§ 8.4 极小值原理及其应用

在前面介绍经典变分法时，求解最优控制问题都只涉及到性能指标泛函的变量是否受到约束（无约束或有等式约束，未涉及不等式约束）。且都是假定控制变量 u(t) 的取值范围不受任何限制，即控制量的变分是任意的，从而得到最优控制应满足的控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

但是，在大多数情况下，控制变量总是受到一定限制的。

例如，动力装置发出的转矩不可能无穷大，电系统中的电信号也不可能无穷大，飞机及导弹上的舵偏角也有一定范围，因而其控制力矩也受到一定限制，等。

这时候的容许控制集合形成了一个有界闭集。此时，控制变量被限制在某一个闭集内，控制量的变分在集合的边界上不能任选，不能满足最优控制的必要条件之一，即

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 不成立。

且更一般的情况下，可以用下列的不等式约束来表示 **u(t)** 的取值：

$$g[x(t),u(t),t]\geq 0$$

另外，用经典变分法求解最优控制问题时，都是在性能指标泛函连续可微的情况下进行的，但对于类似 $J=\int_{t_0}^{t_f}|u(t)|dt$

这样的性能指标泛函，由于目标函数中出现了 $|u(t)|$ ，从而使得 **L(x,u,t)** 关于 u 不可微，哈密顿函数 **H** 关于 **u** 的偏导也不存在，即控制方程也不成立，这使燃料消耗最少这类最优控制问题无法用经典变分法解决。

因此，在性能指标泛函的变量存在不等式约束或非连续可微的情况下，经典变分法不能解决类似最优控制问题。

为了克服经典变分法在解决最优控制问题时所暴露出的上述不足，前苏联数学家庞特里亚金提出了所谓的极大值原理，虽然其在原著中提出的是极大值原理，但在一般的最优控制教科书中，都论述的是极小值原理，因为极大与极小是相对而言的，两者只是一个符号之差，没有本质区别。

8.4.1 连续系统的极小值原理

设系统状态方程为 $\dot{x}(t)=f(x,u,t)$ ，初始条件 $x(t_0)$ 已知终端时刻及终端状态满足约束方程

$N[x(t_f),t_f]=0$ ， t_f 待定

控制量受以下约束

$$g[x(t),u(t),t]\geq 0$$

性能指标泛函为：

$$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$$ 其中，

ϕ, L, N, g连续可微, ϕ, L标量函数, N, g为列矢量函数

最优控制问题是：在上述条件下，寻求**容许控制 u*(t)**，使 **J** 为极小值。

与前面讨论的等式约束最优控制问题比较可见，它们之间的差别在于这里的 **u(t)** 属于有界闭集，受不等式 $g[x(t),u(t),t] \geq 0$ 约束。

（问题：若 $|u(t)| \leq 1$ ，如何转换为 g 函数？）

为了把这样的不等式约束转化为等式约束，且将 u(t) 的限制条件“变为”不受限制，采取以下两个措施

①引入新的控制变量 w(t)，且令

$$\dot{w}(t) = u(t) \qquad w(t_0) = 0$$

即使 u(t) 有界且不连续，但 w(t) 为连续无界；或即使 u(t) 分段有界连续，但 w(t) 为分段光滑无界连续。

②引入另一个新变量 z(t)，且令

$$[\dot{z}(t)]^2 = g(x,u,t), \quad z(t_0) = 0$$

则无论 z 的导数是大于还是小于0，其平方总 ≥0

通过以上变换，便将不等式约束、控制量有界的问题转化为具有等式约束、控制量无界的鲍尔札问题。

由于有状态约束、控制约束、终端约束三个等式约束条件，应用拉格朗日乘子法，引入三个乘子列矢量 $\lambda(t),\gamma(t),\mu(t)$

问题便转化为求下列增广泛函的极值问题：

$$J_1=\phi[x(t_f),t_f]+\gamma^T \underline{N[x(t_f),t_f]}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\underline{\lambda^T(f-\dot{x})}+\underline{\mu^T[g(x,u,t)-\dot{z}^2]}\}dt$$

