

Теоритическое задание по теории принятия решений

Буреева Полина
Ложкина Ольга
Тришин Дмитрий

М8О-411Б-19

Вариант - 1

Март, 2023

Задание

Дан алгоритм полиномиального взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции

$$\Phi_p(u) = \left[\sum_{i=1}^N (u_i)_+^p \right]^{2/p} = \|u_+\|_p^2,$$

где $p \geq 2$, а

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

обозначает срезку числа x .

Часть 1

Выписать выражение для веса $w_k(t)$ эксперта k в момент времени t .

Решение

Предсказатель в момент врмени t предсказывает в соответствии с

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1} f_{i,t}}{\sum_{i=1}^N w_{i,t-1}}$$

где $w_{i,t-1}$ — веса экспертов в момент врмени t . Считаем $w_{i,t-1}$ производной неотрицательной, выпуклой и возрастающей функции, так как наша задача минимизировать регрет. Используя понятие потенциальной функции, можно получить следующее эквивалентное определение

$$w_{i,t-1} = \nabla \Phi(R_{t-1})_i,$$

где

$$\nabla \Phi(R_{t-1})_i = \frac{\partial \Phi(R_{t-1})}{\partial R_{i,t-1}}.$$

Веса, присвоенные экспертам, задаются как

$$\begin{aligned} w_{i,t-1} &= \nabla \Phi(R_{t-1})_i = \frac{\partial \Phi(R_{t-1})}{\partial R_{i,t-1}} = \frac{\partial \|(R_{t-1})_+\|_p^2}{\partial R_{i,t-1}} = \\ &= \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^N (R_{i,t-1})_+^p \right]^{2/p}}{\partial R_{i,t-1}} = \frac{2(R_{i,t-1})^{p-1}}{\left(\sum_{i=1}^N (R_{i,t-1})_+^p \right)^{1-\frac{2}{p}}} = \frac{2(R_{i,t-1})^{p-1}}{\|(R_{t-1})_+\|_p^{p-2}}. \end{aligned}$$

Часть 2

Доказать следующее утверждение: *предположим, что функция потерь $l(.,.)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0, 1]$. Тогда для любых допустимых исходов u и $t \geq 1$ общий регрет удовлетворяет неравенству*

$$R_{i,t} \leq \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Доказательства

Дана потенциальная функция

$$\Phi(u) = \psi \left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i) \right),$$

где

$$\phi(x) = x^{2/p} \quad \text{и} \quad \psi(x) = x_+^p, \quad x \geq 2.$$

По теореме, где прогнозист удовлетворяет условию Блеквелла для потенциальной функции, тогда для любого $n = 1, 2, \dots$,

$$\Phi(R_n) \leq \Phi(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C(r_i),$$

где $\Phi(0) = 0$ и $C(r_t) = \psi' \left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i) \right) \sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2$.

Найдем

$$\phi''(x) = p(p-1)x_+^{p-2} \quad \text{и} \quad \psi'(x) = \frac{2}{px^{(p-2)/p}}.$$

По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2 &= p(p-1) \sum_{i=1}^N (u_i)_+^{p-2} r_{i,t}^2 \leq \\ &\leq p(p-1) \left(\sum_{i=1}^N ((u_i)_+^{p-2})^{(p-2)/p} \right)^{(p-2)/p} \left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p \right)^{2/p} \leq \frac{2(p-1)}{\psi' \left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i) \right)} \left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p \right)^{2/p} \\ &\Rightarrow \psi' \left(\sum_{i=1}^N \phi(u_i) \right) \sum_{i=1}^N \phi''(u_i) r_{i,t}^2 \leq 2(p-1) \left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p \right)^{2/p} \\ &\Rightarrow C(r_t) \leq 2(p-1) \left(\sum_{i=1}^N |r_{i,t}|^p \right)^{2/p} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi(R_n) \leq (p-1) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^N |r_{i,t}|^p \right)^{2/p} \leq n(p-1)N^{2/p}.$$

$$\Phi(R_{i,n}) = \left(\sum_{t=1}^N (R_{i,t})_+^p \right)^{2/p} \quad \text{и} \quad R_{i,n} \leq \left(\sum_{t=1}^N (R_{i,t})_+^p \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow R_{i,t} \leq \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Часть 3

Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов t , если $p \geq 2$? Определить (приближенное или точное) значение параметра p , минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выписать соответствующую оценку.

Решение

Регрет за раунд сходится к нулю со скоростью $O(1/\sqrt{t})$ при $p \geq 2$.

Чтобы минимизировать полученную оценку, необходимо найти минимум функции. Для этого возьмем производную от выражения по аргументу p и приравняем к нулю, получим:

$$\frac{\sqrt{(p-1)N^{\frac{2}{p}}(p^2 - 2(p-1)\ln N)}}{2(p-1)p^2} = 0, p \neq 0, p \neq 1$$

$$\sqrt{(p-1)N^{\frac{2}{p}}} = 0 \iff p = 1,$$

однако по условию $p \geq 2$.

Рассмотрим выражение:

$$p^2 - 2(p-1)\ln N = 0$$

$$p^2 - 2p\ln N + 2\ln N = 0$$

$$D = 4\ln^2 N - 8\ln N$$

$$p_{1,2} = \frac{2\ln N \pm \sqrt{4\ln^2 N - 8\ln N}}{2} = \ln N \pm \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$$

- точки экстремумов, где $p = \ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$ - точка минимума.

Таким образом, значение $p = \ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N}$ минимизирует полученную оценку

$$R_{i,t} \leq \sqrt{t(\ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N} - 1)N^{2/(\ln N + \sqrt{\ln^2 N - 2\ln N})}}.$$