

Informe Cinemática Galáctica

Autor: Vicente Maldonado A.
Profesor: Leonardo Bronfman A.
Auxiliar: Javier Silva F.
Fecha de entrega: 29 de mayo de 2021

Resumen

La Vía Lactea esta compuesta mayoritariamente por Hidrógeno gaseoso (H_2), la medición de su velocidad de rotación alrededor del centro de la galaxia en el cuadrante IV entre longitudes de 300° y 348° , permitió obtener una curva de rotación, que demostró que la velocidad es **creciente** a medida aumenta la distancia galacto-céntrica. A partir de las coordenadas galácticas de los puntos utilizados para medir la velocidad tangencial se obtuvo la curva de corrugación del plano galáctico, ubicando espacialmente aquellos puntos, sugiriendo que forman un plano con alturas que varían entre $Z = 0.245$ kpc y $Z = -2.887$ kpc.

Finalmente se compararon diferentes modelos de distribución de masa de la galaxía, obteniendo que el mejor modelo corresponde al de un disco con densidad superficial uniforme $S_0 = 5.888 \cdot 10^8$ $[M_{sol}/kpc^2]$.

1. Introducción

La Vía Láctea es la galaxia en que vivimos, donde se encuentra el Sistema Solar y una gran cantidad de objetos astronómicos, que van desde nebulosas y estrellas super masivas a planetas y asteroides. La Vía Láctea se compone su mayoría de nubes moleculares, principalmente de Hidrógeno gaseoso (H_2). Toda la materia de la galaxia se encuentra orbitando al centro galáctico y a partir de la posición del Sol en la galaxia es posible configurar un sistema de coordenadas.

Las coordenadas galácticas están compuestas por una longitud y una latitud galáctica, la longitud (l) es el ángulo que se forma respecto a la posición del Sol, como se representa en la Figura 1. La longitud separa la galaxia en cuatro cuadrantes (I, II, III y IV), el centro galáctico es compartido por los cuadrantes I y IV. La trayectoria del Sol determina lo que se considera galaxia interior y galaxia exterior. Por otro lado, la latitud (b) representa la elevación respecto al plano galáctico, la Figura 2 es una reconstrucción de cómo se observa el plano desde un observador en la Tierra y muestra esquemáticamente la latitud galáctica.

