例8-2 多元函数

$$J=f(x)=2x_1^2+5x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3-6x_2+3$$

求J的极值点及极值。

解：由极值的必要条件 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ 有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=4x_1+2x_3=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=10x_1+2x_3-6=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2x_1+2x_2+2x_3=0$$

解方程组得：$x_1^*=1, x_2^*=1, x_3^*=-2$

极值点为：$x^*=(1,1,-2)$

极值为：$J^*=f(x^*)=0$

例8-9：$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\dot{x}^2-x^2]dt$，已知 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=2$

求J的极值轨迹x*(t)。

解：$L=\dot{x}^2-x^2$ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x}=-2x$ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}$

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\ddot{x}$ 代入 欧拉方程 $\rightarrow \dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$

有：$\ddot{x}+x=0$ 其通解为 $x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$

将 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=2$ 代入上式

解得 $c_1=0, c_2=2$ 则有 $x^*(t)=2\sin t$

例8-10：已知受控系统的微分方程为 $\dot{x}=u$

已知的边界为X_0，X_f，求使 $J=\int_0^{t_f}(x^2+u^2)dt$ 取得极值的u*(t)。

解：$L=x^2+u^2$ $\quad u=\dot{x}$

由欧拉方程 $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$ 有

$$\ddot{x}-\dot{x}=0\,(\lambda_{1,2}=\pm 1)$$

通解为：$x(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}$

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$t = 0$时, $c_1 + c_2 = x_0$

$t = t_f$时, $c_1 e^{t_f} + c_2 e^{-t_f} = x_0$

解得: $c_1 = \dfrac{x_f - x_0 e^{-t_f}}{e^{t_f} - e^{-t_f}}$

$c_2 = -\dfrac{x_f - x_0 e^{t_f}}{e^{t_f} - e^{-t_f}}$

则:

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

$$u^*(t) = \dot{x}(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$$

例8-11: 求泛函 $J(x_1, x_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)dt$

在条件 $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $x_2(\frac{\pi}{2}) = -1$ 下的极值曲线

解：本例为求解含有双变量的系统的泛函极值问题。

这时的欧拉方程为：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0$$

被积函数为 $L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$

被积函数为 $L = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$

因此

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 2\ddot{x}_2$$

此时欧拉方程为：

$$\ddot{x}_1 - x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - x_1 = 0$$

将第一个方程两次求导,代入第二个方程:

得 $x_1^{(4)} - x_1 = 0$ 其解为：

$$x_1 = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

对其2次求导得

$$x_2 = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t$$

利用给定的端点条件求得 $c_1 = c_2 = c_3 = 0, c_4 = 1$

因此泛函的极值曲线为

$$x_1 = \sin t$$

$$x_2 = -\sin t$$

注意：t 的取值范围！

例8-13求使泛函 $J=\int_1^2[\dot{x}^2+x^2]dt$ 取得极值的最优轨迹 **x*(t)**

，$x(1), x(2)$ 均不定。

解：$L=\dot{x}^2+x^2,\ \frac{\partial L}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x},\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\ddot{x}$ **代入欧拉方程**

$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0,$ 即 $2x-2\ddot{x}=0$ 通解为 $x(t)=ae^{t}+be^{-t}$

则 $\dot{x}(t)=ae^{t}-be^{-t}$ $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}=2ae^{t}-2be^{-t}$

由 $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_0}=0$ 得 $a=be^{-2}$

由 $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0$ 得 $a=be^{-4}$

则 $a=b=0$

因此：$x^*(t)=0$

例8-14: **求使以下性能指标泛函取极值的轨迹 x*(t)，要求 x*(0)=0, x*(1)任意。**

$$J=\int_0^1[\dot{x}^2+\dot{x}^3]dt$$

解：本例为始端固定，终端自由，两端时刻固定的问题。

由题意得：$L=\dot{x}^2+\dot{x}^3$

由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})=0$ 有

$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}+3\dot{x}^2)=0$ 即 $2\dot{x}+3\dot{x}^2=$常数