令 $H=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$

$$=L(x,\dot{w},t)+\lambda^T f(x,\dot{w},t)=H(x,\dot{w},\lambda,t)$$

令 $\psi=H(x,\dot{w},\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}+\mu^T[g(x,\dot{w},t)-\dot{z}^2]$

$$=\psi[x,\dot{x},\dot{w},\lambda,\mu,\dot{z},t]$$ （整个被积函数）

$$\psi = H(x,\dot{w},\lambda,t) - \lambda\dot{x} + \mu[g(x,\dot{w},t) - \dot{z}^2]$$
$$= \psi[x,\dot{x},\dot{w},\lambda,\mu,\dot{z},t]$$

则 $J_1 = \phi[x(t_f),t_f] + \gamma N[x(t_f),t_f]$
$$+\int_{t_0}^{t_f} \psi[x,\dot{x},\dot{w},\lambda,\mu,\dot{z},t]dt$$

其变分为：

$$\delta \mathrm{J}_1 = \delta \mathrm{J}_{\mathrm{x}} + \delta J_{t_f} + \delta J_w + \delta J_z$$

分别为 x, t_f, w, z 产生的变分，其中：

$$J_1 = \phi[x(t_f), t_f] + \gamma N[x(t_f), t_f]$$
$$+ \int_{t_0}^{t_f} \psi[x, \dot{x}, \dot{w}, \lambda, \mu, \dot{z}, t] dt$$

$$\delta J_{t_f} = \frac{\partial}{\partial t_f}[\phi + \gamma N + \int_{t_0}^{t_f} \psi dt]\Big|_{t_f} \delta t_f$$
$$= [\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \gamma \frac{\partial N}{\partial t_f} + \psi]\Big|_{t_f} \delta t_f$$

$$\delta J_w = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}} \delta w \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}}) \cdot \delta w \cdot dt$$

$$\delta J_z = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}} \delta z \Big|_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}}) \cdot \delta z \cdot dt$$

$$\delta J_x = \{\frac{\partial}{\partial x}[\phi + \gamma N] + \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}}\}\Big|_{t_f} \delta x_f - \dot{x}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} \delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}}]\delta x dt$$

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + \dot{x}(t_f)\delta t_f$$

将上述表达式代入 δJ_1，考虑到 $\delta t_f, \delta x(t_f), \delta x, \delta w, \delta z$ 的任意性，于是由泛函取得极值的必要条件 $\delta J_1 = 0$ 得到以下表达式：

$$\delta J_1=[\frac{\partial\phi}{\partial t_f}+\mu^T\frac{\partial N}{\partial t_f}+\psi-\dot{x}^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}]\Big|_{t_f}\delta t_f+\delta w^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{w}}\Big|_{t_f}$$

$$+dx^T(t_f)\{\frac{\partial}{\partial x}[\phi+\mu^T N]+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}\}\Big|_{t_f}+\delta z^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}\Big|_{t_f}$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\delta x^T(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}})dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\delta w^T(\frac{\partial\psi}{\partial w}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{w}})dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\delta z^T(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}})dt$$

考虑到 $\delta t_f,\delta x(t_f),\delta x,\delta w,\delta z$ 的任意性，于是由泛函取得极值的必要条件 $\delta J_1=0$ 得到以下表达式：

$$\psi = \psi[x, \dot{x}, \dot{w}, \lambda, \mu, \dot{z}, t] = H(x, \dot{w}, \lambda, t) - \lambda \dot{x} + \mu[g(x, \dot{w}, t) - \dot{z}^2]$$

$$H = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) = L(x, \dot{w}, t) + \lambda^T f(x, \dot{w}, t)$$

1、欧拉方程 $\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma^T \frac{\partial g}{\partial x} = -\dot{\lambda}$ A

$\frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}} = 0$ B

$\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}} = 0$ C

2、横截条件 $\{\psi - \dot{x}\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N}{\partial t_f}\gamma\}\Big|_{t_f} = 0$ D

