

# 第4讲 线性系统能控性与能观性分析

在现代控制论中，用状态方程和输出方程来描述系统的**内部状态**变化规律，其中，状态是被控量，输出只是状态的线性组合。因此，人们自然会关心：

① “是否系统的所有状态变量都能被**输入量控制**” - **可(能) 控性问题**。

同时，如果系统的某些状态变量不能被**直接测量**，

② “能否由**输出量的观测值**来确定系统的所有状态” - **可(能) 观性问题**。

可控性和可观性是由状态空间描述系统而引出的新概念，是由**卡尔曼**于1960年提出的，在现代控制系统的分析与综合中占有重要位置，也是许多最优控制问题、最优估计问题的**解的存在条件**。

但在经典控制论中，用**微分方程或传递函数描述系统**，只要系统稳定，系统就能被输入量控制，同时，系统的输出也是可以观测的，因此不存在可控性和可观性问题。

## 4.1 线性定常连续系统的可控性

### 4.1.1 可控性的定义

#### 1. 线性连续定常系统的可控性定义

线性连续定常系统:  $\dot{x} = Ax + Bu$

如果存在一个分段连续的输入  $u(t)$ , 能在有限时间区间  $[t_0, t_f]$  内, 使系统由某一初始状态  $x(t_0)$ , 转移到指定的任一终端状态  $x(t_f)$ , 则称此状态是可控的。若系统的所有状态都是可控的, 则称此系统是状态完全可控的, 或简称系统是可控的。

几点说明:

1) 在线性定常系统中, 为简便计, 可以假定初始时刻  $t_0 = 0$ , 初始状态为  $x(0)$ , 而任意终端状态就指定为零状态。即  $x(t_f) = 0$

2) 也可以假定  $x(t_0) = 0$ , 而  $x(t_f)$  为任意终端状态, 换句话说, 若在一个无约束控制作用  $u(t)$ , 在有限时间  $[t_0, t_f]$  内, 能将  $x(t)$  由零状态驱动到任意  $x(t_f)$ 。在这种情况下, 称为状态的能达性。

3)在讨论可控性问题时，控制作用从理论上说是无约束的，其取值并非唯一的，因为我们关心的只是它能否将  $x(t_0)$  驱动到  $x(t_f)$ ，而不计较的轨迹如何。

如图所示的电桥，当电桥不平衡时，系统的状态  $i_l, u_c$  将随  $u(t)$  的变化而变化，即此时系统的所有状态都能被控制，因而系统完全可控；

当电桥平衡时， $u_c=0$ ，无论控制量如何改变，它都不变，即不能达到所需的状态，因而系统不可控。（结构的对称性妨碍系统可控性）

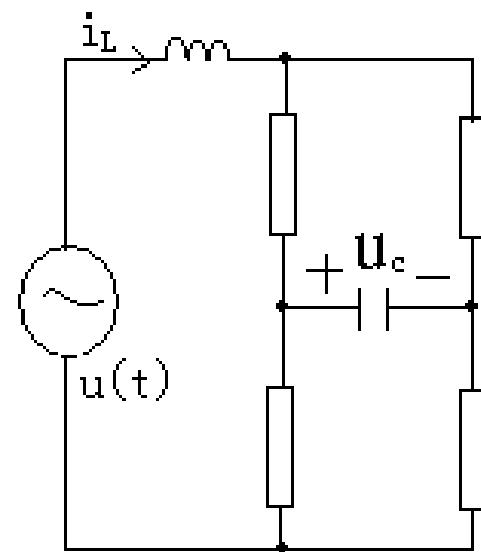


图4-1电桥电路

## 4.1.2 线性定常系统的可控性判别

### 一、状态可控性判断

对连续系统  $\dot{x} = Ax + Bu$       **n** 个状态, **m** 个输入, **r** 个输出

$$y = Cx + Du$$

不失一般性, 设初态  $x(t_0) = x(0)$ , 若系统**完全可控**, 则可设终态  $x(t_f) = 0$   
由其解

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

得:

$$x(t_f) = e^{At_f} x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau = 0$$

则

$$x(0) = -e^{-At_f} \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

由**凯莱-哈密顿定理及其推论**,  $e^{At}$  可表示为**A**的 **n-1** 次多项式, 则

$$\begin{aligned}
x(0) &= -\int_0^{t_f} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \\
&= -\int_0^{t_f} \left[ \sum_{m=0}^{n-1} \alpha'_m(\tau) A^m \right] Bu(\tau) d\tau \\
&= -\sum_{m=0}^{n-1} \left[ \int_0^{t_f} \alpha'_m(\tau) A^m Bu(\tau) d\tau \right] \\
&= -\sum_{m=0}^{n-1} \left[ A^m B \int_0^{t_f} \alpha'_m(\tau) u(\tau) d\tau \right]
\end{aligned}$$