则 $\dot{x}=$常数 令：$x=at+b$

由 $x(0)=0\Rightarrow b=0\Rightarrow x(t)=at\Rightarrow \dot{x}(t)=a$

由终端横截条件 $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{t_f}=0$ 得 $\left.(2\dot{x}+3\dot{x}^2)\right|_{t_f=1}=0$

则 $2a+3a^2=0\Rightarrow a=0, a=-2/3$

当 $a=0$ 时，$x(t)=0, J=0$

当 $a=-2/3$ 时，$x(t)=-\frac{2}{3}t, J=\frac{4}{27}$

例8-14： 已知 x(0)=1，$x(t_f)=C(t_f)=2-t_f$，t_f 待定。求使性能指标泛函为极值的最优轨迹 $x^*(t), t_f^*, J^*$

$$J=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$$

解：本例为始端固定，终端受约束，终端时刻自由的问题。

依题意有，$L=\sqrt{1+\dot{x}^2}$

由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$ 有 $-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]=0$

则 $$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=c$$

$$\dot{x}^2=\frac{c^2}{1-c^2}=a^2\Rightarrow\dot{x}=a\Rightarrow$$

$x=at+b$ 由x(0)=1得 b=1 $x=at+1$

$$\{L(x,\dot{x},t)+[\dot{C}(t)-\dot{x}(t)]\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\}\Big|_{t_f}=0\Rightarrow$$

$$\left[\sqrt{1+\dot{x}^2}+(-1-\dot{x})\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]_{t=t_f}=0$$

解得 $\dot{x}(t_f)=1$ 又 $\dot{x}=a$ 故 $a=1$

从而最优曲线为 $x^*(t)=t+1$

又 $x(t_f)=C(t_f)=2-t_f=t_f+1$ 故 $t_f^*=0.5$

$$J^*=\sqrt{2}/2=0.707$$

例8-15： 假设人造地球卫星姿态控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=f(x,u,t)=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ u(t)\end{bmatrix}$$

初始状态为 $x(0)=(1\ \ 1)^T$，终端状态为 $x(2)=(0\ \ 0)^T$

求能量最优控制规律 u*(t)，以使系统在姿态调整过程中的能量消耗最小。

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

解：$L=\frac{1}{2}u^2(t)$，$f=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ u(t)\end{bmatrix}$

令 $\lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$（列矢量）

则：

$$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+[\lambda_1\ \ \lambda_2]\begin{bmatrix}x_2\\ u\end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$$

① 由 $\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{\lambda}_i^T=0$ 得

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\quad\Rightarrow\lambda_1=a\,(\text{cons tan }t)$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1,\quad\Rightarrow\lambda_2=-at+b$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ u(t)\end{bmatrix}\qquad H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

$$\lambda_2=-at+b$$

②由：$\frac{\partial H}{\partial u_i}=0$ 得 $u+\lambda_2=0$，则 $u=at-b$

③由状态方程，有 $\dot{x}_2=u,\quad \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}at^2-bt+c$

$\dot{x}_1=x_2,\quad \Rightarrow x_1=\frac{1}{6}at^3-\frac{1}{2}bt^2+ct+d$

④由初始条件，有

$x_1(0)=1,\Rightarrow d=1\qquad x_1(2)=0,\Rightarrow \frac{4}{3}a-2b+3=0$

$x_2(0)=1,\Rightarrow c=1\qquad x_2(2)=0,\Rightarrow 2a-2b+1=0$

$\Rightarrow a=3,b=3.5$

所以：

$$u^*(t)=\dot{x}_2=at-b=3t-3.5$$

$$x^*_1(t)=\frac{1}{2}t^3-\frac{7}{4}t^2+t+1$$

$$x^*_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{2}t+1$$

例8-16: 条件如例8-15，只是终态改为 $x_1(2)=0,x_2(2)$ 自由，求使 J 取得极值的最优控制及最优轨迹。

解：$L=\frac{1}{2}u^2(t)$，$f=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ u(t)\end{bmatrix}$ 令 $\lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}$

则：$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+[\lambda_1\quad \lambda_2]\begin{bmatrix}x_2\\ u\end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