$\{\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}\gamma\}\Big|_{t_f} = 0$ E

$$\psi=\psi[x,\dot{x},\dot{w},\lambda,\mu,\dot{z},t]=H(x,\dot{w},\lambda,t)-\lambda\dot{x}+\mu[g(x,\dot{w},t)-\dot{z}^2]$$

$$H=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)=L(x,\dot{w},t)+\lambda^T f(x,\dot{w},t)$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\dot{w}}\right|_{t_f}=0 \qquad \text{F}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}\right|_{t_f}=0 \qquad \text{G}$$

3、边界条件 $x(t_0)=x_0 \quad N[x(t_f),t_f]=0$

由于 $\psi=H(x,\dot{w},\lambda,t)-\lambda\dot{x}+\mu[g(x,\dot{w},t)-\dot{z}^2]$

$$=\psi[x,\dot{x},\dot{w},\lambda,\mu,\dot{z},t]$$

将 ψ 代入上述表达式，并注意到 $\dfrac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}=-\lambda$

则有以下定理：

连续系统的极小值原理：

设系统状态方程为 $\dot{x}(t)=f(x,u,t)$

初始条件$x(t_0)$ 已知，

终端约束为 $N[x(t_f),t_f]=0$ ， t_f 待定；

控制量约束为 $g[x(t),u(t),t]\geq 0, g=[\dot{z}(t)]^2$

$$\dot{w}(t)=u(t) \qquad w(t_0)=0 \qquad z(t_0)=0$$

性能指标泛函为

$$J=\phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(x,u,t)dt$$

则实现最优控制的必要条件是：最优控制 u*(t)、最优轨迹 x*(t)及最优协态矢量 λ 满足以下关系式：

1、欧拉方程 $$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\mu=-\dot{\lambda}$$ ①

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}\mu\right)=0$$ ②

$$\frac{d}{dt}(\mu\dot{z})=0$$ ③

2、横截条件

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial t_f}+\frac{\partial N}{\partial t_f}\gamma+H\right\}\Big|_{t_f}=0$$ ④

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial x}\gamma-\lambda\right\}\Big|_{t_f}=0$$ ⑤

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}\mu\right\}\Big|_{t_f}=0$$ ⑥

$$\mu\dot{z}\Big|_{t_f}=0$$ ⑦

(上述7个式子分别来源于A、B、C、D、E、F、G）

3、边界条件

$$x(t_0)=x_0 \qquad N[x(t_f),t_f]=0$$

分析：

(1)由①式可知，只有在 g 不依赖 x 的情况下，才有 $\frac{\partial H}{\partial x}=-\dot{\lambda}$

(2)由式B、C可知，$\frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}},\frac{\partial \psi}{\partial \dot{z}}$ 均为常数，而由式F、G可知，它们在终端处为0，可见它们沿最优轨迹恒等于0；

(3)若将 ψ 代入 $\left.\frac{\partial \psi}{\partial \dot{w}}\right|_{t_f}=0$ 则 $\frac{\partial H}{\partial \dot{w}}+\frac{\partial g}{\partial \dot{w}}\gamma=0$

即 $\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u}\gamma \neq 0$ ，这表明在不等式约束条件下沿最优轨

迹不再存在 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 的条件。

需要指出的是，上述欧拉方程及横截条件只给出了性能指标最优解的必要条件（对线性系统则是充要条件）。

从以下分析中可以得出极小值原理的另一个重要结论。

既然根据上述方程求解出的 x^*, u^* 是问题的最优解，

由于

$$\psi = H(x,u,\lambda,t) - \lambda\dot{x} + \mu[g(x,\dot{w},t) - \dot{z}^2] = \psi[x,\dot{x},u,\lambda,\mu,\dot{z},t]$$

$$J_1(u) = \phi + \gamma N + \int_{t_0}^{t_f} \psi[x,\dot{x},u,\lambda,\mu,\dot{z},t]dt$$

$$J_1(u^*) = \phi + \gamma N + \int_{t_0}^{t_f} \psi[x^*,\dot{x}^*,u^*,\lambda,\mu,\dot{z},t]dt$$