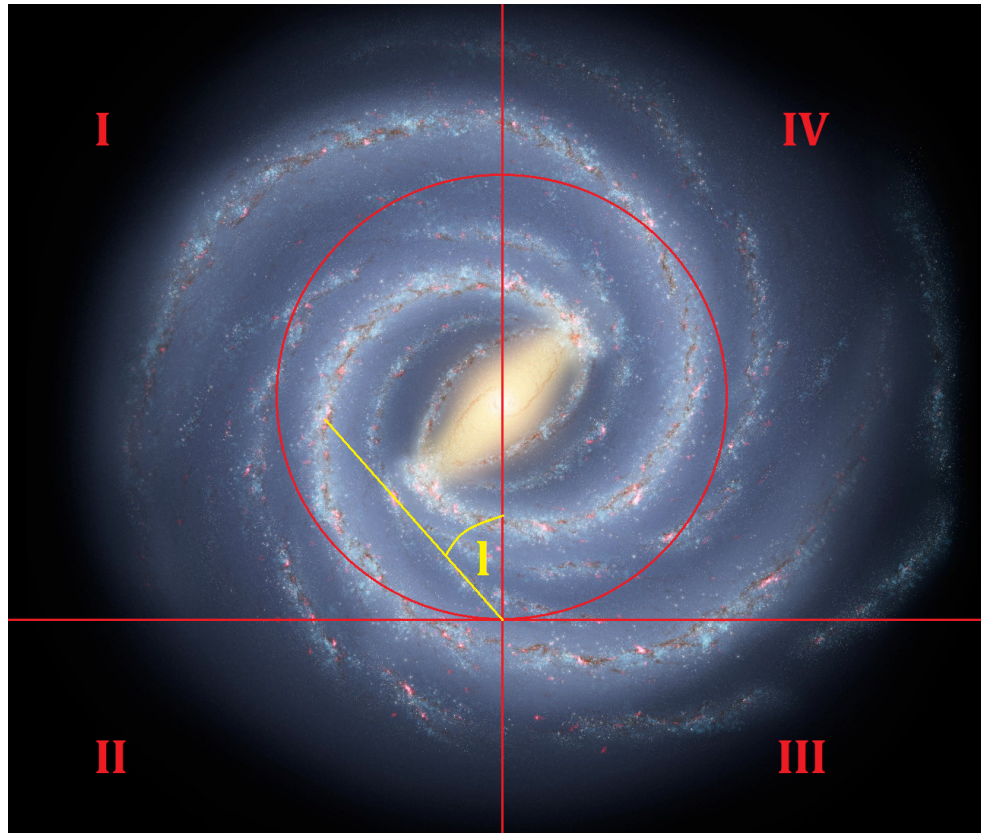


Figura 1: Longitud galáctica l (NASA-JPL)

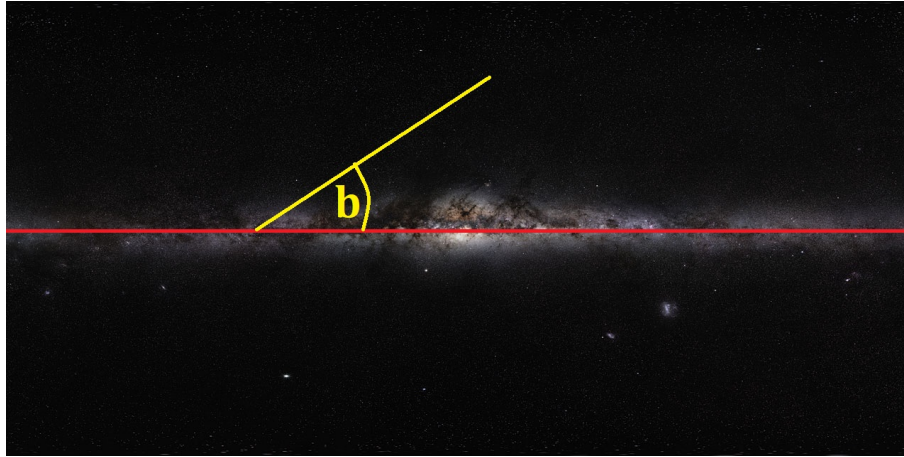


Figura 2: Latitud galáctica b (ESO).

Para la elaboración de este informe se recopilaron datos del IV cuadrante de la galaxia, entre las longitudes de 300° y 348° y una latitud que varia entre los -2° y 2° . Los datos se obtuvieron a partir de la potencia integrada en la línea de CO , que es un trazador de H_2 . El Hidrógeno gaseoso es la molécula mas común del universo, pero al ser una molécula polar es muy difícil observarla en líneas rotacionales, en cambio, el CO tiene un momento dipolar mucho más fuerte y por eso se utiliza como trazador de este gas. La Ecuación 1 muestra cómo se relaciona la densidad de columna de Hidrógeno $N(H_2)$ [mol/cm^2] con la potencia integrada del Monóxido de Carbono $W(CO)$ en la velocidad [$\text{K} \frac{\text{km}}{\text{s}}$]

$$N(H_2) = \chi W(CO) \quad (1)$$

La constante χ es medida experimentalmente y se utilizó como $2 \cdot 10^{20} \frac{\text{cm}^{-2}}{\text{K} \frac{\text{km}}{\text{s}}}$.

En la primera parte de este estudio se utilizó la velocidad de $N(H_2)$ para la obtención de la curva de rotación de la galaxia. Esta curva representa la velocidad de rotación de cada punto en función de su distancia al centro galáctico. Para medir las velocidades se utiliza el sistema de referencia LSR (*Local Standard of Rest*) este se define como un punto que se mueve con una órbita perfectamente circular en torno al centro de la galaxia, con un radio igual a la distancia galacto-céntrica del Sol. Se mueve con una velocidad $V_0 = 220 \text{ km/s}$ y tiene un radio de giro $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$. La órbita del Sol no es exactamente la misma a la que hace referencia el sistema LSR, ya que la órbita del Sol no es perfectamente circular.

La velocidad que se utilizará será la velocidad terminal, esta velocidad se obtiene a partir del espectro de cada uno de los cuadrantes de latitud y longitud observados por el telescopio. La velocidad terminal corresponde a la primera velocidad tal que su temperatura de antena supere 5 veces el valor del error cuadrático medio para T_{ant} .