令  $\mu_m = \int_0^{t_f} \alpha'_m(\tau) u(\tau) d\tau$  （标量）

则 
$$\begin{aligned}
x(0) &= -\sum_{m=0}^{n-1} A^m B \mu_m \\
&= -[B\mu_0 + AB\mu_1 + A^2B\mu_2 + \cdots A^{n-1}B\mu_{n-1}]
\end{aligned}$$

$$x(0) = - \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \\ \text{(nx1)} & \text{(nxm)} & \text{(nxm)} & \dots & \text{(nxm)} \\ & \text{nx(nxm)} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \end{bmatrix}$$

根据方程的解的存在定理，既然 $x(0)$ 已知，则

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{可控性矩阵}) \text{ 的秩必为 } n;$$

当 $m=1$ 即单输入时， $M$ 必然为**非奇异矩阵**，且逆矩阵存在。

这说明：

若系统完全可控，则其可控性矩阵  $M$  的秩必为  $n$ ，即

矩阵的**秩**=矩阵中最大的不等于0的行列式的阶数。

$$\text{Rank}M = \text{Rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

反过来，若  $\text{Rank}M=n$ ，也可以得出  $x(t_f) = 0$

因此，**系统完全可控的充要条件是：其可控性矩阵 $M$ 的秩为  $n$ 。**

## 二、输出可控性判断

有时要研究系统输出可控性。

定义：在有限的时间间隔  $t \in [t_0, t_f]$  内，存在无约束的分段连续控制量  $u(t)$ ，能使任意初始输出  $y(t_0)$  转移到任意终端输出  $y(t_f)$ ，则系统输出可控。

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

n个状态, m个输入, r个输出

$$y = Cx + Du$$

初始时刻  $t_0$ , 终端时刻  $t_f$ , 终端时刻的解为

$$x(t_f) = e^{At_f} x(0) + \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$$y(t_f) = Cx(t_f) + Du(t_f)$$

( $r \times 1$ )

$$= Ce^{At_f} x(0) + C \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t_f)$$

为不失一般性，假设任意的终态输出为  $y(t_f) = 0$



$$\underset{(\text{rx1})}{Ce^{At_f} x(0)} = -C \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau - Du(t_f)$$

$$= -C \int_0^{t_f} \left[ \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m(\tau) A^m \right] Bu(\tau) d\tau - Du(t_f)$$

$$= -C \left[ \sum_{m=0}^{n-1} A^m B \int_0^{t_f} [\alpha_m(\tau) u(\tau) d\tau] - Du(t_f) \right]$$

$$\text{令 } \mu_m = \int_0^{t_f} \alpha_m(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\text{则 } \underset{(\text{rx1})}{Ce^{At_f} x(0)} = -C \left[ \sum_{m=0}^{n-1} A^m B \mu_m \right] - Du(t_f)$$

$$C e^{A t_f} x(0) = -C \left[ \sum_{m=0}^{n-1} A^m B \mu_m \right] - D u(t_f)$$

(rx1)

$$= -[CB \quad CAB \quad CA^2 B \quad \dots \quad CA^{n-1} B \quad D] \begin{bmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_{n-1} \\ u_1(t_f) \\ \vdots \\ u_m(t_f) \end{bmatrix}$$

共有r个方程，要求出全部r个输出，必使矩阵

$$M' = [CB \quad CAB \quad CA^2 B \quad \dots \quad CA^{n-1} B \quad D]$$

的秩为 r,即:

当RankM' = r =输出的个数时，系统输出完全可控。

例4-1 如图4-1所示的桥式网络系统，试判断其可控性。

解：系统的微分方程为  $i_L = i_1 + i_2 = i_3 + i_4$

$$R_1 i_1 + u_c = R_2 i_2$$

$$R_4 i_4 + u_c = R_3 i_3$$

$$L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_1 + R_3 i_3 = u$$

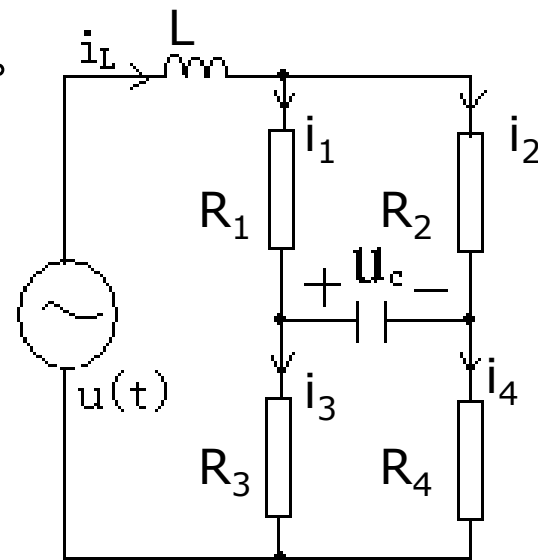


图4-1电桥电路

选取状态变量  $x_1 = i_L, x_2 = u_c$ ，消去微分方程中的  $i_1, i_2, i_3, i_4$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{L} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) x_1 + \frac{1}{L} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) x_1 - \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{R_3 + R_4} \right) x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) & \frac{1}{L} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) \\ \frac{1}{C} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) & -\frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{R_3 + R_4} \right) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2} \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right) \\ 0 & \frac{1}{LC} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \end{bmatrix}$$