则 $J_1(u^*) - J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} [\psi(x^*,\dot{x}^*,u^*,\lambda,\mu,\dot{z},t) - \psi(x,\dot{x},u,\lambda,\mu,\dot{z},t)]dt$

即 $J_1(u^*) - J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} \{[H(x^*,u^*,\lambda,t) - \lambda\dot{x}^*] - [H(x,u,\lambda,t) - \lambda\dot{x}]\}dt$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \{[H(x^*,u^*,\lambda,t) - H(x,u,\lambda,t)] + [\lambda(\dot{x} - \dot{x}^*)]\}dt$$

$$J_1(u^*)-J_1(u)=\int_{t_0}^{t_f}\{[H(x^*,u^*,\lambda,t)-H(x,u,\lambda,t)]+[\lambda(\dot{x}-\dot{x}^*)]\}dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}[H(x^*,u^*,\lambda,t)-H(x^*,u,\lambda,t)]dt$$

$$+\underline{\int_{t_0}^{t_f}[H(x^*,u,\lambda,t)-H(x,u,\lambda,t)]dt}+\underline{\int_{t_0}^{t_f}\lambda(\dot{x}-\dot{x}^*)dt}$$

又 $\underline{[H(x^*,u,\lambda,t)-H(x,u,\lambda,t)]}=\dfrac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x}\Delta x+\varepsilon$

ε $\Delta x=x^*-x\to 0$ 时的高阶无穷小项。

且 $\underline{\int_{t_0}^{t_f}\lambda(\dot{x}-\dot{x}^*)dt}=\int_{t_0}^{t_f}[\lambda\dfrac{d}{dt}(x-x^*)]dt=\lambda(x-x^*)\Big|_{t_0}^{t_f}$

则 $J_1(u^*)-J_1(u)=\int_{t_0}^{t_f}[H(x^*,u^*,\lambda,t)-H(x^*,u,\lambda,t)]dt$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[\frac{\partial H(x,u,\lambda,t)}{\partial x}\Delta x+\varepsilon]dt$$

$$J_1(u^*) - J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} [H(x^*, u^*, \lambda, t) - H(x^*, u, \lambda, t)]dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} \Delta x + \varepsilon]dt$$

当 $\Delta x = x^* - x \to 0$ 时，上式变为：

$$J_1(u^*) - J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} [H(x^*, u^*, \lambda, t) - H(x^*, u, \lambda, t)]dt + \varepsilon(t_f - t_0) \quad ②$$

若 J₁(u*)是最小性能指标，则有 $J_1(u^*) - J_1(u) \le 0$

考虑到 ε 是无穷小项，$(t_f - t_0) \ge 0$,因此由上式②必有

$$H(x^*, u^*, \lambda, t) - H(x^*, u, \lambda, t) \le 0$$

即：最优控制u*(t) 使哈密顿函数在最优轨迹上取得最小值（绝对极小值）。

也即：使H函数取得极小值的控制量一定是最优控制。

也就是说，如果把在最优轨迹上的 **H** 函数看成是容许控制 **u(t)** 的函数，那么在最优轨迹上，哈密顿函数 **H** 对于最优控制 **u*(t)** 取得最小值　这是极小值原理的一个重要结论。

注意：此时，**J**取得极小值！

表面上看，这一结论与经典变分法的结论相似，但这里强调的是 **u(t)** 取遍 控制域中的所有点，只有使哈密顿函数**H**

$$H(x^*,\lambda^*,\dot{w}^*,t)\le H(x^*,\lambda^*,\dot{w},t)$$ 即：

$$H(x^*,\lambda^*,u^*,t)\le H(x^*,\lambda^*,u,t)$$

取得最小值的 u(t) 才是最优控制。

而经典变分法中，则是使 $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$ 成立，即 **u*(t) 是 H 的驻点值**，它只能给出**H**的局部极值点，对于边界上的极值点则无能为力，它仅仅是极小值原理的一种特例。

