления студентов с классическими методами интегрирования уравнений в частных производных второго порядка, к которым приводит ряд конкретных физических и технических задач. Как правило, каждое из таких уравнений имеет бесчисленное множество частных решений, и задача уравнений математической физики состоит в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным – краевым (начальным и граничным) условиям.

Эффективная работа инженера по автоматизации в современной компьютерной среде невозможна без тесной связи практики и теории, без знания математических методов моделирования технологических процессов. Такой подход позволяет студентам самостоятельно моделировать физические явления и процессы, применяемые в производстве.

Современная подготовка инженера по автоматизации основана на тесной связи теории и практики, на знании методов математического описания технологических процессов и умении анализировать полученные математические модели с использованием возможностей современных компьютерных программ. Дисциплине «Уравнения математической физики» как классическому курсу математического описания технологических процессов отводится в этой связи одно из центральных мест.

1.1.2. Цели и задачи учебной дисциплины

Цель курса – ознакомить студентов с основными понятиями и методами теории дифференциальных уравнений с частными производными и выработать навыки решений стандартных краевых задач математической физики и, как результат, подготовить студентов к последующему изучению более сложных задач моделирования, к выполнению учебной и научно-исследовательской работы.

Задачи преподавания уравнений математической физики состоят в выяснении сущности научного подхода к описанию и исследованию реальных физических и производственных процессов; роли математических методов в этом описании и в системе естественнонаучных дисциплин в целом как способе познания окружающего мира; в развитии у обучаемых способности к логическому и алгоритмическому мышлению, а также знаний, умений и приемов исследования и решения математически формализованных задач.

1.1.3. Требования к уровню освоения содержания учебной дисциплины

В результате изучения курса «Уравнения математической физики» студент должен *иметь представление*:

- о месте уравнений математической физики в системе естествознания;
- о типах задач, решаемых с помощью уравнений математической физики;

знать и уметь использовать:

- основные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также применять эти знания и методы к описанию и решению прикладных задач;
- методы системного и сравнительного анализа;

владеть:

- исследовательскими навыками применения методов математического моделирования динамических технологических процессов для решения теоретических и практических задач, что в совокупности позволит сочетать академические и социально-личностные компетенции для успешной профессиональной и социальной деятельности.

1.1.4. Структура содержания учебной дисциплины

Дисциплина базируется на программе курса высшей математики. На изучение данной дисциплины учебным планом специальности 1-53 01 01 «Автоматизация технологических процессов и производств» предусмотрено 54 часа, в том числе 34 аудиторных, из них 18 часов лекций, 16 часов практических занятий.

1.2. Примерный тематический план дисциплины

Тема	Количество аудиторных часов	
	Лекции	Практические занятия
Введение	2	2
1. Гиперболические уравнения	8	6
2. Параболические уравнения	4	4
3. Эллиптические уравнения	4	4
Итого	18	16

1.3. Содержание дисциплины

1.3.1. Введение

Основные понятия курса уравнений математичекой физики. Примеры. Основные физические процессы и их уравнения. Постановка краевых задач. Понятие корректной постановки задачи. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристическое уравнение. Основные типы уравнений.

1.3.2. Гиперболические уравнения

Вывод уравнения поперечных колебаний струны. Постановка основных краевых задач. Решение задачи Коши для уравнения колебания струны методом характеристик. Формула Даламбера. *Физический смысл формулы Даламбера**. Общая формальная схема метода разделения переменных решений смешанных задач для гиперболических уравнений. Решение смешанных задач методом разделения переменных (метод Фурье). *Задача Штурма – Лиувилля**.

1.3.3. Параболические уравнения

Вывод уравнения теплопроводности. Постановка краевых задач. *Теорема о максимальном и минимальном значениях решений уравнения теплопроводности**. Общая формальная схема метода разделения переменных решений смешанных задач для параболических уравнений. *Функция источника**. *Решение краевых задач с помощью преобразований Лапласа** *и Фурье***.

1.3.4. Эллиптические уравнения

Определение и свойства гармонических функций. О единственности решений задач Дирихле и *Неймана**. *Функция Грина**. *Метод функции Грина**. Решение задач Дирихле и *Неймана**. *Физический смысл функции Грина**. *Метод фиктивных зарядов построения функции Грина задачи Дирихле***.

1.4. Примерная тематика практических занятий

1. Уравнения с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными. Приведение к каноническому ви-

ду дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Характеристическое уравнение. Характеристики.

2. Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения по формуле Даламбера. Метод характеристик.

3. Метод разделения переменных решения задачи о свободных колебаниях ограниченной струны.

4. Метод преобразования Фурье решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

5. Решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона в круге методом разделения переменных.

6. Метод сеток.

1.5. Примерный перечень тем для самостоятельной работы

1. Корректные и некорректные краевые задачи. Пример Адамара. Теорема Коши – Ковалевской.

2. Задача Коши на прямой для неоднородного волнового уравнения. Обобщенная задача Коши. Формула Римана.

3. Понятие об обобщенных решениях. Задача Гурса.

4. Применение метода характеристик к изучению колебаний в электрических линиях.

5. Формула Пуассона.

6. Функции Бесселя.

7. Неоднородное уравнение теплопроводности. Функция мгновенного точечного источника тепла.

8. Распространение тепла в цилиндре конечных и бесконечных размеров.

9. Ньютоновский потенциал. Потенциалы простого и двойного слоя.

МАТЕРИАЛ ЛЕКЦИЙ 2

2.1. Введение. Основные понятия

1А1 (Определение). *Дифференциальным уравнением с частными производными* (ДУ в частных производных) называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных (ФНП) и ее частных производных. Наивысший порядок частных производных (существенно входящих в уравнение) называется *порядком* этого уравнения.

1А+Б2 (Примеры).

2.1. ДУ вида

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}, ...\right) = 0 \qquad (2.1)$$

относительно неизвестной функции $u = u(x)$, где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ является точкой в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, представляет *общий вид* ДУ с ЧП, если по крайней мере одна из частных производных функции u входит в уравнение существенным образом. Здесь α называется мультииндексом, т. е. $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$, $\alpha_i \geq 0$ и представляют собой целые неотрицательные числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = m$, где m – порядок уравнения.

Точное определение того, какие зависимости F являются допустимыми, в общем случае требует отдельного рассмотрения.

2.2. Уравнение вида

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, ..., x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^m z}{\partial x_2^m}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^m z}{\partial x_n^m}\right) \qquad (2.2)$$

относительно неизвестной функции $z = z(x) = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ДУ с ЧП порядка m, разрешенным относительно старшей производной $\dfrac{\partial^m z}{\partial x_1^m}$.

2.3. ДУ с ЧП называется линейным (ЛДУ), если неизвестная функция и ее производные входят в это ДУ линейно (в первой степени). Так, уравнение

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{главная часть}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u}_{\text{младшая часть}} = f(x) \tag{2.3}$$

описывает общий вид ЛДУ с ЧП второго порядка с n переменными (относительно неизвестной функции $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$). Если правая часть $f(x) \equiv 0$ в рассматриваемой области, ЛДУ (2.3) называется однородным, в противном случае – неоднородным. Если главная часть в (2.3) отсутствует, получаем ЛДУ с ЧП первого порядка.

2.4. ДУ с ЧП называется линейным относительно старших производных, если старшие производные входят в него в первой степени (линейно). Например,

$$\underbrace{a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{главная часть}} = \underbrace{F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{младшая часть}}, \tag{2.4}$$

$(x,y) \in R^2$. Если коэффициенты a, b, c в (2.4) зависят еще от u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, то такое уравнение называется квазилинейным.

2.5. Как уже отмечалось, ДУ с ЧП широко используются для математического моделирования и описания различных физических задач. Эти уравнения и называются дифференциальными уравнениями математической физики. Основные типы этих уравнений:

$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$ – волновое уравнение, которое обычно записывают в компактном виде $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U$, где a – скорость распространения волны в среде, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $U = u(x, y, z)$;

$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T$ – уравнение теплопроводности;

$\Delta\varphi = 0$ – уравнение Лапласа;

$\Delta\varphi = -\rho$ – уравнение Пуассона – основное дифференциальное уравнение электростатики, где φ – электрический потенциал, $\rho = \rho(x, y, z)$ – известное распределение зарядов в пространстве;

$\square\varphi = -\rho$ – уравнение Даламбера, где $\square = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ – оператор Даламбера или волновой оператор;

$\Delta\psi + (E - U)\psi = 0$ – уравнение Шредингера – основное дифференциальное уравнение квантовой механики, где ψ – волновая функция, E – полная энергия частицы, играющая роль параметра, U – потенциальная энергия, заданная условиями задачи.

1А3 (Определение). Функция $u = u(x)$, непрерывная в некоторой области D вместе со своими частными производными, входящими в ДУ с ЧП, и обращающая это ДУ в тождество в области D, называется *регулярным решением* этого ДУ. Наряду с регулярными решениями в теории ДУ с ЧП важное значение имеют решения, перестающие быть регулярными в изолированных точках.

Однако существуют ДУ с ЧП, множества решений которых весьма узки и в некоторых случаях пусты. Например, множество действительных решений ДУ $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 0$ составляют только постоянные функции: $u(x) = \text{const}$, а ДУ $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений.

Качественные особенности решений ДУ с ЧП выявляются уже при изучении простейших случаев.

1А+Б4 (Примеры-упражнения).

4.1. Рассмотрим ДУ первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ для функции $u = u(x, y)$. Решением такого уравнения является любая функция, не зависящая от x (зависимость от y может быть любой). Поэтому уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ имеет бесконечное множество решений вида $u(x, y) = C(y)$, где $C(y)$ – произвольная функция аргумента y.

4.2. Рассмотрим ДУ первого порядка $\dfrac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \varphi(x) + \psi(y)$, $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, где функции φ, ψ берутся из класса C^0 (здесь и далее символ C^k означает множество k раз непрерывно дифференцируемых функций). Интегрируя уравнение по x, получаем его решение в виде

$$z = z(x, y) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + x\psi(y) + C(y),$$

где $x_0 \in (a, b)$, $C(y)$ – произвольная функция.

4.3. Рассмотрим ДУ первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Вводя новые независимые переменные $\xi = x + \dfrac{1}{2}y$, $\eta = x - \dfrac{1}{2}y$, получаем $u = u(x, y) = u\left(\dfrac{1}{2}(\xi + \eta), \xi - \eta\right) = z(\xi, \eta)$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial \eta}$, $2\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial \xi} - \dfrac{\partial z}{\partial \eta}$ и рассматриваемое ДУ сводится к виду $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 0$, интегрируя которое, имеем: $z = z(\xi, \eta) = C(\xi)$ или, возвращаясь к исходным переменным, получаем решение в виде $u = u(x, y) = C\left(x + \dfrac{1}{2}y\right)$, где $C\left(x + \dfrac{1}{2}y\right)$ – произвольная функция класса C^1.

4.4. Решение ДУ второго порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$, $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$, получается последовательным интегрированием по переменным x и y, например в начале по x, затем по y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(y), \; u = \int f(y)dy + C_1(x) = C_1(x) + C_2(y).$$

В результате решение содержит произвольные функции $C_1(x)$ и $C_2(y)$ класса C^1. Такие решения принято называть *общими* (или *представлениями* решения). Таким образом, общие решения ДУ с ЧП, как и обыкновенных ДУ, не определяются однозначно, но в отличие от последних включают уже не произвольные постоянные, а произвольные функции.

1Б5 (Замечание-упражнение). В предыдущих примерах решение ДУ с ЧП первого порядка зависело от одной произвольной функции, а решение ДУ с ЧП второго порядка – от двух произвольных функций. Является ли этот факт общим?

1А6 (Замечание). Как отмечалось, общие решения ДУ с ЧП зависят от произвольных функций. Чтобы из них выделить конкретные (частные) решения, обычно накладывают дополнительные требования – *начальные* и *граничные условия*.

1А7 (Начальная задача Коши). Рассмотрим ДУ с ЧП (2.2), где $x=(x_1,...,x_n)\in D_1\times D,\, D_1\subset\mathbb{R},\, D\subset\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть далее заданы начальная точка $(x_{10},...,x_{n0})\in D_1\times D$ и начальные функции $\varphi_0(x_2,...,x_n),...,\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$, $(x_2,...,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда *начальная задача Коши* означает нахождение решения ДУ с ЧП (2.2), удовлетворяющего следующим *начальным условиям*:

$$z(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_0(x_2,...,x_n),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_1}(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_1(x_2,...,x_n),$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}(x_{10},x_2,...,x_n)=\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n),\,(x_2,...,x_n)\in D.$$

Задачу Коши можно рассматривать не во всей области D, а только в окрестности точки $(x_{20},...,x_{n0})\in D$.

Рассмотрим функцию $u=u(x_1,...,x_n)$, определенную в некоторой окрестности точки $(x_{10},...,x_{n0})$. Она называется аналитической функцией своих аргументов в окрестности этой точки, если в рассматриваемой окрестности функция представима степенным рядом вида $\sum\limits_{\alpha_1...\alpha_n} a_{\alpha_1...\alpha_n}(x-x_{10})^{\alpha_1}...(x-x_{n0})^{\alpha_n}$.

1А+С8 (Теорема Коши – Ковалевской). Если

1) правая часть f ДУ (2.2) является аналитической функцией своих аргументов в некоторой окрестности начальных данных $x_{10},...,x_{n0}$;

2) функции $\varphi_0(x_2,...,x_n),\ldots,\varphi_{m-1}(x_2,...,x_n)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(x_{20},...,x_{n0})$.

Тогда существует окрестность начальной точки $(x_{10},...,x_{n0})$, в которой решение задачи Коши 1А7 существует, единственно и является функцией аналитической.

1А+Б9 (Следствие). Если правая часть ДУ с ЧП первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f\left(x,y,z,\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

является аналитической функцией своих аргументов в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, \varphi(y_0, z_0), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(y_0, z_0), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(y_0, z_0)\right)$, где φ – аналитическая функция в некоторой окрестности точки (y_0, z_0), то найдется окрестность точки (x_0, y_0, z_0), в которой решение начальной задачи Коши $u(x_0, y, z) = \varphi(y, z)$ существует, единственно и является функцией аналитической.

<u>1А+Б10</u> (Замечание). Отметим, что функция $\varphi(y, z)$ двух переменных считается аналитической в окрестности точки (y_0, z_0), если в этой окрестности функция раскладывается в соответствующий ряд Тейлора:

$$\varphi(y, z) = \sum_{i+j=0}^{+\infty} a_{ij}(y - y_0)^i (z - z_0)^j,$$

где $a_{ij} = \frac{1}{i!\, j!} \frac{\partial^{i+j}\varphi}{\partial y^i \partial z^j}(y_0, z_0)$, $i = 0, 1, ...;\ j = 0, 1, ...$

<u>1А11</u> (Замечание). График решения ДУ с ЧП принято называть интегральной поверхностью (в соответствующем пространстве). Тогда в геометрической интерпретации в задаче Коши $u(x_0, y) = \varphi(y)$ для ДУ первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ требуется найти такую интегральную поверхность $u = u(x, y)$, которая проходит через заданную кривую $x = x_0, u = \varphi(y)$.

ДУ с ЧП различаются порядком, видом (линейные, нелинейные, квазилинейные) и типом (гиперболические, параболические, эллиптические, смешанные) и т. д.

2.2. ЛДУ с ЧП первого порядка

Рассмотрим ЛДУ с ЧП первого порядка

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2.5}$$

где функции P, Q, R одновременно в нуль не обращаются (в области D).

Предположим, например, что $P(x,y,z)\neq 0$, $Q(x,y,z)\neq 0$, $R(x,y,z)\neq 0, (x,y,z)\in D,$ и рассмотрим систему обыкновенных ДУ

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}, \tag{2.6}$$

которую будем называть системой (уравнений) *характеристик* и где x можем считать независимой переменной, а z, y – ее функциями.

<u>2А+Б1</u> (Теорема о свойствах решений ДУ с ЧП и ее системы характеристик). Если в рассматриваемой области функция $u=\ \psi(x,y,z)$ является решением ДУ с ЧП (2.5), то соотношение $\psi(x,y,z)=\psi(x,y(x),z(x))=c\equiv\text{const}$ есть (первый) интеграл системы (2.6). Обратно: если $\psi(x,y,z)\equiv\text{const}$ – интеграл системы (2.6), то функция $u=\psi(x,y,z)$ является решением ДУ с ЧП (2.5).

Схема доказательства. Пусть $u=\psi(x,y,z)$ – решение ДУ (2.5). Полагая $y=y(x)$, $z=z(x)$, имеем:

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx}\underset{(2.6)}{=}$$

$$\underset{(2.6)}{=}\frac{1}{P(x,y,z)}\left(P(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\underset{(2.5)}{=}0.$$

Таким образом, соотношение $\psi(x,y,z)\equiv\text{const}$ является интегралом системы (2.6), т. е. $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\equiv 0$ в силу системы (2.6). Обратно: если $\psi(x,y,z)\equiv\text{const}$ – интеграл системы (2.6), то

$$0\equiv\frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dx}\underset{(2.6)}{=}$$

$$\underset{(2.6)}{=}\frac{1}{P(x,y,z)}\left(P(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

откуда получаем $P(x,y,z)\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+Q(x,y,z)\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+R(x,y,z)\dfrac{\partial\psi}{\partial z}=0,$ что завершает доказательство теоремы.

<u>2Б2</u> (Теорема об общем интеграле ДУ с ЧП первого порядка). Если функции $\psi(x,y,z)=\psi(x,y(x),z(x))$, $\varphi(x,y,z)=\varphi(x,y(x),z(x))$ класса C^1 задают в области D линейно независимые интегралы системы характеристик (2.6), то функция

$$u=\Phi\big(\psi(x,y,z),\varphi(x,y,z)\big), \tag{2.7}$$

где Φ – произвольная функция класса C^1, является в достаточно малой окрестности произвольной точки области D *общим решением* (задает общий интеграл) ДУ с ЧП (2.5).

Схема доказательства. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial z}+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}\left(P(x,y,z)\frac{\partial \psi}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial \psi}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\left(P(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0.$$

Таким образом, функция (2.7) является решением ДУ с ЧП (2.5). Кроме того, линейная независимость функций ψ,φ гарантирует в достаточно малой окрестности произвольной точки области D разрешимость начальной задачи Коши. Следовательно, функция (2.7) определяет общее решение ДУ с ЧП (2.5). Теорема доказана.

2А+Б3 (Задача). Найти интегральную поверхность ДУ с ЧП $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$, проходящую через кривую $x=1,\ u=\varphi(y)$.

Решение. Уравнение характеристик

$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$ (или $\ln|y|-\ln|x|=\ln|C|$) и $\frac{y}{x}=\text{const}$ – его интеграл.

Тогда $u=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, где Φ – произвольная функция класса C^1, является общим решением рассматриваемого ДУ с ЧП. Из семейств поверхностей, определяемых этим уравнением, выделяем ту, которая проходит через кривую $x=1,\ u=\varphi(y)$:

$$u=\varphi(y)=\Phi\left(\frac{y}{1}\right)=\Phi(y),$$

т. е. $\Phi(y)=\varphi(y)$, имеем $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Рассмотрим квазилинейное ДУ с ЧП первого порядка

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u) \qquad (2.8)$$

относительно неизвестной функции $u=u(x,y)$, где P,Q,R – функции класса C^1 в некоторой области $D\subset\mathbb{R}^3$.

Пусть далее соотношение $v(x,y,u)=0$ с $v\in C^1$ определяет u как неявно заданную функцию: $u=u(x,y)$, причем предполагаем, что $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$. Тогда

$$v(x,y,u)=v(x,y,u(x,y))\equiv 0,\text{ откуда } \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial u}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial u}}.$$

Подставляя полученные выражения в (2.8), затем умножая на $\left(-\frac{\partial v}{\partial u}\right)$ и прибавляя к обеим частям полученного равенства выражение $R(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial u}$, приходим к линейному ДУ с ЧП

$$P(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial y}+R(x,y,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0 \qquad (2.9)$$

относительно неизвестной функции $v=v(x,y,u)$.

Имеет место нижеследующая теорема.

2Б+С4 (Теорема). Каждое решение $v=v(x,y,u)$ ЛДУ с ЧП (2.9), приравненное к нулю: $v(x,y,u)=0$, определяет решение $u=u(x,y)$ квазилинейного ДУ с ЧП (2.8) как неявно заданную функцию в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), являющейся проекцией на плоскость Oxy точки $(x_0,y_0,u_0)\in D$, где $u_0=u(x_0,y_0)$. Тогда соотношение

$$\Phi(\psi(x,y,u),\varphi(x,y,u))=0 \qquad (2.10)$$

описывает все решения ДУ с ЧП (2.8) в достаточно малой окрестности точки (x_0,y_0). Здесь $\psi(x,y,u),\varphi(x,y,u)$ – произвольные линейно независимые решения класса C^1 ЛДУ с ЧП (2.9), а Φ – произвольная функция класса C^1.

<u>2А+Б5</u> (Замечание). Неоднородное ЛДУ с ЧП

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y)$$

можно рассматривать как частный случай ДУ с ЧП (2.8).

2.3. Классификация и приведение к каноническому виду ДУ с ЧП второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим ДУ с ЧП второго порядка, линейное относительно старших производных, с двумя независимыми переменными:

$$a(x,y)u''_{xx}+2b(x,y)u''_{xy}+c(x,y)u''_{yy}=F\left(x,y,u,u'_x,u'_y\right), \qquad (2.11)$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ – дважды дифференцируемые функции, причем предполагается, что $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ не обращаются одновременно в нуль.

Классификация уравнения (2.11) производится по знаку дискриминанта $\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)$.

<u>3А1</u> (Определение – классификация ДУ (2.11)). ДУ (2.11) принадлежит:

1) *гиперболическому типу*, если

$$\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)>0$$

(примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение);

2) *параболическому типу*, если

$$\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)=0$$

(примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности);

3) *эллиптическому типу*, если

$$\Delta(x,y)=b^2(x,y)-a(x,y)c(x,y)<0$$

(примером уравнения эллиптического типа является уравнение Лапласа).

3А+Б2 (Преобразование ДУ с ЧП путем замены переменных). Рассмотрим невырожденное преобразование $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, где ξ, η – дважды непрерывно дифференцируемые функции – новые независимые переменные, причем якобиан $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$ в области D. В новых переменных уравнение (2.11) запишется в виде

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad (2.12)$$

где $A = A(\xi,\eta) = a\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2b\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + c\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$

$$C = C(\xi,\eta) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$B = B(\xi,\eta) = a\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$B^2 - AC = \left(b^2 - ac\right)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2.$$

Отсюда вытекает, что преобразование независимых переменных не меняет типа уравнений, т. е. тип ДУ является *инвариантом* преобразования переменных.

Функции $\xi = \xi(x,y)$ и $\eta = \eta(x,y)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий: 1) $A = 0, C = 0$; 2) $A = 0, B = 0$; 3) $A = C, B = 0$, что позволяет упростить (записать в каноническом виде) ДУ с ЧП (2.12).

3А3 (Определение). ДУ с ЧП (2.12) имеет *канонический* вид, если:

$L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ либо $L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ для гиперболического типа;

$L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ либо $L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ для параболического типа;

$L(u) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ для эллиптического типа.

3А+Б4 (Теорема). Для каждого ДУ (2.11) найдется невырожденное преобразование $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, при котором уравнение (2.11) преобразуется к каноническому виду этого типа.

Доказательство.

4.1. Гиперболический тип: $b^2-ac>0$ в области D. Будем считать, что в точке (x_0,y_0), в окрестности которой мы приводим уравнение (2.11) к каноническому виду, либо $a\neq 0$, либо $c\neq 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (2.13)$$

Пусть $a\neq 0$, так как $b^2-ac>0$, то уравнение (2.13) можно записать в виде

$$\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\ a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (2.14)$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (2.14) будут решениями уравнения (2.13). Для интегрирования уравнений (2.14) составим соответствующие им систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b+\sqrt{b^2-ac}},\ \frac{dx}{a}=\frac{dy}{b-\sqrt{b^2-ac}}$$

или

$$ady-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0,\quad ady-\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0. \qquad (2.15)$$

Уравнения (2.15) можно записать в виде одного уравнения

$$ady^2-2bdxdy+cdx^2=0. \qquad (2.16)$$

Коэффициенты дифференциальных уравнений (2.15) имеют непрерывные частные производные до второго порядка, причем $a(x_0,y_0)\neq 0$. Поэтому существуют интегралы

$$\varphi_1(x,y)=\mathrm{const},\ \varphi_2(x,y)=\mathrm{const} \qquad (2.17)$$

уравнений (2.15), где функции в левых частях равенств (2.17) имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки (x_0, y_0) и являются решениями уравнений (2.14), а следовательно, и уравнения (2.13).

Кривые (2.17), описываемые уравнением (2.16), называются *характеристическими кривыми*, или просто *характеристиками* уравнения (2.11), а уравнение (2.16) – *уравнением характеристик* ДУ с ЧП (2.11).

Для уравнения гиперболического типа $b^2 - ac > 0$ интегралы (2.17) вещественны и различны и, стало быть, существуют два семейства вещественных характеристик.

Выполним преобразование переменных, положив $\xi = \xi(x,y) = \varphi_1(x,y)$ и $\eta = \eta(x,y) = \varphi_2(x,y)$, где $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ – соответственно дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения (2.16) (или (2.15)). Эти решения можно выбрать так, чтобы якобиан $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Поскольку $a \neq 0$, то из уравнений (2.15) имеем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.$$

Выберем теперь функции $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ таким образом, чтобы их частные производные по y в рассматриваемой точке были отличны от нуля. Отсюда в силу $b^2 - ac > 0$ и уравнений (2.15) следует, что если якобиан в некоторой точке равен нулю, то в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка от $\varphi_1(x,y)$ или $\varphi_2(x,y)$. Таким образом, надо строить такие решения уравнений (2.15), у которых обе частные производные первого порядка одновременно не равны нулю. Для этого достаточно решить задачу Коши для области D, задавая при $x = x_0$ соответственно значения $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ так, чтобы $\varphi'_{1y}(x_0,y_0) \neq 0$ и $\varphi'_{2y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ удовлетворяют уравнению (2.16), в уравнении (2.12) $A = C = 0$. Коэффициент $B \neq 0$ всюду в рассматриваемой области, что следует из $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$. Разделив на коэффициент $2B$ уравнение (2.12), приведем его к виду

$$u''_{\xi\eta} = F_1\left(\xi,\eta,u,u'_\xi,u'_\eta\right), \tag{2.18}$$

где (2.18) – второй канонический вид гиперболического уравнения.

Сделав замену переменных по формулам $\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\xi+\eta}{2}, \\ \eta_1 = \dfrac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$ в уравнении (2.18) получим другой вид уравнения

$$u''_{\xi_1\xi_1} - u''_{\eta_1\eta_1} = F_2\left(\xi_1,\eta_1,u,u'_{\xi_1},u'_{\eta_1}\right), \tag{2.19}$$

где (2.19) – первый канонический вид гиперболического уравнения.

4.2. $b^2 - ac = 0$. В рассматриваемой области уравнение (2.11) принадлежит параболическому типу, при этом по-прежнему предполагается, что коэффициенты a,b,c уравнения не обращаются одновременно в нуль. Тогда из условия $b^2 - ac = 0$ следует, что либо $a \neq 0$, либо $c \neq 0$ в каждой точке этой области.

Пусть для определенности $a \neq 0$ в точке (x_0,y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (2.11) к каноническому виду. Тогда оба уравнения (2.14) совпадают и обращаются в уравнение

$$a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \tag{2.20}$$

Интегрируя, получим $\varphi(x,y) = C$. Функция $\varphi(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, и ее первые производные не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). Отметим, что для уравнения параболического типа имеется одно семейство вещественных характеристик.

Сделаем замену переменных по формулам $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = x \end{cases}$ (в случае, когда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$, так как $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$) или $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = y \end{cases}$ (если

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \neq 0$). Одновременно частные производные функции $\varphi(x,y)$ в нуль не обращаются в силу свойств характеристической кривой. Тогда в уравнении (2.12) $A=0, B=0,$ а $C\neq 0.$ Приходим к уравнению

$$\tilde{u}''_{\xi\xi} = F_1\left(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}'_{\xi},\tilde{u}'_{\eta}\right), \tag{2.21}$$

где (2.21) – канонический вид параболического уравнения.

4.3. $\Delta = b^2 - ac < 0.$ В рассматриваемой области D уравнение (2.11) принадлежит эллиптическому типу. Будем считать, что коэффициенты a,b,c – аналитические функции x и $y.$ Тогда коэффициенты уравнений (2.14) – также аналитические функции от x и от $y,$ и можно утверждать, что первое уравнение (2.14) имеет комплекснозначное аналитическое решение $\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) и $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\neq 0$ в этой окрестности. (Существование такого аналитического решения следует из теоремы Ковалевской.)