当  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} \neq \frac{R_4}{R_3 + R_4}$  时，电桥不平衡，此时RankM=2，系统可控。

当  $\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$  时，电桥平衡，此时RankM=1<2，系统不可控。

**例4-2**系统状态空间表达式为  
判断系统的状态、输出的可控性。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

解：本系统有2个状态，1个输入，1个输出。

①系统状态可控性矩阵为  $M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

显然  $\text{Rank}M=1<2$ ，故系统状态不可控。

②系统输出可控性矩阵为  $M' = [CB \quad CAB \quad D] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

显然  $\text{Rank}M'=1=\text{输出的个数}$ ，故系统输出可控。

**问题：**①状态方程中，每个状态方程都含有控制量，为什么状态不可控？

②输出方程中，不含有控制量，为什么输出可控？

## 4.2 线性连续定常系统的可观性

### 4.2.1 可观性定义

在现代控制系统中，大多采用**反馈控制**形式，而**反馈信号**则是由**系统状态变量的线性组合**，但在工程中，并非所有的状态变量都是可以直接测取得到的，而输出信号则总是可以直接测取得到的，于是便有**能否通过对输出的测量而观测到所有的状态信息**的问题，即状态的可观性问题。-**状态估计问题**

可观性所表示的是**输出  $y(t)$  反映状态矢量  $x(t)$  的能力**，与**控制作用没有直接关系**，所以分析可观性问题时，只需从**齐次状态方程和输出方程**出发，即

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0$$

$$y = Cx$$

如果对任意给定的输入  $u$ ，在有限观测时间  $t_f > t_0$ ，使得根据  $[t_0, t_f]$  期间的输出  $y(t)$  能**唯一地**确定系统在初始时刻的状态  $x(t_0)$ ，则称状态  $x(t_0)$  是可观测的。若系统的每一个状态都是可观测的，则称系统是状态完全能可测的。

### 4.2.2 定常系统可观性的判别

线性定常系统的齐次状态空间表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\}$$

其解为：  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \underline{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}} \mathbf{x}(t_0)$$

$$= \underline{\mathbf{C} \left[ \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m (t-t_0)^m \mathbf{A}^m \right]} \mathbf{x}(t_0)$$

$$y(t) = C \left[ \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m (t - t_0) A^m \right] x(t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_0 I & \alpha_1 I & \cdots & \alpha_{n-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(t_0)$$

因为 $y(t)$ 可直接测量到，若要通过 $y(t)$ 来确定 $x(t_0)$ ，则上述方程解的存在的充要条件是：可观性矩阵 $N$ 的秩必为 $n$ ，即

$$\text{Rank} N = \text{Rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$



对例4-2所示的系统,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t)$$

其可观性矩阵为

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

$$N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Rank} N = \text{Rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

故系统状态可观。

## 4.3 离散时间系统的可控性与可观性

### 4.3.1 可控性矩阵 $M$

离散时间系统的状态方程如下：

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{h}u(k) \quad (1)$$

当系统为单输入系统时，式中  $u(k)$  为标量控制作用。控制阵  $\mathbf{u}$  为  $n$  维列矢量； $\mathbf{G}$  为系统矩阵。

### 4.3.2 可观性矩阵 $N$

离散时间系统的**可观性**，是从下述两个方程出发的。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

式中， $\mathbf{y}$  为  $m$  维列矢量； $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  输出矩阵，其余同式(6)。

根据4.3节中可观性定义，如果知道有限采样周期内的输出  $y(t)$ ，就能唯一地确定任意初始状态矢量  $\mathbf{x}(0)$ ，则系统是完全可观的，现根据此定义推导可观性条件。从式(1)，有：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{G}^k \mathbf{x}(0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

若系统可观，那么在知道  $y(0), y(1), \dots, y(n-1)$  时，应能确定出  $\mathbf{x}(0) = (x_1(0) \ x_2(0), \dots, x_n(0))^T$ ，现从式(7)可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C} \mathbf{G} \mathbf{x}(0) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(n-1) &= \mathbf{C} \mathbf{G}^{n-1} \mathbf{x}(0) \end{aligned}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$\mathbf{x}(0)$  有唯一解的充要条件是其系数矩阵的秩等于  $n$ 。这个系数矩阵称为可观性矩阵。仿连续时间系统，记为  $N$ 。即

$$N = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{CG}^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad N^T = (\mathbf{C}^T, \mathbf{G}^T \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{G}^{n-1})^T \mathbf{C}^T) \quad (5)$$