换言之，

在极小值原理中，容许控制的条件放宽了，解决了当控制为有界闭集的容许控制的求解问题，同时，它不再要求**H(u)** 对 **u** 有可微性，

例如，当H(u)为线性函数，或者在容许控制域内，H(u)是单调函数时，由极小值原理求得的最优控制在边界上，但经典变分法却求不出来，极小值原理比经典变分法有更大的应用范围，更具有实用价值。

事实上，上述欧拉方程及横截条件只给出了最优解的必要条件，为使最优解为极小值，还必须满足以下条件：

$$E=\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x},\dot{w},\dot{z}]-\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x}^*,\dot{w}^*,\dot{z}^*]$$

$$-[\dot{x}-\dot{x}^*]^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{x}}-[\dot{w}-\dot{w}^*]^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{w}}-[\dot{z}-\dot{z}^*]^T\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}\geq 0$$

此条件称为维尔斯特拉斯E 函数沿最优轨迹为非负的条件。由于：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\lambda,\frac{\partial\psi}{\partial\dot{w}}=\frac{\partial\psi}{\partial\dot{z}}=0$$

则

$$E=\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x},\dot{w},\dot{z}]-\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x}^*,\dot{w}^*,\dot{z}^*]$$
$$-\lambda^T[\dot{x}-\dot{x}^*]\geq 0$$

即 $$E=\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x},\dot{w},\dot{z}]-\lambda^T\dot{x}$$
$$-\{\psi[x^*,w^*,z^*,\dot{x}^*,\dot{w}^*,\dot{z}^*]-\lambda^T\dot{x}^*\}\geq 0$$

$$E=H[x^*,\lambda^*,\dot{w},t]-H[x^*,\lambda^*,\dot{w}^*,t]\geq 0$$

将 $\dot{w}=u,\dot{w}^*=u^*$代入，则

$$E=H[x^*,\lambda^*,u,t]-H[x^*,\lambda^*,u^*,t]\geq 0$$

由横截条件 $\left.\left\{\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}\mu\right\}\right|_{t_f}=0$

表明在最优轨迹上，$H+\mu g$ 对u(t)而言取得极值，且H取得最小值，此时，增广泛函 J_1 取得极值，也就是使J 取得极值，引入的转换关系并不影响问题的求解，反倒可以将不等式约束及有界控制问题转化为等式约束的鲍尔札问题来求解。

上述极小值原理普遍适用于求解各类最优控制问题。

例8.4.1 已知系统状态方程为 $\dot{x}(t)=x(t)-u(t), x(0)=5$

控制约束为 0.5≤u(t) ≤1，求使性能指标

$J=\int_0^1[x(t)+u(t)]dt$ 为极小值的最优控制及最优轨迹

解：本例为终端时刻固定、终端状态自由的最优控制问题。

依据题意有：

$$\phi[x(t_f),t_f]=0, N[x(t_f),t_f]=0, g=\begin{cases}u-0.5\geq 0\\ 1-u\geq 0\end{cases},$$

$$\dot{x}=x-u=f, L=x+u$$

令

$$H=L+\lambda f=x+u+\lambda(x-u)$$

$$=x(1+\lambda)+u(1-\lambda)$$

$$H = L + \lambda f = x(1+\lambda) + u(1-\lambda)$$

$$g = \{^{u-0.5\geq 0}_{1-u\geq 0}, \dot{x} = x - u = f, L = x + u$$

可见，H(u) 是 u 的线性比例函数，根据极小值原理，求H的绝对极小值相当于求性能指标的极小值，这样，只要使

$u(1-\lambda)$ 为极小即可，而u的上界为1，下界为0.5，故

$$u^*(t) = \{^{1,(\lambda \succ 1)}_{0.5(\lambda \prec 1)}$$

这样可以使H极小。

$\lambda = 1$ 时产生切换。

由伴随方程 $\dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\mu = -\dot{\lambda} \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = -1 - \lambda$

$$\Rightarrow \lambda = ce^{-t} - 1$$

由横截条件 $\left\{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial x}\gamma - \lambda\right\}\Big|_{t_f} = 0$