Luego de obtener la curva de rotación, se obtendrá la corrugación de la galaxia a partir de las coordenadas de latitud, esta curva muestra la forma que toman los puntos de velocidad tangencial en el plano galáctico, en función de su distancia al centro.

Finalmente, se estudiará la distribución de masa en la galaxia, realizando un ajuste a la curva de rotación obtenida permitiendo determinar qué modelo es más adecuado. El resultado obtenido

demostró que la masa de la Vía Láctea se distribuye en un disco de densidad constante con una densidad $S_0 = 5.888 \cdot 10^8 [M_{sol}/kpc^2]$.

2. Curva de Rotación

2.1. Marco Teórico

La obtención de la curva de rotación requiere usar la ecuación maestra de la cinemática galáctica, esta ecuación se encuentra a partir del diagrama mostrado en la Figura 3, en donde se puede obtener:

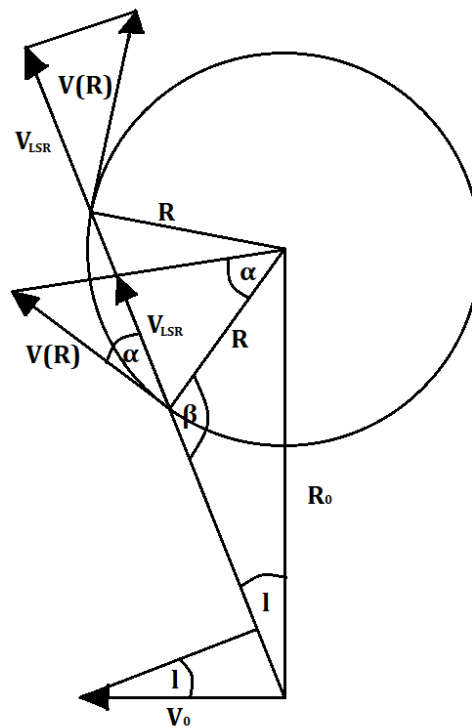


Figura 3: Cinemática galáctica.

$$V_{LSR} = V(R)\cos(\alpha) - V(R_0)\sin(l) \quad (2)$$

Luego se puede utilizar el teorema del seno, para despejar $\cos(\alpha)$, utilizando también que $\beta = 90 + \alpha$.

$$\frac{\sin(l)}{R} = \frac{\cos(\alpha)}{R_0}$$

$$\sin(\beta) = \sin(90 - \alpha) = \cos(\alpha) = \frac{R_0}{R} \sin(l)$$

Reemplazando en (2) se obtiene la ecuación maestra de la cinemática galáctica:

$$V_{LSR} = \text{sen}(l) \left(\frac{R_0}{R} V(R) - V(R_0) \right) \quad (3)$$

La velocidad V_{LSR} es la única que se puede medir a través del efecto Doppler desde el Sistema Solar, ya que es la única componente que se va alejando del Sol. Entonces, para medir la velocidad tangencial se necesita que $R = R_0 \text{sen}(l)$, reemplazando esto se tiene:

$$V(R = R_0 \text{sen}(l)) = V_{LSR} + V(R_0) \text{sen}(l)$$

Sin embargo, la curva de rotación se obtiene con velocidades positivas ya que se esta representando un movimiento circular. En el cuadrante (IV), la longitud varía entre 270° y 360° por lo que $\text{sen}(l) < 0$, entonces se debe agregar valor absoluto a la ecuación, quedando la expresión final para la velocidad tangencial en función de R .

$$V(R = R_0 \text{sen}(l)) = |V_{LSR}| + V(R_0) |\text{sen}(l)| \quad (4)$$

Mientras que para la velocidad angular, simplemente se usa la relación $V = \omega R$ y la ecuación a utilizar será:

$$\omega(R = R_0 \text{sen}(l)) = R_0 \text{sen}(l) V(R = R_0 \text{sen}(l)) \quad (5)$$

La velocidad de referencia es $V_0 = 220 \text{ km/s}$ y el radio será $R_0 = 8.5 \text{ kpc}$.