构造新的性能泛函：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T(t)[f(x,u,t)-\dot{x}(t)]\}dt$$

则 $J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)]dt$

$$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+[\lambda_1\quad \lambda_2]\begin{bmatrix}x_2\\ u\end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

①由 $\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T=0$

得 $\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$ 则 $\lambda_1=a$（常数）

$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1$ 则 $\lambda_2=-at+b$（常数）

②由 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$

得 $u+\lambda_2=0$ 则 $u=at-b$

③由状态方程，有

$$\dot{x}_2 = u, \quad u = at - b \quad 则\ x_2 = \frac{1}{2}at^2 - bt + c$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad 则\ x_1 = \frac{1}{6}at^3 - \frac{1}{2}bt^2 + ct + d$$

$t = 0$时，$x_1(0) = 1, \Rightarrow d = 1$

$x_2(0) = 1, \Rightarrow c = 1$

$t = 2$时，$x_1(2) = 0, \Rightarrow \frac{4}{3}a - 2b + 3 = 0$

④由横截条件

$$\lambda^T \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

$$= (\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix}\delta x_1 \\ \delta x_2\end{pmatrix}\Big|_{t_0}^{t_f} = (\lambda_1 \delta x_1 + \lambda_2 \delta x_2)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$= \lambda_1(t_f)\delta x_1(t_f) + \lambda_2(t_f)\delta x_2(t_f) - \lambda_1(t_0)\delta x_1(t_0) - \lambda_2(t_0)\delta x_2(t_0)$$

$$= \lambda_1(2)\delta x_1(2) + \lambda_2(2)\delta x_2(2) - \lambda_1(0)\delta x_1(0) - \lambda_2(0)\delta x_2(0)$$

因 $\delta x_1(0) = \delta x_2(0) = \delta x_1(2) = 0$,

$\delta x_2(2) \neq 0$ （因x_2（2）自由）

则必有 $\lambda_2(2) = 0$ 而 $\lambda_2 = -at + b$ 则有 $b = 2a$

又 $\frac{4}{3}a - 2b + 3 = 0 \quad \therefore a = \frac{9}{8}, b = \frac{9}{4}$

所以：

$$u^*(t) = \dot{x}_2 = at - b = \frac{9}{8}t - \frac{9}{4}$$

$$x_1^*(t) = \frac{3}{16}t^3 - \frac{9}{8}t^2 + t + 1$$

$$x_2^*(t) = \frac{9}{16}t^2 - \frac{9}{4}t + 1$$

注意时间

例8-17：已知系统状态方程为 $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = u(t)$

初始状态 $x_1(0) = x_2(0) = 0$，系统状态从初态开始转移，在 $t_f = 1$ 时，转移到目标集 $x_1(1) + x_2(1) = 1$

求使性能指标泛函 $J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$ 为最小的最优控制 u*(t) 及最优轨迹 x*(t)。

解：本例终端时刻固定，终端状态受约束。由题意有

$$\phi[x(t_f), t_f] = 0, \quad N[x(t_f), t_f] = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$$

令 $\lambda(t) = \begin{bmatrix}\lambda_1(t) \\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}^T$，$L = \frac{1}{2}u^2(t)$，$f = \begin{bmatrix}x_2(t) \\ u(t)\end{bmatrix}$

$$H = L + \lambda^T f = \frac{1}{2}u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2]\begin{bmatrix}x_2 \\ u\end{bmatrix} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由 $\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T=0$ 得 $\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0, \lambda_1=a$（常数）

及 $\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1, \lambda_2=-at+b$（常数）

由 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 得 $u+\lambda_2=0$，则 u=at−b

由 $\dot{x}_2(t)=u(t)$ 得 $x_2(t)=\frac{1}{2}at^2-bt+c$

由 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$ 得 $x_1(t)=\frac{1}{6}at^3-\frac{1}{2}bt^2+ct+d$

由 $x_1(0)=x_2(0)=0$ 得 c=d=0

由 $x_1(1)+x_2(1)=1$ 得 $\frac{1}{6}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a-b=1$ 即 4a−9b=6