$$\Rightarrow \lambda(1)=0 \Rightarrow c=e \Rightarrow \lambda(t)=e^{1-t}-1$$

令 $\lambda(t_s)=1$，其中 t_s 为 u(t)的切换时刻，由上式解得

$$t_s=0.307$$

则当 $t_s \le 0.307$ 时，u*=1

当 $t_s \ge 0.307$ 时，u*=0.5

因此由：

$$\dot{x}(t)=x(t)-u(t)$$

得：

$$\dot{x}=\begin{cases} x-1, & 0\le t\le 0.307 \\ x-0.5, & 0.307\le t\le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x=\begin{cases} c'e^{t}+1, & 0\le t\le 0.307 \\ c''e^{t}+0.5, & 0.307\le t\le 1 \end{cases}$$

将 x(0)=5 代入 $x = c'e^t + 1 \Rightarrow c' = 4$

即 $x(t) = 4e^t + 1,\quad (0 \le t_s \le 0.307)$

将 $t_s = 0.307$ 代入上式，求得 $x(0.307) = 6.44$

它是 t≥0.307时的初始状态，将它代入 $x(t) = c''e^t + 0.5$

求得 $c'' = 4.37$

所以：

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \\ 0.5 \end{cases} \quad x^*(t) = \begin{cases} 4e^t + 1, & 0 \le t \le 0.307 \\ 4.37e^t + 0.5, & 0.307 \le t \le 1 \end{cases}$$

例8.4.2 系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t), x_1(0)=1$$

$$\dot{x}_2(t)=x_1(t), x_2(0)=0$$

其中，｜u(t)｜≤1，终端状态自由。求最优控制 u*(t)及性能指标 $J=x_2(1)$ 的极小值。

解：本例控制受约束、终端状态自由、终端时刻固定、性能指标为末值型（梅耶尔型）。由题意有

$$\phi[x(t_f),t_f]=x_2(1), t_f=1, L(x,u,t)=0,$$

$$N[x(t_f),t_f]=0, g(x,u,t)=\begin{cases}1+u(t)\ge 0\\ 1-u(t)\ge 0\end{cases}$$

令哈密顿函数

$$H=L+\lambda f=(\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix}-x_1+u\\ x_1\end{pmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)x_1+\lambda_1 u$$

$$H = L + \lambda f = (\lambda_2 - \lambda_1)x_1 + \lambda_1 u \quad g(x,u,t) = \begin{cases} 1+u(t)\geq 0 \\ 1-u(t)\geq 0 \end{cases}$$

由伴随方程 $\dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\mu = -\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

因此 $\lambda_2(t) = c_2 \qquad \lambda_1(t) = c_1 e^t + c_2$

由横截条件 $\left\{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial x}\gamma - \lambda\right\}\Big|_{t_f} = 0$ 有

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1(t_f)}, \qquad \lambda_2(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2(t_f)}$$

即 $\lambda_1(1)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1(1)}=0, \lambda_2(1)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2(1)}=1$

解得 $c_1=-e^{-1}, c_2=1$ 则 $\lambda_1(t)=1-e^{t-1} \quad \lambda_2(t)=1$

显然 $t\in[0,1)$时， $0\prec\lambda_1(t)\prec 1; \quad t=1$时, $\lambda_1(t)=0$

又 $H=(\lambda_2-\lambda_1)x_1+\lambda_1 u$

根据极小值原理，最优控制 u*(t) 应使哈密顿函数 H(u) 取得极小值，因此为了使H(u) 在｜u(t)｜≤1的约束下达到极小值，显然最优控制应取：

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, t\in[0,1) \\ 0, t=1\end{cases}$$

将最优控制代入状态方程，有 $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 1, x_1(0) = 1$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), x_2(0) = 0$$

解得：$x_1^*(t) = 2e^{-t} - 1$

$$x_2^*(t) = -2e^{-t} - t + 2$$

则 $J_{\min} = x_2(1) = -2e^{-1} + 1 = 0.2642$