Замена переменных $\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,y),\\ \eta=\varphi_2(x,y)\end{cases}$ приводит уравнение к каноническому виду

$$\tilde{u}''_{\xi\xi} + \tilde{u}''_{\eta\eta} = F_1\left(\xi,\eta,\tilde{u},\tilde{u}'_{\xi},\tilde{u}'_{\eta}\right), \tag{2.22}$$

где (2.22) – канонический вид эллиптического уравнения.

На этом доказательство теоремы 3А+Б4 завершается.

<u>**3Б5**</u> (Замечание). Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (2.11) принадлежит различным типам. Точки параболичности уравнения (2.11) характеризуются равенством

$$b^2 - ac = 0. \tag{2.23}$$

Предположим, что множество точек области $D,$ которое описывается уравнением (2.23), является простой гладкой кривой $\sigma.$ Эта кривая называется линией *параболического вырождения*. Если кривая σ делит область D на две части, в одной из которых уравнение (2.11) принадлежит эллиптическому типу, а в другой – гиперболическому типу, то в области D уравнение (2.11) – *смешанного типа*.

Например:

1) уравнение Трикоми $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ имеет при $y>0$ эллиптический тип, при $y<0$ – гиперболический тип, $y=0$ – линия параболичности;

2) уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ – уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси Ox; $y=0$ – линия параболичности, которая одновременно является характеристикой ($y=0$ – огибающая семейства характеристик).

2.4. Постановка основных краевых задач для ДУ с ЧП второго порядка

Как уже отмечалось при рассмотрении примеров, ДУ с ЧП имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Для того чтобы из этого множества решений выделить частное решение, описывающее конкретный физический процесс, необходимо задать некоторые дополнительные условия.

Различие в типах уравнений второго порядка тесно связано с различием физических процессов, описываемых этими уравнениями. Уравнение нестационарной теплопроводности является уравнением параболического типа; волновое уравнение, уравнение Даламбера относятся к гиперболическому типу.

Для дифференциальных уравнений второго порядка рассматриваются три типа задач: задача Коши, краевая задача, смешанная задача.

4А1 (Задача Коши). Задача Коши ставится для уравнений гиперболического и параболического типов, если область совпадает со всем пространством, граничные условия отсутствуют, а задаются только начальные условия. Например, для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{2.24}$$

задача Коши в области $D\subset R^3$ ставится так: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,z,t)$, удовлетворяющую уравнению (2.24) и начальным условиям

$$u(x,y,z,0)=f(x,y,z),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x,y,z),$$

где $(x,y,z)\in D$.

4А2 (Краевая или граничная задача). Краевая задача ставится для уравнений эллиптического типа. Начальные условия отсутствуют, задаются граничные условия. По виду граничных условий различают краевые задачи первого, второго, третьего родов и т. д. Например, для уравнения Лапласа $\Delta u=0$, где $u=u(x,y,z)$, $(x,y,z)\in D\subset R^3$, краевая задача первого рода ставится так: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри области и граничным условиям $u(x,y,z)|_L=f(x,y,z)$, на границе L области D. Краевая задача первого рода для уравнения Лапласа называется *задачей Дирихле*.

В квантовой механике граничные условия обычно сводятся к требованию, чтобы функция $u=u(x,y,z)$ исчезала (обращалась в нуль) на бесконечности. Кроме того, она должна быть всюду ограниченной, непрерывной и однозначной.

4А+Б3 (Смешанная задача). Смешанная задача ставится для уравнений гиперболического и параболического типов, в основном, когда область исследования ограничена, задаются начальные и граничные условия. Примером задачи смешанного типа для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.25}$$

является следующая: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,t)$, удовлетворяющую уравнению (2.25), начальным условиям

$$u(x,y,0)=f(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x,y)$$

и граничным условиям

$$u|_\Gamma=0.$$

Рассмотрим теперь систему уравнений с частными производными относительно неизвестных функций $u_1, u_2, ..., u_N$ по независимым переменным $t, x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = F_i\left(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_N, ..., \frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, ...\right), \qquad (2.26)$$

$k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_n = k \le n_j;\ k_0 < n_j;\ i, j = 1, 2, ..., N.$

Здесь для каждой из неизвестных функций u_i существует свой наивысший порядок n_i производных от этой функции, входящих в рассматриваемую систему. Независимая переменная t играет особую роль среди прочих независимых переменных, так как, во-первых, среди производных наивысшего порядка n_i каждой функции u_i, входящих в данную систему, должна содержаться производная $\dfrac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}}$, и, во-вторых, система разрешена относительно этих производных. Обычно в физических задачах роль t играет время, а $x_1, ..., x_n$ – пространственные координаты. Число уравнений равно числу неизвестных функций. При некотором значении $t = t_0$ задаются значения неизвестных функций u_i и их производных по t до порядка $n_i - 1$. Пусть при $t = t_0$

$$\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n) \quad (k = 0, 1, 2, ..., n_i - 1). \qquad (2.27)$$

Все функции $\varphi_i^{(k)}(x_1, x_2, ..., x_n)$ заданы в одной и той же области G_0.

Задача Коши состоит в том, чтобы найти решение системы (2.26), удовлетворяющее при $t = t_0$ начальным условиям (2.27).

4Б+С4 (Теорема Ковалевской). Если все функции F_i аналитичны в некоторой окрестности точки $\left(t_0, x_1^0, ..., x_n^0, ..., \varphi^0_{j,k_0,k_1,...,k_n}, ...\right)$ и все функции $\varphi_j^{(k)}$ аналитичны в окрестности точки $\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, то задача Коши имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки $\left(t^0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ и притом единственное в классе аналитических функций.

2.5. Гиперболические уравнения

Основным уравнением гиперболического типа является волновое уравнение.

2.5.1. Уравнение поперечных колебаний струны

Рассмотрим туго натянутую струну, закрепленную на концах. Выведем струну из положения равновесия (оттянув ее или ударив по ней), тогда струна начнет колебаться.

Предположим, что любая точка струны колеблется по прямой, перпендикулярной к исходному положению струны, и струна все время находится в одной и той же плоскости. Выберем в этой плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxu. В качестве оси Ox возьмем прямую, на которой находилась струна в положении равновесия, за ось Ou примем прямую, проходящую через левый конец струны и перпендикулярно к оси Ox (рис. 2.1).

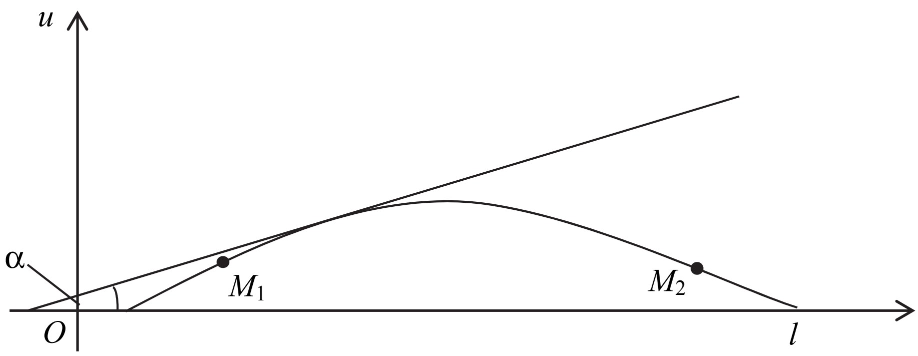

Рис. 2.1

Отклонение струны от положения равновесия обозначим через u; очевидно, u зависит от абсциссы x точки струны и времени t, т. е. $u = u(x, t)$.

Пусть в положении равновесия струна совпадала с промежутком $[0, l]$ оси Ox. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

При фиксированном t графиком функции $u = u(x, t)$ в плоскости Oxu является форма струны в данный момент времени t. Угловой коэффициент касательной к графику в точке с абсциссой x равен частной производной по x от функции $u(x,t)$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$, где $\alpha = \alpha(x,t)$ – угол наклона касательной.

Чтобы составить представление о колебаниях струны, необходимо начертить ряд графиков функции $u = u(x,\ t)$ при разных значениях t.

При фиксированном значении x функция $u = u(x,\ t)$ определяет закон движения точки с абсциссой x. Эта точка движется по прямой, параллельной оси Ou. Скорость и ускорение указанного движения выражаются соответственно формулами

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Будем изучать малые колебания струны, т. е. такие, при которых угол $\alpha = \alpha(x,t)$ (угол наклона касательной к графику функции $u = u(x,t)$ при каждом фиксированном значении t) настолько мал, что его квадратом можно пренебречь, т. е. считать $\alpha^2 \approx 0$.

Поскольку

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - ..., \ \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - ...,$$

то отсюда следует, что $\sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1$.

Далее, так как

$$\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha(1 - \cos\alpha) \approx \operatorname{tg}\alpha \cdot 0 = 0,$$

то

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha.$$

Заключаем, что $\operatorname{tg}^2\alpha \approx 0$, или $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 0.$

Следовательно, длина дуги струны, ограниченной точками $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, выразится формулой $\overset{\frown}{M_1M_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \int\limits_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$

Соотношение $\overset{\frown}{M_1M_2} \approx x_2 - x_1$ означает, что длина любого участка струны (приближенно) остается постоянной.

Будем предполагать струну абсолютно гибкой (упругой), что означает следующее: если удалить участки $\overset{\frown}{OM_1}, \overset{\frown}{M_2L}$ (см. рис. 2.1), то их действия на участок $\overset{\frown}{M_1M_2}$ заменяются соответственно действием сил натяжения $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$, направленных по касательным к графику функции $u = u(x,t)$ в точках M_1 и M_2 (рис. 2.2). Поскольку по предположению точки струны движутся по прямым, параллельным оси Ou, то сумма проекции сил $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ на ось Ox равна нулю. Проектируя эти силы на ось Ox, получаем $T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0$, где T_1, T_2 – величины сил $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$.

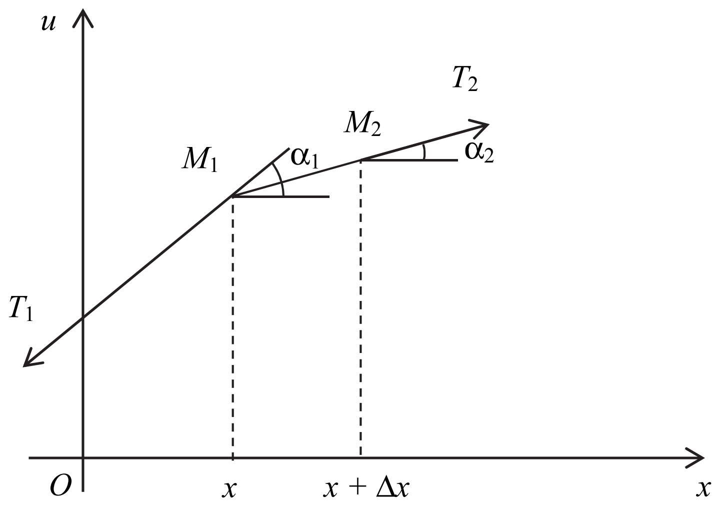

Рис. 2.2

На основании того, что $\cos\alpha \approx 1$, заключаем, что $T_1 \approx T_2$, т. е. величина силы напряжения останется постоянной. Обозначим ее через T, получаем $T_1 \approx T_2 = T$.

Проектируем силы $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$ на ось Ou, находим

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = T(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1).$$

С учетом равенства $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$ получаем

$$T(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = T\left[u'_x(x+\Delta x,t) - u'_x(x,t)\right],$$

где x – абсцисса точки M_1; $x+\Delta x$ – абсцисса точки M_2.

Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях дифференцируемой функции, находим, что

$$u'_x(x+\Delta x,t)-u'_x(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Поэтому проекция сил натяжения $\vec{T_1}$ и $\vec{T_2}$ на ось Ou выражается формулой

$$T(\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1)=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Предположим, что на струну действуют также внешние силы, параллельные оси Ou, плотность распределения которых $g(x,t)$, тогда величина равнодействующей этих сил, приложенных к участку $\overset{\frown}{M_1M_2}$, приближенно равна $g(x,t)\Delta x$. Силами сопротивления внешней среды пренебрегаем.

Будем считать струну однородной, обозначим через ρ ее линейную плотность, тогда масса участка $\overset{\frown}{M_1M_2}$ выразится так: $\rho\overset{\frown}{M_1M_2}=\rho\Delta x,\ m=\rho\Delta x.$

В соответствии со вторым законом Ньютона $mw=F$ получаем:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x+g(x,t)\Delta x.$$

Разделим на Δx

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t)$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{2.28}$$

где $a^2=\dfrac{T}{\rho},\ f(x,t)=\dfrac{g(x,t)}{\rho}$.

Если внешняя сила отсутствует, то мы имеем $g(x,t)=0$ и получим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Уравнение (2.28) имеет бесчисленное множество частных решений. Для полного определения движения струны нужны некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Для уравнения колебаний струны (2.28) естественно задавать положение и скорость всех точек струны в начальный момент времени $t=0$:

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \tag{2.29}$$

Условия (2.29) называются *начальными условиями* ($\varphi(x)$ – начальное смещение, $\psi(x)$ – начальная скорость).

Поскольку струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах мы должны иметь

$$u\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{x=l}=0 \tag{2.30}$$

при всяком $t\geq 0$. Условия (2.30) называются *краевыми* или *граничными условиями*. Возможны и другие граничные условия.

Итак, приходим к следующей математической формализации – математической модели исследуемой физической задачи колебаний закрепленной струны.

5А1 (Задача о колебаниях ограниченной струны). Найти такое решение уравнения (2.28), которое удовлетворяло бы начальным (2.29) и граничным (2.30) условиям. Уравнение (2.28) называется *одномерным волновым уравнением*.

5Б2 (Замечание). Можно рассматривать колебания *полубесконечной* или *бесконечной* струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба этих случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй – рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u\big|_{x=0}=0,$ а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в этих случаях должны быть заданы соответственно для всех x, $0 \leq x < \infty$, в первом случае, для всех x, $-\infty < x < \infty$, во втором случае.

5Б3 (Замечание). Смешанные задачи описывают колебания ограниченных или полуограниченных струн. Для этого помимо условий (2.29) в конечных граничных точках добавляется одно из трех дополнительных условий:

$u\big|_{x=x_0} = \eta(t),\ t > t_0$ – граничное условие I рода;

$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \nu(t),\ t > t_0$ – граничное условие II рода;

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + k(x)u\big|_{x=x_0} = \mu(t),\ t > t_0$ – граничное условие III рода.

Смешанные задачи и задачи Коши являются корректными: их решение существует, оно единственно и устойчиво.

2.5.2. Уравнение поперечных колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны имеет следующий вид (А+С):

$$\rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + g(x,y,t),$$

где мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны; $\rho(x,y)$ – поверхностная плотность мембраны; $g(x,y,t)$ – внешняя сила, действующая на мембрану параллельно оси Ou.

В случае однородной мембраны $\rho(x,y) = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t), \tag{2.31}$$

где $a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho(x,y)}}$, $f(x,y,t) = \dfrac{g(x,y,t)}{\rho(x,y)}$.

Уравнение (2.31) называется *двумерным волновым уравнением*.

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $g(x,y,t) = 0$, то из (2.31) получаем уравнение свободных колебаний однородной мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u.$$

Краевые задачи для (2.31) ставятся аналогично п. 2.5.1.

2.5.3. Решение задачи Коши для уравнения колебания бесконечной струны методом характеристик. Формула Даламбера

Решение задачи Коши методом Даламбера состоит в определении решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ x \in R,\ t > 0 \tag{2.32}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ x \in R. \tag{2.33}$$

Осуществим это в несколько этапов.

I этап. Уравнение (2.32) – это уравнение гиперболического типа, оно имеет две действительные характеристики. Решая уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ для (2.32), получаем характеристики вида

$$x + at = C_1,\ x - at = C_2,\ \ \forall C_1, C_2 \in R.$$

Преобразование координат

$$\begin{cases} \xi = x + at, \\ \eta = x - at \end{cases}$$

приводит уравнение (2.32) к виду $u''_{\xi\eta} = 0$ или $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, откуда $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0$ или $\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = w(\xi)$, где $w(\xi)$ – произвольная функция аргумента ξ. Рассматривая η как параметр и интегрируя полученное уравнение по ξ, имеем: $u = \int w(\xi)d\xi + h(\eta) = g(\xi) + h(\eta)$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем общее решение уравнения (2.32) в виде

$$u(x,t) = g(x + at) + h(x - at), \tag{2.34}$$

где $g(\xi)$ и $h(\eta)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

5A4 (Замечание). Решение (2.34) называют решением Даламбера, а метод получения этого решения *методом Даламбера* (или методом характеристик, или методом бегущих волн).

II этап. Рассмотрим задачу Коши (2.32), (2.33). Положим в (2.34) $t=0$:

$$u(x,0)=g(x)+h(x)\underset{(2.33)}{=}\varphi(x),$$

$$u'_t=g'_\xi(x+at)\xi'_t+h'_\eta(x-at)\eta'_t=$$

$$=g'(x+at)a+h'(x-at)(-a)=$$

$$=ag'(x+at)-ah'(x-at),$$

$$u'_t\big|_{t=0}=a\big(g'(x)-h'(x)\big)\underset{(2.33)}{=}\psi(x).$$

Таким образом, функции g и h удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases} g(x)+h(x)=\varphi(x), \\ ag'(x)-ah'(x)=\psi(x), \ x\in R. \end{cases}$$

Проинтегрируем второе равенство

$$a\big(g(x)-h(x)\big)=\int_0^x\psi(\tau)d\tau+C,$$

где $C=g(0)a-h(0)a.$

Имеем:

$$\begin{cases} g(x)+h(x)=\varphi(x), \\ g(x)-h(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x\psi(\tau)d\tau+\dfrac{1}{a}C, \end{cases}$$

откуда находим g и h:

$$2g(x)=\varphi(x)+\frac{1}{a}\int_0^x\psi(\tau)d\tau+\frac{1}{a}C,$$

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\tau)d\tau+\dfrac{1}{2a}C, \\ h(x)=\varphi(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x\psi(\tau)d\tau-\dfrac{1}{2a}C. \end{cases} \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.34), будем иметь

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(\tau)d\tau+\frac{C}{2a}+\frac{1}{2}\varphi(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(\tau)d\tau-\frac{C}{2a}$$

или окончательно

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau. \qquad (2.36)$$

Таким образом, нами доказано утверждение.

5А+Б5 (Теорема). Если функция ψ непрерывно дифференцируема, а функция φ дважды непрерывно дифференцируема, то задача Коши (2.32), (2.33) поставлена корректно и формула (2.36) представляет решение этой задачи.

2.5.4. Физическая интерпретация решений волнового уравнения

Выясним физический смысл решения (2.34), которое представим так:

$$u(x,t)=u_1+u_2,\quad u_1=h(x-at),\ \ u_2=g(x+at).$$

Если $g(x+at)=0$, то $u(x,t)=u_1=h(x-at)$. При фиксированном значении t график функции $u=h(x-at)$ является формой колеблющейся струны в момент времени t.

Для точки x_0 при $t=0$ отклонение выразится формулой $u(x_0,0)=h(x_0)$. Предположим, что по оси Ox из положения x_0 движется точка в положительном направлении этой оси со скоростью a (a – параметр, входящий в уравнение (2.32) и функцию (2.34)). Закон этого движения выражается формулой $x=x_0+at$. Поскольку в этом случае $x-at=x_0$, то через момент времени t для точки x получаем отклонение $u=h(x-at)=h(x_0)=u(x_0,0)$. Это значит, что отклонение для точки x через момент времени t будет тем же, что и для точки x_0 в момент $t=0$.

Следовательно, если мысленно перемещаться вдоль оси Ox в положительном направлении этой оси с постоянной скоростью a, то отклонение струны все время будет казаться постоянным.

Построим графики функции $u_1=h(x-at)$ при различных значениях t: $t_1<t_2<t_3$ (рис. 2.3). Каждый последующий из них полу-

чается сдвигом предыдущего вдоль оси *Ox* на определенную величину. Если эти рисунки по очереди проектировать на неподвижный экран, то первый график «побежит» вправо. Процесс передвижения отклонения вдоль прямой, на которой находилась струна в положении равновесия, называется *волной*. Скорость распространения волны равна a, где a определяется формулой $a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$ и входит в уравнение (2.32). Волна распространяется в положительном направлении оси *Ox*. Явление, описываемое функцией $u_1=h(x-at)$, называется *распространением прямой волны*.

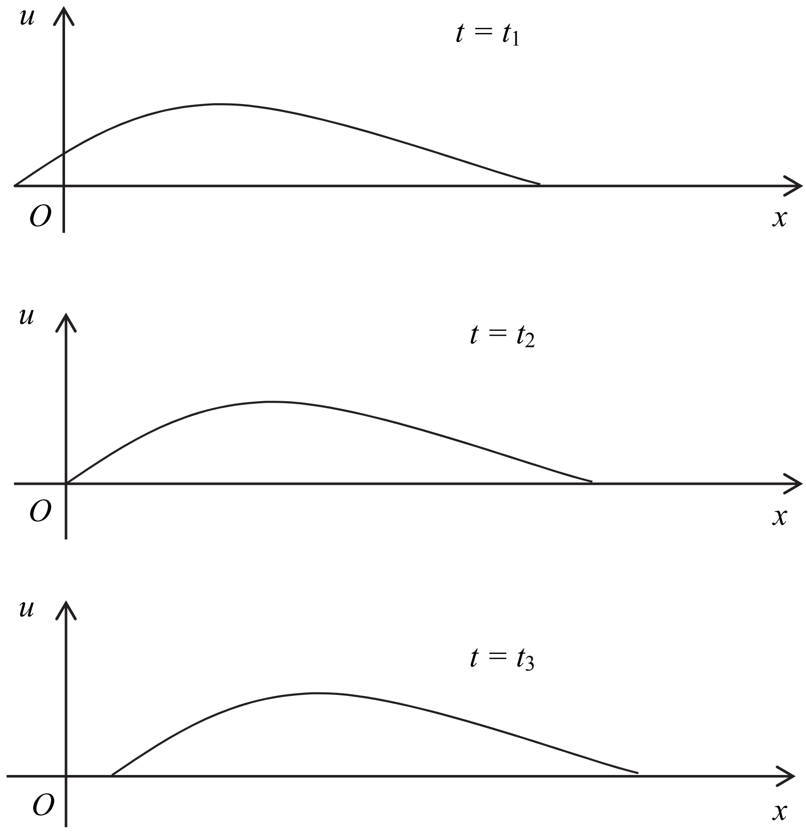

Рис. 2.3

Второе слагаемое формулы (2.34), т. е. функция $u_2=g(x+at)$, представляет аналогичный процесс, но только волна будет распространяться влево (в отрицательном направлении оси *Ox*) с той же скоростью a. Явление, описываемое функцией $u_2=g(x+at)$, называется *распространением обратной волны*.

Следовательно, решение (2.34) представляет сумму прямой и обратных волн. Отсюда вытекает следующий графический способ построения формы струны в любой момент времени t. Строим графики функций $u_1 = h(x)$, $u_2 = g(x)$, изображающие прямую и обратную волны в начальный момент времени $t = 0$. Не изменяя формы построенных графиков, передвигаем их со скоростью a вдоль оси Ox: первый – вправо, второй – влево. Тогда суперпозиция (алгебраическая сумма) сдвинутых графиков дает положение струны в текущий момент времени.

2.5.5. Метод Фурье для уравнений свободных колебаний струны

Метод Фурье, или метод разделения переменных, является одним из наиболее распространенных методов решений уравнений с частными производными. Метод разделения переменных применим не всегда, но в тех случаях, когда им можно воспользоваться, является эффективным. С его помощью можно расщепить уравнение с частными производными для функции n независимых переменных на n обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого искомую функцию u ищут в виде произведения $u(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n)$. При таком расщеплении исходного уравнения возникает $n-1$ произвольных параметров, которые называют постоянными разделения. Возможные значения этих параметров определяются особенностями задачи и физическим смыслом искомой функции. Изучим суть данного метода на конкретных примерах.

Рассмотрим задачу о колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами.

Найти решение $u = u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.37}$$

при граничных условиях

$$u(x, t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)\big|_{x=l} = 0 \tag{2.38}$$

и начальных условиях

$$u(x, t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \tag{2.39}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные функции, определенные на отрезке $[0, l]$.

Будем искать частные решения уравнения (2.37) методом разделения переменных, т. е. в виде произведения «функции только от x на функцию только от t»:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2.40}$$

Подставляя (2.40) в уравнение (2.37), получим

$$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{2.41}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t, а правая – только от x. Это равенство возможно лишь в том случае, если и левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т. е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через λ. Тогда из равенства (2.41) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{2.42}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{2.43}$$

Будем искать нетривиальные, т. е. не равные тождественно нулю, решения вида (2.40), удовлетворяющие граничным условиям (2.38), откуда получаем

$$X(0) = 0, \ X(l) = 0. \tag{2.44}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (2.43) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.44).

5А6 (Определение). Значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи (2.43), (2.44), называются *собственными значениями*, а соответствующие решения – *собственными функциями* этой краевой задачи.

Характеристическое уравнение для уравнения (2.43) имеет вид $r^2 + \lambda = 0$. Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи (2.43), (2.44). Здесь нужно рассмотреть отдельно три случая, когда $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$.

При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (2.38) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (2.44), получим

$$C_1 + C_2 = 0,\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

Определитель этой однородной системы (относительно неизвестных C_1 и C_2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l} \neq 0$$

отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное нулевое решение $C_1 = 0, C_2 = 0.$ Следовательно, $X(x) \equiv 0$ и нетривиальных решений нет.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (2.43) имеет следующий вид:

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия (2.44) дают $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 + C_2 l = 0.$ Отсюда $C_1 = 0, C_2 = 0.$ Значит, $X(x) \equiv 0$ и в этом случае нетривиальных решений нет.

При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (2.43) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.44), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0,\ C_1 \cos\sqrt{\lambda}l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0,$ а из второго – $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0.$ Считаем $C_2 \neq 0,$ так как в противном случае $X(x) \equiv 0.$ Поэтому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0,$ т. е. $\sqrt{\lambda}l = \pi k,\ k \in Z,\ \ \sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi k}{l},$ $k \in Z.$ Следовательно, нетривиальные решения задачи (2.43), (2.44) возможны лишь при значениях $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{l}\right)^2,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя. Индекс k обозначает решение, соответствующее данному значению параметра λ_k.

Заметим, что положительные и отрицательные значения k, равные по абсолютной величине, дают собственные значения $\lambda_{-k} = \lambda_k$, а собственные функции отличаются лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для k брать только целые положительные значения.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (2.42) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (2.37) и граничным условиям (2.38) при любых a_k и b_k. Каждая из функций $u_k(x,t)$ является решением уравнения (2.37), удовлетворяющим условиям (2.38), и называется собственной функцией этого уравнения, а колебания, описываемые ею, называются собственными колебаниями. В силу линейности и однородности уравнения (2.37), любая конечная сумма этих функций будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.45)$$

Предположим, что этот ряд равномерно сходится (Б+С), его сумма является непрерывной функцией и ряд можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Поскольку каждое слагаемое в ряде (2.45) удовлетворяет граничным условиям (2.38), то этим условиям будет удовлетворять сумма ряда, т. е. функция $u(x,t)$. Отметим, что в рассматриваемой задаче функция $u(x,t)$ должна быть вещественной (так как она выражает отклонение струны в точке x в момент времени t). Остается определить постоянные a_k и b_k так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (2.39).

Продифференцируем ряд (2.45) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{l}+b_k\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.46)$$

Полагая в (2.45) и (2.46) $t=0$ и учитывая начальные условия (2.39), имеем

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad \psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.47)$$

Формулы (2.47) представляют собой разложения заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0,l)$. Коэффициенты разложений (2.47) вычисляются по известным формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (2.48)$$

Таким образом, решение задачи (2.37)–(2.39) дается рядом (2.45), где a_k и b_k определяются формулами (2.48).

5А+Б+С7 (Теорема). Если функция $\varphi(x)$ имеет на отрезке $[0,l]$ непрерывную производную третьего порядка и удовлетворяет условиям $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, а функция $\psi(x)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную второго порядка и удовлетворяет условиям $\psi(0)=\psi(l)=0$, то функция $u(x,t)$, определяемая рядом (2.45), имеет непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (2.37), а также граничным (2.38) и начальным (2.39) условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (2.45) по x и t до двух раз включительно, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\le x\le l$ и любом t.

Часто при описании различных явлений (в теории колебаний, электромагнитных волн, переменных токов и т. д.) удобнее использовать комплексную запись для решений соответствующих уравнений.