由 $\lambda(t_f)=\frac{\partial\phi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial N}{\partial x(t_f)}\gamma$ 得 $\lambda(t_f)=\frac{\partial N}{\partial x(t_f)}\gamma$

即 $\lambda_1(t_f)=\frac{\partial N}{\partial x_1(t_f)}\gamma$ ， $\lambda_2(t_f)=\frac{\partial N}{\partial x_2(t_f)}\gamma$

也即 $\lambda_1(1)=\frac{\partial N}{\partial x_1(1)}\gamma$ ， $\lambda_2(1)=\frac{\partial N}{\partial x_2(1)}\gamma$

又 $N[x(t_f)]=0=x_1(1)+x_2(1)-1$

故 $\lambda_1(1)=\frac{\partial N}{\partial x_1(1)}\gamma=\gamma$， $\lambda_2(1)=\frac{\partial N}{\partial x_2(1)}\gamma=\gamma$

即 $\lambda_1(1)=\lambda_2(2)=\gamma$

又 $\lambda_1(t)=a, \lambda_2(t)=-at+b$ 则 $\lambda_1(1)=a=\lambda_2(1)=-a+b$

由 4a−9b=6 及 $-2a+b=0$ 得 $a=-\frac{3}{7}, b=-\frac{6}{7}$

则 $u^*(t)=-\frac{3}{7}t+\frac{6}{7}$

$x_1^*(t)=-\frac{1}{14}t^3+\frac{3}{7}t^2$

$x_2^*(t)=-\frac{3}{14}t^2+\frac{6}{7}t$

例8-18： 已知系统动态方程为 $\dot{x}(t)=u(t)$ ， 且 x(0)=1， 要求 $x(t_f)=0$ 且使 $J=t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2(t)dt$ 为极小的最优轨迹 x*(t)、 最优控制u*(t)、 最优时刻 t_f^* 及J*。

解： 这是终端时刻自由、终端状态固定的鲍尔札问题， 依题意有

$\phi[t_f]=t_f$， $N[x(t_f)]=0$， $L=\frac{1}{2}u^2(t)$， $f=\dot{x}(t)=u(t)$

令 $H=L+\lambda f=\frac{1}{2}u^2+\lambda u$

由 $\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}=0$ 得 $\dot{\lambda}=0\Rightarrow\lambda=a$(常数)

由 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 得 $u+\lambda=0\Rightarrow u=-a$

由 $\dot{x}(t)=u(t)$ 得 $x(t)=-at+b$

由 x(0)=1 得 b=1， x(t)=1-at

由 $x(t_f)=0$ 得 $1-at_f=0$， 即 $t_f=\frac{1}{a}\succ 0$ (a应＞0)

由 $H(t_f)=-\frac{\partial\phi}{\partial t_f}$ 有 $\frac{1}{2}u^2(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial N}{\partial t_f}$ 即

$\frac{1}{2}a^2-a^2=-1\Rightarrow a=\sqrt{2}$(取正值)

则 $x*(t)=-\sqrt{2}t+1$

$u*(t)=-\sqrt{2}$

$t_f^*=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $J^*=t_f^*+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(\sqrt{2})^2dt=\sqrt{2}$

例8-19： 已知系统的状态方程为 $\dot{x}=-x(t)+u(t)$ ，初始状态为 $x(0)=1$，终端状态为 $x(t_f)=0$， t_f 待定， 试求最优控制 u*(t)，使系统由初态转移到终态，并在转移过程中使性能指标 $J=\int_0^{t_f}(x^2+u^2+2)dt$ 取得极值。

解：这是终端时刻自由、终端状态固定的泛函求极值的问题。依题意，有

$$L=x^2+u^2+2,\quad f=\dot{x}=-x+u,\quad \phi=0,\quad N=0$$

$$H=L+\lambda f=x^2+u^2+2-\lambda x+\lambda u$$

由 $\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}=0\Rightarrow\dot{\lambda}=-2x+\lambda$