## 4.4 时变系统的可控性与可观性

### 4.4.1 可控性判别

#### 1. 有关线性时变系统可控性的几点说明

1) 定义中的允许控制  $u(t)$ ，在数学上要求其元在  $[t_0, t_f]$  区间是绝对平方可积的，即

$$\int_{t_0}^{t_f} |u_j|^2 dt < +\infty, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

这个限制条件是为了保证系统状态方程的解存在且唯一。

2) 定义中的  $t_f$  是系统在允许控制作用下，由初始状态  $x(0)$  转移到目标状态(原点)的时刻。

3) 根据可控性定义，可以导出可控状态和控制作用之间的关系式。

4) 非奇异变换不改变系统的可控性。

5)如果  $\mathbf{x}_0$  是可控状态, 则  $\alpha\mathbf{x}_0$  也是可控状态,  $\alpha$  是任意非零实数。

6)如果  $\mathbf{x}_{01}$  和  $\mathbf{x}_{02}$  是可控状态, 则  $\mathbf{x}_{01} + \mathbf{x}_{02}$  也必定是可控状态。

7)由线性代数关于线性空间的定义可知, 系统中所有的可控状态构成状态空间中的一个子空间。此子空间称为系统的可控子空间,  $X_c$  记为 。

## 2. 线性连续时变系统的可控性判别

时变系统的状态方程如下:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1)$$

系统在  $[t_0, t_f]$  上状态完全可控的充分必要条件是格拉姆矩阵

$$\mathbf{W}_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \quad (2)$$

为非奇异的。

## 4.4.2 可观性判别

### 1. 有关线性时变系统可观性的几点讨论

1) 时间区间  $[t_0, t_f]$  是识别初始状态  $\mathbf{x}(t_0)$  所需要的观测时间，对时变系统来说，这个区间的大小和初始时刻  $t_0$  的选择有关。

2) 根据不可观测的定义，可以写出不可观测状态的数学表达式：

$$\mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{0}, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3)$$

这是一个很重要的关系式，下面的几个推论都是由它推证出来的。

3) 对系统作线性非奇异变换，不改变其可观性。

4) 如果  $\mathbf{x}(t_0)$  是不可观测的， $\alpha$  为任意非零实数，则  $\alpha\mathbf{x}(t_0)$  也是不可观测的。

5) 如果  $\mathbf{x}_{01}$  和  $\mathbf{x}_{02}$  都是不可观的，则  $\mathbf{x}_{01} + \mathbf{x}_{02}$  也是不可观的。

6) 根据前面分析可以看出，系统的不可观测状态构成一个状态子空间。

称为不可观子空间，记为  $\tilde{\mathbf{x}}_0$ 。只有当系统的不可观子空间  $\tilde{\mathbf{x}}_0$ 。在状态空间中是零空间，则该系统才是完全可观的。

## 2. 线性连续时变系统可观性判别

时变系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

在  $[t_0, t_f]$  上状态完全可观测的充分必要条件是格拉姆矩阵

$$\mathbf{W}_0(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}^T(t, t_0) \mathbf{C}^T(t) \mathbf{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) dt \quad (5)$$

为非奇异的。



众所周知，一个矩阵：

$$\mathbf{H}(t_0, t) = [\mathbf{h}_1(t_0, t) \quad \mathbf{h}_2(t_0, t) \quad \cdots \quad \mathbf{h}_n(t_0, t)]$$

式中， $\mathbf{h}_i(t_0, t)$  为列矢量，**当且仅当**由  $\mathbf{H}(t_0, t)$  构成的格拉姆矩阵  $\mathbf{G} = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{H}^T(t_0, t) \times \mathbf{H}(t_0, t) dt$  为非奇异时， $\mathbf{h}_i(t_0, t) (i = 1, 2, \dots, n)$  列矢量是**线性无关**的。现在

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_c(t_0, t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}(t_0, t) \mathbf{B}(t) \mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t)]^T [\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t)] dt \end{aligned}$$

因此，有  $\mathbf{B}^T(t) \boldsymbol{\Phi}^T(t_0, t)$  这个矩阵的**列矢量线性无关**与  $\mathbf{W}_c(t_0, t_f)$  非奇异等价。

## 4.5 可控性与可观性的对偶关系

可控性与可观性有其内在关系，这种关系是由卡尔曼提出的对偶原理确定的，利用对偶关系可以把对系统可控性分析转化为对其对偶系统可观性的分析。从而也沟通了最优控制问题和最优估计问题之间的关系。

### 4.5.1 线性系统的对偶关系

有两个系统，一个系统  $\Sigma_1$  为：

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1$$

$$y_1 = C_1 x_1$$

另一个系统  $\Sigma_2$  为：

$$\dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2$$

$$y_2 = C_2 x_2$$

若满足下述条件，则称  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  是互为对偶的。

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$$

式中,  $x_1, x_2$  为  $n$  维状态矢量;  $u_1, u_2$  各为  $r$  与  $m$  维控制矢量;  $y_1, y_2$  各为  $m$  与  $r$  维输出矢量;  $A_1, A_2$  为  $n \times n$  系统矩阵;  $B_1, B_2$  各为  $n \times r$  与  $n \times m$  维控制矩阵;  $C_1, C_2$  各为  $m \times n$  与  $r \times n$  维输出矩阵。