2.5.6. Понятие о стоячих волнах

Выясним физический смысл собственных функций:

$$u_k(x,t)=\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.49)$$

Из этой формулы видно, что в моменты времени $t=\frac{2l}{a}$, $t=\frac{4l}{a},\ldots$ струна возвращается в первоначальное положение. Следовательно, колебания являются незатухающими, периодическими с периодом $T=\frac{2l}{a}$. Это происходит потому, что не учтены силы сопротивления. Если эти силы учесть, колебания окажутся затухающими.

Преобразуем формулу (2.49), для чего введем обозначения $a_k = A_k \sin\varphi_k$, $b_k = A_k\cos\varphi_k$, откуда $a_k^2+b_k^2=A_k^2$, $\sqrt{a_k^2+b_k^2}=A_k$, $\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}=\sin\varphi_k$, $\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}=\cos\varphi_k$.

Умножая и деля на $\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ правую часть равенства (2.49), в силу принятых обозначений получаем

$$u_k(x,t)=A_k\sin\left(\frac{k\pi at}{l}+\varphi_k\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{2.50}$$

Отсюда следует, что все точки струны совершают колебания с одной и той же частотой $\omega_k=\frac{k\pi a}{l}$ и одной и той же начальной фазой φ_k. Амплитуда колебания зависит от точки x и равна $A_k\sin\frac{k\pi x}{l}$. Все точки струны одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают максимального отклонения от него в ту или другую сторону. Рассматриваемые колебания струны называются *стоячими волнами*.

На рис. 2.4 показаны различные формы струны в отдельные моменты времени при $k=1$. Отклонение на концах струны равно нулю, наибольшее отклонение достигает точка с абсциссой $x=\frac{l}{2}$. При $k=2$ неподвижных точек уже будет три, их абсциссы: $x_1=0$, $x_2=\frac{l}{2}$, $x_3=l$ (это корни уравнения $\sin\frac{2\pi x}{l}=0$). Наибольшее отклонение достигают две точки струны с абсциссами $x=\dfrac{l}{4}$, $x=\dfrac{3l}{4}$ (рис. 2.5).

Стоячая волна (2.50) имеет $k+1$ неподвижных точек, т. е. столько, сколько корней имеет уравнение $\sin\dfrac{k\pi x}{l}=0$ на отрезке $[0, l]$.

Абсциссы этих точек являются корнями указанного уравнения: $x_1=0,\ x_2=\dfrac{l}{k},\ x_3=\dfrac{2l}{k},\ \ldots,\ x_k=\dfrac{k-1}{k}l,\ x_{k+1}=l.$

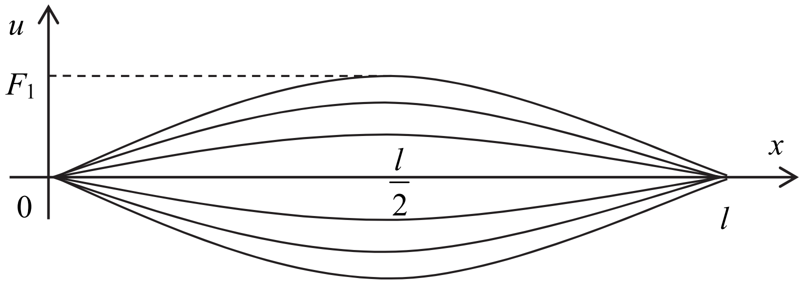

Рис. 2.4

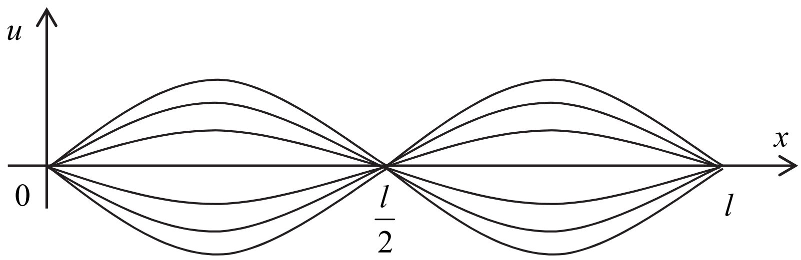

Рис. 2.5

Неподвижные точки называются *узлами стоячей волны*. Точки, в которых отклонения достигают максимума, называются *пучностями*.

Каждая струна может иметь собственные колебания только строго определенных частот $\omega_k=\dfrac{k\pi a}{l}$, которые называют *собственными частотами*. Наименьшей собственной частотой струны является частота

$$\omega_1=\frac{\pi a}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

где T – натяжение; ρ – линейная плотность.

<u>6Б+С8</u> (Замечание). При колебаниях струна издает звук, высота которого возрастает с частотой колебаний. Самый низкий тон будет при частоте, равной ω_1. Остальные тона, соответствующие частотам ω_k, называют *обертонами*, или гармониками. Первой гармоникой считается основной тон, второй гармоникой – тон с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$ и т. д.

Решение (2.45) складывается из отдельных гармоник, амплитуды их, а поэтому и влияние их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывает при увеличении номера гармоники, и все их действие сводится к созданию тембра звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов.

Если прижать колеблющую струну точно в середине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. нечетных гармоник; напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, и струна будет издавать не свой основной звук, а его *октаву*, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

При отыскании решений (2.49) не использовались начальные условия. Очевидно, что при произвольных начальных условиях колебания струны будут сложнее. Колебания, описываемые функциями $u_k(x,t)$, будут иметь место (в «чистом виде») только в случае, если в начальный момент времени придать струне соответствующую форму, например форму одной из сплошных линий, изображенных на рис. 2.4, 2.5.

2.6. Параболические уравнения

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. В качестве простейшего представителя параболических уравнений будем рассматривать уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Основные свойства решений этого уравнения не зависят от n.

2.6.1. Уравнение теплопроводности в пространстве

Если некоторое тело неравномерно нагрето, то тепло начнет распространяться от более нагретых участков к менее нагретым. Обозначим температуру тела в точке $M(x,y,z)$ через u. Температура будет зависеть от координат x, y, z и времени t, т. е. $u=u(x,y,z,t)$.

Множество точек, в которых функция $u=u(x,y,z,t)$ принимает одно и то же значение C в фиксированный момент времени $t=t_0$, называется *изотермической поверхностью*. Изотермическая поверхность определяется уравнением

$$u(x,y,z,t_0)=C$$

или

$$u(x,y,z)=C_1.$$

Форма и расположение изотермической поверхности меняется с течением времени t.

Направление наибольшей скорости изменения температуры совпадает с направлением градиента функции $u=u(x,y,z,t)$ при данном значении t, т. е. с направлением вектора

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

В точках изотермической поверхности градиент направлен по нормали $\vec{n}$ к этой поверхности в сторону возрастания функции u, причем $|\operatorname{grad} u|=\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Считается, что величина ΔQ теплового потока через малый участок изотермической поверхности площади $\Delta\sigma$ за промежуток времени Δt выражается формулой

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta\sigma\Delta t, \qquad (2.51)$$

где k – коэффициент теплопроводности, который будем полагать постоянным.

6А1 (Замечание). Тепловой поток считают положительным, если его направление совпадает с выбранным направлением нормали к изотермической поверхности. Знак «–» в формуле (2.51) означает, что тепло передается от более нагретых участков к менее нагретым (т. е. в противоположную сторону, если $\dfrac{\partial u}{\partial n} > 0,$ так как u возрастает в этом направлении и $\Delta Q < 0;$ если $\dfrac{\partial u}{\partial n} < 0,$ то $\Delta Q > 0$).

6А2 (Замечание). В одномерном случае, т. е. в случае распространения тепла в стержне, изотермическими поверхностями являются поперечные сечения стержня, направление нормали к ним совпадает с направлением оси Ox, поэтому $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$.

В теории теплопроводности доказывается, что формула (2.51) справедлива для любых поверхностей (не только изотермических).

Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{n},$ где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, формулу (2.51) можно записать в следующем виде:

$$\Delta Q = -k \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} \Delta\sigma \Delta t.$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\vec{a} = -k \operatorname{grad} u$$

и назовем его *вектором теплового потока*, тогда

$$\Delta Q = \vec{a} \cdot \vec{n} \Delta\sigma \Delta t, \quad \Delta Q = a_n \Delta\sigma \Delta t,$$

где a_n – проекция вектора $\vec{a}$ на направление внешней нормали к поверхности.

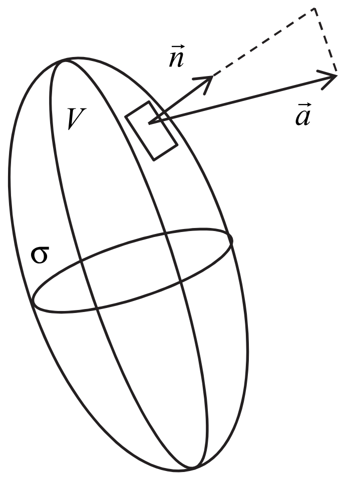

Рис. 2.6

Выделим в рассматриваемом теле некоторый участок V объема $|V|$, ограниченный поверхностью S (рис. 2.6). Тепловой поток через всю поверхность S за промежуток времени Δt выражается формулой

$$Q = \Delta t \iint_S a_n d\sigma,$$

где σ – мера (площадь) на поверхности.

Поток Q будет положительным, если выбранный участок V теряет тепло, и отрицательным, если приобретает его.

Преобразуем этот интеграл с помощью формулы Остроградского – Гаусса (поток векторного поля $\vec{a}$ через произвольную замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от $\operatorname{div} a$, взятому по объему, ограниченному этой поверхностью):

$$\iint_S a_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} a \, dv,$$

где v – мера (объем) на участке V.

Поскольку

$$\operatorname{div} a = \operatorname{div}(-k \operatorname{grad} u) = -k \operatorname{div} \operatorname{grad} u = -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

или

$$\operatorname{div} a = -k\Delta u,$$

где

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

то

$$\iint_S a_n d\sigma = -\iiint_V k\Delta u \, dv.$$

Количество тепла, приобретенное данным участком V за счет прохождения теплового потока, выразится формулой

$$Q_1 = \Delta t \iiint_V k\Delta u dv$$

(это выражение отличается от Q только знаком).

Пусть в участке V имеются источники тепла с плотностью их распределения $F(x, y, z, t)$. Тогда за промежуток времени Δt выделится следующее количество тепла:

$$Q_2 = \Delta t \iiint_V F(x, y, z, t) dv.$$

Итак, в течение указанного промежутка Δt участок V получит $Q_1 + Q_2$ тепла.

Подсчитаем это тепло по-другому. За время Δt температура в точке $M(x, y, z)$ изменилась на величину

$$u(x,y,z,t+\Delta t)-u(x,y,z,t)=\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Для такого изменения температуры элементарному участку (содержащему точку M) объема Δv потребовалось количество тепла, равное $c\rho\Delta v\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, где c – удельная теплоемкость, ρ – плотность, а всему участку –

$$Q_3=\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv.$$

Поскольку $Q_3=Q_1+Q_2$, то

$$\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv=\Delta t\iiint\limits_V k\Delta u dv+\Delta t\iiint\limits_V F(x,y,z,t)dv,$$

откуда

$$\iiint\limits_V\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u-F(x,y,z,t)\right)dv=0.$$

Это равенство должно выполняться для любого участка V, выделенного в рассматриваемом теле. Считая все входящие функции непрерывными, из последнего равенства получаем

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\Delta u+F,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\Delta u+\frac{1}{c\rho}F$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+\frac{1}{c\rho}F, \tag{2.52}$$

где

$$a^2=\frac{k}{c\rho},\ a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

<u>6А+Б3</u> (Замечание). Температуропроводность $a^2=\frac{k}{c\rho}$ является физическим параметром вещества. В нестационарных тепловых процессах характеризует скорость изменения температуры.

<u>6А4</u> (Замечание). Уравнение (2.52) называется *уравнением теплопроводности в пространстве*. Если тепловые источники отсутствуют, то получаем уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

которое называется дифференциальным уравнением теплопроводности (или дифференциальным уравнением Фурье) для трехмерного нестационарного температурного поля при отсутствии внутренних источников теплоты.

Его частный случай

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

является уравнением распространения тепла в пластине, а нижеприведенное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

описывает распространение тепла в стержне.

6Б5 (Замечание). Из всех этих уравнений следует, что изменение температуры во времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ для любой точки тела пропорционально величине a^2, поэтому при одинаковых условиях быстрее увеличивается температура у того тела, которое имеет большую температуропроводность.

2.6.2. Начальные и краевые условия для уравнения теплопроводности в пространстве

Начальное условие для уравнения теплопроводности в пространстве определяется равенством

$$u(x, y, z, t)\big|_{t=0} = f(x, y, z). \tag{2.53}$$

Оно задает температуру каждой точки тела в начальный момент времени $t_0 = 0$ ($f(x, y, z)$ – известная функция).

Пусть на поверхности Г, ограничивающей некоторое тело, происходит теплообмен с окружающей средой. Предположим, что в точке $M(\xi,\eta,\zeta)$ границы Γ тело имеет температуру $u=u(\xi,\eta,\zeta,t)$, а окружающая среда – $\tilde{u}=\tilde{u}(\xi,\eta,\zeta,t)$, разность $u-\tilde{u}$ называется *перепадом температур*. Теплообмен протекает по закону: поток тепла изнутри тела через любую часть поверхности Γ пропорционален перепаду температур $u-\tilde{u}$, т. е. $Q=h(u-\tilde{u})$, где h – коэффициент теплообмена; h может меняться от точки к точке, но в случае однородности тела и среды $h=\text{const}$.

Выделим часть Γ_1 поверхности Γ. Тепловой поток через Γ_1 за время Δt выразится формулой

$$Q_1=\Delta t\iint\limits_{\Gamma_1} h(u-\tilde{u})\,d\sigma.$$

С другой стороны, в соответствии с формулой $Q=\Delta t\iint\limits_{\sigma} a_n d\sigma$ получаем

$$Q_2=\Delta t\iint\limits_{\Gamma_1} a_n d\sigma.$$

Вследствие того, что тепловой поток, уходящий в окружающее пространство, равен тепловому потоку, подходящему изнутри тела, то $Q_1=Q_2$, т. е.

$$\iint\limits_{\Gamma_1} a_n d\sigma=\iint\limits_{\Gamma_1} h(u-\tilde{u})\,d\sigma.$$

Это равенство выполняется для любой части Γ_1 границы Γ. Следовательно, на границе Γ должно выполняться условие $a_n=h(u-\tilde{u})$.

Поскольку

$$a_n=\vec{a}\cdot\vec{n}=(-k\,\text{grad}\,u)\cdot\vec{n}=-k\frac{\partial u}{\partial n},$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная функции u в точке границы по направлению внешней нормали к поверхности Γ, то последнее равенство можно представить в виде

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=h\left(u|_{\Gamma}-\tilde{u}\right). \tag{2.54}$$

Отметим два важных частных случая краевого условия (2.54).

1. Коэффициент теплообмена равен нулю, $h=0$ (на границе тела нет теплообмена с окружающей средой); в этом случае краевое условие принимает вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0. \tag{2.55}$$

2. Коэффициент теплообмена является достаточно большим. Перепишем условие (2.54) в виде

$$-\frac{k}{h}\frac{\partial u}{\partial n}=\left.u\right|_{\Gamma}-\tilde{u},$$

откуда при $h\to\infty$ получаем $\left.u\right|_{\Gamma}-\tilde{u}=0,$ или

$$\left.u\right|_{\Gamma}=\tilde{u}. \tag{2.56}$$

Краевое условие (2.56) означает, что на границе Г поддерживается постоянная температура.

Таким образом, задача о распространении тепла в пространстве (для однородного тела без тепловых источников) формулируется следующим образом.

6А6 (Задача). Найти решение $u=u(x,y,z,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

удовлетворяющее начальному (2.53) и краевому (2.54) условиям (в частном случае условию (2.55) или (2.56)).

В теории ДУ с ЧП доказывается, что при некоторых предположениях относительно соответствующих функций поставленная задача имеет единственное решение.

2.6.3. Первая краевая задача. Теорема о максимуме и минимуме

Типичной краевой задачей для параболических уравнений является следующая задача. Обозначим через G криволинейный четырехугольник на плоскости (t,x), ограниченный отрезками прямых $t=t_0$ и $t=T$ $(T>t_0)$ и кривыми $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, где φ_1 и φ_2 – непрерывные функции и $\varphi_2(t)>\varphi_1(t)$ при $t_0\le t\le T$. Часть границы области G, состоящую из отрезка прямой $t=t_0$ и кривых $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, обозначим через Г (рис. 2.7). Требуется найти непрерывную в области G и на ее границе функцию $u(t,x)$, удовлетворяющую внутри G уравнению $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и принимающую на Γ значения заданной на Γ непрерывной функции f.

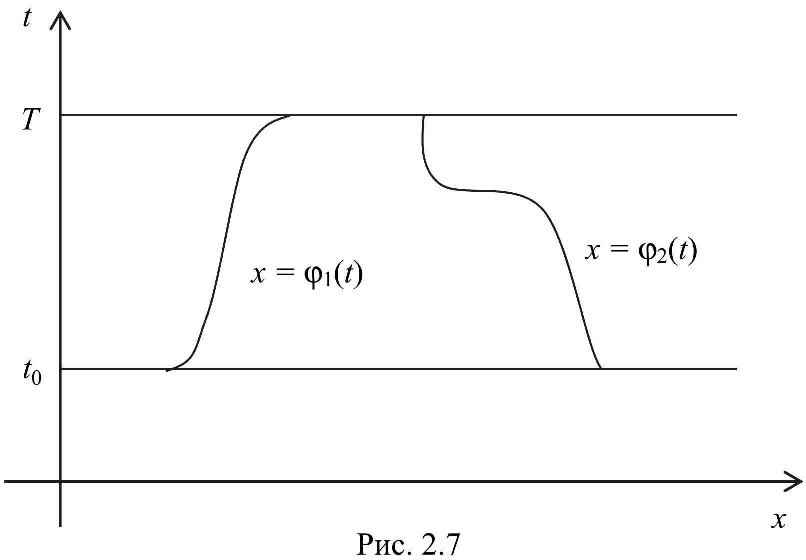

Рис. 2.7

Поставленная задача называется первой краевой задачей для уравнения теплопроводности. В том случае, когда область G является прямоугольником Q: $0<x<l, 0<t<T$, к первой краевой задаче теплопроводности приводит, например, задача о нахождении температуры $u(t,x)$ в теплоизолированном стержне, если известна его начальная температура при $t=0$ и известна температура на концах стержня в последующее время. При решении этой задачи очень существенно, что решение ищется при $t>0$. Аналогичная задача для отрицательных значений t не имеет решения. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в противоположность уравнению колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ существенно меняется при замене t на $-t$. Это – типичное уравнение необратимого процесса.

6Б7 (Теорема о максимуме и минимуме). Всякое решение $u(t,x)$ уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, определенное и непрерывное в криволинейном четырехугольнике G и на его границе, принимает наибольшее и наименьшее значения на границе Г, т. е. или на нижнем основании криволинейного четырехугольника G, или на его боковых сторонах.

Поскольку теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменной знака у u, то мы ограничимся доказательством теоремы о максимуме.

Доказательство. Обозначим через M максимум функции $u(t,x)$ в $G+\Gamma$, а через m – максимум значений $u(t,x)$ на Г. Допустим, что существует такое решение u, для которого $M>m$, т. е. для которого теорема о максимуме не верна. Пусть эта функция принимает значение M в точке $\left(t^*, x^*\right)$, где $t^*>t_0$ и $\varphi_1\left(t^*\right)<x^*<\varphi_2\left(t^*\right)$.

Рассмотрим функцию

$$v(t,x)=u(t,x)+\frac{M-m}{4l^2}\left(x-x^*\right)^2,$$

где $l=\max\limits_{t_0\le t\le T}\varphi_2(t)-\min\limits_{t_0\le t\le T}\varphi_1(t)$.

На боковых сторонах G и на его нижнем основании

$$v(t,x)\le m+\frac{M-m}{4}=\frac{M}{4}+\frac{3}{4}m=\theta M,$$

где $0<\theta<1$, а $v\left(t^*,x^*\right)=M$.

Следовательно, $v(t,x)$ так же, как и $u(t,x)$, не принимает максимального значения ни на нижнем основании G, ни на его боковых сторонах. Пусть $v(t,x)$ принимает максимальное значение в точке (t_1,x_1), где $t_1>t_0$ и $\varphi_1(t_1)<x_1<\varphi_2(t_1)$. В этой точке должно быть $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\le 0$ и $\frac{\partial v}{\partial t}\ge 0$ (если $t_1<T$, то $\frac{\partial v}{\partial t}=0$; если $t_1=T$, то $\frac{\partial v}{\partial t}\ge 0$). Поэтому в точке (t_1,x_1)

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\ge 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M-m}{2l^2}=-\frac{M-m}{2l^2}<0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

<u>**6Б8**</u> (Следствия).

6.1. Решение первой краевой задачи в криволинейном четырехугольнике G единственно. Действительно, разность двух решений равна нулю на нижнем основании и на боковых сторонах G и в силу теоремы о максимуме и минимуме равна тождественно нулю.

6.2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности непрерывно зависит от функций, заданных на боковых сторонах и на нижнем основании криволинейного четырехугольника G. Это также следует из того, что разность двух решений u_1 и u_2 уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в криволинейном четырехугольнике G принимает наибольшее и наименьшее значения на нижнем основании криволинейного четырехугольника G или на его боковых сторонах.

2.6.4. Теплопроводность в стержне, концы которого теплоизолированы

Уравнение теплопроводности относится к уравнениям параболического типа, описывающим процессы, необратимые во времени. Рассмотрим простейший процесс такого типа – охлаждение стержня. При отсутствии тепловых источников температура $u(x,t)$ различных точек стержня определяется уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в начальный момент времени $t=0$ температура неравномерно нагретого стержня задана функцией $f(x)$, т. е. начальное условие (2.53) принимает вид $u(x,t)\big|_{t=0}=f(x)$, где $f(x)$ – заданная функция при $0\le x\le l$ (l – длина стержня), а краевое условие (2.55) запишется так:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

<u>**6А9**</u> (Задача о распространении тепла в стержне, концы которого теплоизолированы). Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.57}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \qquad (2.58)$$

и краевым условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \qquad (2.59)$$

Вводя новую переменную $\tau = a^2 t$ и учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}a^2, \; a^2\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

уравнение (2.57) представим в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2.60)$$

при этом начальное и краевые условия остаются прежними, так как при $t = 0$ $\tau = 0$, а условия (2.59) от τ не зависят.

Решение уравнения (2.60), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0} = f(x) \qquad (2.61)$$

и краевым условиям (2.59), будем искать с помощью метода Фурье в виде произведения двух функций:

$$u(x,\tau) = X(x)T(\tau), \qquad (2.62)$$

где $X(x)$ – функция только от x; $T(\tau)$ – функция только от τ.

Поскольку $\frac{\partial u}{\partial \tau} = X(x)T'(\tau),\ \frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(\tau),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(\tau)$, то подстановка соответствующих выражений в уравнение (2.60) приводит к соотношению

$$X(x)T'(\tau) = X''(x)T(\tau)$$

или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)}.$$

Вследствие того, что функция (2.62) является решением уравнения (2.60), последнее равенство должно выполняться для всех x

и τ (из соответствующей области их изменения). Это возможно лишь в случае, когда обе части последнего равенства равны постоянной, так как левая часть может зависеть только от x, а правая – только от τ. Обозначим эту постоянную как c, тогда

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = c,$$

откуда

$$T'(\tau) - cT(\tau) = 0, \tag{2.63}$$

$$X''(x) - cX(x) = 0. \tag{2.64}$$

Уравнение (2.63) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Интегрируя это уравнение, получаем

$$\ln T(\tau) = c\tau + \ln C,\ \ T(\tau) = e^{c\tau + \ln C},\ \ T(\tau) = Ce^{c\tau}.$$

Поскольку температура не может неограниченно возрастать с течением времени (источники тепла отсутствуют), то функция $T(\tau)$ обладает тем же свойством. Следовательно, в последней формуле c может быть только отрицательным, т. е.

$$c = -\lambda^2 \quad (\lambda \neq 0). \tag{2.65}$$

Итак, функция $T(\tau)$ выражается формулой

$$T(\tau) = Ce^{-\lambda^2\tau}. \tag{2.66}$$

Уравнение (2.64) с учетом (2.65) принимает вид $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет решение

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x, \tag{2.67}$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Подставляя функции (2.66) и (2.67) в формулу (2.62), получаем

$$u = (\alpha\cos\lambda x + \beta\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}, \tag{2.68}$$

где $\alpha = CC_1$, $\beta = CC_2$.

Частная производная этой функции по x выражается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(-\alpha\sin\lambda x + \beta\cos\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}.$$

Числа α, β, λ выберем таким образом, чтобы удовлетворялись условия (2.59):

$$\begin{cases} \lambda(-\alpha\sin 0+\beta\cos 0)e^{-\lambda^2\tau}=0, \\ \lambda(-\alpha\sin\lambda l+\beta\cos\lambda l)e^{-\lambda^2\tau}=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha\sin 0+\beta\cos 0=0, \\ -\alpha\sin\lambda l+\beta\cos\lambda l=0. \end{cases}$$

Из последних уравнений следует, что $\beta=0$, $\sin\lambda l=0$. Следовательно, $\lambda l=n\pi\,(n=1,2,3,\ldots)$ и *собственные значения* нашей краевой задачи запишутся в виде

$$\lambda_n=\frac{\pi n}{l}\quad(n=1,2,3,\ldots),\qquad(2.69)$$

где взяты только положительные значения n, так как $\cos\lambda x=\cos(-\lambda x)$, $(-\lambda)^2=\lambda^2$; поскольку $\beta=0$, функция (2.68) принимает одинаковые значения при λ и $-\lambda$; далее $\lambda\neq 0$ в соответствии с условием (2.65). Итак, функция (2.68) запишется следующим образом:

$$u_n(x,\tau)=\alpha_n\cos\lambda_n x\,e^{-\lambda_n^2\tau}.$$

Или, учитывая (2.69), получаем *собственные функции*, соответствующие собственным значениям (2.69):

$$u_n(x,\tau)=\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}\tau}.\qquad(2.70)$$

Решением уравнения (2.60), удовлетворяющим краевым условиям (2.59), является сумма ряда, составленного из функций (2.70), т. е. ряда

$$u(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}\tau}.\qquad(2.71)$$

Коэффициенты α_n этого ряда выберем так, чтобы функция $u(x,\tau)$ удовлетворяла также и начальному условию (2.61):

$$u(x,\tau)\big|_{\tau=0}=f(x),\quad\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\frac{\pi n x}{l}=f(x).$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)$ в промежутке $[0,l]$ необходимо разложить в ряд Фурье по косинусам, коэффициенты такого разложения определяются формулой

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx \ \ (n=1,2,3,\ldots). \tag{2.72}$$

Следовательно, функция (2.71), для которой α_n определены формулой (2.72), является решением уравнения (2.60), удовлетворяющим начальному (2.61) и краевым (2.59) условиям. Принимая во внимание равенство $\tau = a^2 t$, приходим к утверждению.

<u>6А+Б10</u> (Теорема). Функция

$$u(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t},$$

для которой α_n определены формулой (2.72), является решением уравнения (2.57), удовлетворяющим начальному (2.58) и краевым (2.59) условиям.

<u>6А+Б11</u> (Замечание). Аналогично решается задача о распространении тепла в стержне, на концах которого поддерживается постоянная температура. Эта задача о нахождении решения уравнения (2.57), удовлетворяющего начальному условию (2.58) и следующему краевому условию

$$u\big|_{x=0} = u_0, \ u\big|_{x=l} = u_l.$$

Предварительно задачу необходимо свести к задаче с однородными краевыми условиями, т. е. с условиями, которым удовлетворяет тривиальное решение $(u \equiv 0)$. При неоднородных условиях $(u_0 \neq 0$ и $u_l \neq 0)$ сумма и разность двух функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ уже не будет решениями, удовлетворяющими этим условиям. В частности, не является решением $u_1(x,t) - u_1(x,t) \equiv 0$. Последнее обстоятельство затрудняет построение общего решения (2.71).

Приведение к задаче с однородными краевыми условиями можно осуществить с помощью новой функции

$$\omega(x,t) = u(x,t) + (u_0 - u_l)\frac{x}{l} - u_0.$$

Для этой функции уравнение (2.57) остается прежним, начальное условие примет вид

$$\omega(x,t)\big|_{t=0} = u(x,t)\big|_{t=0} + (u_0 - u_l)\frac{x}{l} - u_0 = f_1(x),$$

а краевые условия станут однородными:

$$\omega(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=0} + (u_0 - u_l)\frac{x}{l}\bigg|_{x=0} - u_0 = u_0 - u_0 = 0,$$

$$\omega(x,t)\big|_{x=l} = u(x,t)\big|_{x=l} + (u_0 - u_l)\frac{x}{l}\bigg|_{x=l} - u_0 = u_l + (u_0 - u_l) - u_0 = 0.$$

2.6.5. Решение первой смешанной задачи методом разделения переменных. Функция источника

<u>6А12</u> (Задача). Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{2.73}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0 \tag{2.74}$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2.75}$$

Решение задачи 6А12 ищем в виде ряда $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x)$, где $T_k(t)$ – коэффициенты, а $X_k(x)$– собственные функции.