由 $\frac{\partial H}{\partial u}=0\Rightarrow u=-\frac{1}{2}\lambda$

由 $\dot{x}=-x(t)+u(t)\Rightarrow\dot{x}=-x-\frac{1}{2}\lambda$ 则

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}$$ 解得：

$$x(t)=ae^{-\sqrt{2}t}+be^{\sqrt{2}t}$$

$$\lambda(t)=2(\sqrt{2}-1)ae^{-\sqrt{2}t}-2(\sqrt{2}+1)be^{\sqrt{2}t}$$

由 $x(0)=1$ 得 $a+b=1$ ①

由 $x(t_f)=0$ 得 $ae^{-\sqrt{2}t_f}+be^{\sqrt{2}t_f}=0$ ②

由 $H(t_f)=-\frac{\partial\phi}{\partial t_f}=0$ 得

$H(t_f)=x^2(t_f)+u^2(t_f)+2-\lambda(t_f)x(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=0$ ③

上述三式①②③解得

$$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}),\quad b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}),\quad t_f^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

所以：

$$x^*(t)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}+\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}$$

$$u^*(t)=-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}t}-\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}t}$$

例8-4-1 已知系统状态方程为 $\dot{x}(t)=x(t)-u(t), x(0)=5$

控制约束为0.5≤u(t) ≤1， 求使性能指标

$J=\int_0^1[x(t)+u(t)]dt$ 为极小值的最优控制及最优轨迹。

解：本例为终端时刻固定、终端状态自由的最优控制问题。

依据题意有：

$\phi[x(t_f),t_f]=0, N[x(t_f),t_f]=0, g=\{{}^{u-0.5\ge 0}_{1-u\ge 0},$

$\dot{x}=x-u=f, L=x+u$

令 $H=L+\lambda f=x+u+\lambda(x-u)$

$=x(1+\lambda)+u(1-\lambda)$

$H=L+\lambda f=x(1+\lambda)+u(1-\lambda)$

$g=\{{}^{u-0.5\ge 0}_{1-u\ge 0}, \dot{x}=x-u=f, L=x+u$

可见，H(u) 是 u 的线性比例函数，根据极小值原理，求H的绝对极小值相当于求性能指标的极小值，这样，只要使

$u(1-\lambda)$ 为极小即可，而u的上界为1，下界为0.5，故

$u^*(t)=\begin{cases}1,(\lambda\succ 1)\\0.5(\lambda\prec 1)\end{cases}$

这样可以使H极小。

$\lambda=1$ 时产生切换。

由伴随方程 $\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\mu=-\dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda}=-1-\lambda$

$\Rightarrow \lambda=ce^{-t}-1$

由横截条件 $\{\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial x}\gamma-\lambda\}\Big|_{t_f}=0$

$\Rightarrow \lambda(1)=0 \Rightarrow c=e \Rightarrow \lambda(t)=e^{1-t}-1$

令 $\lambda(t_s)=1$，其中 t_s 为 u(t)的切换时刻，由上式解得

$t_s=0.307$

则当 $t_s\le 0.307$ 时，u*=1

当 $t_s\ge 0.307$ 时，u*=0.5

因此由：$\dot{x}(t)=x(t)-u(t)$

得：$\dot{x}=\begin{cases}x-1, & 0\le t\le 0.307\\x-0.5, & 0.307\le t\le 1\end{cases} \Longrightarrow$

$x=\begin{cases}c'e^t+1, & 0\le t\le 0.307\\c''e^t+0.5, & 0.307\le t\le 1\end{cases}$

将 x(0)=5 代入 $x = c'e^t + 1 \Rightarrow c' = 4$

即 $x(t) = 4e^t + 1, \quad (0 \le t_s \le 0.307)$

将 $t_s = 0.307$ 代入上式，求得 $x(0.307) = 6.44$

它是 t≥0.307时的初始状态，将它代入 $x(t) = c''e^t + 0.5$

求得 $c'' = 4.37$

所以：

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 \\ 0.5 \end{cases} \quad x^*(t) = \begin{cases} 4e^t + 1, & 0 \le t \le 0.307 \\ 4.37e^t + 0.5, & 0.307 \le t \le 1 \end{cases}$$