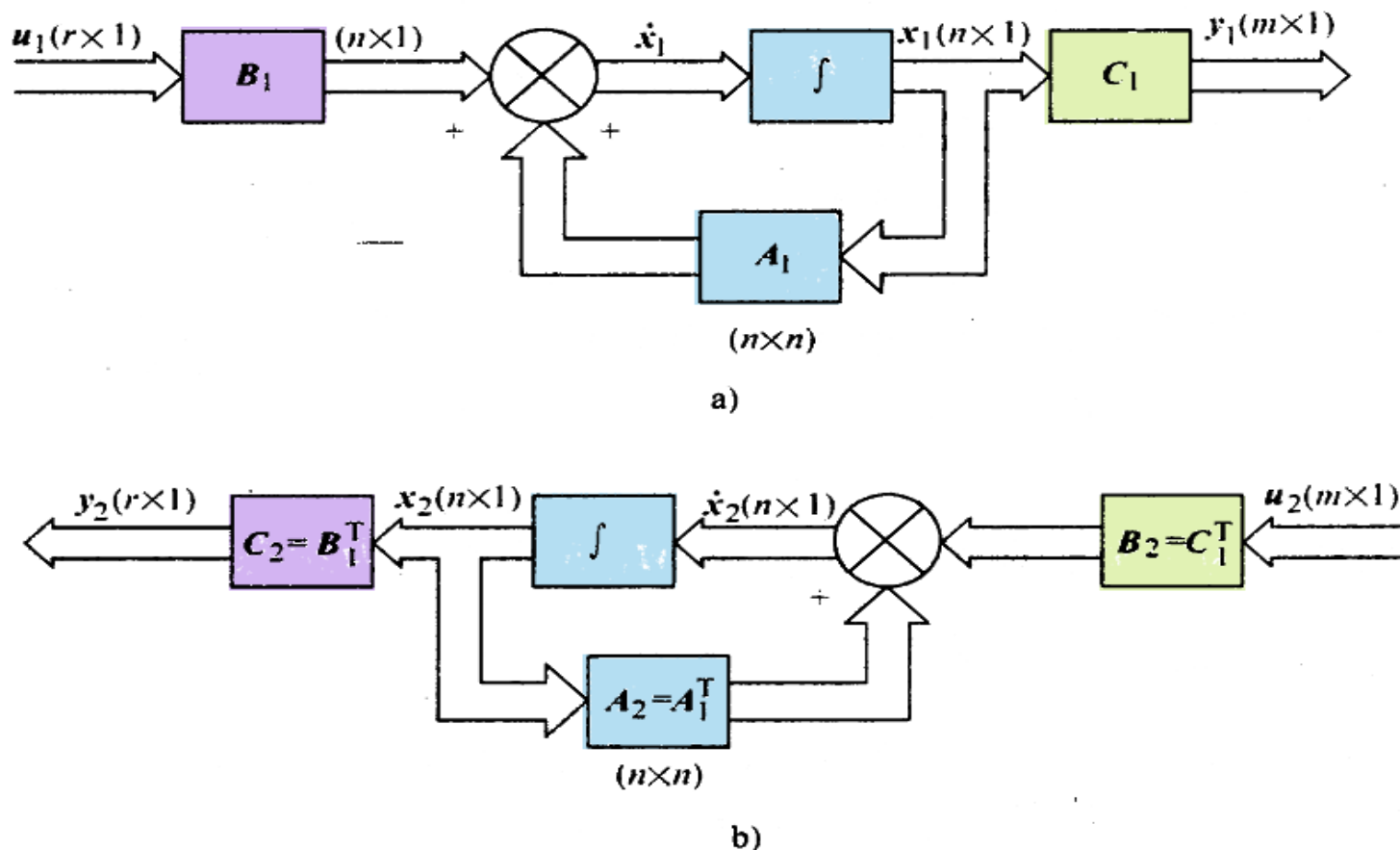


图4-2 对偶系统的模拟结构图

## 4.5.2 对偶原理

- 1) 互为对偶的两个系统中，一个系统的可控性等价于另一个系统的可观性。
- 2) 互为对偶的两个系统，其传递函数矩阵互为转置关系。

证明1)：互为对偶的系统  $\sum_1(A_1, B_1, C_1), \sum_2(A_2, B_2, C_2)$  有如下关系

$$A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$$

对系统1而言，若其状态可控，则

$$\begin{aligned} \text{Rank} M_1 &= \text{Rank} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix} = n \\ M_1 &= \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2^T & A_2^T C_2^T & \cdots & (A_2^T)^{n-1} C_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix}^T \\ \text{Rank} M_1 &= n = \text{Rank} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} = \text{Rank} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} = \text{Rank} N_2 = n \end{aligned}$$