Прежде всего находим собственные функции X_k. При реализации метода разделения переменных ставят и решают следующую вспомогательную задачу: требуется найти все решения вида $u(x,t) = T(t)X(x) \neq 0$, удовлетворяющие однородному уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ и однородным граничным условиям (2.74).

Для этого в уравнении $T'X - a^2 T X'' = 0$ разделяем переменные, поделив на $a^2 T X \neq 0$. Имеем:

$$\frac{T'}{a^2 T} - \frac{X''}{X} = 0$$

или

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda,$$

откуда

$$\begin{cases} T'+\lambda a^2T=0, \\ X''+\lambda X=0 \end{cases} \tag{2.76}$$

с граничными условиями вида

$$x(0)=x(l)=0. \tag{2.77}$$

Краевая задача для второго уравнения системы (2.76), (2.77) относится к классическим задачам Штурма – Лиувилля. Ее собственные функции и значения имеют вид

$$\begin{cases} X_k=\sin\frac{\pi k}{l}x,\ k\in N, \\ \lambda_k=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ k\in N. \end{cases}$$

Определяем коэффициенты $T_k(t)$, учитывая, что найдены собственные функции

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.78}$$

Подставим (2.78) в (2.73), (2.75):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k'(t)+\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2T_k(t)\right)\sin\frac{\pi k}{l}x=f(x,t).$$

Умножая последнее равенство на $\sin\frac{\pi k}{l}x$ и интегрируя по x в пределах от 0 до l, получаем дифференциальное уравнение

$$T_k'+\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 a^2T_k=f_k(t),\ t>0 \tag{2.79}$$

с начальным условием

$$T_k(0)=\varphi_k, \tag{2.80}$$

где

$$\begin{cases} f_k(t) = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x,t)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx, \\ \varphi_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi k}{l}x\,dx. \end{cases} \tag{2.81}$$

Решаем задачу Коши для обыкновенного ДУ (2.79), (2.80). Имеем: $T_k(t) = \tilde{T}_{k\,\text{одн}}(t) + T^*_{k\,\text{част}}(t)$, где общее решение $\tilde{T}_{k\,\text{одн}}(t)$ соответствующего однородного ДУ имеет вид $\tilde{T}_{k\,\text{одн}}(t) = C_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}$. Тогда частное решение $T^*_{k\,\text{част}}(t)$ неоднородного ДУ (2.79) найдем методом вариации произвольной постоянной. Полагая $T_{k\,\text{част}}(t) = C_k(t)e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}$, на основании (2.79) получим

$$C_k' e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} - C_k\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} + \left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 C_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} = f_k(t),$$

$$C_k' = f_k(t)e^{\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} \Rightarrow C_k = \int_0^t f_k(t)e^{\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}dt.$$

Таким образом, общее решение ДУ (2.79) имеет следующий вид:

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \tag{2.82}$$

или, учитывая $T_k(0) = \varphi_k = C_k$ (см. (2.80)), получаем

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau \tag{2.83}$$

и, подставляя (2.83) в (2.78), имеем

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 (t-\tau)} f_k(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{2.84}$$

Решение (2.84) исходной задачи имеет формальный характер, поскольку отсутствует обоснование существования, единственности и устойчивости решения.

Найдем интегральное представление решения, для этого подставим (2.81) в (2.84):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi\right)e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}+\right.$$

$$\left.+\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2(t-\tau)}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi k}{l}\xi d\xi\right)d\tau\right]\sin\frac{\pi k}{l}x=$$

$$=\int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x\right)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\left(\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x\right)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Положим

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi k}{l}\xi\cdot\sin\frac{\pi k}{l}x, \quad (2.85)$$

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,t)d\xi d\tau. \quad (2.86)$$

Таким образом, решение первой смешанной задачи полностью определяется функцией G, которая называется функцией мгновенного *точечного источника*, или *функцией Грина* (или функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла). Ее физический смысл для временной переменной t: эта функция указывает распределение температур в каждой точке $x\in[0,l]$ в каждый момент времени $t>\tau$ при условиях, что: 1) в момент времени $t=\tau$ в точке $x=\xi$ выделяется тепло $Q=c\rho$, а в других точках $Q=0$; 2) в каждый момент времени $t>\tau$ на концах стержня (при $x=0$ и $x=l$) температура будет равна нулю.

Таким образом, функция Грина показывает влияние точечного теплового импульса на распределение температур в стержне, что дает возможность свести множество задач, отличающихся друг от друга начальными условиями, к решению одной единственной задачи с начальным условием $\varphi(x)=\delta(x-x_0)$ (температура отлична от нуля и очень велика только в одной точке с координатой $x=x_0$).

6А+Б13 (Замечание). Используя интегральное представление решения (2.86), можно показать, что смешанная задача (2.73)–(2.75) имеет классическое решение, которое задается формулой (2.86).

2.6.6. Уравнение диффузии

Если среда заполнена газом с различной концентрацией, то происходит диффузия из мест с большей концентрацией в места с меньшей концентрацией. Аналогичное явление наблюдается и в растворах, если концентрация растворимого вещества для данного объема не является постоянной.

В задачах о диффузии в пространственных областях неизвестной функцией является концентрация диффундирующего вещества, которую обозначают через c, $c=c(x,y,z,t)$.

Процесс диффузии во многом схож с процессом распространения тепла. Поэтому в предположениях (А+С), аналогичных тем, которые были сделаны в п. 2.6.1, получаем, что функция $c=c(x,y,z,t)$ должна удовлетворять трехмерному параболическому уравнению.

6Б14 (Пространственная задача диффузии). Найти решение $c=c(x,y,z,t)$ ДУ с ЧП

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right),$$

удовлетворяющее начальному условию $c(x,y,z,t)\big|_{t=0}=f(x,y,z)$, а также граничным условиям, задаваемым главным образом в виде

$$\left.\frac{\partial c}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0, \tag{2.87}$$

$$c(x,y,z,t)\big|_{\Gamma}=C_0. \tag{2.88}$$

Здесь постоянная D $(D>0)$ называется *коэффициентом диффузии*, заданная функция $f(x,y,z)$ определяет *начальную концентрацию*, Γ – граница области, в которой происходит диффузия.

Условие (2.87) означает, что граница области для диффундирующего вещества является непроницаемой стенкой. Условие (2.88) определяет концентрацию на границе области.

6А+Б15 (Линейная задача диффузии – задача о диффузии в тонкой трубке с непроницаемой стенкой). Найти решение $c = c(x,t)$ уравнения $\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $c(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$ и краевым условиям вида $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ или $c = c_0$ на конце или на концах трубки (первое условие на одном, второе – на другом конце; первое условие на обоих концах, второе условие на обоих концах).

Эти задачи аналогичны задаче о распространении тепла в стержне и решаются с помощью методов, изложенных в п. 2.6.4.

2.6.7. Решение краевых задач с помощью преобразований Лапласа и Фурье

В современной теории теплопроводности для решения краевых задач используют также интегральные преобразования, в частности преобразования Лапласа и Фурье.

Рассмотрим задачу о распределении температуры в стержне длиной l с нулевой начальной температурой стержня: $u(x,0) = 0$, на концах которого поддерживается заданная температура: $u\big|_{x=0} = u_0$, $u\big|_{x=l} = 0$.

Это смешанная задача для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.89}$$

при краевых условиях

$$u\big|_{t=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = u_0,\ u\big|_{x=l} = 0. \tag{2.90}$$

6Б16 (Метод преобразования Лапласа). Рассмотрим применение преобразования Лапласа к решению задач математической физики на примере краевой задачи для ДУ с ЧП (2.89), (2.90).

Обозначим преобразование Лапласа по переменной t функции $u(x,t)$ через $U_L(x,p)$, т. е.

$$u(x,t) \doteq U_L(x,p) = \int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt.$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \doteq pU_L(x,p) - u(x,0) = pU_L(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\int_0^{+\infty} u(x,t)e^{-pt}dt\right) = \frac{d^2 U_L(x,p)}{dx^2},$$

приходим к изображениям по Лапласу уравнения (2.89):

$$a^2 U_L''(x,p) = pU_L(x,p), \tag{2.91}$$

а также граничных условий

$$u(0,t) \doteq U_L(0,p) = \int_0^x u_0 e^{-pt}dt = \frac{u_0}{p},$$

$$u(l,t) \doteq U_L(l,p) = 0. \tag{2.92}$$

В результате получаем краевую задачу для обыкновенного ДУ второго порядка (2.91) с граничными условиями (2.92).

Найдем решение $U_L(x,p)$ этой задачи. Для ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (2.91) составим характеристическое уравнение

$$a^2\lambda^2 - p = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{p}}{a}$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$U_L(x,p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий (2.92):

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{u_0}{p}, \\ C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$C_1=\frac{\frac{u_0}{p}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}}{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}-e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}}=-\frac{u_0}{p}\frac{1}{e^{2\frac{\sqrt{p}}{a}l}-1},$$

$$C_2=\frac{-\frac{u_0}{p}e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}}{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}-e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}}=\frac{u_0}{p}\frac{1}{1-e^{-2\frac{\sqrt{p}}{a}l}},$$

и решение краевой задачи (2.91), (2.92) запишется в виде

$$U_L(x,p)=-\frac{u_0}{p}\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{e^{2\frac{\sqrt{p}}{a}l}-1}+\frac{u_0}{p}\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}}{1-e^{-2\frac{\sqrt{p}}{a}l}}=$$

$$=\frac{u_0}{p}\left(-\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(l-x)}}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}}+\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}(l-x)}}{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}-e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}}\right)=\frac{u_0}{p}\frac{sh\frac{\sqrt{p}}{a}(l-x)}{sh\frac{\sqrt{p}}{a}l}.$$

Полученное решение аналитично во всей плоскости, за исключением точек, где

$$p\,sh\frac{\sqrt{p}}{a}l=0,$$

т. е. точек вида $p=p_k=-\frac{\pi^2a^2k^2}{l^2}, k\in N_0=\{0,1,2,...\}$.

Решение $u(x,t)$ задачи (2.89), (2.90) является оригиналом для изображения $U_L(x,p)$.

В силу обобщенной теоремы разложения

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{res}U_L(x,p_k)e^{p_kt}$$

и, находя вычеты в точках p_k изображения, получаем искомое решение задачи:

$$u(x,t)=u_0\left(\frac{l-x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\exp\left(-\frac{\pi^2a^2k^2}{l^2}t\right)\right).$$

6А+Б+С17 (Метод преобразования Фурье). Для иллюстрации метода применим преобразование Фурье к решению задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Найти $u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальному условию $u(x,t)\big|_{t=0}=f(x),\, x\in R.$

Обозначим преобразование Фурье решения задачи $u(x,t)$ через $J(\xi,t)$, функции $f(x)$ – через $F(\xi)$:

$$J(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\xi x}dx,$$

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{i\xi x}dx.$$

Изображением по Фурье одномерного уравнения теплопроводности будет дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dJ(\xi,t)}{dt}=-a^2\xi^2J(\xi,t)$$

при $t=0,\ J(\xi,0)=F(\xi)$.

Таким образом, задача Коши для одномерного уравнения теплопроводности свелась к задаче Коши для обыкновенного ДУ первого порядка, решение которой имеет вид

$$J(\xi,t)=F(\xi)e^{-a^2\xi^2t}.$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{-a^2\xi^2t}\cdot e^{-i\xi x}d\xi,$$

или, используя формулу для свертки двух функций, получаем

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (2.93)$$

Можно показать, что функция $\varphi_\xi(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ является решением исходного уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Функция $\varphi_\xi(x,t)$

зависит от x и t и, кроме того, от произвольного параметра ξ. Она называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности* и имеет важный физический смысл, связанный с понятием теплового импульса.

Из формулы (2.93) следует, что тепло распространяется вдоль стержня не с какой-либо конечной скоростью, а мгновенно.

Решение задачи $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с начальным условием $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x)$, $x \in R$ есть функция, непрерывно дифференцируемая сколь угодно число раз по x и по t независимо от того, будет ли дифференцируема функция $f(x)$ или нет. Такая гладкость решений существенно отличает однородное уравнение теплопроводности, например, от уравнения колебания струны.

Физическим тепловым импульсом будем называть следующее начальное распределение температуры:

$$f_\varepsilon = \begin{cases} u_0, |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0, \ |x - x_0| > \varepsilon, \end{cases}$$

где u_0 – постоянная и $\varepsilon > 0$ (рис. 2.8). Такое начальное распределение температуры возникает, если в стержень, температура которого в каждой точке первоначально равна нулю, в момент $t = 0$ на отрезке от $x_0 - \varepsilon$ до $x_0 + \varepsilon$ внезапно введено некоторое количество тепла (например, если к этому отрезку на мгновение поднесено высокотемпературное пламя, так что температура этого отрезка в момент времени $t = 0$ «подскакивает» до значения u_0). Это количество тепла θ_0 пропорционально площади $2\varepsilon u_0$ области, заштрихованной на рис. 2.8, а именно, если S – площадь сечения стержня, т. е. $2\varepsilon S$ – объем отрезка стержня, $2\varepsilon S\rho$ – его масса, то $\theta_0 = 2\varepsilon S\rho c u_0$, где c – удельная теплоемкость.

На практике температура не может представляться разрывной функцией $f_\varepsilon(x)$, но график температуры будет очень близок к графику $f_\varepsilon(x)$ (он будет иметь вид пунктирной линии на рис. 2.8) и будет тем меньше отличаться от графика $f_\varepsilon(x)$, чем резче и кратковременнее будет подогрев. Тот факт, что на графике функции $f_\varepsilon(x)$ температура в точках $x_0 - \varepsilon$ и $x_0 + \varepsilon$ не определена, не имеет принципиального значения (если разрывную функцию $f_\varepsilon(x)$

представить интегралом Фурье, то его значение в точках будет равно $\frac{u_0}{2}$, поэтому можно считать, что и температура равна $\frac{u_0}{2}$).

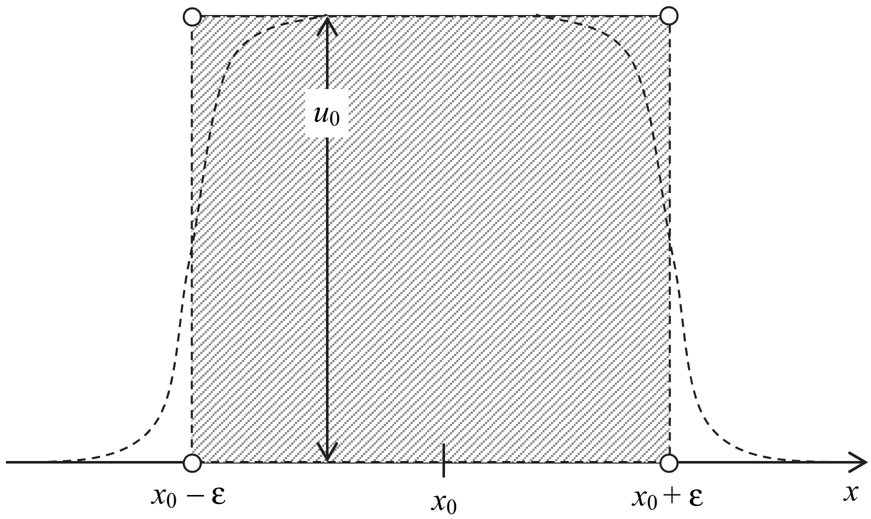

Рис. 2.8

При таком физическом тепловом импульсе в качестве начального распределения температуры решение (2.93) задачи теплопроводности будет иметь вид

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

По теореме о среднем для определенного интеграла получаем

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=2\varepsilon e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}},$$

где $\tilde{\xi}$ – некоторая точка, лежащая внутри интервала интегрирования, $x_0-\varepsilon<\tilde{\xi}<x_0+\varepsilon$. Решение задачи может быть записано следующим образом:

$$u(x,t)=\frac{2\varepsilon u_0}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}}=\frac{\theta_0}{S\rho c}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}},$$

так как $2\varepsilon u_0=\frac{\theta_0}{S\rho c}$. Предположим конкретно, что подведенное количество тепла $\theta_0=S\rho c$ (чтобы исключить физические параметры стержня). Тогда мы получим решение в случае физического теплового импульса в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}.$$

От физического теплового импульса перейдем теперь к точечному (идеальному) тепловому импульсу, устремляя ε к нулю. Поскольку $2\varepsilon u_0=1$, то при $\varepsilon\to 0$ имеем $u_0\to+\infty$, $\xi\to x_0$, и решение превратится теперь (для точечного теплового импульса) в функцию

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=\varphi_{x_0}(x,t),$$

т. е. в фундаментальное решение при значении параметра $\xi=x_0$.

Точечный тепловой импульс является в определенной мере абстракцией в сравнении с физическим импульсом на отрезке. Он может быть физически приближенно реализован, если пламя, о котором шла речь, будет очень узким.

Математически начальное распределение температуры при точечном импульсе представляется так называемой импульсной функцией (δ-функцией Дирака) $\delta(x-x_0)$, имеющей «предел» физического импульса $f_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$. Ей приписываются следующие свойства:

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x\neq x_0,\\ +\infty, & x=x_0\end{cases}$$

(последнее объясняется тем, что $u_0\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$, т. е. температура в точке x_0 становится неограниченной).

Функция $\varphi_{x_0}(x,t)$ является решением задачи теплопроводности в бесконечном стержне (с теплоизолированной боковой поверхностью) при начальном распределении температуры $f(x)=\delta(x-x_0)$.

Графики фундаментального решения $F(x,t,\xi)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$ при фиксированном ξ как функция переменной x в отдельные моменты времени $0<t_1<t_2<\ldots$ представлены на рис. 2.9. Эти кривые называют кривыми Гаусса. Площадь под каждой из этих кривых равна 1. Это означает, что количество тепла в стержне остается неизменным с течением времени.

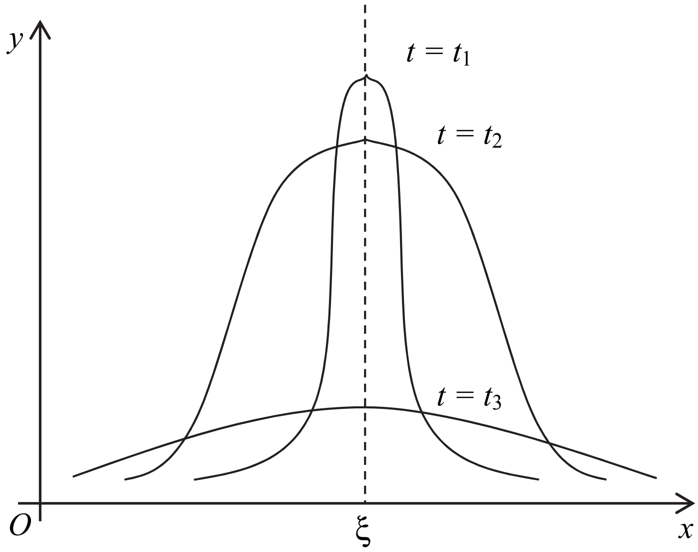

Рис. 2.9

Решение (2.93) задачи теплопроводности в бесконечном стержне при начальном условии $u|_{t=0} = \varphi(x)$ может рассматриваться как результат суперпозиции (наложения) температур, возникающих в точке ξ в момент времени t вследствие непрерывно распределенных по стержню тепловых импульсов «интенсивности» $\varphi(\xi)$ в точке ξ, приложенных в момент $t = 0$. Такие импульсы можно приближенно реализовывать в виде большого числа языков пламени разной температуры, поднесенных в момент $t = 0$ на очень краткий промежуток времени к стержню так, что в каждой точке ξ стержня мгновенно возникает температура $f(\xi)$.

2.6.8. Применение явной разностной схемы для решения одномерного уравнения теплопроводности

Численные методы распадаются на два типа: один, явный, в котором численное решение может быть выполнено шаг за шагом, исходя из данного дифференциального уравнения и известных начальных и граничных условий; второй, неявный, в котором неизвестные значения связываются между собой системой линейных уравнений.

Рассмотрим применение метода конечных разностей для решения следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности. Пусть в области $\{0 < x < l,\ 0 < t \le Q\}$ требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.94}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$T(x,0) = F(x) \tag{2.95}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} T(0,t) = f_1(t), \\ T(l,t) = f_2(t), \end{cases} \tag{2.96}$$

где a^2 – некоторый постоянный коэффициент.

Если считать, что a^2 есть коэффициент температуропроводности, то решение этой задачи описывает нестационарное поле температуры $T(x,t)$ в однородном стержне, теплоизолированном с боковой поверхности, при заданном начальном распределении температуры $F(x)$ и температуре $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно на левом и правом концах стержня.

Если считать, что a^2 есть коэффициент диффузии некоторой примеси в сплошной среде, то решение этой задачи можно интерпретировать как нестационарное поле концентрации примеси в трубке с известным начальным распределением концентрации и заданными концентрациями на левой и правой границах трубки.

Для решения этой задачи методом конечных разностей в области изменения независимых переменных x и t построим прямоугольную сетку с постоянными шагами h и τ, координаты узлов которой определяются формулами (сетка и шаблон явной разностной схемы представлены на рис. 2.10)

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, 2, ..., n;$$

$$t_j = j\tau,\ j = 0, 1, 2, ..., m.$$

При этом узлы, лежащие на границе области $\{0 \le x \le l,\ t = 0\}$, $\{x = 0,\ 0 \le t \le Q\}$, $\{x = l,\ 0 \le t \le Q\}$ (обозначенные крестиками на рис. 2.10), называются граничными узлами, остальные – внутренними.

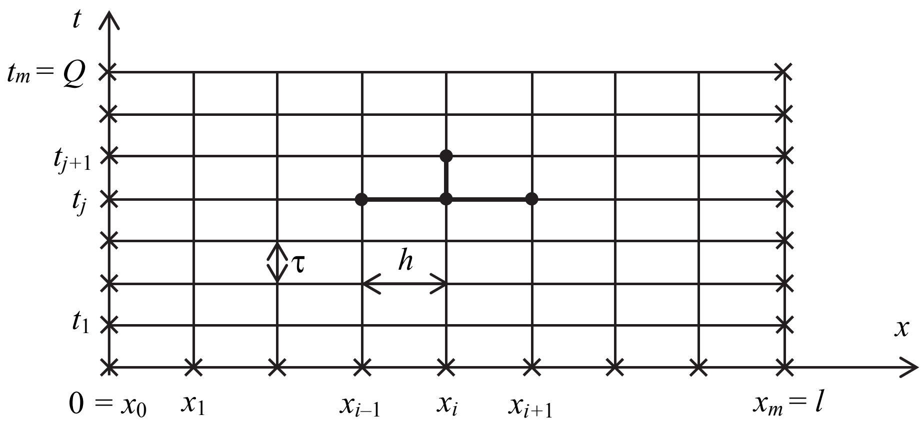

Рис. 2.10

Значения функции $T(x,t)$ в узлах сетки будем обозначать символами $T\left(x_i,t_j\right)=T_i^j$. Перейдем теперь к аппроксимации (во внутренних узлах сетки) частных производных $\left.\dfrac{\partial T}{\partial t}\right|_{\left(x_i,t_j\right)}$, $\left.\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{\left(x_i,t_j\right)}$ в уравнении (2.94), а также начальных и граничных условий в граничных узлах сетки конечно-разностными соотношениями. Используя определение частной производной по времени в точке $\left(x_i,t_j\right)$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{\left(x_i,t_j\right)}=\lim_{\tau\to 0}\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau},$$

введем следующую аппроксимацию этой производной:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{\left(x_i,t_j\right)}\approx\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau}. \tag{2.97}$$

На основании определения частных производных по переменной x в точке$\left(x_i,t_j\right)$ соответственно справа

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\left(x_i,t_j\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{T_{i+1}^j-T_i^j}{h}$$

и слева

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{\left(\bar{x}_i,t_j\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{T_i^j-T_{i-1}^j}{h}$$

для частной производной второго порядка по x получим

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_j)} = \lim_{h\to 0}\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(x_i,t_j)} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(\bar{x}_i,t_j)}}{h}$$

и введем для нее следующую аппроксимацию:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_j)} \approx \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}. \tag{2.98}$$

Поскольку для аппроксимации частных производных использовались значения искомой функции $T(x,t)$ в четырех точках (x_{i-1},t_j), (x_i,t_j), (x_{i+1},t_j), (x_i,t_{j+1}), то изображенная на рис. 2.10 жирными линиями конфигурация узлов называется четырехточечным шаблоном.

Подставив аппроксимации (2.97) и (2.98) в уравнение (2.94) и разрешив полученное уравнение относительно T_i^{j+1}, получим разностное уравнение

$$T_i^{j+1} = \sigma\left(T_{i+1}^j + T_{i-1}^j\right) + (1-2\sigma)T_i^j, \tag{2.99}$$

$$i = 1, 2, ..., n-1, \quad j = 0, 1, 2, ..., m-1, \quad \sigma = \frac{a^2\tau}{h^2},$$

которое аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение во внутренних узлах сетки. Можно показать, что погрешность аппроксимации имеет первый порядок по τ и второй порядок по h, т. е. $O\left(\tau + h^2\right)$. Это уравнение позволяет рассчитать значение функции T_i^{j+1} на слое $t = t_{j+1} = (j+1)\tau$ по трем значениям T_{i-1}^j, T_i^j, T_{i+1}^j на предыдущем слое $t = t_j = j\tau$. В связи с этим реализуется следующий алгоритм послойного расчета значений искомой функции в узлах сетки. Значения функции на нулевом слое $t = t_0 = 0$ вычисляются из начального условия (2.95):

$$T_i^0 = T(x_i, 0) = F(x_i), i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.100}$$

Во внутренних узлах первого слоя $t = t_1 = \tau$ значения функции T_i^1, $i = 1, 2, ..., n-1$ рассчитываются по формуле (2.99). Недостающие значения функции в граничных узлах первого и последующих слоев получают из граничных условий (2.96):

$$\begin{cases} T_0^1 = T(0, t_1) = f_1(t_1), \\ T_n^1 = T(l, t_1) = f_2(t_1). \end{cases} \tag{2.101}$$

По найденному решению на первом слое аналогично находится решение на втором и последующих слоях.

Совокупность разностных уравнений (2.99) и записанных в дискретной форме начального (2.100) и граничных (2.101) условий называется *разностной схемой*. Построенная разностная схема (2.99)–(2.101) называется *явной*, поскольку в каждом уравнении (2.99) содержится только одно значение T_i^{j+1} неизвестной функции с последующего слоя $t = t_{j+1}$, которое определяется явным образом.

Достоинством этой схемы считается простота формул и алгоритма вычислений. Недостатком является то, что ее можно использовать лишь при выполнении условия $\sigma = \left(a^2\tau / h^2\right) \le 0{,}5$. Это условие накладывает сильное ограничение на величину шага по времени τ, т. е. вычисления приходится вести с малым τ, что приводит к большим затратам машинного времени. При использовании конечно-разностной схемы для решения краевой задачи возникает вопрос об устойчивости такой схемы. Под этим понимается следующее: конечно-разностная схема называется *устойчивой*, если малые погрешности, допущенные в процессе решения, затухают или, по крайней мере, остаются малыми при неограниченном увеличении номера текущего слоя, в противном случае схема называется неустойчивой. Явная схема является условно устойчивой.

Выведем далее формулы для расчета температуры в граничных узлах при использовании граничных условий второго и третьего рода.

К граничным условиям второго рода приводят задачи, в которых задана плотность теплового потока, протекающего через торцевые сечения стержня. Пусть, например, через левое торцевое сечение стержня поступает тепловой поток, плотность которого $q(0, t) = \mu_1(t)$ есть заданная функция времени. Приравнивая его к плотности теплового потока на левой границе стержня, описываемой законом теплопроводности Фурье, получаем

$$q(0, t) = \mu_1(t) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0, t)},$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала стержня, т. е.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0,t)} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda}. \tag{2.102}$$

Аппроксимируя производную в левой части конечно-разностным соотношением, получаем

$$\frac{T_1^j - T_0^j}{h} = -\frac{\mu_1(t_j)}{\lambda}$$

или

$$T_0^j = T_1^j + \frac{h}{\lambda}\mu_1(t_j). \tag{2.103}$$

Аналогично, если через правое торцевое сечение стержня поступает тепловой поток, плотность которого $q(l,t) = \mu_2(t)$, то

$$q(l,\ t) = \mu_2(t) = \lambda\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(l,t)}. \tag{2.104}$$

Вновь аппроксимируя производную, имеем

$$\frac{T_n^j - T_{n-1}^j}{h} = \frac{\mu_2(t_j)}{\lambda}$$

или

$$T_n^j = T_{n-1}^j + \frac{h}{\lambda}\mu_2(t_j). \tag{2.105}$$

Выражения вида (2.102) и (2.104), задающие $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ на границах стержня, называются граничными условиями второго рода. Вытекающие из них соотношения (2.103) и (2.105) позволяют рассчитать недостающие значения функции в граничных узлах первого и последующих слоев.