En la Figura 3 se observa que para una misma V_{LSR} existen dos posibles distancias, la mas cercana; D_1 , y la lejana D_2 . Como consideramos que $R = R_0 \text{sen}(l)$ entonces $\alpha = 0$, de modo que $D_1 = D_2 = D = R_0 \cos(l)$, solucionando la ambigüedad de soluciones para la distancia.

2.2. Detalle del Algoritmo

Inicialmente, para eliminar el ruido de los datos, se creó una función que recorre cada coordenada de latitud para una longitud dada, quedándose con la primera velocidad que sea 5 veces mayor al RMS (media cuadrática), esta velocidad terminal se guarda en un arreglo. Después, se recorre cada coordenada de longitud aplicando esta función, obteniendo para cada longitud un arreglo de velocidades.

Para cada una de las longitudes, se escoje el mayor valor de V_{LSR} que corresponderá a un cierto radio $R = R_0 \text{sen}(l)$ según la Ecuación (4). Tanto la velocidad como el radio se guardan en su respectivo arreglo.

Finalmente, se utiliza la Ecuación (4) para obtener $V(R)$ y $\omega(R)$ y poder graficar la curva de rotación.

2.3. Resultados

La curva de rotación obtenida para $V(R)$ se muestra en la Figura 4 y la de $\omega(R)$ en la Figura 5.

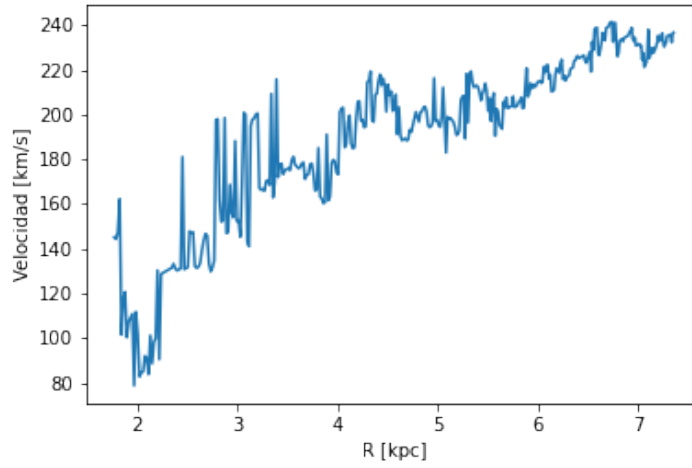


Figura 4: Curva de Rotación $V(R)$ en función de la distancia al centro galáctico.

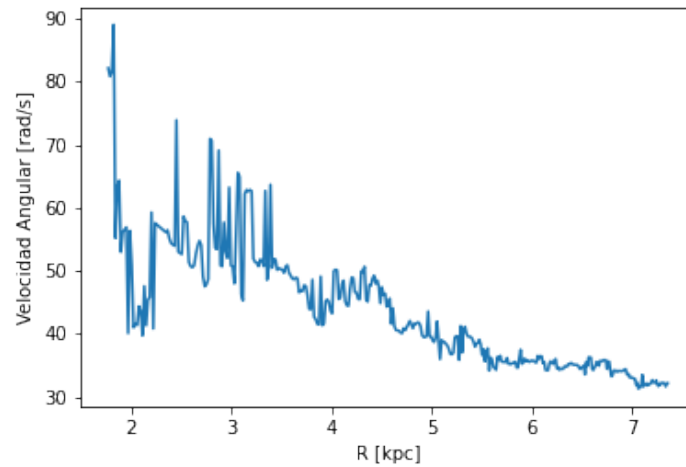


Figura 5: Curva de Rotación $\omega(R)$ en función de la distancia al centro galáctico.

Se puede observar que la curva de $V(R)$ es creciente mientras que la curva de $\omega(R)$ es decreciente. Ambas curvas parten teniendo valores que dan saltos entre velocidades, pero que mas adelante se estabilizan.

3. Corrugación del Plano

3.1. Marco Teórico

La corrugación de la galaxia se obtiene calculando la posición Z del punto donde se encuentra la V_{tan} para cada R , medida respecto al plano de la galaxia. La corrugación representa el contorno de

la galaxia vista horizontalmente.

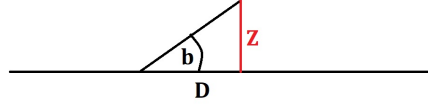


Figura 6: Cálculo de Z a partir de D y b_{Vmax} .