例8-4-2 系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t), x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t), x_2(0) = 0$$

其中，｜u(t)｜≤1，终端状态自由。求最优控制 u*(t)及性能指标 $J = x_2(1)$ 的极小值。

解：本例控制受约束、终端状态自由、终端时刻固定、性能指标为末值型（梅耶尔型）。由题意有

$$\phi[x(t_f), t_f] = x_2(1), t_f = 1, L(x, u, t) = 0,$$

$$N[x(t_f), t_f] = 0, g(x, u, t) = \begin{cases} 1 + u(t) \ge 0 \\ 1 - u(t) \ge 0 \end{cases}$$

令哈密顿函数

$$H = L + \lambda f = (\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix} -x_1 + u \\ x_1 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)x_1 + \lambda_1 u$$

$$H = L + \lambda f = (\lambda_2 - \lambda_1)x_1 + \lambda_1 u \qquad g(x, u, t) = \begin{cases} 1 + u(t) \ge 0 \\ 1 - u(t) \ge 0 \end{cases}$$

由伴随方程 $\dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}\mu = -\dot{\lambda} \quad \Rightarrow \dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

因此 $\lambda_2(t) = c_2 \qquad \lambda_1(t) = c_1 e^t + c_2$

由横截条件 $\left\{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial x}\gamma - \lambda\right\}\Big|_{t_f} = 0$ 有

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1(t_f)}, \quad \lambda_2(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2(t_f)}$$

即 $\lambda_1(1)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_1(1)}=0,\ \lambda_2(1)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_2(1)}=1$

解得 $c_1=-e^{-1}, c_2=1$ 则 $\lambda_1(t)=1-e^{t-1}\quad \lambda_2(t)=1$

显然 $t\in[0,1)$时， $0\prec\lambda_1(t)\prec 1;\quad t=1$时, $\lambda_1(t)=0$

又 $H=(\lambda_2-\lambda_1)x_1+\lambda_1 u$

根据极小值原理，最优控制 u*(t) 应使哈密顿函数 H(u) 取得极小值，因此为了使H(u) 在｜u(t)｜≤1的约束下达到极小值，显然最优控制应取：

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, t\in[0,1)\\ 0, t=1\end{cases}$$

将最优控制代入状态方程，有 $\dot{x}_1(t)=-x_1(t)-1, x_1(0)=1$

$\dot{x}_2(t)=x_1(t), x_2(0)=0$

解得：

$$x_1^*(t)=2e^{-t}-1$$

$$x_2^*(t)=-2e^{-t}-t+2$$

则 $J_{\min}=x_2(1)=-2e^{-1}+1=0.2642$

例8-4-3 系统状态方程及初始条件为 $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t), x(0)=10$

性能指标为 $J=\dfrac{1}{2}\int_0^1(x^2+u^2)dt$ 对下列情况求最优控制使性能指标取得极值：

（1） u(t)无约束；

（2） ｜u(t)｜≤0.3。

解：本例终端状态自由、终端时刻固定、性能指标为积分型（拉格朗日型）。由题意有

$$\phi[x(t_f),t_f]=0, t_f=1, L(x,u,t)=\frac{1}{2}(x^2+u^2),$$

令哈密顿函数

$$H=L+\lambda f=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u)$$

$$H = L + \lambda f = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

（1） u(t) 无约束

由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 有 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \Rightarrow u^*(t) = -\lambda(t)$

由协态方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ 有 $\dot{\lambda} = -x + \lambda$

由状态方程 $\dot{x}(t) = -x + u = -x - \lambda$ 有 $\ddot{x} = -(\dot{x} + \dot{\lambda})$

将状态方程与协态方程相加，得 $(\dot{x} + \dot{\lambda}) = -2x$

故 $\ddot{x} - 2x = 0$

解得 $x(t) = ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t}$

则由状态方程有

$$\lambda = -x - \dot{x} = -(1 + \sqrt{2})ae^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2} - 1)be^{-\sqrt{2}t}$$