К граничным условиям третьего рода приводят задачи, в которых на торцевых поверхностях стержня имеет место теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. В соответствии с этим законом плотность теплового потока q, поступающего через торцевое сечение стержня, пропорциональна разности известной температуры окружающей среды T_c и температуры T торцевого сечения стержня:

$$q = \mathcal{L}(T_c - T),$$

коэффициент пропорциональности $\mathcal{L}$ называется коэффициентом теплообмена. Используя далее закон сохранения энергии и закон Фурье, получим на левом торцевом сечении стержня соотношение

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0,t)} = \mathcal{L}_l \left(T_{cl}(t) - T(0,t)\right). \tag{2.106}$$

Аппроксимируя производную и переходя к принятым ранее обозначениям температуры, имеем

$$-\lambda \frac{T_1^j - T_0^j}{h} = \mathcal{L}_l \left(T_{cl}\left(T_j\right) - T_0^j\right),$$

откуда

$$T_0^j = \frac{\mathcal{L}_l h}{\lambda + \mathcal{L}_l h} T_{cl}\left(t_j\right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mathcal{L}_l h} T_1^j. \tag{2.107}$$

Аналогично, в случае теплообмена на правом торцевом сечении стержня по закону Ньютона, получим соотношение

$$\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(l,t)} = \mathcal{L}_n \left(T_{cn}(t) - T(l,t)\right). \tag{2.108}$$

Снова аппроксимируя производную, имеем

$$\lambda \frac{T_n^j - T_{n-1}^j}{h} = \mathcal{L}_n \left(T_{cn}\left(t_j\right) - T_n^j\right),$$

откуда

$$T_n^j = \frac{\mathcal{L}_n h}{\lambda + \mathcal{L}_n h} T_{cn}\left(t_j\right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mathcal{L}_n h} T_{n-1}^j. \tag{2.109}$$

Выражения вида (2.106) и (2.108), задающие связь между $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ и T на границах стержня, называются граничными условиями третьего рода. Вытекающие из них соотношения (2.107) и (2.109) позволяют рассчитать недостающие значения функции в граничных узлах первого и последующих слоев.

При формулировке краевых задач для уравнения теплопроводности на каждой торцевой поверхности стержня можно ставить граничные условия любого вида. Порядок точности разностного решения линейной задачи при обеспечении условия устойчивости совпадает с порядком аппроксимации.

2.6.9. Применение неявной разностной схемы для решения одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим применение неявной разностной схемы для численного решения уравнения теплопроводности (2.94)–(2.96):

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},$$

$$0<x<l,\ 0<t\le Q,$$

$$T(x,0)=F(x),$$

$$\begin{cases} T(0,\ t)=f_1(t), \\ T(l,\ t)=f_2(t). \end{cases}$$

где a^2 – некоторый постоянный коэффициент.

Для составления разностной схемы на сетке с постоянными шагами h и τ по координатным осям Ox и Ot выберем изображенный на рис. 2.11 жирными линиями шаблон, состоящий из четырех точек (x_i,t_j), (x_{i-1},t_{j+1}), (x_i,t_{j+1}), (x_{i+1},t_{j+1}).

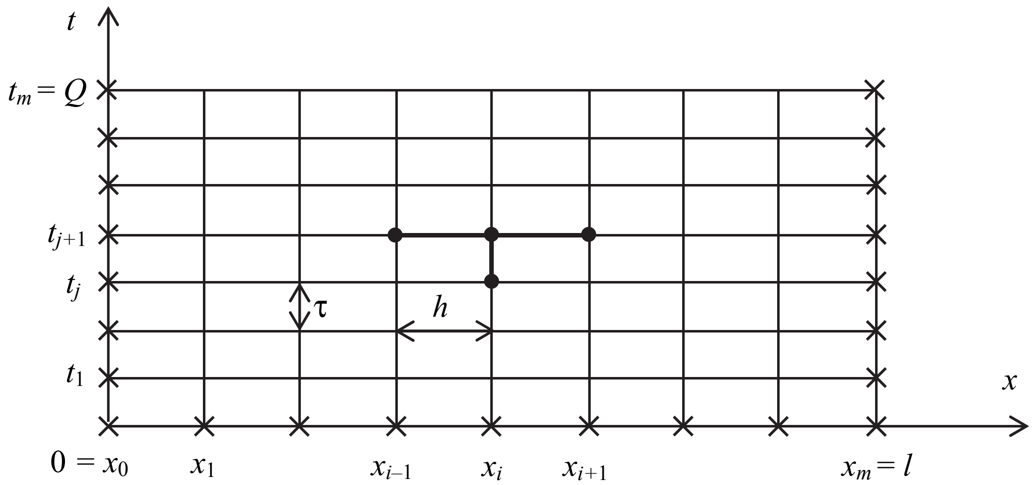

Рис. 2.11

Входящие в уравнение (2.94) производные аппроксимируем следующими конечно-разностными соотношениями:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{(x_i,t_{j+1})}\approx\frac{T_i^{j+1}-T_i^j}{\tau}, \tag{2.110}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(x_i,t_{j+1})} \approx \frac{T_{i+1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \tag{2.111}$$

Подставляя аппроксимации (2.110) и (2.111) в уравнение (2.94) и перегруппировывая члены, получаем

$$\sigma T_{i-1}^{j+1} - (1+2\sigma) T_i^{j+1} + \sigma T_{i+1}^{j+1} = -T_i^j, \tag{2.112}$$

$$i = 1, 2, ..., n-1,\ j = 0, 1, 2, ..., m-1,$$

где $\sigma = \dfrac{a^2\tau}{h^2}$.

Аппроксимация начального и граничных условий приводит к соотношениям

$$T_i^0 = T(x_i, 0) = F(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \tag{2.113}$$

$$\begin{cases} T_0^{j+1} = f_1(t_{j+1}), \\ T_n^{j+1} = f_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, ..., m-1. \end{cases} \tag{2.114}$$

Построенная разностная схема (2.112)–(2.114) называется *неявной*, поскольку в каждое уравнение получившейся системы линейных уравнений (2.112) входят три значения неизвестной функции T_{i-1}^{j+1}, T_{i+1}^{j+1}, T_i^{j+1} с последующего слоя $t = t_{j+1}^{i-1}$. Можно показать, что построенная неявная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по h.

Реализуется следующий алгоритм послойного расчета значений функции $T(x,t)$ в узлах сетки. Значения функции T_i^0 $(i = 0, 1, ..., n)$ на нулевом слое $t = t_0 = 0$ вычисляются из начального условия (2.113). Расписав далее уравнение (2.112) для всех внутренних точек первого слоя $t = t_1 = \tau$ и добавив соотношения (2.114) из граничных условий, получим следующую систему линейных уравнений с известной правой частью для определения неизвестных значений T_i^1 $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ на первом слое:

$$\begin{cases} T_0^1 = f_1(t_1), \\ \sigma T_{i-1}^i - (1+2\sigma) T_{i+1}^1 + \sigma T_{i+1}^1 = -T_i^0, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \\ T_n^1 = f_2(t_1). \end{cases}$$

По найденному решению на первом слое аналогично определяются решения на втором и последующих слоях.

Преимуществом неявной схемы является то, что ее можно использовать при любом значении σ. Неявная разностная схема считается абсолютно устойчивой. Выбор шагов сетки определяется не соображениями устойчивости, а требуемой точностью расчетов.

Недостатком неявной схемы является необходимость решать на каждом временном слое систему линейных уравнений. Матрица этой системы имеет «трехдиагональный» вид, поэтому для ее решения можно использовать метод прогонки.

Выведем расчетные формулы метода прогонки. Идея метода прогонки состоит в том, что путем последовательного исключения одного неизвестного в каждом уравнении системы (2.112) ее можно привести к эквивалентной системе с двумя неизвестными в каждом уравнении. Будем искать решение системы (2.112) в виде

$$T_i^{j+1} = \alpha_{i+1} T_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{2.115}$$

где α_{i+1} и β_{i+1} – неизвестные коэффициенты. Тогда

$$T_{i-1}^{j+1} = \alpha_i T_i^{j+1} + \beta_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.116}$$

Подставим (2.116) в (2.112) и получим

$$T_i^{j+1} = \frac{\sigma}{1 + 2\sigma - \sigma\alpha_i} T_{i+1}^{j+1} - \frac{\sigma\beta_i + T_i^j}{1 + 2\sigma - \sigma\alpha_i}. \tag{2.117}$$

Сравнивая формулы (2.115) и (2.117), выпишем рекуррентные соотношения, связывающие коэффициенты α_{i+1} и β_{i+1} с α_i, β_i:

$$\alpha_{i+1} = \frac{\sigma}{1 + 2\sigma - \sigma\alpha_i}, \; i = 1, 2, ..., n-1, \tag{2.118}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\sigma\beta_i + T_i^j}{1 + 2\sigma - \sigma\alpha_i}, i = 1, 2, ..., n-1. \tag{2.119}$$

Алгоритм решения системы линейных уравнений методом прогонки состоит в следующем. Сравнивая выражение (2.115), записанное для $i = 0$

$$T_0^{j+1} = \alpha_1 T_1^{j+1} + \beta_1, \tag{2.120}$$

с граничным условием (2.114)

$$T_0^{j+1} = f_1\left(t_{j+1}\right),$$

делаем вывод, что $\alpha_1 = 0, \beta_1 = f_1\left(t_{j+1}\right)$. Далее по формулам (2.118), (2.119) находим коэффициенты α_{i+1} и β_{i+1} $\left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$. Этот процесс называется *прямой прогонкой*. Зная прогоночные коэффициенты, решение системы (2.112), (2.114) определяем по формуле (2.115) в обратном порядке $\left(i = n-1, n-2, ..., 2, 1, 0\right)$, начиная с $i = n-1$:

$$T_{n-1}^{j+1} = \alpha_n T_n^{j+1} + \beta_n, \tag{2.121}$$

поскольку значение $T_n^{j+1} = f_2\left(t_{j+1}\right)$ известно из граничного условия (2.114) на правом конце отрезка. Этот процесс называется *обратной прогонкой*.

Выведем далее формулы для расчета α_1 и β_1 при использовании граничных условий второго и третьего рода.

Пусть на левой границе стержня задано граничное условие второго рода

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(0,t)} = -\frac{\mu_1(t)}{\lambda} = q(0, t)$$

или в конечных разностях

$$T_0^{j+1} = T_1^{j+1} + \frac{h}{\lambda}\mu_1\left(t_{j+1}\right). \tag{2.122}$$

Сравнивая (2.122) с (2.120), делаем вывод, что $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = \dfrac{h}{\lambda}\mu_1\left(t_{j+1}\right)$.

Пусть и на правой границе стержня задано граничное условие второго рода

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{(l,t)} = \frac{\mu_2(t)}{\lambda} = q(l, t)$$

или в конечных разностях

$$T_n^{j+1} - T_{n-1}^{j+1} = \frac{h}{\lambda}\mu_2\left(t_{j+1}\right). \tag{2.123}$$

Решив систему двух уравнений (2.121) и (2.123), найдем, что

$$T_n^{j+1} = \frac{\beta_n - \frac{h}{\lambda}\mu_2\left(t_{j+1}\right)}{1-\alpha_n}.$$

Пусть на левой границе стержня задано граничное условие третьего рода

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{(0,t)} = \alpha_{\text{л}}\left(T_{\text{сл}}(t) - T(0,t)\right)$$

или в конечных разностях

$$T_0^{j+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha_{\text{л}}h}T_1^{j+1} + \frac{\alpha_{\text{л}}h}{\lambda+\alpha_{\text{л}}h}T_{\text{сл}}\left(t_{j+1}\right). \qquad (2.124)$$

Сравнивая (2.124) с (2.120), делаем вывод, что $\alpha_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha_{\text{л}}h}$, $\beta_1 = \frac{\alpha_{\text{л}}h}{\lambda+\alpha_{\text{л}}h}T_{\text{сл}}\left(t_{j+1}\right)$.

Пусть на правой границе стержня задано граничное условие третьего рода

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{(l,t)} = \alpha_n\left(T_{\text{сп}}(t) - T(l,t)\right)$$

или в конечных разностях

$$T_{n-1}^{j+1} = \left(1 + \frac{\alpha_n h}{\lambda}\right)T_n^{j+1} - \frac{\alpha_n h}{\lambda}T_{\text{сп}}\left(t_{j+1}\right). \qquad (2.125)$$

Решив систему из двух уравнений (2.121) и (2.125), найдем, что

$$T_n^{j+1} = \left(\frac{\alpha_n h}{\lambda}T_{\text{сп}}\left(t_{j+1}\right) + \beta_n\right)\left(1 + \frac{\alpha_n h}{\lambda} - \alpha_n\right).$$

Метод прогонки можно применить, если знаменатель выражений (2.118) и (2.119) не обращается в нуль. Это условие выполнено при решении уравнения теплопроводности с граничными условиями всех трех видов.

2.7. Эллиптические уравнения

Многие физические задачи, например описание стационарных и квазистационарных электромагнитных полей, стационарных процессов теплопроводности и диффузии, течения несжимаемой, невязкой жидкости и т. д., приводят к решению уравнений Лапласа и Пуассона.

2.7.1. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле

В п. 2.6.1 было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном пространственном теле в случае отсутствия источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{2.126}$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке (x, y, z) внутри тела установилась, т. е. она не меняется с течением времени. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ и уравнение (2.126) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{2.127}$$

7Б+С1 (Определение). Уравнением Лапласа (в пространстве) называется уравнение

$$\Delta u = 0,$$

где Δu – лапласиан, выражение которого в декартовых, цилиндрических и сферических координатах имеет соответственно вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Таким образом, уравнению Лапласа (2.127) удовлетворяет установившаяся в однородном теле температура $u(x, y, z)$.

7А+С2 (Замечание). Уравнению Лапласа удовлетворяет (А+С) также потенциал стационарного электрического поля в области, где отсутствуют заряды, и потенциал поля тяготения в области, где отсутствуют массы. К уравнению Лапласа приводят и другие задачи, однако при изучении этого уравнения представление функции $u(x,y,z)$ как температуры наглядно и удобно.

7А3 (Определение). Функция $u(x,y,z)$ называется *гармонической в конечной области* D, если она в этой области имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках D.

7Б4 (Определение). Функция $u(x,y,z)$ называется *гармонической в бесконечной области* D, если она в этой области имеет непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках D и стремится к нулю при стремлении точки $M(x,y,z)$ в бесконечность (функция $u(M)\to 0$ при $M\to\infty$, если для любого заданного положительного числа ε можно указать такое положительное число A, что $|u(M)|<\varepsilon$ при $r\geq A$, где r – расстояние точки M от начала координат).

7А+Б5 (Основные свойства гармонических функций).

1. Функция $u(x,y,z)$, гармоническая в области D, имеет производные всех порядков внутри этой области.

2. Значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этого шара.

3. Функция, гармоническая внутри ограниченной области D и непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.

Уравнение Лапласа имеет бесконечное множество решений. Какое-то конкретное решение определяется заданием некоторых дополнительных условий. Например, для уравнения Лапласа можно рассмотреть следующую задачу.

7А6 (Краевая задача для уравнения Лапласа). Найти функцию $u=u(x,y,z)$, гармоническую внутри области, ограниченной замкнутой поверхностью Г, и удовлетворяющую граничному условию

$$H\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=u|_{\Gamma}-\tilde{u},$$

где H и $\tilde{u}$ – функции, заданные на границе Г. В случае задачи о стационарном распределении температуры $H=-\frac{k}{h}$; $\tilde{u}$ – температура окружающей среды на границе тела; k – коэффициент теплопроводности; h – коэффициент теплообмена, зависящий от физических свойств тела и окружающей среды.

Важный частный случай краевой задачи получается при $H=0$, соответствующий случаю $h=\infty$, т. е. заданию температуры тела на границе Г: $u\big|_{\Gamma}=\tilde{u}$. Эта краевая задача называется *задачей Дирихле*.

<u>7А7</u> (Задача Дирихле в пространстве). Найти функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности Г уравнению Лапласа $\Delta u=0$ и принимающую на границе Г заданные значения: $u\big|_{\Gamma}=\tilde{u}$.

То, что задача Дирихле всегда имеет решение (при некоторых весьма общих предположениях относительно Г и $\tilde{u}$), можно считать очевидным, исходя из физических соображений. Действительно, если каждая точка границы тела постоянно поддерживается при определенной температуре (которая может быть разной в разных точках границы), то в каждой точке тела установится в конце концов своя температура, которая и дает решение задачи Дирихле при данных граничных значениях. По тем же соображениям это решение будет единственным.

Задача Дирихле может интерпретироваться и в терминах диффузии: ее решением будет стационарная концентрация при условии, что концентрация на границе известна.

Если функция u зависит только от двух пространственных координат, например x и y (или только от r и φ в полярной системе координат), то уравнение Лапласа принимает более простой вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0.$$

<u>7А8</u> (Задача Дирихле на плоскости). Найти функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа внутри области, ограниченной замкнутой кривой Г, и принимающую на границе Г заданные значения $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$, т. е. $u|_{\Gamma} = \tilde{u}$.

Эта задача также имеет единственное решение. Она может возникнуть в физических задачах двух типов. Первый тип имеет место при рассмотрении стационарного распределения тепла в тонкой однородной пластинке, параллельной плоскости Oxy, с теплоизолированными нижней и верхней поверхностями. Край пластинки Г поддерживается при определенной температуре $\tilde{u}$. Пластинка предполагается настолько тонкой, что можно пренебречь изменением температуры по толщине (температура в этом случае будет функцией только x и y).

Второй тип задачи относится к стационарному распределению температуры в бесконечном однородном цилиндре, у которого образующие параллельны оси Oz, направляющая Г лежит в плоскости Oxy, а боковая поверхность цилиндра поддерживается при определенной температуре $\tilde{u}$. Температура u остается постоянной на любой прямой, проходящей внутри цилиндра параллельно оси Oz, поэтому $u = u(x, y)$.

7А9 (Задача Дирихле в одномерном случае). Задача Дирихле решается очень просто в одномерном случае, т. е. когда в соответствующей системе координат неизвестная функция $u = u(x)$ зависит только от одной из координат. В случае декартовых координат уравнение Лапласа принимает вид $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ и его решениями являются линейные функции $u = Ax + B$ (стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью всегда линейно). Задача Дирихле имеет в этом случае решение $u = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$, где $u_0 = u|_{x=0}$, $u_l = u|_{x=l}$.

В случае задач с осевой симметрией запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах, считая, что u не зависит от φ и z:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Отсюда $r\frac{du}{dr} = A$ и $u = A\ln r + B$, где A и B – произвольные постоянные. Задача Дирихле $u|_{r=a} = u_a$, $u|_{r=b} = u_b$ имеет решение

$$u = \frac{1}{\ln a - \ln b}\left[(u_a - u_b)\ln r + (u_b \ln a - u_a \ln b)\right] =$$

$$= u_a + (u_b - u_a)\frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Эта формула дает решение задачи о стационарном распределении тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура (можно также сказать, что u – потенциал электростатического поля в цилиндрическом конденсаторе, на обкладках которого потенциалы соответственно равны u_a и u_b). Полученное решение теряет смысл при $r = 0$.

Трехмерные и двумерные задачи Дирихле могут быть точно решены только для сравнительно простых областей.

2.7.2. Задача Дирихле для круга. Интеграл Пуассона

7А+Б10 (Задача Дирихле для круга). Найти функцию, гармоническую внутри круга и принимающую на его границе заданные значения.

Введем полярные координаты r и φ, полюс поместим в центре данного круга, радиус которого обозначим через R. Двумерный оператор Лапласа выражаем в полярных координатах. Уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (2.128)$$

Найдем функцию $u = u(r, \varphi)$, удовлетворяющую уравнению (2.128) при $r < R$ и принимающую на границе Γ круга радиуса R заданные значения $u = f(\varphi)$:

$$u(r, \varphi)\big|_{r=R} = f(\varphi). \qquad (2.129)$$

Решение уравнения (2.128) ищем в виде произведения двух функций $U(r)$ и $\Phi(\varphi)$, первая из которых зависит только от r, вторая – только от φ:

$$u(r, \varphi) = U(r)\Phi(\varphi). \qquad (2.130)$$

Подставляя эту функцию в уравнение (2.128), получаем

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)\Phi+\frac{U}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=0$$

или

$$\frac{r}{U}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right)=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

Поскольку функция (2.130) – решение уравнения (2.128), то последнее равенство должно выполняться для всех r и φ из данной области $(0\le r<R, 0\le\varphi<2\pi)$. Но это возможно лишь в случае, когда обе части равенства не зависят от r и φ, т. е. являются одной и той же постоянной, так как левая часть его может зависеть только от r, а правая – только от φ.

Обозначив эту постоянную через λ, получаем два уравнения

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{r}{U}\frac{dU}{dr}=\lambda, \qquad (2.131)$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\lambda\Phi=0. \qquad (2.132)$$

Это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка.

Уравнение (2.132) является уравнением с постоянными коэффициентами и имеет решение

$$\Phi(\varphi)=A\cos\sqrt{\lambda}\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

где A и B – произвольные постоянные.

Покажем, что λ не может принимать любые значения. Действительно, прибавление слагаемого 2π к аргументу φ возвращает точку $M(r,\varphi)$ в исходное положение. Это значит, что $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, т. е. функция $\Phi(\varphi)$ является периодической с периодом 2π. Последнее возможно, когда $\sqrt{\lambda}=n$, $\lambda=n^2$ $(n=0,1,2,...)$ (отрицательные значения n можно не принимать во внимание, поскольку n влияет только на знак произвольной постоянной B).

Итак, уравнение (2.132) имеет решение

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi \quad (n=0,1,2,...).$$

Уравнение (2.131) при $\lambda = n^2$ принимает вид

$$r^2 \frac{d^2U}{dr^2} + r\frac{dU}{dr} - n^2U = 0.$$

Решение этого уравнения находится с помощью подстановки $U = r^{\alpha}$.

Поскольку

$$\frac{dU}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}, \ \frac{d^2U}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2},$$

то

$$r^2\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - n^2r^{\alpha} = 0, \ \alpha^2 - n^2 = 0, \ \alpha = \pm n.$$

В случае $\alpha = -n$ получаем функцию $U(r) = r^{-n}$, которая обращается в бесконечность при $r = 0$. Эта функция не может быть использована для построения решения задачи Дирихле (ищется решение непрерывное и конечное в круге радиуса R).

При $\alpha = n$ получаем функцию $U_n(r) = r^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Подставляя выражения $\Phi_n(\varphi)$ и $U_n(r)$ в формулу (2.130), находим частные решения уравнения (2.128):

$$u_n(r,\varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n.$$

Решением этого уравнения будет также функция

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n.$$

Вводя обозначения $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = a_n$, $B_n = b_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, запишем это решение в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)r^n. \tag{2.133}$$

Коэффициенты a_n, b_n определим из условия (2.129):

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)R^n,$$

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nR^n \cos n\varphi + b_nR^n \sin n\varphi\right).$$

Последнее равенство представляет разложение функции $f(\varphi)$ в ряд Фурье. Как известно,

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,$$

$$R^n b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Подставив выражение для коэффициентов a_n, b_n в формулу (2.133), получим искомое решение задачи Дирихле для круга

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right] f(t)\,dt. \qquad (2.134)$$

Вычислим сумму в квадратной скобке. Принимая во внимание формулы Эйлера $\left(\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$, находим, что

$$2\cos n(t-\varphi) = e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}.$$

Следовательно,

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n 2\cos n(t-\varphi) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right)^n.$$

Комплексные члены полученных рядов образуют геометрические прогрессии, знаменатели которых по модулю меньше единицы. Действительно,

$$\left|\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right| = \left|\frac{r}{R}\right|\left|e^{i(t-\varphi)}\right| < 1, \quad \left|\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right| = \left|\frac{r}{R}\right|\left|e^{-i(t-\varphi)}\right| < 1$$

и, воспользовавшись формулой $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ суммы членов геометрической прогрессии (где b_1 – первый член, q – знаменатель прогрессии), получаем

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}\right]^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}\right]^n=1+\frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}+\frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}=$$

$$=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}.$$

Итак,

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)=\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}. \qquad (2.135)$$

Подставим выражение (2.135) в формулу (2.134), тогда получим

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}f(t)\,dt. \qquad (2.136)$$

Таким образом, доказано утверждение.

7А+Б11 (Теорема). Задача Дирихле (7А+Б10) для круга имеет решение, и это решение выражается формулой (2.136).

7А+Б12 (Определение). Интеграл (2.136) называется *интегралом Пуассона*, а выражение $\dfrac{1}{2\pi R}\dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\varphi)}$ – ядром Пуассона для круга.

2.7.3. Метод функции Грина для задачи Дирихле (трехмерный случай)

Метод функции Грина базируется на формуле Грина, являющейся следствием формулы Остроградского – Гаусса:

$$\oiint_S a_n d\sigma=\iiint_V \operatorname{div} a\,dv, \qquad (2.137)$$

где S – граница области V; $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ – единичный вектор внешней нормали к S; $a_n=\vec{a}\cdot\vec{n}$ – проекция вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{n}$.

Пусть $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ – две любые дважды дифференцируемые функции и

$$\vec{a} = u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u.$$

Тогда $a_n = (u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) \cdot \vec{n} = u \operatorname{grad} v \cdot \vec{n} - v \operatorname{grad} u \cdot \vec{n}$, и поскольку скалярное произведение градиента функции на единичный вектор равно производной функции по направлению этого вектора, то

$$\operatorname{grad} v \cdot \vec{n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \ \operatorname{grad} u \cdot \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Поэтому выражение для a_n примет вид

$$a_n = u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Перейдем к вычислению $\operatorname{div} a$:

$$\operatorname{div} a = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v - v \operatorname{grad} u) = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) - \operatorname{div}(v \operatorname{grad} u).$$

Преобразуем каждое из полученных выражений

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \operatorname{div}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + u \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + u \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v.$$

Аналогично получаем $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = v \Delta u + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u$. Поэтому

$$\operatorname{div} a = u \Delta v - v \Delta u.$$

Подставляя выражения для a_n и $\operatorname{div} a$ через u и v в формулу (2.137), окончательно получаем

$$\oiint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint_V (u \Delta v - v \Delta u) \, dv. \tag{2.138}$$

7Б13 (Формула Грина). Пусть функции $u = u(x, y, z)$ и $v = v(x, y, z)$ дважды дифференцируемы и поверхность S является границей области V. Тогда имеет место формула Грина (2.138).

Нам понадобится обобщение этой формулы на случай, когда область ограничена не одной, а двумя поверхностями. Пусть область W ограничена снаружи замкнутой поверхностью S и изнутри замкнутой поверхностью S_1, лежащей целиком «внутри» S (так что W – это часть области, ограниченной S, – часть «внутренности» S, внешняя относительно S_1). Тогда формула Остроградского – Гаусса (2.137) запишется в виде

$$\oiint\limits_{S_1} a_{n_1} d\sigma + \oiint\limits_{S} a_n d\sigma = \iiint\limits_{W} \operatorname{div} a dv,$$

где n_1 – единичный вектор внешней нормали к S_1, т. е. вектор, направленный внутрь S_1 («внутренность» S_1 не принадлежит W и поэтому является областью, внешней относительно W). Соответственно, формула Грина (2.138) примет вид

$$\oiint\limits_{S_1} \left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oiint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \iiint\limits_{W} \left(u\Delta v - v\Delta u \right) dv. \quad (2.139)$$

<u>7А14</u> (Замечание). Формулу (2.139) будем называть формулой Грина для области W, ограниченной поверхностями S (внешняя граница) и S_1 (внутренняя граница). Эта формула и служит основой метода Грина решения задачи Дирихле в пространстве.

Введем теперь определение самой функции Грина для трехмерного случая. В качестве поверхности S возьмем границу Γ области Ω, для которой мы решаем задачу Дирихле, и выберем внутри Ω произвольную, но фиксированную точку $A(x_0, y_0, z_0)$, которую окружим сферой S_1 радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в A. При этом предполагаем, что сфера S_1 целиком лежит «внутри» Γ (рис. 2.12).