这说明，系统1的状态可控性等价于系统2的状态可观性。反之亦然。（ $N_2$ 为系统2的可观性矩阵），

证明2）：根据模拟结构图4-2，系统1和2的传递函数矩阵分别为

$$W_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1} B_1$$

$$W_2(s) = C_2(sI - A_2)^{-1} B_2$$

$$\text{而 } W_2(s) = B_1^T (sI - A_1^T)^{-1} C_1^T = B_1^T (sI - A_1^{-1})^T C_1^T = W_1^T(s)$$

### 4.5.3 时变系统的对偶原理

时变系统的对偶关系和定常系统稍有不同，且其对偶原理的证明也复杂得多。

对偶原理是现代控制理论中一个十分重要的概念，利用对偶原理可以把系统可控性分析方面所得到的结论用于其对偶系统，从而很容易地得到其对偶系统可观性方面的结论。

## 4.6 状态空间表达式的可控标准型与可观标准型

### 4.6.1 单输入系统的可控标准型

对于一般的  $n$  维定常系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

如果系统是状态完全可控的, 即满足:

$$\text{rank}(\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) = n$$

#### 1. 可控标准 I 型

若线性定常单输入系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (1)$$

是可控的, 则存在线性非奇异变换:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{cl} \bar{\mathbf{x}} \quad (2)$$

$$\mathbf{T}_{cl} = (\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}, \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

使其状态空间表达式(1)化成:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}} u \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{cl}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{cl} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{cl}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}_{cl} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$$

称形如式(4)的状态空间表达式为可控标准 I 型。其中  $\alpha_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) 为特征多项式:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

的各项系数。

$\beta_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) 是  $\mathbf{c} \mathbf{T}_{cl}$  相乘的结果, 即

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \mathbf{c}(\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{b} + \dots + a_1 \mathbf{b}) \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} &= \mathbf{c}(\mathbf{A} \mathbf{b} + a_{n-1} \mathbf{b}) \\ \beta_{n-1} &= \mathbf{c} \mathbf{b} \end{aligned} \right\}$$



## 2.可控标准 II 型

若线性定常单输入系统：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c} \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

是可控的，则存在线性非奇异变换：

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{c2} \bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}) \bar{\mathbf{x}} \quad (7)$$

相应的状态空间表达式(6)转换成：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}} u \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{c2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{c2}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}_{c2} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \quad (11)$$

并称形如式(8)的状态空间表达式为可控标准 II 型。

式(9)中的  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  是系统特征多项式:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

的各项系数, 亦即系统的不变量。

式(11)中的是  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$

相乘的结果, 即:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \mathbf{c} \mathbf{b} \\ \beta_1 &= \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{b} \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} &= \mathbf{c} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### 4.6.2 单输出系统的可观标准型

与变换为可控标准型的条件相似，只有当系统是状态完全可观时，即有：

$$\text{rank}(C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T)^T = n$$

系统的状态空间表达式才可能导出可观标准型。

状态空间表达式的可观标准型也有两种形式，可观标准Ⅰ型和可观标准Ⅱ型，它们分别与可控标准Ⅰ型和可控标准Ⅱ型相对偶。

#### 1. 可观标准Ⅰ型

若线性定常系统：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

是可观的，则存在非奇异变换： $\mathbf{x} = \mathbf{T}_{01} \tilde{\mathbf{x}}$  (14)

使其状态空间表达式(13)化成：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{01}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{01}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (17) \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}_{01} = (1, 0, 0, \cdots, 0) \quad (18)$$

称形如式(15)的状态空间表达式为可观标准Ⅰ型。其中  $a_i$  ( $i=0, 1, \cdots, n-1$ ) 是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征多项式的各项系数。

取变换阵  $T_{01}$  :

$$T_{01}^{-1} = N = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (19)$$

直接验证，或者用对偶原理来证明。证明过程如下：

首先构造  $\Sigma = (A, b, c)$  的**对偶系统**  $\Sigma^* (A^*, b^*, c^*)$

$$A^* = A^T$$

$$b^* = c^T$$

$$c^* = b^T$$

然后写出对偶系统  $\Sigma^* (A^*, b^*, c^*)$  的可控标准 II 型， $\Sigma$  的状态空间表达式的可观标准 I 型即是  $\Sigma^*$  的可控标准 II 型，即

$$\tilde{A} = A^* = \bar{A}^T$$

$$\tilde{b} = b^* = \bar{c}^T$$

$$\tilde{c} = c^* = \bar{b}^T$$

式中,  $\bar{A}^T, \bar{b}^T, \bar{c}^T$  为系统  $\Sigma = (A, b, c)$  的可控标准II型对应的系数阵;  
 $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}$  为系统  $\Sigma = (A, b, c)$  的可控标准I型对应的系数阵;  $A^*, b^*, c^*$   
 为系统  $\Sigma^* (A^*, b^*, c^*)$  的对偶系统的可控标准 II 型对应的系数阵。

