Теоритическое задание по теории принятия решений

Буреева Полина
Ложкина Ольга
Тришин Дмитрий

М8О-411Б-19
Вариант - 1

Март, 2023

Задание

Дан алгоритм полиномиального взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции

$$\Phi_p(u) = \left[\sum_{i=1}^{N} (u_i)_+^p\right]^{2/p} = \|u_+\|_p^2\,,$$

где $p \geq 2$, а

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & \text{x} > 0, \\ 0, & \text{x} \leq 0 \end{cases}$$

обозначает срезку числа x.

Часть 1

Выписать выражение для веса $w_k(t)$ эксперта k в момент времени t.

Решение

Предсказатель в момент врмени t предсказывает в соответствии с

$$\widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1} f_{i,t}}{\sum_{i=1}^{N} w_{i,t-1}}$$

где $w_{i,t-1}$– веса экспертов в момент врмени t. Считаем $w_{i,t-1}$ производной неотрицательной, выпуклой и возрастающей функции, так как наша задача минимизировать регрет. Используя понятие потенциальной функции, можно получить следующее эквивалентное определение

$$w_{i,t-1} = \nabla\Phi(R_{t-1})_i,$$

где

$$\nabla\Phi(R_{t-1})_i = \frac{\partial\Phi(R_{t-1})}{\partial R_{i,t-1}}.$$

Веса, присвоенные экспертам, задаются как

$$w_{i,t-1} = \nabla\Phi(R_{t-1})_i = \frac{\partial\Phi(R_{t-1})}{\partial R_{i,t-1}} = \frac{\partial \left\|(R_{t-1})_+\right\|_p^2}{\partial R_{i,t-1}} =$$

$$= \frac{\partial\left[\sum_{i=1}^N (R_{i,t-1})_+^p\right]^{2/p}}{\partial R_{i,t-1}} = \frac{2(R_{i,t+1})^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^N (R_{i,t-1})_+^p\right)^{1+\frac{2}{p}}} = \frac{2(R_{i,t+1})^{p-1}}{\|(R_{t-1})_+\|_p^{p-2}}.$$

Часть 2

Доказать слующе утверждение: *предположим, что фукция потерь $l(.,.)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0,1]$. Тогда для любых допустимых исходов и $t \geq 1$ общий регрет удовлетворяет неравенству*

$$R_{i,t} \leq \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Доказательства

Дана потенциальная функция

$$\Phi(u) = \psi\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right),$$

где

$$\phi(x) = x^{2/p} \quad \text{и} \quad \psi(x) = x_+^p, \quad x \geq 2.$$

По теореме, где прогнозист удовлетворяет условию Блеквелла для потенциальной функции, тогда для любого $n = 1, 2, \ldots,$

$$\Phi(R_n) \leq \Phi(0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n C(r_t),$$

где $\Phi(0) = 0 \quad$ и $\quad C(r_t) = \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right)\sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2$.

Найдем

$$\phi''(x) = p(p-1)x_+^{p-2} \quad \text{и} \quad \psi'(x) = \frac{2}{px^{(p-2)/p}}.$$

По неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2 = p(p-1)\sum_{i=1}^N (u_i)_+^{p-2} r_{i,t}^2 \leq$$

$$\leq p(p-1)\left(\sum_{i=1}^N \left((u_i)_+^{p-2}\right)^{(p-2)/p}\right)^{(p-2)/p}\left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p\right)^{2/p} \leq \frac{2(p-1)}{\psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right)}\left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p\right)^{2/p}$$

$$\Rightarrow \psi'\left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i)\right)\sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2 \leq 2(p-1)\left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p\right)^{2/p}$$

$$\Rightarrow C(r_t) \leq 2(p-1)\left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p\right)^{2/p}$$

$$\Rightarrow \Phi(R_n) \le (p-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}|r_{i,t}|^p\right)^{2/p} \le n(p-1)N^{2/p}.$$

$$\Phi(R_{i,n}) = \left(\sum_{i=1}^{N}(R_{i,t})_+^p\right)^{2/p} \quad \text{и} \quad R_{i,n} \le \left(\sum_{i=1}^{N}(R_{i,t})_+^p\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow R_{i,t} \le \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Часть 3

Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов t, если $p \ge 2$? Определить (приближенное или точное) значение параметра p, минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выписать соответствующую оценку.

Решение

Регрет за раунд сходится к нулю со скоростью $O(1/\sqrt{t})$ при $p \ge 2$.

Чтобы минимизировать полученную оценку, необходимо найти минимум функции. Для этого возьмем производную от выражения по аргументу р и приравняем к нулю, получим:

$$\frac{\sqrt{(p-1)N^{\frac{2}{p}}}(p^2 - 2(p-1)\ln N)}{2(p-1)p^2} = 0, p \ne 0, p \ne 1$$

$$\sqrt{(p-1)N^{\frac{2}{p}}} = 0 \Longleftrightarrow p = 1,$$

однако по условию $p \ge 2$.

Рассмотрим выражение:

$$p^2 - 2(p-1)\ln N = 0$$

$$p^2 - 2p\ln N + 2\ln N = 0$$

$$D = 4\ln^2 N - 8\ln N$$

$$p_{1,2} = \frac{lnN \pm \sqrt{4\ln^2 N - 8\ln N}}{2} = \ln N \pm \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$$

- точки экстремумов, где $p = \ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$ - точка минимума.

Таким образом, значение $p = \ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$ минимизирует полученную оценку

$$R_{i,t} \le \sqrt{t(\ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N} - 1)N^{2/\ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}}}.$$