Тогда между S_1 и Γ мы имеем область W. Обозначим, далее, через $P(x, y, z)$ любую точку области Ω, отличную от A, и через r_{AP} – расстояние между точками A и P:

$$r_{AP} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Функция $w = \dfrac{1}{r_{AP}}$ является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta w = 0$, во всех точках, кроме самой точки A, в которой она обращается в бесконечность. Действительно,

$$\frac{\partial r_{AP}}{\partial x}=\frac{x-x_0}{r_{AP}},\ \frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x}=-\frac{x-x_0}{r_{AP}^3}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\frac{1}{r_{AP}^3}+3\frac{x-x_0}{r_{AP}^4}\frac{\partial r_{AP}}{\partial x}=-\frac{1}{r_{AP}^3}+3\frac{\left(x-x_0\right)^2}{r_{AP}^5}=$$

$$=\frac{2\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2-\left(z-z_0\right)^2}{r_{AP}^5};$$

аналогично

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{2\left(y-y_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(z-z_0\right)^2}{r_{AP}^5},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{2\left(z-z_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2}{r_{AP}^5}$$

и

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0.$$

Еще проще в этом убедиться, если рассмотреть лапласиан в сферической системе координат с началом в точке A. Тогда $r_{AP}=r$, $w=\frac{1}{r}$ и $\Delta w=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0$, так как $r^2\frac{\partial w}{\partial r}=-1$ и w не зависит от θ и φ.

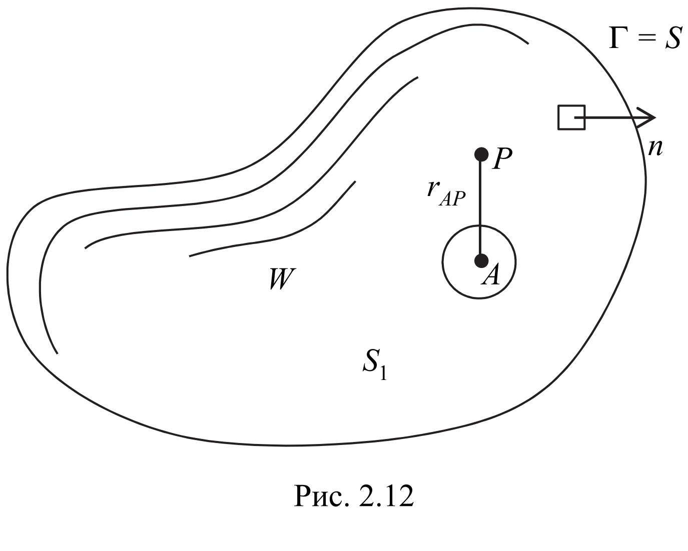

Рис. 2.12

Функцию $w = \dfrac{1}{r_{AP}}$ называют фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Обозначим, далее, через w_1 решение задачи Дирихле для области Ω с краевым условием

$$w_1\big|_\Gamma = w\big|_\Gamma. \tag{2.140}$$

Согласно определению, функция w_1 гармоническая во всей области Ω, в то время как w гармоническая только в области W, получающейся удалением из области Ω шара, ограниченного сферой S_1 с центром в точке A (таким образом, область W не содержит точки A).

7A15 (Определение). Разность функций $w_1 - w$, определенных выше, называется функцией Грина для области Ω и обозначается через G. Таким образом, $G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = w_1 - w = = w_1 - \dfrac{1}{r_{AP}}$.

Функция Грина зависит как от координат x, y, z текущей точки P, так и от координат x_0, y_0, z_0 произвольно выбранной, но фиксированной точки A (координаты x_0, y_0, z_0 входят в явном виде в w, но они войдут также через краевые значения и в w_1).

В силу условия (2.140) функция Грина на границе Γ обращается в нуль:

$$G\big|_\Gamma = 0. \tag{2.141}$$

Пусть теперь u – искомая гармоническая в области Ω функция, принимающая на границе Γ значения $\tilde{u}$. Положим $v = G$ и применим формулу Грина (2.139) к области W. Ввиду того что в этой области $\Delta u = 0$ и $\Delta v = 0$, правая часть формулы Грина обращается в нуль. Тогда получим

$$\oiint_{S_1} \left(u \frac{\partial v}{\partial n_1} - v \frac{\partial u}{\partial n_1} \right) d\sigma + \oiint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0. \tag{2.142}$$

Второй из этих интегралов в силу равенства (2.141) и условия $u\big|_\Gamma = \tilde{u}$ сведется к $\oiint_\Gamma \tilde{u} \dfrac{\partial G}{\partial n} d\sigma$. Для вычисления первого интеграла введем систему сферических координат r, θ, φ с началом в точке A. В этом случае на поверхности S_1

$$r_{AP} = r = \varepsilon, \ \frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial r}, \ d\sigma = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Следовательно, соотношение (2.142) перепишется в виде

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta = \oiint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma.$$

Правая часть этого равенства не зависит от ε. Поэтому она должна быть равна также и пределу левой части при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta = \oiint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (2.143)$$

Чтобы вычислить этот предел, заметим, что $G = w_1 - \dfrac{1}{r}$ (r_{AP} обозначаем через r). Тогда

$$\varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(u\frac{\partial G}{\partial r} - G\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta = \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(u\frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta +$$

$$+ \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right)\Bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta.$$

Функции u и w_1 гармонические во всей области Ω, включая точку A. Поэтому они вместе со своими производными ограничены. Это значит, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(u\frac{\partial w_1}{\partial r} - w_1\frac{\partial u}{\partial r} \right)\bigg|_{r=\varepsilon} \sin\theta d\theta = 0.$$

Со вторым интегралом дело обстоит несколько сложнее, так как функции $\left.\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon} = -\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ и $\left.\dfrac{1}{r}\right|_{r=\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ неограниченно возрастают при $\varepsilon \to 0$. Найдем предел каждого слагаемого в отдельности:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left.\left(-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\right)\right|_{r=\varepsilon}\sin\theta d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}u\Big|_{r=\varepsilon}\sin\theta d\theta.$$

Поскольку функция u непрерывна, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u\big|_{r=\varepsilon}=u\big|_{r=0}$. Считая возможным переход к пределу под знаком интеграла (А+С), получаем

$$u\Big|_{r=0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=4\pi u\Big|_{r=0}.$$

Далее, в силу ограниченности $\dfrac{\partial u}{\partial r}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left.\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=\varepsilon}\sin\theta d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon}\sin\theta d\theta=0.$$

Таким образом, предел в левой части равенства (2.143) есть просто $4\pi u\big|_{r=0}=4\pi u\left(x_0,y_0,z_0\right)$, так как при $r=0$ в качестве аргументов функции u мы получаем координаты точки A. Теперь формула (2.143) примет окончательный вид

$$u\left(x_0,y_0,z_0\right)=\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{\Gamma}\tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma. \qquad (2.144)$$

Таким образом, имеет место утверждение.

7Б16 (Теорема). Пусть функция G является функцией Грина для области Ω и $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ – произвольная точка области Ω. Тогда формула (2.144) дает решение задачи 7А7 Дирихле в пространстве.

7Б17 (Замечание). Метод Грина для задач Дирихле в двумерном случае также основывается на формуле Грина, аналогичной (2.138). Вводится гармоническая функция $w=\ln\dfrac{1}{r_{AP}}=-\ln r_{AP}$ и, если w_1 – решение задачи Дирихле для плоской области D с краевым условием $w_1\big|_{\Gamma}=w\big|_{\Gamma}$, то функция Грина для области D будет иметь следующий вид:

$$G = G(x, y; x_0, y_0) = w_1 - w = w_1 - \ln\frac{1}{r_{AP}}.$$

Поэтому формула

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma$$

дает решение задачи Дирихле на плоскости, если известна функция Грина.

Функцию $G = G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ можно интерпретировать как потенциал поля, созданного точечным зарядом, помещенным внутри заземленной замкнутой проводящей поверхности.

2.7.4. Задача Неймана

В приложениях встречается еще одна краевая задача для уравнения Лапласа – так называемая задача Неймана.

7А+Б18 (Задача Неймана). Найти функцию u, удовлетворяющую «внутри» замкнутой поверхности (или кривой) Γ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и на границе Γ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \tilde{u}_1, \tag{2.145}$$

где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к Γ, а $\tilde{u}_1$ – функция, заданная на Γ.

Отметим, что функция $\tilde{u}_1$ на поверхности (или кривой) Γ не может быть задана произвольно. Если в формуле (2.138), верной для любых функций u и v, положить $v = 1$, то $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ и $\Delta v = 0$ и формула примет вид

$$\oiint_S \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint_V \Delta u dv.$$

Поэтому для любой функции u, гармонической в области V, ограниченной поверхностью Γ, должно выполняться равенство

$$\oiint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0. \tag{2.146}$$

Следовательно, граничное значение производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на Γ – функция $\tilde{u}_1$ – удовлетворяет следующему условию:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Gamma} \tilde{u}_1 d\sigma = 0. \tag{2.147}$$

При соблюдении условия (2.147) задача Неймана всегда имеет решение. Вместе с любым решением u решением будет также $u + \text{const}$. Можно доказать, что других решений задача Неймана не имеет, т. е. что разность двух любых решений задачи Неймана постоянна. Это означает, что решение задачи Неймана единственно с точностью до аддитивной постоянной.

Задача Неймана играет важную роль в теории волновых процессов, в частности в теории электромагнетизма.

7Б19 (Метод функции Грина для задачи Неймана). Метод функции Грина может быть применен и к решению задачи Неймана на основе формулы (2.139). Однако функция Грина $\widetilde{G}$ для задачи Неймана должна быть определена иначе. По-прежнему полагаем $\widetilde{G} = w_1 - w = w_1 - \frac{1}{r_{AP}}$ для пространства и $\widetilde{G} = w_1 - w = w_1 - \ln\frac{1}{r_{AP}}$ для плоскости; однако на функцию w_1, гармоническую во всей области V, накладываем теперь краевое условие

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma} + K.$$

Применяя формулу (2.139), можно доказать, что если положить $K = \frac{4\pi}{S}$, где S – площадь поверхности Γ в пространственном случае (или $K = \frac{2\pi}{l}$, где l – длина кривой Γ в двумерном случае), то интеграл от $\frac{\partial w_1}{\partial n}$, взятый по границе Γ области V, будет равен нулю, т. е. условие (2.146) будет соблюдаться. Тогда

$$\left.\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial n}\right|_{\Gamma} = K,$$

и рассуждая так же, как в п. 2.7.3, мы придем к решению задачи Неймана в пространстве

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Gamma} \tilde{u}_1 \widetilde{G} d\sigma \tag{2.148}$$

и решению задачи Неймана на плоскости

$$u(x_0, y_0) = -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \tilde{u}_1 \widetilde{G} ds; \tag{2.149}$$

здесь функция u определяется с точностью до произвольной постоянной.

7А+Б20 (Замечание). Задачу Дирихле часто называют *первой краевой задачей* для уравнения Лапласа, а задачу Неймана – *второй краевой задачей*. Рассматривается еще *третья краевая задача*: найти функцию u, удовлетворяющую внутри замкнутой поверхности (или кривой) Γ уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и на границе Γ условию

$$\tilde{\alpha} \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma} + \tilde{\beta} u\big|_{\Gamma} = \tilde{\gamma},$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ – функции, заданные на Γ. Очевидно, что задачи Дирихле и Неймана являются частными случаями этой задачи.

2.8. Заключение. Корректность постановки задач математической физики

Уравнения гиперболического и параболического типов возникают чаще всего при изучении *процессов, протекающих во времени* (мы рассматривали уравнения колебаний, распространения тепла, диффузии). В одномерном случае всегда участвовала одна координата x и время t.

Для задач, приводящих к таким уравнениям, дополнительные условия разделяются на начальные и краевые.

Начальные условия состоят в задании при $t = 0$ значений искомой функции u и ее производной (в гиперболическом случае) или только значений самой функции (в параболическом случае).

Краевые условия для этих задач заключаются в том, что указываются значения неизвестной функции $u(x, t)$ на концах интервала изменения координаты (в задаче о колебаниях струны это концы струны, в задаче о линейной теплопроводности это концы стержня и т. д.).

Если процесс протекает в бесконечном интервале изменения координаты x (бесконечная струна, бесконечный стержень), то краевые условия отпадают и получается задача только с начальными условиями (*задача Коши*).

Если ставится задача для конечного интервала, то должны быть заданы и начальные, и краевые условия. Тогда говорят о *смешанной задаче*.

Уравнения эллиптического типа возникают обычно при исследовании *стационарных процессов*. Время t в эти уравнения не входит, и независимые переменные являются координатами точки. Такими оказываются уравнения стационарного температурного поля, электростатического поля и уравнения многих других физических процессов.

Для задач такого типа ставятся только краевые условия, т. е. указывается поведение неизвестной функции на контуре области. Это может быть задачей Дирихле, когда заданы значения самой функции; задачей Неймана, когда заданы значения нормальной производной искомой функции, и, наконец, задачей, когда на контуре задана линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

В основных задачах математической физики именно физические соображения «подсказывают», какие дополнительные условия следует поставить в той или иной задаче, чтобы получить единственное ее решение, отвечающее характеру изучаемого процесса.

Все выведенные уравнения носят идеализированный характер, т. е. отражают лишь наиболее существенные черты процесса. Функции, входящие в начальные и краевые условия, в физических задачах определяются по экспериментальным данным и могут считаться известными лишь приближенно. Поэтому требуются гарантии, что решения задачи при приближенных исходных данных будут близки к тем решениям, которые получились бы при точных исходных данных. Таким образом, важно, *чтобы малые изменения данных задачи вызывали лишь малые изменения в ее решении во всей области, в которой эти решения рассматриваются*. В этом случае говорят *об устойчивости задачи относительно начальных и краевых условий* или о том, что задачи *поставлены корректно*.

Все рассмотренные задачи принадлежат к типу задач, имеющих единственное решение, устойчивое относительно исходных данных, и, таким образом, *поставлены корректно*.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРАКТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

3

3.1. Понятие об уравнениях с частными производными

Теоретический минимум

Общее (неразрешенное) дифференциальное уравнение с частными производными (ДУ с ЧП) первого порядка для одной неизвестной функции $z = z(x_1, ..., x_n)$ *n независимых переменных* $x_1, ..., x_n$ имеет вид

$$F\left(x_1, ..., x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь F – заданная функция $2n+1$ аргумента. *Решением* (*интегралом*) этого дифференциального уравнения (3.1) называется любая функция $z = \psi(x_1, ..., x_n)$, непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega(x_1, ..., x_n)$ и обращающая в этой области соотношение (3.1) в тождество. Такое решение называют *регулярным*, а график решения – интегральной поверхностью этого ДУ.

ДУ с ЧП первого порядка, *разрешенное относительно одной из производных* (нормальная или каноническая форма уравнения), имеет следующий вид:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, ..., y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial y_n}\right), \tag{3.2}$$

где f – заданная функция $2n+2$ аргументов; независимые переменные обозначены теперь через $x, y_1, ..., y_n$; искомой является функция $z = z(x, y_1, ..., y_n)$.

Решение ДУ с ЧП, содержащее произвольные линейно независимые функции, число которых равно порядку уравнения и которые описывают все регулярные решения при соответствующем подборе произвольных функций, называют *общим решением уравнения*. Решение, получаемое из общего при замене произвольных функций конкретными, называют *частным*.

При решении прикладной (физической) задачи обычно находят частное решение, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из физического смысла задачи.

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции z и ее производных.

Каждое ДУ с ЧП первого порядка находится в тесной связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, называемой системой характеристических уравнений.

Рассмотрим ДУ первого порядка $X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z$, где $X=X(x,y,z)$, $Y=Y(x,y,z)$, $Z=Z(x,y,z)$, и связанную с этим уравнением систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$, называемую системой (характеристик) характеристических уравнений.

Пусть $\omega_1(x,y,z)=C_1$ и $\omega_2(x,y,z)=C_2$ – два линейно независимых интеграла системы характеристик.

Тогда общий интеграл исходного ДУ имеет вид $\Phi\left[\omega_1(x,y,z),\omega_2(x,y,z)\right]=0$, где $\Phi(\omega_1,\omega_2)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Практический минимум

<u>1А1.</u> Найти функцию $z=z(x,y)$, удовлетворяющую ДУ $\frac{\partial z}{\partial x}=7$.

Интегрируя, получим общее решение в виде $z=7x+\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция.

<u>1А2.</u> Решить уравнение $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y+2$, где $z=z(x,y)$.

Дважды интегрируя по y, получим $\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2+2y+\varphi(x)$, откуда $z=y^3+y^2+y\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции.

1А+Б3. Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Введем обозначения $\dfrac{\partial u}{\partial x} = v,\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Тогда уравнение примет вид $v'_y + av = 0$. Разделяя переменные, получим $\dfrac{dv}{v} = -ady.$ Интегрируем:

$$\ln v + \ln C_1(x) = -ay \text{ или } C_1(x)v = e^{-ay} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = v = \frac{1}{C_1(x)}e^{-ay} \Rightarrow u(x,y) = \int \frac{1}{C_1(x)}e^{-ay}dx + C_2(y) =$$

$$= e^{-ay}\int C(x)dx + C_2(y) = = e^{-ay}\tilde{C}(x) + C_2(y).$$

1А4. Найти общий интеграл уравнения $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

Рассмотрим систему уравнений $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$. Решая уравнение $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, получим $\dfrac{y}{x} = C_1$; решение уравнения $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}$ есть $\dfrac{z}{x} = C_2$. Общий интеграл заданного уравнения имеет следующий вид: $\Phi\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right) = 0$ или, разрешив относительно $\dfrac{z}{x}$, если это возможно, получим $\dfrac{z}{x} = \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, т. е. $z = x\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где ψ – произвольная функция.

1А+Б5. Найти общий интеграл уравнения $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Запишем систему уравнений $\dfrac{dx}{x^2 + y^2} = \dfrac{dy}{2xy} = \dfrac{dz}{0}$. Воспользовавшись свойством пропорции, представим уравнение $\dfrac{dx}{x^2 + y^2} = \dfrac{dy}{2xy}$ в виде

$$\frac{dx+dy}{x^2+y^2+2xy}=\frac{dx-dy}{x^2+y^2-2xy}$$

или

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2}.$$

Интегрируя, получим

$$-\frac{1}{x+y}=-\frac{1}{x-y}+C,\ \ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=C,\ \ \frac{2y}{x^2-y^2}=C.$$

Последнее равенство можно переписать в виде $\dfrac{y}{x^2-y^2}=C_1$.

Второе уравнение системы $dz=0$. Отсюда $z=C_2$.

Общий интеграл имеет вид $\Phi\left(\dfrac{y}{x^2-y^2},\ z\right)=0$, или, разрешив относительно z (если возможно), $z=\psi\left(\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

<u>1А6.</u> Показать, что функция $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции, является решением уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi+x\varphi'+y\psi',\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi'+\varphi'+x\varphi''+y\psi''=2\varphi'+x\varphi''+y\psi'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi'+x\varphi''+\psi'+y\psi'',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi'+\psi+y\psi',\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\psi'+x\varphi''+y\psi''$$

и подставим найденные выражения в уравнение

$$2\varphi'+x\varphi''+y\psi''-2(\varphi'+x\varphi''+\psi'+y\psi'')+2\psi'+x\varphi''+y\psi''\equiv 0.$$

Таким образом, функция u является решением данного уравнения.

<u>1А7.</u> Найти функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую ДУ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 7x - 2y$ и начальным условиям $z(1, y) = \frac{1}{6} - y$; $\frac{\partial z(1, y)}{\partial x} = \frac{7}{2} - 2y$.

Интегрируя по x, получим $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{7}{2}x^2 - 2yx + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – произвольная функция. Используя второе из начальных условий, определим функцию $\varphi(y)$: $\frac{\partial z(1, y)}{\partial x} = \frac{7}{2} - 2y + \varphi(y) = \frac{7}{2} - 2y$, откуда $\varphi(y) = 0$, и, таким образом, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{7}{2}x^2 - 2yx$.

Проинтегрируем полученное уравнение по x: $z = \frac{7}{6}x^3 - yx^2 + {} + \psi(y)$. Тогда, используя первое из начальных условий, определим функцию $\psi(y)$:

$$z(1, y) = \frac{1}{6} - y = \frac{7}{6} - y + \psi(y),$$

откуда $\psi(y) = -1$.

Окончательно получим: $z = \frac{7}{6}x^3 - yx^2 - 1$.

Задания для самостоятельной работы

<u>1А8.</u> Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$.

Ответ: $u(x, y) = xy + C_1(x) + C_2(y)$.

<u>1А9.</u> Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^4 z}{\partial^2 x \partial^2 y} = 0$.

Ответ: $z(x, y) = xC_1(y) + C_2(y) + yC_3(x) + C_4(x)$.

<u>1А10.</u> Найти общее решение уравнения $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x^2 + xy + y^2$.

Ответ: $u(x, y) = \frac{x^3 y^2}{6} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{xy^4}{12} + C_1(y) + yC_2(x) + C_3(x)$.

1А11. Найти общий интеграл уравнения $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2xy.$

Ответ: $\Phi\left(x^2-y^2,\ x^2+\dfrac{z^2}{2}\right)=0.$

1А12. Показать, что функция $u=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции, является решением уравнения $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

1А13. Убедиться, что функция $u=y\varphi(\cos(x-y))$ является решением уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y}.$

1А+Б14. Найти общее решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+by\dfrac{\partial u}{\partial x}=0.$

Индивидуальные задания

Найти функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4-x^2-y^2,\ u(1,y)=1\dfrac{11}{12}-\dfrac{y^2}{2};\ \dfrac{\partial u(1,y)}{\partial x}=2\dfrac{1}{2}-y^2.$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4-x^2y^2,\ u(x,1)=2-\dfrac{x^2}{12};\ \dfrac{\partial u(x,1)}{\partial y}=4-\dfrac{x^2}{3}.$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2xy,\ u(1,y)=\dfrac{1}{2}+y^2-\dfrac{y^4}{12};\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}+x^2-x.$
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3\left(x^2-y^2\right),\ u(1,y)=y;\ u(x,1)=-x.$
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6x^2y^2,\ u(x,1)=\dfrac{x^2}{2};\ \dfrac{\partial u(x,1)}{\partial y}=2x^2.$
6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2y^2+1,\ u(1,y)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{y^2}{2};\ \dfrac{\partial u(1,y)}{\partial x}=1+4y^2.$
7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1+2xy,\ u(0,y)=1;\ u(x,0)=1.$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 4y,\ u(1, y) = 1 - 2y;\ \dfrac{\partial u(1, y)}{\partial x} = 3 + 4y.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 - x^2 + y^2,\ u(0, y) = -1;\ \dfrac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 1.$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y^2 + x^2 + 1,\ u(x, 0) = \dfrac{1}{2};\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0.$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2xy,\ u(0, y) = y;\ u(x, 0) = \dfrac{1}{2}x^2.$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y^2x^2 + y - x,\ u(x, 0) = x;\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2(x + y),\ u(0, y) = y;\ u(x, 0) = x.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{2x} + e^{2y},\ u(0, y) = -\dfrac{3}{4};\ \dfrac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \dfrac{1}{2}.$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(y + 2x),\ \ u(x, 0) = 1;\ \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \sin 2x.$

3.2. Классификация и приведение к каноническому виду ДУ с ЧП второго порядка с двумя независимыми переменными

Теоретический минимум

Уравнение

$$a(x, y)u''_{xx} + 2b(x, y)u''_{xy} + c(x, y)u''_{yy} = F\left(x, y, u, u'_x, u'_y\right), \qquad (3.3)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ – дважды дифференцируемые функции, не обращающиеся одновременно в нуль, принадлежит:

1) *гиперболическому типу*, если $b^2 - ac > 0$;
2) *параболическому типу*, если $b^2 - ac = 0$;
3) *эллиптическому типу*, если $b^2 - ac < 0$.

Если выражение $b^2 - ac$ в данной области меняет знак, то уравнение (3.3) называется уравнением смешанного типа.

Для каждого типа ДУ (3.3) найдется невырожденное преобразование $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$, при котором уравнение преобразуется к каноническому виду этого типа.

Для того чтобы привести уравнение (3.3) к каноническому виду, составляем уравнение (называемое уравнением характеристик уравнения (3.3))

$$a(dy)^2-2b\,dx\,dy+c(dx)^2=0, \tag{3.4}$$

которое распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$a\,dy-\left(b+\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0,\quad a\,dy-\left(b-\sqrt{b^2-ac}\right)dx=0, \tag{3.5}$$

и находим их общие интегралы.

Уравнения гиперболического типа: $b^2-ac>0$.

Общие интегралы $\varphi(x,y)=C_1$, $\psi(x,y)=C_2$ уравнений (3.5) будут вещественными и различными, они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Вводя вместо (x,y) новые независимые переменные (ξ,η)

$$\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y),$$

приведем уравнение (3.3) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right).$$

Уравнения параболического типа: $b^2-ac=0$.

Уравнения (3.5) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (3.4): $\varphi(x,y)=C$.

В этом случае, полагая

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=x\end{cases}\text{(в случае, когда } \frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0)$$

или

$$\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=y\end{cases}\text{(в случае, когда } \frac{\partial\varphi}{\partial x}\neq 0),$$

приведем уравнение (3.3) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_4\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

Уравнения эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$.

Общие интегралы уравнений (3.5) – комплексно сопряженные, они определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть далее общий интеграл первого из уравнений (3.5) имеет вид

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – вещественные функции.

Тогда, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \psi(x, y),$$

приведем уравнение (3.3) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_5\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right).$$

В случае эллиптического уравнения считаем, что коэффициенты a, b и c – суть аналитические функции.

Рассмотренный метод приведения уравнения (3.3) к каноническому виду и решение полученного уравнения этим методом носит название метода характеристик.

Различие в типах уравнений второго порядка определяется различием физических процессов, описываемых этими уравнениями. Уравнения, соответствующие стационарным процессам, являются уравнениями эллиптического типа; уравнение нестационарной теплопроводности является уравнением параболического типа; волновое уравнение относится к гиперболического типу.

Практический минимум

2А1. Определить тип уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в точках $M(1, 2)$ и $N(1, 0)$. Найти параболическую линию уравнения.

Здесь $a=1,\ b=y,\ c=x+1,\ b^2-ac=y^2-(x+1)$.

В точке $M(1,2)$ $b^2-ac=4-(1+1)=2>0$ – уравнение гиперболического типа.

В точке $N(1,0)$ $b^2-ac=0-(1+1)=-2<0$ – уравнение эллиптического типа.

Параболическая линия уравнения $b^2-ac=0$, т. е. $y^2-(x+1)=0$ или $y^2=x+1$.

2А+Б2. Привести к каноническому виду уравнение

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+5u=0.$$

Здесь $a=3,\ b=-5,\ c=3,\ b^2-ac=25-9=16>0,$ и поэтому это уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости. Составляя уравнение характеристик: $3(dy)^2+10dxdy+3(dx)^2=0$ и решая его: $dy_{1,2}=\dfrac{-5dx\pm\sqrt{(-5dx)^2-9(dx)^2}}{3}$, получим два дифференциальных уравнения $dy=-\dfrac{1}{3}dx$ и $dy=-3dx$, интегрируя которые, найдем: $y=-\dfrac{1}{3}x+C_1,\ y=-3x+C_2$. Уравнения двух семейств характеристик:

$$\begin{cases} y+\dfrac{1}{3}x=C_1 \\ y+3x=C_2. \end{cases}$$

С помощью характеристик сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi=y+\dfrac{1}{3}x, \\ \eta=y+3x, \end{cases}$$

якобиан перехода $\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\dfrac{1}{3}-3=-2\dfrac{2}{3}\neq 0.$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{3}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{1}{3}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставим в рассматриваемое ДУ с ЧП найденные для вторых производных выражения. Тогда получим

$$3\left(\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-10\left(\frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{10}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+$$

$$+\;3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}+5u=0,$$

$$-\frac{64}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}+5u=0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=\frac{1}{64}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{9}{64}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{15}{64}u,$$

т. е. уравнение приведено к каноническому виду.

2А+Б3. Привести к каноническому виду следующее уравнение:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Здесь $a=4,\ b=2,\ c=1,\ b^2-ac=4-4=0$. Следовательно, это уравнение параболического типа во всех точках плоскости. Составим уравнение характеристик: $4(dy)^2-4dxdy+(dx)^2=0$, решим его: $dy=\frac{dx}{2}$. Интегрируя, получим $y-\frac{1}{2}x=C$. Найденная функция имеет непрерывные частные производные, и ее первые производные не обращаются одновременно в нуль. Используя замену переменных по формулам

$$\begin{cases}\xi=-\frac{1}{2}x+y,\\ \eta=x,\end{cases}$$

выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}.$$

Подставим в рассматриваемое ДУ найденные для вторых производных выражения

$$4\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)+4\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+6\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}+6\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,$$

откуда

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{11}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-\frac{11}{8}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

т. е. уравнение приведено к каноническому виду.