## 2. 可观标准 II 型

若线性定常单输出系统: 
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

是可观的, 则存在非奇异变换  $x = T_{02} \tilde{x}$

$$T_{02} = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{pmatrix} \quad (21)$$

使其状态空间表达式(20)变换为：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (22)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{02}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{02}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}_{02} = (0, \ 0, \ 0, \ \cdots, \ 1) \quad (25)$$

称形如式(22)的状态空间表达式为**可观标准 II 型**。

## 4.7 线性系统的结构分解

### 4.7.1 按可控性分解

设线性定常系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

是状态不完全可控，其可控性判别矩阵：

$$\mathbf{M} = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$$

的秩

$$\text{rank} \mathbf{M} = n_1 < n$$

则存在非奇异变换：

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_c \hat{\mathbf{x}} \quad (2)$$



将状态空间表达式(1)变换为:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (3)$$

其中

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ \\ (n - n_1) \end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_c = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \underbrace{0}_{n_1} & \underbrace{\hat{\mathbf{A}}_{22}}_{(n - n_1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \} (n - n_1) \end{matrix} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \} (n - n_1) \end{matrix} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{R}_c = \left( \underbrace{\hat{\mathbf{C}}_1}_{n_1} \quad \vdots \quad \underbrace{\hat{\mathbf{C}}_2}_{(n - n_1)} \right) \quad (6)$$

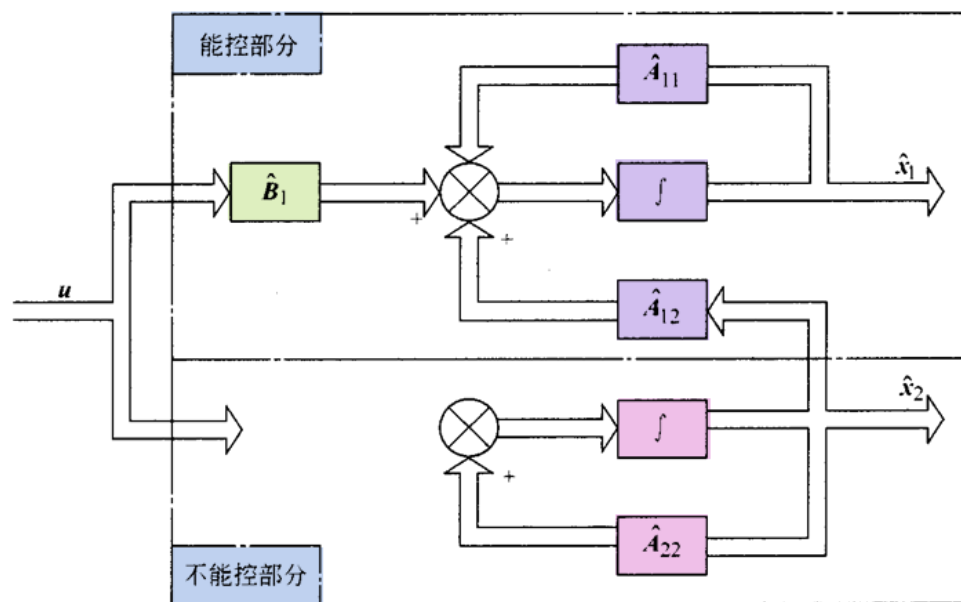
可以看出，系统状态空间表达式变换为式(3)后，系统的状态空间就被分解成可控的和不可控的两部分，其中  $n_1$  维子空间：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{u} + \hat{\mathbf{A}}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2$$

是可控的，而  $(n - n_1)$  维子系统：

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2 = \hat{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{x}}_2$$

是不可控的。对于这种状态结构的分解情况如图所示，因为  $\mathbf{u}$  对  $\hat{\mathbf{x}}_2$  不起作用， $\hat{\mathbf{x}}_2$  仅作无控的自由运动。显然，若不考虑  $(n - n_1)$  维子系统，便可得到一个低维的可控系统。



至于非奇异变换阵：

系统能控性的结构划分

$$R_c = (R_1, R_2, \dots, R_{n_1}, \dots, R_n) \quad (7)$$

其中  $n$  个列矢量可以按如下方法构成，前  $n_1$  个列矢量  $R_1, R_2, \dots, R_{n_1}$  是可控性矩阵  $M$  中的  $n_1$  个线性无关的列，另外的  $(n - n_1)$  个列  $R_{n_1+1}, \dots, R_n$  在确保  $R_c$  为非奇异的条件下，完全是任意的。