由边界条件 x(0)=10，得 $a + b = 10$ ①

由横截条件 $\lambda^T \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$ 得 $\lambda(t_f)\delta x(t_f) - \lambda(t_0)\delta x(t_0) = 0$

即 $\lambda(t_f) = 0 = \lambda(1)$ 则

$$\lambda(1) = -(1 + \sqrt{2})ae^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1)be^{-\sqrt{2}} = 0 \quad ②$$

解①②得 $a = 0.1, b = 9.9$ 故

$$x^*(t) = 0.1e^{\sqrt{2}t} + 9.9e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u^*(t) = \dot{x}^* + x^* = 0.24e^{\sqrt{2}t} - 4.1e^{-\sqrt{2}t} = -\lambda^*(t)$$

（2）u(t)受约束， ｜u(t)｜≤0.3 $g(x,u,t)=\begin{cases}u+0.3\ge 0\\ 0.3-u\ge 0\end{cases}$

$\phi[x(t_f),t_f]=0, t_f=1 \quad N[x(t_f),t_f]=0, t_f=1$

由于 $H=L+\lambda f=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u)$

$=\frac{1}{2}x^2-\lambda x-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}(u+\lambda)^2$

由横截条件 $\{\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}\mu\}\Big|_{t_f}=0 \Rightarrow [u(t)+\lambda(t)]\Big|_{t_f}=0$ 即

$u(1)=-\lambda(1)$

由横截条件 $\{\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial x}\gamma-\lambda\}\Big|_{t_f}=0$ 有 $\lambda(1)=0$

因此 $u^*(1)=0 \quad (t=1)$

$H=\frac{1}{2}x^2-\lambda x-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}(u+\lambda)^2$

根据极小值原理，最优控制应使H取得绝对极小值，故U的取值符号应与λ 相反，考虑到U的取值范围，有

$u^*(t)=\begin{cases}-0.3, & \lambda\succ -0.3 \quad (0\le t\prec 1)\\ 0, & \lambda\prec -0.3 \quad (t=1)\end{cases}$

则由状态方程 $\dot{x}(t)=\begin{cases}-x-0.3\\ -x\end{cases} \Rightarrow x(t)=\begin{cases}Ae^{-t}-0.3\\ Be^{-t}\end{cases}$

代入边界条件 x(0)=10，得 $A=10.3 \quad B=10$

则 $u^*(t)=\begin{cases}-0.3\\ 0\end{cases} \quad x^*(t)=\begin{cases}10.3e^{-t}-0.3 & (0\le t\prec 1)\\ 10e^{-t} & (t=1)\end{cases}$

例8-4-4已知二阶系统 $\dot{x}_1(t)=x_2(t), \dot{x}_2=u(t), x_1(0)=x_2(0)=0$

终端状态 $x_1(t_f)=x_2(t_f)=1/4, t_f$待定，控制约束 $|u(t)|\le 1$

求使性能指标取得极小值的最优控制。$J=\int_0^{t_f}u^2dt$

解：本例两端状态固定、终端时刻自由、控制受约束的问题

$\phi[x(t_f),t_f]=0, \quad N[x(t_f),t_f]=0, g(x,u,t)=\begin{cases}1+u(t)\ge 0\\ 1-u(t)\ge 0\end{cases}$

$L=u^2, f=\begin{pmatrix}x_2\\ u\end{pmatrix}$

构造哈密顿函数H：

$H=L+\lambda f=u^2+(\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix}x_2\\ u\end{pmatrix}=u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

$=(u+\frac{1}{2}\lambda_2)^2+\lambda_1 x_2-\frac{1}{4}\lambda_2^2$

$$H=L+\lambda f=(u+\frac{1}{2}\lambda_2)^2+\lambda_1 x_2-\frac{1}{4}\lambda_2^2$$

则由极小值原理，最优控制的取值应该是：
$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & \lambda_2(t)\succ 2\\ -\frac{1}{2}\lambda_2(t), & |\lambda_2(t)|\le 2\\ +1, & \lambda_2(t)\prec -2\end{cases}$$