2А+Б4. Привести к каноническому виду уравнение

$$5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Здесь $a=5,\ \ b=2,\ \ c=1,\ \ b^2-ac=4-5=-1$. Следовательно, это уравнение эллиптического типа во всех точках плоскости. Составим уравнение характеристик: $5(dy)^2-4dxdy+(dx)^2=0$ и решим его: $dy=\frac{2}{5}dx\pm i\frac{1}{5}dx$. Интегрируя $dy=\frac{2}{5}dx+i\frac{1}{5}dx$, получим $\frac{2}{5}x-y+i\frac{1}{5}x=C$.

Выполним замену переменных по формулам

$$\begin{cases}\xi=\frac{2}{5}x-y,\\ \eta=\frac{1}{5}x.\end{cases}$$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{2}{5}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}.$$

Подставим в рассматриваемое ДУ с ЧП найденные для вторых производных выражения. Тогда получим

$$5\left(\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{4}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{25}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+4\left(-\frac{2}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Преобразуем

$$\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{8}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{4}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

$$\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{7}{5}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{5}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=-7\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

т. е. уравнение приведено к каноническому виду.

Задания для самостоятельной работы

2А5. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x+2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Построить линию параболичности.

2А6. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$\left(1-x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Построить линию параболичности.

2А+Б7. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=y-3x,\\ \eta=y-x,\end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}-\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

б) $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=\dfrac{y^2}{2}-x,\\ \eta=x,\end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{1}{2(\xi+\eta)}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0.$

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=y+x^2,\\ \eta=y,\end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\dfrac{1}{2(\xi-\eta)}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0.$

г) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=-ax+y,\\ \eta=x,\end{cases}\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

д) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x,\end{cases}\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$

е) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Ответ: $\begin{cases}\xi=2x-y,\\ \eta=x,\end{cases}\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=0.$

Индивидуальные задания

Определить тип уравнения в точках M и N. Найти и построить параболическую линию уравнения. Указать область, в которой уравнение имеет гиперболический тип:

1. $\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(2,4),\ N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).$

2. $\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}-2y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,$ $M(0,1),\ N(2,0).$

3. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2(y+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ M(-5,1),\ N(1,0).$

4. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(0,1),\ N(1,3).$

5. $(3-2x+y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ M(0,1),\ N(2,0).$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ M(1,1),\ N(3,7).$

7. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sqrt{(y+1)}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ M(-2,1),\ N(0,0).$

8. $\cos x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sqrt{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(0,1),\ N\left(\dfrac{\pi}{3},0\right).$

9. $\sqrt{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sqrt{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+4y\dfrac{\partial u}{\partial y}+2u=0,\ M(1,0),$ $N(2,4).$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(y^2-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(0,0),\ N(3,2).$

11. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(0,1),\ N(1,3).$

12. $\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sqrt{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(1-x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ M(0,0),\ N(2,1).$

13. $\left(4-x^2-y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{2xy}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0,$ $M(0,0),\ N(3,4).$

14. $(4-x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(1-y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(2,-4),$ $N\left(1,\dfrac{1}{2}\right).$

15. $\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\sqrt{y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-\cos y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ M(0,1),\ N\left(\dfrac{\pi}{6},0\right).$

3.3. Начально-краевые задачи для ДУ с ЧП

Теоретический минимум

Для того чтобы из бесчисленного множества решений ДУ выделить частное решение, описывающее конкретный физический процесс, необходимо задать некоторые условия. Обычно эти условия следуют из физической постановки задачи и физического смысла искомого решения.

Для ДУ второго порядка рассматриваются три типа начально-краевых задач: задача Коши, граничная задача, смешанная задача.

1. *Задача Коши* (начальная) ставится для уравнений гиперболического и параболического типов в случае, когда область совпадает со всем пространством (граничные условия отсутствуют, задаются только начальные условия). Например, задача Коши для волнового уравнения в пространстве: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,z,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

и начальным условиям

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x,y,z).$$

2. *Краевая, или граничная, задача* ставится для уравнений эллиптического типа в том случае, если задаются граничные условия. По виду граничных условий различают краевые задачи первого, второго, третьего родов и т. п. Например, для эллиптического уравнения $\Delta u = 0$ краевая задача первого рода ставится так: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа в некоторой пространственной области D и граничным условиям $u(x,y,z)\big|_{\Gamma} = f(x,y,z)$, т. е. принимающую на границе Г области D значения $f(x,y,z)$.

3. *Смешанная задача* ставится для уравнений гиперболического и параболического типов, когда рассматриваемая область D исследования ограничена, задаются начальные и граничные условия. Например, для волнового уравнения смешанная задача ставится следующим образом: найти дважды дифференцируемую функцию $u(x,y,z,t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

начальным условиям

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0} = f(x,y,z),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$$

и граничным условиям $u\big|_{\Gamma} = 0$.

Метод характеристик – метод решения дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на решении некоторой системы обыкновенных ДУ (уравнений характеристик), определяемой по виду исходного ДУ с ЧП. С помощью решений характеристик строится замена переменных, после чего исходное ДУ с ЧП упрощается и решается стандартными методами интегрирования. Обычно метод характеристик применяется к решению ДУ с ЧП первого порядка, но он может быть применен и к решению гиперболических уравнений более высокого порядка.

Практический минимум

3А+Б1. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, удовлетворяющее начальным условиям $u\big|_{x=0}=y^2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$.

Приведем уравнение к каноническому виду. Здесь $a=1$, $2b=3$, $c=2$, $b^2-ac=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}>0$. Следовательно, это уравнение гиперболического типа во всех точках плоскости. Составим уравнение характеристик: $(dy)^2-3dxdy+2(dx)^2=0$ и решим его: $dy_{1,2}=\frac{3dx\pm\sqrt{9(dx)^2-8(dx)^2}}{2}$. Получим два дифференциальных уравнения $dy=dx$ и $dy=2dx$, интегрируя которые, найдем: $y=x+C_1$, $y=2x+C_2$. Уравнения двух семейств характеристик:

$$\begin{cases} y-x=C_1, \\ y-2x=C_2. \end{cases}$$

С помощью характеристик сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi=y-x, \\ \eta=y-2x. \end{cases}$$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}-2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(-1)-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}(-1)-2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+3\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)+$$

$$+\,2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)=0$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Общее решение этого ДУ имеет вид $u=u(\xi,\eta)=$ $=\int G(\xi)d\xi+h(\eta)=g(\xi)+h(\eta)$, где g и h – произвольные дважды дифференцируемые функции. Найдем их. Возвращаемся к старым переменным: $u=g(y-x)+h(y-2x)$ и, используя начальные данные, имеем:

$$y^2=u\big|_{x=0}=g(y)+h(y),$$

$$0=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-g'(y)-2h'(y),$$

$$\begin{cases} g(y)+h(y)=y^2, \\ g'(y)+2h'(y)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(y)+h(y)=y^2, \\ g(y)+2h(y)=C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(y)=-C+2y^2, \\ h(y)=C-y^2. \end{cases}$$

Тогда искомое решение будет иметь вид

$$u(x,y)=-C+2(y-x)^2+C-(y-2x)^2=2y^2-4xy+2x^2-$$
$$-y^2+4xy-4x^2=y^2-2x^2.$$

Задания для самостоятельной работы

<u>3Б2.</u> Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ удовлетворяющее начальным условиям $u\big|_{y=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=2x.$

Ответ: $u(x,y)=2xy-\dfrac{5}{6}y^2.$

<u>3Б3.</u> Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\quad x>0,$ удовлетворяющее начальным условиям $u\big|_{y=0}=x,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0.$

Ответ: $u(x,y)=\dfrac{1}{4}y^2+x.$

Индивидуальные задания

Привести к каноническому виду ДУ:

1. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$
2. $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

6. $5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}+2u=0.$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=0.$

10. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

11. $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2u=0.$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-10\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+25\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}-4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+10\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+7u=0.$

15. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+5\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

3.4. Уравнения гиперболического типа

Теоретический минимум

Метод Даламбера. Одномерное волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $a=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$, T – натяжение (сила, действующая на струну перпендикулярно оси абсцисс и рассчитанная на единицу длины), ρ – линейная плотность струны, описывает свободные колебания однородной струны. Это уравнение гиперболического типа, оно имеет две действительные характеристики: $x - at = C_1$, $x + at = C_2$. Функция $u(x,t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at)$ является решением уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если θ_1 и θ_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции. Это решение называется *решением Даламбера*.

В случае, когда струна бесконечна $-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty$ и заданы начальные условия $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$ (начальное положение), $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$ (начальная скорость), то искомое решение имеет вид (формула Даламбера):

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\, d\tau. \qquad (3.6)$$

Формула (3.6) выражает классическое решение одномерного волнового уравнения в предположении, что $\varphi(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\psi(x)$ – до первого.

Задача Коши поставлена корректно.

Метод Даламбера может быть использован и для решения задачи о колебаниях струны, закрепленной на одном конце, т. е. для $x \in [0, l]$, где l достаточно велико, а закрепленный конец струны находится в начале координат. Такую струну называют полубесконечной. При решении задачи о ее колебаниях, кроме начальных условий, нужно задавать условие на закрепленном конце: $u(0,t) = g(t)$.

Решение уравнения колебания струны, закрепленной на концах, методом разделения переменных (методом Фурье). Метод разделения переменных (метод Фурье) в тех случаях, когда применим, позволяет расщепить ДУ с ЧП для функции n независимых переменных на n обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого искомую функцию представляют в виде произведения. Рассмотрим суть данного метода на конкретном примере.

Пусть струна длиной l расположена на участке $0 \le x \le l$ и закреплена на концах. Если в начальный момент времени $t = 0$ струну вывести из положения равновесия, она будет совершать свободные колебания, которые описываются уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Поскольку концы струны закреплены, то $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$ – это граничные условия для данной задачи. Начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x)$ дают положение точек струны, т. е. ее форму, и их скорости в момент времени $t = 0$.

Пусть требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), u(0,t) = 0, u(l,t) = 0.$$

Согласно методу Фурье, решение ищем в виде произведения функции $X(x)$, зависящей только от x, и функции $T(t)$, зависящей только от t, каждая из которых впоследствии оказывается решением обыкновенного ДУ (см. с. 38–42). В результате представим решение в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin\frac{ak\pi}{l} t \right) \sin\frac{k\pi}{l} x, \quad (3.7)$$

где

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^1 \varphi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x\, dx, \qquad b_k = \frac{2}{ak\pi} \int_0^1 \psi(x) \sin\frac{k\pi}{l} x\, dx. \quad (3.8)$$

Решение

$$u_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{ak\pi}{l} t + b_k \sin\frac{ak\pi}{l} t \right) \sin\frac{k\pi}{l} x = A_k \sin\left(\frac{ak\pi}{l} t + \varphi_k \right) \sin\frac{k\pi}{l} x$$

называется собственным (здесь $\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k$, $\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin\varphi_k$,

$\frac{b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \cos\varphi_k$).

Физический смысл собственного решения $u_k(x,t)$: каждая фиксированная точка струны x совершает гармонические колебания с частотой $\frac{ak\pi}{l}$ и постоянной амплитудой $A_k \sin\frac{k\pi}{l}x$. Другими словами, решение описывает стоячую волну. Частоты различных возможных колебаний кратны величине $\frac{a\pi}{l}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, которая определяется длиной l струны, натяжением T и плотностью ρ материала, из которого сделана струна.

Практический минимум

4А1. Используя формулу Даламбера, найти форму бесконечной струны, определяемой уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях $u(x,0)=\sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos x$ в момент времени $\frac{\pi}{2}$.

Исходя из условий задачи $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=\cos x$, найдем форму струны в момент времени t:

$$u(x,t)=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\cos\tau d\tau=\sin x\cos t+\frac{1}{2}\sin\tau\Big|_{x-t}^{x+t}=$$

$$=\sin x\cos t+\sin t\cos x=\sin(x+t).$$

Полагая $t=\frac{\pi}{2}$, получим $u\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x.$

4Б2. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент форму параболы $u=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$ (рис. 3.1). Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют.

Здесь $\varphi(x)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$, $\psi(x)=0$. Найдем коэффициенты ряда, определяющего решение уравнения колебания струны:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=\frac{8h}{l^3}\int_0^l\left(lx-x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\qquad b_k=0.$$

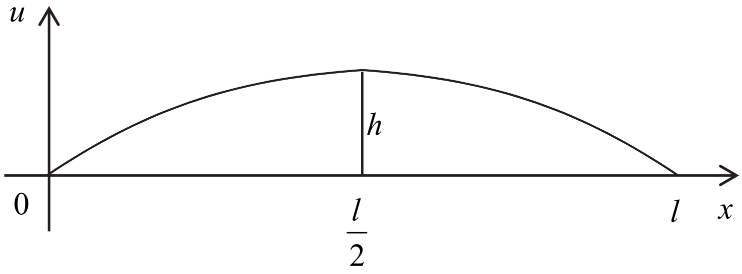

Рис. 3.1

Для нахождения коэффициента a_k дважды проинтегрируем по частям:

$$u_1 = lx - x^2,\ dv_1 = \sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ du_1 = (l-2x)dx,\ v_1 = -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l},$$

$$a_k = -\frac{8h}{l^3}\left(lx - x^2\right)\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l + \frac{8h}{k\pi l^2}\int\limits_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

т. е.

$$a_k = \frac{8h}{k\pi l^2}\int\limits_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$u_2 = l - 2x,\ dv_2 = \cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ du_2 = -2dx,\ v_2 = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$a_k = \frac{8h}{k^2\pi^2 l}(l-2x)\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l + \frac{16h}{k^2\pi^2 l}\int\limits_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx =$$

$$= -\frac{16h}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l = -\frac{16h}{k^3\pi^3}(\cos k\pi - 1) = \frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right].$$

Подставляя выражения для a_k и b_k в равенство (3.7), получим

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Если $k = 2n$, то $1-(-1)^k = 0$, а если $k = 2n+1$, то $1-(-1)^k = 2$; поэтому окончательно имеем

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Задания для самостоятельной работы

4А3. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при начальных условиях:

а) $u(x,0)=\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$

Ответ: $u(x,t)=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}.$

б) $u(x,0)=\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{x}{1+x^2}.$

Ответ: $u(x,t)=\frac{x\sin x\cos at-at\cos x\sin at}{x^2-a^2t^2}+\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1-(x-at)^2}.$

в) $u(x,0)=\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sin x.$

Ответ: $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{x+t}{1+(x+t)^2}+\frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right]+\sin x\sin t.$

г) $u(x,0)=\frac{x}{1+x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\cos x.$

Ответ: $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x+t)^2}+\frac{1}{1+(x-t)^2}\right]+\sin x\cos t.$

д) $u(x,0)=e^{-x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{x}{1+x^2}.$

Ответ: $u(x,t)=e^{-\left(x^2+t^2\right)}\cdot \mathrm{ch}\,2xt+\frac{1}{4a}\ln\frac{1+(x+t)^2}{1-(x-t)^2}.$

4Б4. Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, изображенной на рис. 3.2. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

Ответ: $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}.$

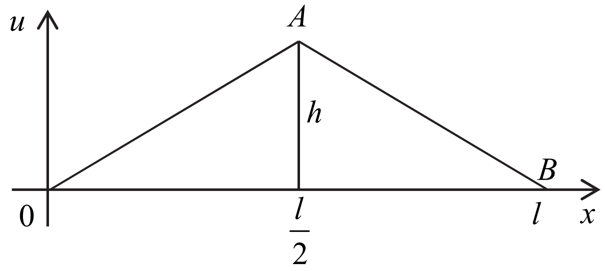

Рис. 3.2

4Б5. Пусть начальные отклонения струны, закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{cases} v_0(\text{const}) \text{ при } \left|x-\dfrac{l}{2}\right|<\dfrac{h}{2}, \\ 0 \text{ при} \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2}. \end{cases}$$

Определить форму струны для любого момента времени t.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{k\pi}{2}\sin\dfrac{k\pi h}{2l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}$.

4Б6. Струна закреплена на концах $x=0$ и $x=3$. В начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, где $O(0;0)$, $A(2;-0{,}1)$, $B(3;0)$ (рис. 3.3).

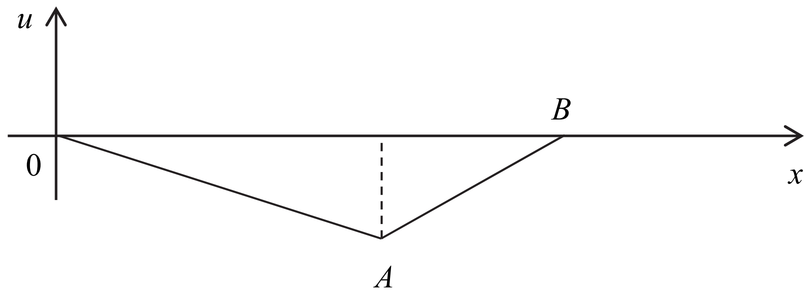

Рис. 3.3

Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

Ответ: $u(x,t)=-\dfrac{9}{10\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{2k\pi}{3}\sin\dfrac{k\pi x}{3}\cos\dfrac{k\pi at}{3}$.

4Б7. Струна, закрепленная в точках $x=0$ и $x=1$, в начальный момент имеет форму $u=h\left(x^4-2x^3+x\right)$. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости точек струны отсутствуют.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{96h}{\pi^5}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^5}\sin(2k+1)\pi x\cos(2k+1)\pi at.$

4Б8. Струна закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. Начальные отклонения точек струны равны нулю, а начальная скорость выражается формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{h} & \text{при } \left|x-\dfrac{l}{2}\right|<\dfrac{h}{2},\\ 0 \text{ при } \left|x-\dfrac{l}{2}\right|>\dfrac{h}{2}.\end{cases}$$

Найти форму струны для любого момента времени t.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{2}\cos\dfrac{k\pi h}{l}}{l^2-k^2h^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\cos\dfrac{k\pi at}{l}.$

4А+Б9. Найти отклонение $u(x,t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной струны, если в начальный момент струна имела форму $\dfrac{1}{8}\sin\dfrac{3\pi x}{l}$, а начальные скорости отсутствовали.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{1}{8}\cos\dfrac{3a\pi t}{l}\sin\dfrac{3\pi}{l}x.$

4А+Б10. Найти отклонение $u(x,t)$ от положения равновесия закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной горизонтальной струны, если в начальный момент точки струны находились в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{5\pi x}{l}$.

Ответ: $\left(u(x,t)=\dfrac{1}{15a\pi}\sin\dfrac{5a\pi t}{l}\sin\dfrac{5\pi}{l}x\right).$

4Б11. Найти колебания закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$ однородной струны, находящейся в положении равновесия, если в начальный момент времени ударом молоточка в точке $x=\dfrac{l}{3}$ ей сообщается постоянная скорость $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0 & \text{при } \left|x-\dfrac{l}{3}\right|<\dfrac{\pi}{2h}, \\ 0 & \text{при } \left|x-\dfrac{l}{3}\right|>\dfrac{\pi}{2h}, \end{cases}$

где $\dfrac{\pi}{h}$ – ширина молоточка.

Ответ: $u(x,t)=\dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\sin\dfrac{k\pi}{3}\sin\dfrac{k\pi^2}{2lh}\sin\dfrac{k\pi at}{l}\sin\dfrac{k\pi x}{l}$.

Индивидуальные задания

Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму $u(x,0)$, точкам струны сообщена начальная скорость u_t. Найти отклонение струны для любого момента времени:

1. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=x,\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.$

2. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<\dfrac{3}{2},\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x\left(x-\dfrac{3}{2}\right),\quad u_t(x,0)=x,\ u(0,t)=0,\ u\left(\dfrac{3}{2},t\right)=0.$

3. $u_{tt}=4u_{xx},\quad 0<x<2,\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=x-2,\ u(0,t)=0,\ u(2,t)=0.$

4. $u_{tt}=9u_{xx},\quad 0<x<3,\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x(x-3),\quad u_t(x,0)=x-3,\ u(0,t)=0,\ u(3,t)=0.$

5. $u_{tt}=\dfrac{1}{16}u_{xx},\quad 0<x<\dfrac{1}{4},\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x\left(x-\dfrac{1}{4}\right),\quad u_t(x,0)=x,\quad u(0,t)=0,\ u\left(\dfrac{1}{4},t\right)=0.$

6. $u_{tt}=\dfrac{4}{9}u_{xx},\quad 0<x<1,\ 0<t<\infty,$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=x-1,\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0.$

7. $u_{tt} = 16u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-2), \quad u_t(x,0) = x, \quad u(0,t) = 0, \ u(2,t) = 0.$

8. $u_{tt} = 36u_{xx}, \quad 0 < x < 5, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-5), \quad u_t(x,0) = x-5, \ u(0,t) = 0, \ u(5,t) = 0.$

9. $u_{tt} = \dfrac{1}{4}u_{xx}, \quad 0 < x < \dfrac{3}{2}, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x\left(x - \dfrac{3}{2}\right), \quad u_t(x,0) = x, \ u(0,t) = 0, \ u\left(\dfrac{3}{2}, t\right) = 0.$

10. $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u_t(x,0) = x-1, \ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0.$

11. $u_{tt} = 25u_{xx}, \quad 0 < x < 4, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-4), \quad u_t(x,0) = x, \ u(0,t) = 0, \ u(5,t) = 0.$

12. $u_{tt} = \dfrac{1}{81}u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-3), \quad u_t(x,0) = x-3, \ u(0,t) = 0, \ u(3,t) = 0.$

13. $u_{tt} = \dfrac{9}{4}u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-2), \quad u_t(x,0) = x, \ u(0,t) = 0, \ u(2,t) = 0.$

14. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u_t(x,0) = x-1, \ u(0,t) = 0, \ u(1,t) = 0.$

15. $u_{tt} = \dfrac{16}{9}u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \ 0 < t < \infty,$

$u(x,0) = x(x-3), \quad u_t(x,0) = x, \ u(0,t) = 0, \ u(3,t) = 0.$

3.5. Уравнения параболического типа

Теоретический минимум

Метод разделения переменных решения смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности. Уравнение теплопроводности относится к уравнениям параболического типа, описывающим процессы, необратимые во времени. Простейшим процессом такого типа является охлаждение бесконечного стержня. Задача заключается в следующем: в начальный момент времени

$t=0$ температура неравномерно нагретого стержня задана функцией $u(x,0)=\varphi(x)$. Требуется найти распределение температур для любого $t>0$. Будем считать, что стержень очень длинный, и можно не учитывать температурные условия на его концах. Это означает, что граничных условий нет.

При отсутствии тепловых источников температура $u(x,t)$ различных точек стержня описывается уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

В уравнении $a^2=\frac{k}{\rho\gamma}$, где k – коэффициент внутренней теплопроводности; ρ – плотность вещества, из которого изготовлен стержень; γ – теплоемкость вещества, таким образом, a^2 характеризует физические свойства тела.

Применив метод преобразования Фурье (см. с. 68–72), получаем решение уравнения в виде интеграла: $u(x,\ t)=$ $=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$

Если стержень ограничен с одной стороны, то решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=$ $=\varphi(x)$ и краевому условию $u(0,t)=\psi(t)$, выражается формулой

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{t}\psi(\eta)e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\eta)}}(t-\eta)^{-\frac{3}{2}}\,d\eta.$$

Пусть концы тонкого теплопроводящего стержня конечной длины l погружены в тающий лед, в результате чего происходит его охлаждение. Требуется найти функцию распределения температуры $u(x,t)$, которая является решением одномерного уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющим начальному $u(x,0)=\varphi(x)$, $x\in(0,l)$ и однородным граничным условиям $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$.

Решение уравнения методом разделения переменных имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{\pi kx}{l}e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t},$$

где $C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$

Решение задачи о распространении тепла в стержне, концы которого теплоизолированы (см. с. 55–60), т. е. со следующими краевыми условиями $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$, выражается формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}+a_0,$$

где $a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(x)dx.$

Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье. Алгоритм построения решения краевой задачи методом интегральных преобразований состоит в следующем:

1. Определяем интегральное преобразование по выбранным переменным искомого решения задачи и краевых условий.

2. Записываем изображение дифференциального уравнения в частных производных и краевых условий.

3. Решаем полученную задачу. Если решается одномерная задача, то получаем обыкновенное дифференциальное уравнение.

4. С помощью обратного интегрального преобразования находим решение задачи.

Распределение температуры в стержне описывается уравнением $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<+\infty$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=\varphi(x)$.

1. Находим преобразование Фурье $U(\xi,t)$ по переменной x решения $u(x,t)$, а также преобразование Фурье $F(\xi)$ начальной функции из начального условия $u(x,0)=\varphi(x)$:

$$U(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{i\xi x}dx,\ F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i\xi x}dx.$$

2. Записываем изображение Фурье уравнения теплопроводности и начального условия:

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t}=-a^2\xi^2U(\xi,t),\ U(\xi,0)=F(\xi).$$

3. Решаем задачу Коши для полученного дифференциального уравнения:

$$U(\xi,t)=F(\xi)e^{-a^2\xi^2t}.$$

4. Искомое решение $u(x,t)$ находим с помощью обратного преобразования Фурье: $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)e^{-a^2\xi^2t}e^{-i\xi x}d\xi$, или, используя теорему о свертке, $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}d\alpha.$

Практический минимум

<u>5А+Б1.</u> Концы тонкого однородного изолированного стержня длиной 3 м, начальная температура которого $\varphi(x)=x(3-x)$, поддерживаются при нулевой температуре. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

Распределение температуры в стержне описывается одномерным уравнением теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ с начальной температурой $u(x,0)=\varphi(x)=x(3-x)$.

Решая методом Фурье разделения переменных, получим

$$C_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^3x(3-x)\sin\frac{k\pi x}{3}dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x(3-x) & du=(3-2x)dx\\ dv=\sin\frac{k\pi x}{3}dx & v=-\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3x(3-x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_0^3+\frac{3}{k\pi}\int_0^3(3-2x)\cos\frac{k\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=3-2x & du=-2dx \\ dv=\cos\dfrac{k\pi x}{3}dx & v=\dfrac{3}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left(\frac{3(3-2x)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_0^3+\frac{6}{k\pi}\int_0^3\sin\frac{k\pi x}{3}dx\right)=-\frac{12}{k^2\pi^2}\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Bigg|_0^3=$$

$$=-\frac{36}{(k\pi)^3}(\cos k\pi-1)=-\frac{36}{(k\pi)^3}\left((-1)^k-1\right)=\frac{72}{(2k-1)^3\pi^3}.$$

Решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{72}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{3}e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{3}\right)^2 t}.$$

<u>5Б+С2.</u> Для бесконечного однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью с заданной начальной температурой $u(x,0)=e^{-x^2}$ рассчитать распределение температуры, описываемой уравнением $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Используя представление $u(x,t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\alpha)e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2t}}d\alpha$, получим $u(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}}d\alpha$. Выполним следующие преобразования:

$$\alpha^2+\frac{(x-\alpha)^2}{4t}=\frac{\alpha^2(4t+1)-2\alpha x+x^2}{4t}=$$

$$=\frac{\alpha^2(4t+1)-2\alpha x+\dfrac{x^2}{4t+1}+x^2-\dfrac{x^2}{4t+1}}{4t}=\frac{x^2}{4t+1}+\left(\frac{\alpha(4t+1)-x}{2\sqrt{t(4t+1)}}\right)^2.$$

Тогда

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{\alpha(4t+1)-x}{2\sqrt{t(4t+1)}}\right)^2}d\alpha.$$

В последнем интеграле сделаем замену

$$\beta=\frac{\alpha(4t+1)-x}{2\sqrt{t(4t+1)}},\ d\alpha=2\sqrt{\frac{t}{4t+1}}d\beta,$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}2\sqrt{\frac{t}{4t+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta.$$

Известно, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta^2}d\beta=\sqrt{\pi}$, поэтому окончательно получаем $u(x,t)=(4t+1)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$.

Задания для самостоятельной работы

5А3. Определить температуру в каждой точке медного стержня длиной 10 см с нетеплопроводной внешней поверхностью, если на концах стержня поддерживается температура, равная $0°\text{C}$, а начальная температура составляет $50\sin\frac{2\pi x}{l}$. Для меди известны следующие константы: $k=0{,}9\ \text{кал}\cdot\text{см}^{-1}\cdot\text{с}$, $\rho=8{,}9\ \text{г}\cdot\text{см}^{-3}$, $\gamma=0{,}094\ \text{кал}\cdot\text{г}^{-1}$.

Ответ: $u(x,t)=50\sin\frac{k\pi}{5}e^{-\left(\frac{\pi a}{5}\right)^2 t}$, $a^2=\frac{k}{\gamma\rho}\approx 1{,}07$.