Para calcular la corrugación del plano galáctico se debe obtener la posición Z para cada radio R , al observar la Figura 6 se puede calcular que:

$$Z = D \tan(b_{Vmax})$$

A partir de la Figura 3 se tiene que si $R = R_0 \sin(l)$, entonces $D = R_0 \cos(l)$, al reemplazar se obtiene (aproximando $\tan(b) \approx b$)

$$Z(R = R_0 \sin(l)) = R_0 \sin(l) \tan(b_{Vmax}) \approx R_0 \sin(l) b_{Vmax} \quad (6)$$

En donde b_{Vmax} corresponde a la coordenada de latitud galáctica para la velocidad tangencial (V_{LSRmax})

3.2. Detalle del Algoritmo

Se utilizó el mismo algoritmo de la obtención de la curva de rotación, de modo que cuando el algoritmo guardaba la velocidad máxima para cada longitud, también guardaba la coordenada de latitud en que se encontraba. Así se formó un arreglo para la coordenada b_{Vmax} . Luego se utilizó la Ecuación (6) para obtener la corrugación del plano galáctico.

3.3. Resultados

La Figura 7 muestra la corrugación del plano galáctico, se puede ver que toma valores entre -0.3 kpc y 0.2 kpc, aunque se concentra principalmente en valores positivos para distancias $R < 4.5$ y negativos para valores $R > 4.5$.

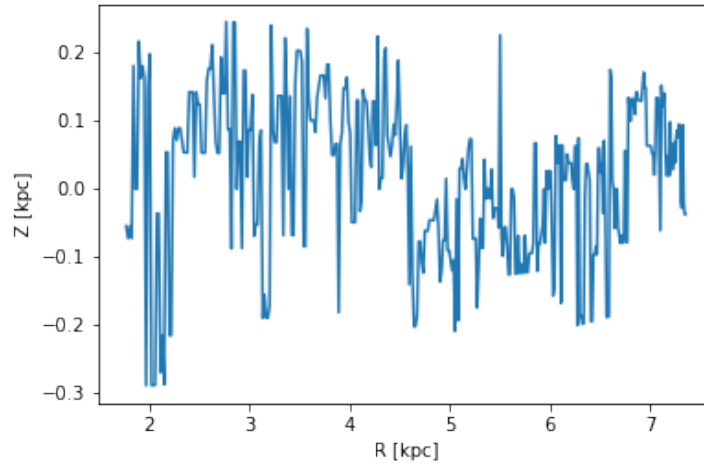


Figura 7: Corrugación del plano galáctico.

El gráfico muestra que los valores de Z son bastante bajos, lo que significaría que las velocidades tangenciales forman un plano. El valor máximo de Z es de 0.245 kpc y el valor mínimo corresponde a -2.887 kpc.

4. Ajuste de Modelo de Masa

4.1. Marco Teórico

En esta sección se determinará qué modelo de masa se adapta mejor a la curva de rotación obtenida en la primera parte. Las distribuciones de masa que se estudiarán se observan en la Figura 8.

Distribucion de Masa	Modelo de Masa
Puntual	M_0
Esférica	$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$
Esférica con Masa Puntual	$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 + M_0$
Disco	$\pi r^2 S_0$
Disco con Masa Puntual	$\pi r^2 S_0 + M_0$

Figura 8: Modelos de distribución de masa.

Todas las densidades ρ y S_0 se consideran constantes y la masa puntual se ubica en el centro de la galaxia.

Para calcular qué curva de rotación tiene cada modelo se considerará que los elementos de la galaxia orbitan circularmente alrededor del centro, considerando solo la atracción de gravedad. A partir de la ecuación de movimiento (polares) se puede obtener la velocidad de rotación en función del radio.

$$m(\ddot{r} - r\dot{\omega}^2) = \frac{-GMm}{r^2}$$

Al ser un movimiento circular $r = cte$, entonces $\ddot{r} = 0$.

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Usando la relación $\omega r = v$ se obtiene la Ecuación 7, que permitirá obtener la curva de rotación para cada modelo de masa:

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (7)$$

Las unidades se adaptaron para que el resultado se obtenga en km/s , por lo que $G = 4.302 \cdot 10^{-6} kpc \cdot M_{sol}^{-1} \cdot (\frac{km}{s})^{-2}$.

