Pravděpodobnost - teoretický úvod

Kateřina Večerková

18 července 2024

Náhodný jev

Náhodná událost je výsledek nebo skupina výsledků náhodného procesu, který nás zajímá. Například hod kostkou a získání sudého čísla. Množinu všech možných výsledků značíme velké $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jejich podmnožiny velkými písmeny $A = \{2, 4, 6\}$.

Pravidla pro výpočet pravděpodobnosti

- Pro každý náhodný jev A je $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Praděpodobnost doplňkového jevu $\bar{A}$ k jevu A je $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Pravděpodobnost rozdílu $A \setminus B$ jevů A a B je $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Pravděpodobnost sjednocení dvou libovolných jevů A a B je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Klasická definice pravděpodobnosti

Pravděpodobnost události je poměr počtu příznivých výsledků k celkovému počtu možných stejně pravděpodobných výsledků.

$$P(A) = \frac{\text{Počet příznivých výsledků}}{\text{Celkový počet možných výsledků}}$$

Statistická definice pravděpodobnosti

Pravděpodobnost události je dlouhodobý průměr relativního výskytu události při opakovaných nezávislých pokusech.

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{Počet výskytů události } A \text{ nastane}}{n}$$

Geometrická definice pravděpodobnosti

Pravděpodobnost události je definována jako poměr míry (např. délky, plochy, objemu) příznivé oblasti k míře celé oblasti.

$$P(A) = \frac{\text{Míra příznivé oblasti}}{\text{Míra celé oblasti}}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Pravděpodobnost výskytu události za předpokladu, že již došlo k jiné události.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Náhodná veličina

Náhodná veličina přiřazuje číselnou hodnotu každému výsledku náhodného experimentu.

Diskrétní náhodná veličina

Diskrétní náhodná veličina nabývá spočitatelného počtu různých hodnot, jako jsou celá čísla nebo konečné množiny hodnot.

- Pravděpodobnostní funkce $P(X = x)$ udává pravděpodobnost, že náhodná veličina X je přesně x.
- Součet pravděpodobnostních funkcí přes všechny možné hodnoty X

$$\sum_x P(X = x) = 1$$

Spojitá náhodná veličina

Spojitá náhodná veličina může nabývat libovolných hodnot v určitém rozsahu.

- Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ udává relativní pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá určité hodnoty x.
- Celková pravděpodobnost všech možných hodnot je 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Střední hodnota náhodné veličiny

Střední hodnota náhodné veličiny je průměrná hodnota, kterou bychom očekávali, že veličina nabývá při opakovaných nezávislých pokusech. Formálně je střední hodnota definována jako vážený průměr všech možných hodnot, které náhodná veličina může nabývat, přičemž váhy jsou dané pravděpodobnostmi těchto hodnot.

Pro diskrétní náhodnou veličinu X, která nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$, je střední hodnota definována jako:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i)$$

Pro spojitou náhodnou veličinu se střední hodnota vyjadřuje pomocí integrálu:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

Střední hodnota je užitečná, protože nám poskytuje jeden číselný ukazatel, který shrnuje centrální tendenci náhodné veličiny.

Rozptyl náhodné veličiny

Rozptyl je míra variability náhodné veličiny, tedy jak moc jsou její hodnoty rozptýleny kolem střední hodnoty. Formálně se rozptyl definuje jako průměr kvadratických odchylek od střední hodnoty.

Pro diskrétní náhodnou veličinu X:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i)$$

Pro spojitou náhodnou veličinu:

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x)\,dx$$

Rozptyl nám poskytuje informaci o rozložení hodnot náhodné veličiny kolem její střední hodnoty. Čím vyšší rozptyl, tím více jsou hodnoty veličiny rozptýleny od svého průměru.

Rozdělení pravděpodobnosti

Rozdělení pravděpodobnosti popisuje pravděpodobnost různých hodnot náhodné veličiny. Pro diskrétní proměnné se používá pravděpodobnostní funkce $P(X = x)$ a pro spojité hustota pravděpodobnosti $f(x)$.

Pro diskrétní i spojité proměnné je distribuční funkce definována jako

- pro diskrétní: $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} P(X = t)$
- pro spojité: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$