由横截条件 $\{\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial u}\mu\}\Big|_{t_f}=0$ 有

$2u(t_f)+\lambda_2(t_f)=0$ 即 $u(t_f)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t_f)\quad (t=t_f)$

由于H 不显含 t，终端时刻自由，则H 沿最优轨迹恒为0。

即 $H(0)=u^2(0)+\lambda_1(0)x_2(0)+\lambda_2(0)u(0)=0$

因为 $x_2(0)=0$ 则 $[u(0)+\lambda_2(0)]u(0)=0$

可以断定 u*(0)=0，否则 $u^*(0)=-\lambda_2(0)$，这与 $u^*(0)=-\frac{1}{2}\lambda_2(0)$ 相矛盾。

由 $\{\frac{\partial\phi}{\partial t_f}+\frac{\partial N}{\partial t_f}\gamma+H\}\Big|_{t_f}=0$ 有

$$H(t_f)=u^2(t_f)+\lambda_1(t_f)x_2(t_f)+\lambda_2(t_f)u(t_f)=0$$

又 $u(t_f)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t_f)$

则 $\frac{1}{4}\lambda_2^2(t_f)+\frac{1}{4}\lambda_1(t_f)-\frac{1}{2}\lambda_2^2(t_f)=0$

$$\Longrightarrow \lambda_2^2(t_f)=\lambda_1(t_f)\succ 0$$

由协态方程 $\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\mu=-\dot\lambda \quad\Longrightarrow\quad \dot\lambda=-\frac{\partial H}{\partial x}$

$$H=L+\lambda f=(u+\frac{1}{2}\lambda_2)^2+\lambda_1 x_2-\frac{1}{4}\lambda_2^2$$

即：$\dot\lambda_1(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\ \dot\lambda_2(t)=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1(t)$

故 $\lambda_1(t)=a\succ 0,\quad \lambda_2(t)=-at+b$

因 $u^*(0)=-\frac{1}{2}\lambda_2(0)=0$ 有 $b=0$ 故 $\lambda_2(t)=-at\prec 0$

因此，最优控制应该取：$u(t)\succ 0$

$$u^*(t)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\lambda_2(t), & |\lambda_2(t)|\le 2\\ +1, & \lambda_2(t)\prec -2\end{cases}\quad 即\quad u^*(t)=\begin{cases}\frac{a}{2}t, & |\lambda_2(t)|\le 2\\ 1, & \lambda_2(t)\prec -2\end{cases}$$

由状态方程 $\dot{x}_2 = u = \begin{cases} \frac{a}{2}t, & |\lambda_2(t)| \le 2 \\ 1, & \lambda_2(t) \prec -2 \end{cases}$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

解得:

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}at^2 + c \\ t + c' \end{cases} \qquad x_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{12}at^3 + ct + d \\ \frac{1}{2}t^2 + c't + c'' \end{cases}$$

代入初始条件，解得 $c = d = c' = c'' = 0$

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{12}at^3 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}at^2 \\ t \end{cases}$$

对于第一种情况：

由终端状态约束有 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = \frac{1}{4} = \frac{1}{12}at_f^3 = \frac{1}{4}at_f^2$

求得 $a = \frac{1}{9}, t_f^* = 3$ 即 $\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{108}t^3 \\ x_2(t) = \frac{1}{36}t^2 \end{cases}$

对于第二种情况：

由终端状态约束有 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}t_f^2 = t_f$

求得 $t_f^* = 2$ $\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 \\ x_2(t) = t \end{cases}$

但此时 $u^*(t) = 1$, 且要求 $\lambda_2(t) = -at = -\frac{1}{9}t \prec -2$

即要求 $t \succ 18$ 这与 $t_f^* = 2$ 相矛盾，所以第二种情况不存在。

故最优控制为： $u^*(t) = \frac{1}{2}at = \frac{1}{18}t \qquad t_f^* = 3$

最优轨迹为： $\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{1}{108}t^3 \\ x_2^*(t) = \frac{1}{36}t^2 \end{cases}$