4.2. Detalle del Algoritmo

Se definieron funciones que, a partir de los parámetros del modelo, obtienen la velocidad de rotación en función del radio.

Distribucion de Masa	Parámetros
Puntual	M_0
Esferica	ρ_0
Esferica con Masa Puntual	ρ_0, M_0
Disco	S_0
Disco con Masa Puntual	S_0, M_0

Figura 9: Parámetros a ajustar de cada distribución de masa.

Luego, se realizó un ajuste que permitiera obtener los parámetros que mejor se ajustaran a la curva de rotación y así poder graficar la curva de rotación real y la obtenida según cada modelo. El ajuste se realiza usando un método no lineal de mínimos cuadrados.

Para determinar cuál se adapta mejor a la curva de rotación, se calculó el error cuadrático medio para cada una de las distribuciones de masa.

4.3. Resultados

El ajuste de cada uno de los modelos de distribución de masa se ilustra en la Figura 10.

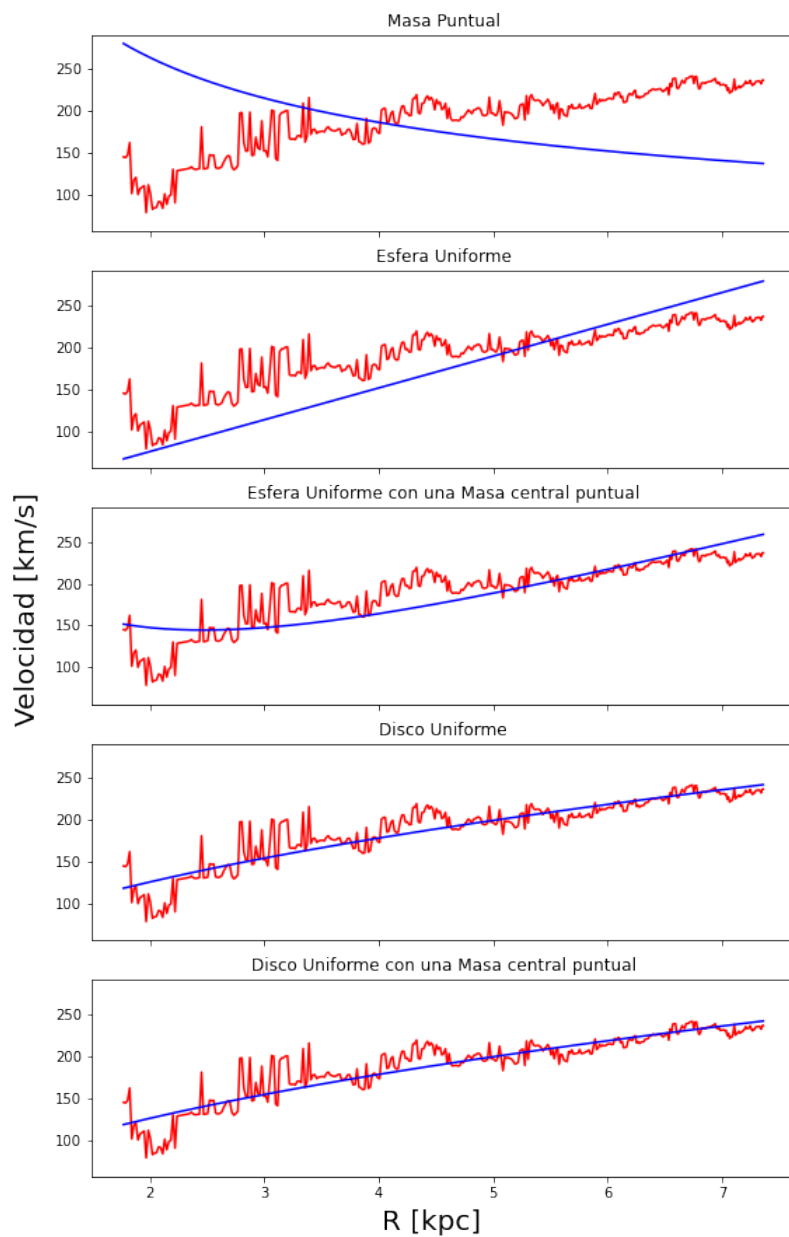


Figura 10: Modelos de masa de la galaxia, en rojo; la curva de rotación real, en azul; la curva del modelo.