5А+Б4. Начальная температура тонкого однородного изолированного стержня длиной 6 м равна $u(x,0)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 3,\\ 6-x, & 3\le x\le 6.\end{cases}$ Концы его поддерживаются при нулевой температуре. Найти температуру стержня в момент времени $t>0$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{24}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{6}e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{6}\right)^2 t}$.

5А+Б5. Для прямолинейного однородного стержня, ось которого совпадает с осью Ox, температура $u=u(x,t)$ его сечения с абсциссой x

в момент времени t при отсутствии источника тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где a – постоянная. Определить распределение температуры для любого момента времени t в стержне длиной 100 см, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)=0{,}01x(100-x)$; $u(0,0)=u(l,0)=0$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{800}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{100}e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{100}\right)^2 t}$.

5А6. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in[0,\pi]$, $t>0$ при начальном условии $u(x,t)\big|_{t=0}=\frac{\pi-2x}{4}$, $x\in[0,\pi]$ и граничных условиях $u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=\pi}=0$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin 2kx\, e^{-4k^2t}$.

5Б7. В области $0\le x\le l$, $t\ge 0$ найти решение уравнения $u'_t=a^2u''_{xx}$ при начальном условии $u(x,0)=\frac{x}{l}$ и граничных условиях $u(0,t)=0$, $u(l,t)=e^{-t}$. (Для приведения неоднородных граничных условий к однородным необходимо произвести замену $u(x,t)=v(x,t)+\frac{x}{l}e^{-t}$.)

Ответ: $u(x,\,t)=\frac{x}{l}e^{-t}+\frac{2l^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\left((k\pi a)^2-l^2\right)}\sin\frac{\pi kx}{l}\left(e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t}-e^{-t}\right)$.

5Б+С8. Определить распределение температуры в бесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, описываемое ДУ с ЧП $4\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если начальная температура $u(x,0)=e^{2x-x^2}$.

Ответ: $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{2x-x^2+t}{1+t}}$.

5Б+С9. Определить распределение температуры в бесконечном однородном стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, описываемое ДУ с ЧП $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если начальная температура $u(x,0)=xe^{-x^2}$.

Ответ: $u(x,t)=\frac{x}{\left(\sqrt{4t+1}\right)^3}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$.

5Б+С10. Решить задачу Коши $4\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0)=\sin x\, e^{-x^2}$.

Ответ: $u(x,t)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{x}{1+t}e^{-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}}$.

Индивидуальные задания

Для тонкого однородного изолированного стержня длиной l, ось которого совпадает с осью Ox, температура $u=u(x,t)$ его сечения с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности $u'_t=a^2u''_{xx}$, где a – постоянная. Определить распределение температуры для любого момента времени t, если известно начальное распределение температуры $u(x,0)$ и начальные условия:

1. $u'_t=16u''_{xx}, 0<x<3, t>0, u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}, 0\le x\le\frac{3}{2},\\ 3-x, \frac{3}{2}<x\le 3,\end{cases}$ $u(0,t)=u(3,t)=0.$

2. $u'_t=u''_{xx}, 0<x<2, t>0, u(x,0)=\begin{cases}x^2, 0\le x\le 1,\\ 2-x, 1<x\le 2,\end{cases}$ $u(0,t)=u(2,t)=0.$

3. $u'_t=25u''_{xx}, 0<x<5, t>0, u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{5}, 0\le x\le\frac{5}{2},\\ 5-x, \frac{5}{2}<x\le 5,\end{cases}$ $u(0,t)=u(5,t)=0.$

$$4.\ u_t' = 16u_{xx}'', 0 < x < 4, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, 2 < x \le 4, \end{cases} \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

$$5.\ u_t' = 4u_{xx}'', 0 < x < 5, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{5}, 0 \le x \le \dfrac{5}{2}, \\ 5 - x, \dfrac{5}{2} < x \le 5, \end{cases} \quad u(0,t) = u(5,t) = 0.$$

$$6.\ u_t' = u_{xx}'', 0 < x < 3, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{3}, 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, \dfrac{3}{2} < x \le 3, \end{cases} \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$$

$$7.\ u_t' = 25u_{xx}'', 0 < x < 9, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{9}, 0 \le x \le \dfrac{9}{2}, \\ 9 - x, \dfrac{9}{2} < x \le 9, \end{cases} \quad u(0,t) = u(9,t) = 0.$$

$$8.\ u_t' = 9u_{xx}'', 0 < x < 2, t > 0, \ u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 < x \le 2, \end{cases} \quad u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

$$9.\ u_t' = 4u_{xx}'', 0 < x < 4, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, 2 < x \le 4, \end{cases} \quad u(0,t) = u(4,t) = 0.$$

$$10.\ u_t' = 16u_{xx}'', 0 < x < 8, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, 4 < x \le 8, \end{cases} \quad u(0,t) = u(8,t) = 0.$$

$$11.\ u_t' = 36u_{xx}'', 0 < x < 3, t > 0, u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, \dfrac{3}{2} < x \le 3, \end{cases} \quad u(0,t) = u(3,t) = 0.$$

$$12.\ u_t' = 9u_{xx}'', 0 < x < 8, t > 0, \ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, 4 < x \le 8, \end{cases} \quad u(0,t) = u(8,t) = 0.$$

13. $u'_t = 4u''_{xx},\ 0 < x < 6,\ t > 0,\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, 3 < x \le 6, \end{cases}\ u(0,t) = u(6,t) = 0.$

14. $u'_t = 16u''_{xx},\ 0 < x < 2,\ t > 0,\ u(x,0) = \begin{cases} x^2, 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, 1 < x \le 2, \end{cases}\ u(0,t) = u(2,t) = 0.$

15. $u'_t = u''_{xx},\ 0 < x < 12,\ t > 0,\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{6}, 0 \le x \le 6, \\ 12 - x, 6 < x \le 12, \end{cases}\ u(0,t) = u(12,t) = 0.$

3.6. Уравнения эллиптического типа

Теоретический минимум

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге радиуса R: найти функцию $u = u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ внутри области, ограниченной кругом радиуса R с центром в начале координат, и принимающую на границе круга заданные значения: $u\big|_{r=R} = f(\varphi)$, где $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$; (r, φ) – полярные координаты точки (x, y); $f(\varphi)$ – заданная функция.

В полярных координатах (r, φ) уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Решение задачи Дирихле ищется в следующем виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n, \tag{3.9}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi,\quad a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

Формулу решения задачи Дирихле для круга можно преобразовать и выразить через интеграл Пуассона

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}f(t)\,dt.$$

Метод решения краевых задач, основанный на замене значений дифференциальных операторов конечными разностями, т. е. приближенными значениями, выраженными через значения функций в отдельных дискретных точках, называется *методом конечных разностей*, или *методом сеток*.

При таком подходе исходная задача приводится к решению алгебраического уравнения или системы алгебраических уравнений, что является более простой задачей, чем первоначальная. В результате приближенно определяются числовые значения искомой функции на некотором дискретном множестве точек, принадлежащем области, для которой поставлена задача. По этой причине рассматриваемый способ решения дифференциальных уравнений относится к численным методам.

Постановка задачи Дирихле. Найти функцию $U(x, y)$, которая внутри некоторой плоской области G удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0, \tag{3.10}$$

а на границе Γ области G – условию

$$U(x, y)\big|_{\Gamma}=f(x, y), \tag{3.11}$$

где $f(x, y)$ – заданная непрерывная функция.

Эта задача называется первой краевой задачей. Ее решение $U(x, y)$ описывает распределение тепла внутри области G при известной температуре $f(x, y)$ на границе области.

Метод сеток, или *метод конечных разностей*, является одним из самых распространенных методов численного решения уравнений математической физики. В его основе лежит идея замены производных конечно-разностными выражениями. Найдем приближенное решение уравнения Лапласа методом сеток. Проведем два множества прямых

$$x = ih, \quad y = kh, \tag{3.12}$$

где i, k − целые числа; h − выбранный шаг сетки. Заменим область G сеткой, а границу области Γ – замкнутой ломаной линией Γ^* (рис. 3.4).

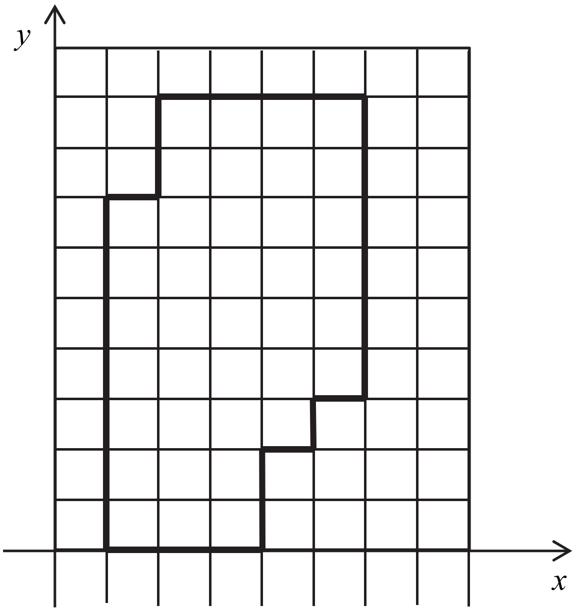

Рис. 3.4

Точки пересечения прямых называются *узлами*. Значения неизвестной функции $U(x, y)$ в узлах сетки обозначим через

$$U_{i,k} = U\left(x_i, y_k\right) = U(ih, kh).$$

Узел называется *внутренним*, если он принадлежит области G. Узел считается *граничным*, если он не является внутренним. Каждый граничный узел должен иметь среди четырех соседних узлов (рис. 3.5) хотя бы один внутренний, иначе он исключается из сетки.

В каждом узле границы Γ^* зададим значение функции $f(x, y)$, равное значению функции $f(x, y)$ в ближайшей точке границы Γ. При этом в граничных узлах значения функции принимаются равными значениям в соответствующих точках границы.

Значения неизвестной функции будем рассматривать только в узлах сетки, которые принадлежат $G + \Gamma^*$.

В каждом внутреннем узле заменим частные производные конечно-разностными выражениями

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=ih,\,y=kh} \approx \frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{x=ih,\,y=kh} \approx \frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}}{h^2}.$$

Подставим в уравнение (3.10) и сократим на h^2:

$$U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}+U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}=0.$$

Получим систему

$$U_{i,k}=\frac{1}{4}\left(U_{i-1,k}+U_{i+1,k}+U_{i,k-1}+U_{i,k+1}\right). \qquad (3.13)$$

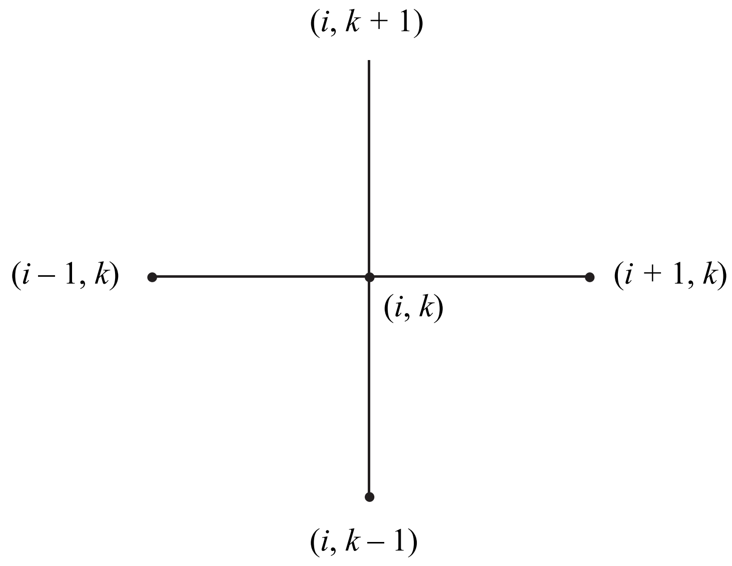

Рис. 3.5

Количество уравнений системы (3.13) равно количеству неизвестных и равно количеству внутренних узлов. Система (3.13) совместна и имеет единственное решение, которое дает приближенное значение решения $U(x,y)$.

Практический минимум

6А+Б1. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластинке радиусом 5, верхняя половина границы которой поддерживается при температуре 20°С, а нижняя – при 0°С.

Задача сводится к задаче Дирихле для круга. Граничное условие

$$f(\varphi)=\begin{cases}20,\ 0\le\varphi<\pi,\\ 0,\ \pi\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

Найдем коэффициенты

$$a_0=\frac{20}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi=20,$$

$$a_k=\frac{20}{\pi\,5^k}\int_0^{\pi}\cos k\varphi\,d\varphi=\frac{20}{\pi k\,5^k}\sin k\varphi\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_k=\frac{20}{\pi\,5^k}\int_0^{\pi}\sin k\varphi\,d\varphi=-\frac{20}{\pi k\,5^k}\cos k\varphi\Big|_0^{\pi}=\frac{20}{\pi k\,5^k}\left(\cos k\pi-1\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{40}{\pi(2k-1)\,5^{2k-1}},\ k-\text{нечетное},\\ 0,\quad k-\text{четное}.\end{cases}$$

Решение задачи получим по формуле (3.9):

$$u(r,\varphi)=10+\frac{40}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\varphi}{5^{2k-1}(2k-1)}r^{2k-1}.$$

<u>**6А+Б2.**</u> Применяя метод сеток, найти решение уравнения Лапласа (3.10) внутри области G, ограниченной кривой Γ:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1, \qquad (3.14)$$

если на границе Γ решение удовлетворяет условию

$$U(x,y)\big|_{\Gamma}=0{,}5|x|+|y|. \qquad (3.15)$$

Поскольку область симметрична относительно начала координат, найдем решение только в первой четверти. Возьмем шаг $h=1$ и построим сетку (рис. 3.6), которая покрывает область, ограниченную эллипсом (3.14).

Вычислим значения функции (3.15) в обозначенных граничных точках сетки. Например, для точки C на рис. 3.6 видно, что $x=2,$ а соответствующее неизвестное значение y найдем из условия (3.14), пользуясь в Excel формулой =3*КОРЕНЬ(1–D3*D3/25). Полученные значения поместим в таблицу (рис. 3.7).

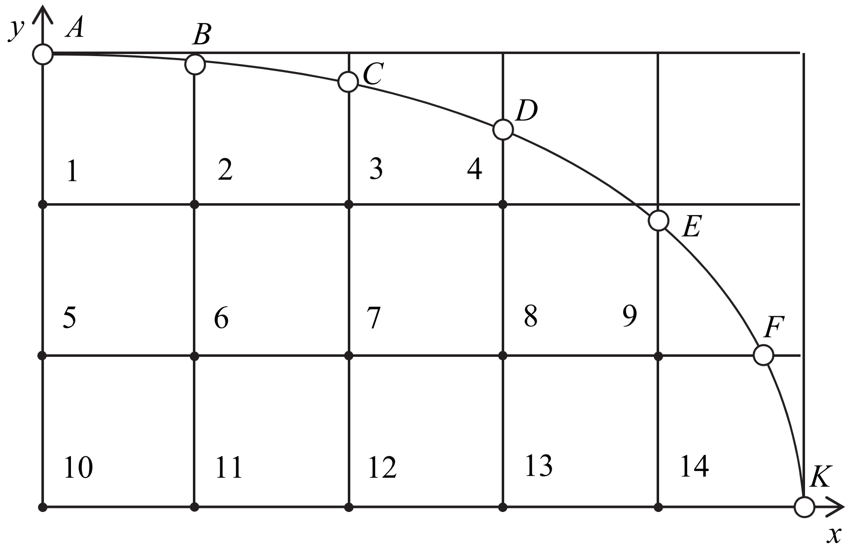

Рис. 3.6

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Граничные условия**							
2	Точки	A	B	C	D	E	F	K
3	x	0	1	2	3	4	4,714	5
4	y	3	2,9394	2,7495	2,4	1,8	1	0
5	$U(x,y)\vert_{\Gamma}$	3	3,4394	3,7495	3,9	3,8	3,357	2,5
6								

Рис. 3.7

Значения функции $U(x, y)$ в граничных точках примем равными значениям в соответствующих точках границы, пронумеруем узлы сетки и составим систему уравнений (3.13):

$$U_1 = \frac{1}{4}[U(A) + 2U_2 + U_5] = \frac{1}{4}(3 + 2U_2 + U_5),$$

$$U_2 = \frac{1}{4}[U(B) + U_1 + U_3 + U_6] = \frac{1}{4}(3{,}4394 + U_1 + U_3 + U_6),$$

$$U_3 = \frac{1}{4}[U(C) + U_2 + U_4 + U_7] = \frac{1}{4}(3{,}7495 + U_2 + U_4 + U_7),$$

$$U_4 = \frac{1}{4}[U(D) + U_3 + U(E) + U_8] = \frac{1}{4}(7{,}7 + U_3 + U_8),$$

$$U_5 = \frac{1}{4}(U_1 + 2U_6 + U_{10}),$$

$$U_6 = \frac{1}{4}(U_2 + U_5 + U_7 + U_{11}),$$

$$U_7 = \frac{1}{4}\left(U_3 + U_6 + U_8 + U_{12}\right),$$

$$U_8 = \frac{1}{4}\left(U_4 + U_7 + U_9 + U_{13}\right),$$

$$U_9 = \frac{1}{4}\left[U(F) + U_8 + U(E) + U_{14}\right] = \frac{1}{4}\left(7{,}157 + U_8 + U_{14}\right),$$

$$U_{10} = \frac{1}{4}\left(2U_5 + 2U_{11}\right),$$

$$U_{11} = \frac{1}{4}\left(2U_6 + U_{10} + U_{12}\right),$$

$$U_{12} = \frac{1}{4}\left(2U_7 + U_{11} + U_{13}\right),$$

$$U_{13} = \frac{1}{4}\left(2U_8 + U_{12} + U_{14}\right),$$

$$U_{14} = \frac{1}{4}\left[2U_9 + U_{13} + U(K)\right] = \frac{1}{4}\left(2{,}5 + 2U_9 + U_{13}\right).$$

Слагаемые, содержащие неизвестные переменные, запишем слева, а свободные члены – справа. В результате получим систему алгебраических уравнений, которую решим матричным методом по формуле $X = A^{-1}B$. В нашем случае матрица A − матрица коэффициентов при неизвестных − записана в диапазоне ячеек A9:N22, матрица B − столбец свободных членов − записана в ячейках P9:P22 (рис. 3.8).

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
7	**Коэффициенты при неизвестных**															**Св. члены**	
8	U1	U2	U3	U4	U5	U6	U7	U8	U9	U10	U11	U12	U13	U14			
9	1	-0,5	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0,750	
10	-0,25	1	-0,25	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0	0		0,860	
11	0	-0,25	1	-0,25	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0	0		0,937	
12	0	0	-0,25	1	0	0	0	-0,25	0	0	0	0	0	0		1,925	
13	-0,25	0	0	0	1	-0,5	0	0	0	-0,25	0	0	0	0		0,000	
14	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0	0	0		0,000	
15	0	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0	0		0,000	
16	0	0	0	-0,25	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0	0	-0,25	0		0,000	
17	0	0	0	0	0	0	0	-0,25	1	0	0	0	0	-0,25		1,789	
18	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	0	1	-0,5	0	0	0		0,000	
19	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25	0	0		0,000	
20	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25	0		0,000	
21	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1	-0,25		0,000	
22	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	-0,25	1		0,625	
23																	

Рис. 3.8

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Выделим область соответствующего размера (диапазон A25:N38) для записи обратной матрицы. Вызовем формулу массива

$$f_x \rightarrow \text{Математические} \rightarrow \text{МОБР} \rightarrow \text{ОК}.$$

Зададим адреса матрицы A A8:N22 и нажмем Ctrl + Shift + Enter для выполнения действия.

Умножим матрицу A^{-1} на B и результат запишем в ячейках P25:P38. Для этого выделим диапазон ячеек P25:P38. Вызовем формулу массива

$$f_x \rightarrow \text{Математические} \rightarrow \text{МУМНОЖ} \rightarrow \text{ОК}.$$

Зададим адреса перемножаемых матриц A25:N38 и P9:P22 и нажмем Ctrl + Shift + Enter для выполнения действия (рис. 3.9).

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
24	**Обратная матрица**															**Решение**	
25	1,505	1,176	0,524	0,222	0,844	1,170	0,697	0,365	0,133	0,351	0,559	0,365	0,204	0,084		3,350	U1
26	0,588	1,767	0,702	0,277	0,584	1,191	0,765	0,407	0,148	0,279	0,532	0,379	0,220	0,092		3,475	U2
27	0,262	0,702	1,527	0,513	0,345	0,759	0,893	0,525	0,186	0,180	0,375	0,380	0,254	0,110		3,621	U3
28	0,111	0,277	0,513	1,282	0,167	0,375	0,492	0,616	0,210	0,091	0,197	0,232	0,240	0,113		3,718	U4
29	0,844	1,169	0,690	0,334	2,208	2,297	1,259	0,645	0,238	0,845	1,172	0,701	0,375	0,153		3,449	U5
30	0,585	1,191	0,759	0,375	1,148	2,837	1,469	0,739	0,271	0,586	1,195	0,771	0,421	0,173		3,489	U6
31	0,349	0,765	0,893	0,492	0,629	1,469	2,315	1,076	0,387	0,350	0,770	0,910	0,555	0,236		3,543	U7
32	0,182	0,407	0,525	0,616	0,323	0,739	1,076	1,941	0,656	0,184	0,414	0,550	0,708	0,341		3,552	U8
33	0,067	0,148	0,186	0,210	0,119	0,271	0,387	0,656	1,377	0,069	0,157	0,217	0,324	0,425		3,486	U9
34	0,702	1,117	0,720	0,364	1,690	2,343	1,399	0,737	0,275	1,857	1,739	0,898	0,454	0,182		3,469	U10
35	0,559	1,064	0,750	0,395	1,172	2,390	1,539	0,829	0,313	0,869	2,306	1,095	0,534	0,212		3,489	U11
36	0,365	0,758	0,761	0,465	0,701	1,543	1,820	1,099	0,434	0,449	1,095	1,938	0,839	0,318		3,509	U12
37	0,204	0,439	0,508	0,481	0,375	0,842	1,111	1,416	0,649	0,227	0,534	0,839	1,711	0,590		3,462	U13
38	0,084	0,184	0,220	0,225	0,153	0,346	0,471	0,682	0,851	0,091	0,212	0,318	0,590	1,360		3,233	U14
39																	
40						**Приближенное решение задачи**											
41						3	3,44	3,75	3,9								
42						3,35	3,48	3,62	3,72	3,8							
43						3,45	3,49	3,54	3,55	3,49	3,36						
44						3,47	3,49	3,51	3,46	3,23	2,5						
45																	

Рис. 3.9

Приближенное решение задачи записано в ячейках F41:K44, причем граничные значения выделены цветом.

Задания для самостоятельной работы

6А+Б3. Найти гармоническую в единичном круге функцию, если ее граничные значения $f(\varphi) = |\varphi|$.

Ответ: $u(r,\varphi)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)\varphi}{(2k-1)^2}r^{2k-1}.$

6А+Б4. Определить гармоническую функцию в круге радиуса $\dfrac{1}{2}$, если ее граничные значения $u\left(\dfrac{1}{2},\varphi\right)=\operatorname{sign}\varphi,\ -\pi<\varphi<\pi.$

Ответ: $u(r,\varphi)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^{2k-1}\sin(2k-1)\varphi}{2k-1}r^{2k-1}.$

6А+Б5. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

а) $\Delta u=0,\ 0\le r<1,\ u\big|_{r=1}=2\cos^3\varphi;$

б) $\Delta u=0,\ 0\le r<3,\ u\big|_{r=3}=2\sin^3\varphi;$

в) $\Delta u=0,\ 0\le r<4,\ u\big|_{r=4}=17\sin^3\varphi.$

Индивидуальные задания

Применяя метод сеток, найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

для данной области G и при заданном граничном условии. Выбрать шаг сетки $h=1$:

1. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=|x|+|y|.$
2. $x^2+y^2\le 16,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=|x|+2|y|.$
3. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=|x||y|.$
4. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=2|x|+|y|.$
5. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=|x||y|.$
6. $x^2+y^2\le 16,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=0{,}5|x|+|y|.$
7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_\Gamma=|x|+|y|.$

8. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=2|x|+0,5|y|.$

9. $x^2+y^2\le 16,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x|+2|y|.$

10. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x|+|y|.$

11. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x||y|.$

12. $x^2+y^2\le 16,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x|+0,5|y|.$

13. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x|+|y|.$

14. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}\le 1,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=|x|+0,5|y|.$

15. $x^2+y^2\le 25,\qquad U(x,y)\big|_{\Gamma}=0,5|x|+0,5|y|.$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

4

1. Дать определение дифференциального уравнения с частными производными, записать его в общем виде.

2. Записать линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка в общем виде.

3. Привести примеры основных дифференциальных уравнений математической физики.

4. Дать классификацию уравнений с частными производными второго порядка. Привести примеры.

5. Записать канонический вид уравнения гиперболического типа, уравнения параболического типа, уравнения эллиптического типа.

6. Сформулировать постановку основных задач для дифференциальных уравнений второго порядка: задачу Коши, краевую задачу, смешанную задачу.

7. Вывести уравнение колебаний струны.

8. Сформулировать задачу Коши для волнового уравнения.

9. Сформулировать краевую задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

10. Вывести формулу Даламбера для нахождения решения задачи Коши о колебаниях бесконечной струны.

11. В чем заключается идея метода Фурье для нахождения решения краевой задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах?

12. Вывести уравнение распространения тепла в стержне. Сформулировать краевую задачу.

13. Изложить метод Фурье для нахождения решения уравнения теплопроводности.

14. Привести алгоритм построения решения краевой задачи методом интегральных преобразований Фурье.

15. Сформулировать краевые задачи для уравнения Лапласа.

16. В чем заключается метод конечных разностей?

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 5

Линейное относительно
старших производных ДУ с ЧП
второго порядка

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$$
$$=F\left(x,y,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right).$$

Классификация уравнений второго порядка

Если $B^2-AC>0$ в области $G,$ то уравнение гиперболического типа.

Если $B^2-AC=0$ – параболического типа.

Если $B^2-AC<0$ – эллиптического типа.

Канонический вид уравнения второго порядка

Каноническое уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Каноническое уравнение параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Каноническое уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Дифференциальное уравнение характеристик уравнения

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F$$

есть $A(x,y)dy^2-2B(x,y)dxdy+C(x,y)dx^2=0.$

Задача Коши для неограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных условиях $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$

Решение: $$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

(формула Даламбера).

Колебание полуограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<+\infty,\ t>0.$$

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

Решение: $$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x), x>0,\\ -\varphi(-x), x<0\end{cases}$ и $\Psi(x)=\begin{cases}\psi(x), x>0,\\ -\psi(-x), x<0.\end{cases}$

Метод Фурье для уравнения колебаний ограниченной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l.$$

Начальные условия: $u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{t=0}=\psi(x).$

Граничные условия: $u\big|_{x=0} = 0,\quad u\big|_{x=l} = 0.$

Решение: $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;\ b_k = \frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$

Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Распределение температуры в неограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty < x < +\infty.$$

Начальное условие: $u\big|_{t=0} = f(x).$

Решение: $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right)d\xi$$

(интеграл Пуассона).

Распределение температуры в ограниченном стержне

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < l.$$

Начальное условие: $u(x,t)\big|_{t=0} = f(x).$

Граничные условия: $u\big|_{x=0} = A,\ u\big|_{x=l} = B.$

Решение: $u(x,t) = A + \frac{B-A}{l}x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$

$$c_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx - \frac{2}{\pi n}\left(A + (-1)^{n+1}B\right).$$

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

или

$$\Delta u = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В плоском случае уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Задача Дирихле для круга

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u\big|_{r=R} = f(\varphi),$$

где φ, r – полярные координаты.

Решение: $u(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t - \varphi) + r^2} dt$

(интеграл Пуассона).

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1999.
2. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М.: Физматлит, 2003.
3. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – М.: Физматлит, 1969.
4. Несис, Е. И. Методы математической физики / Е. И. Несис. – М.: Просвещение, 1977.
5. Соболев, С. Л. Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. – М.: ГИТТЛ, 1966.
6. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001.
7. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Физматлит, 1961.
8. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1970.
9. Гусак, А. А. Высшая математика. В 2 т. Т. 2 / А. А. Гусак. – Минск: БГУ, 1978.

Дополнительная

1. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике: учеб. пособие для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – М.: Наука, 2004.
2. Сабитов, К. Б. Уравнения математической физики / К. Б. Сабитов. – М.: Высш. шк., 2003.
3. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики / А. В. Бицадзе. – М.: Физматлит, 1982.
5. Зайцев, В. Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Марченко Владимир Матвеевич
Пыжкова Ольга Николаевна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е. С. Ватеичкина*
Компьютерная верстка *О. Ю. Шантарович*
Корректор *Е. С. Ватеичкина*

Подписано в печать 30.12.2013. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 9,6.
Тираж 150 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.