Se puede observar que el modelo de masa puntual entrega una curva decreciente, contraria a la

de rotación que es creciente. La esfera uniforme, da una curva completamente recta mientras que la esfera con una masa puntual toma una forma convexa, el disco uniforme y el disco con una masa puntual toman una forma muy paecida, y son las que mejor se acercan a la curva de rotación real.

Los parámetros ajustados de cada modelo y su error cuadrático medio se ven en la Figura 10.

Distribución de Masa	$M_0 [M_{sol}]$	$\rho_0 [M_{sol}/kpc^3]$	$S_0 [M_{sol}/kpc^2]$	ECM [km/s]
Puntual	$3.228 \cdot 10^{10}$	-	-	74.504890729
Esférica	-	$7.964 \cdot 10^7$	-	34.248852871
Esférica con Masa Puntual	$7.981 \cdot 10^9$	$6.372 \cdot 10^7$	-	21.806171500
Disco	-	-	$5.888 \cdot 10^8$	14.783591622
Disco con Masa Puntual	10.247	-	$5.888 \cdot 10^8$	14.783591623

Figura 11: Modelos de masa de la galaxia.

El modelo con el error cuadrático medio más bajo es el de disco con densidad uniforme, seguido por el de disco uniforme con masa puntual, la diferencia entre ambos es del orden de 10^8 km/s.

5. Análisis y Conclusiones

Las curvas de rotación para $V(R)$ y $\omega(R)$ toman una forma que se puede aproximar al modelo de masa de un disco de densidad uniforme o al de un disco con densidad uniforme y masa puntual, ya que la diferencia de error que hay entre ellos es despreciable (del orden de 10^8 km/s), incluso, tienen la misma densidad superficial. Sin embargo, un error de 14 km/s sigue siendo alto, de hecho, la mayor distancia que hay entre la velocidad indicada por el modelo y la de la curva de rotación es de 51.564 km/s. Es posible que un modelo de disco con una densidad del tipo $S(R) = S_0 e^{k/R}$ sea más preciso, ya que para radios pequeños toma valores que se alejan mucho de 0 y a medida que se aleja más va tomando valores que se asemejan mejor a un disco con una densidad constante. La masa puntual central aproximada por el modelo de disco ($10.247 M_{sol}$) es muy pequeña en comparación a la del agujero negro supermasivo Sagiario A ($3.7 \cdot 10^6 M_{sol}$). Además, el hecho de que tenga la misma densidad superficial que el modelo sin masa puntual y aún así error más alto sugiere que la masa puntual en el centro no hace más que empeorar el ajuste.

También hay que tener en cuenta que para este estudio se utilizó una sección del IV cuadrante (entre 300° y 348°), es decir, solo un 13 % de todos los valores posibles para longitud, esto significa que no se cuenta con una parte de los datos correspondientes al centro galáctico (entre 348° y 360°) haciendo que sea más difícil para el algoritmo ajustar una masa puntual en el centro sin tener datos sobre el comportamiento de las velocidades, esta razón puede explicar que el modelo de disco uniforme y disco con masa puntual sean tan similares entre sí. Además, puede haber afectado en el cálculo considerar que las orbitas son perfectamente circulares, lo cual no se cumple siempre.

La corrugación del plano galáctico tiene valores que difícilmente se podrían aproximar a una función sinusoidal como se indica teóricamente. Tal vez con un set de datos más completo pueda encontrarse una mejor aproximación para el comportamiento de esta curva.

Otro punto importante a considerar es que es que la galaxia no esta compuesta únicamente de nubes de gas con densidad constante, y es posible que las mediciones se hayan visto alteradas por zonas de mayor concentración de hidrógeno o la presencia de algún otro objeto astronómico que altere la observación o al trazador, ya sea estrellas, nebulosas, polvo, etc.

En conclusión, a partir de los datos trabajados en este informe, el modelo que mejor se adapta a la curva de rotación es el de un disco con densidad uniforme $S_0 = 5.888 \cdot 10^8 [M_{sol}/kpc^2]$, seguido por el de un disco con la misma densidad uniforme pero con una masa puntual de $10.247 M_{sol}$ ubicada en el centro de la galaxia .

6. Anexos

[Repositorio en GitHub](#)