### 4.7.2 按可观性分解

设线性定常系统：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其状态不完全可观的，其可观性判别矩阵

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{pmatrix}$$

的秩

$$\text{rank} \mathbf{N} = n_1 < n$$

则存在非奇异变换：

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{x}} \quad (9)$$

将状态空间表达式(8)变换为：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}} u \\ \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{21}}_{n_1} & \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{22}}_{n-n_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \} n - n_1 \end{matrix} \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \\ \} n - n_1 \end{matrix} \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{R}_0 = \left( \underbrace{\tilde{\mathbf{C}}_1}_{n_1} \quad \underbrace{0}_{n-n_1} \right) \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ \\ (n - n_1) \end{matrix}$$

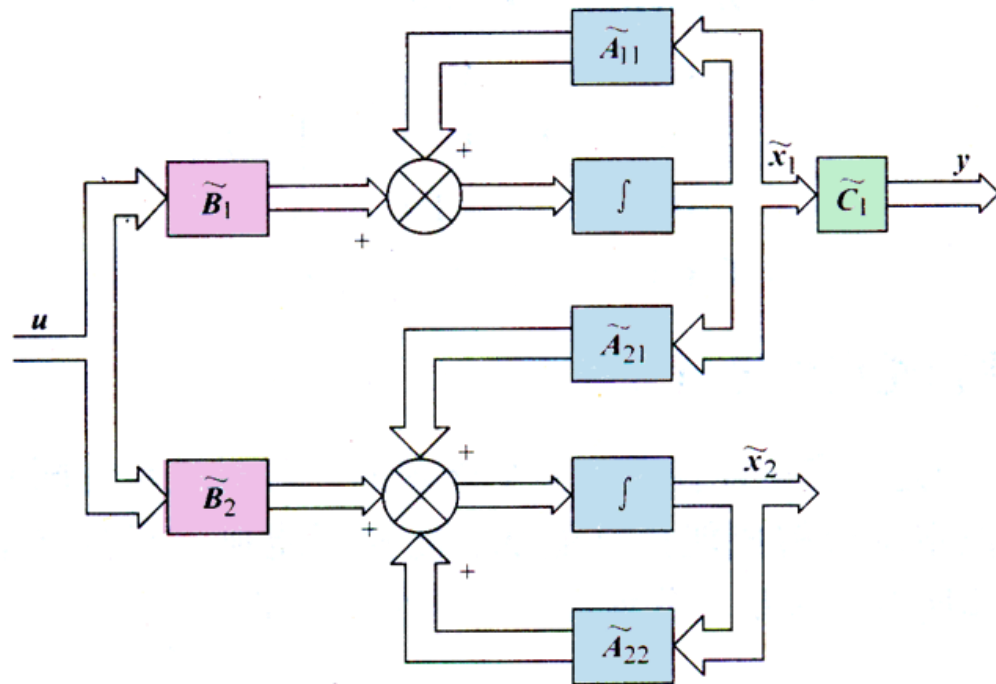
可见，经上述变换后系统分解为可观的  $n_1$ ，维子系统：

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 &= \tilde{\mathbf{A}}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_1 u \\ y &= \tilde{\mathbf{C}}_1\tilde{\mathbf{x}}_1 \end{aligned}$$

和不可观的  $n - n_1$ ，维子系统：

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = \tilde{\mathbf{A}}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_2 u$$

结构图如下。显然，若不考虑  $n - n_1$  维不可观测的子系统，便得到一个  $n_1$  维的可观系统。



系统按能观性分解结构图

非奇异变换阵  $R_0$  是这样构成的，取

$$R_0^{-1} = \begin{pmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R'_{n_1} \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

### 4.7.3 按可控性和可观性进行分解

1)如果线性系统是不完全可控和不完全可观的，若对该系统同时按能控性和可观性进行分解，则可以把系统分解成可控且可观、可控不可观、不可控可观、不可控不可观四部分。当然，并非所有系统都能分解成有这四个部分的。

2)变换矩阵 $R$  确定之后，只需经讨一次变换便可对系统同时按可控性和可观性进行结构分解。但是 $R$  阵的构造需要涉及较多的线性空间概念。

3)结构分解的另一种方法：先把待分解的系统化约旦标准型，然后按能控判别法则和能观判别法则判断状态变量的可控性和可观性，最后按可控可观、可控不可观、不可控可观、不可控不可观四种类型分类排列，即可组成相应的子系统。



## 4.8 传递函数阵的实现问题

### 4.8.1 实现问题的基本概念

对于给定传递函数阵  $W(s)$ ，若有一状态空间表达式  $\Sigma$ ：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{1}$$

使之成立  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{W}(s)$

则称该状态空间表达式  $\Sigma$  为传递函数阵  $W(s)$  的一个实现。

### 4.8.2 可控标准型实现和可观标准型实现

4.6节已经介绍，对于一个单输入单输出系统，一旦给出系统的传递函数，便可以直接写出其可控标准型实现和可观标准型实现。本节介绍如何将这些标准型实现推广到多输入-多输出系统。为此，必须把  $m \times r$  维的传递函

数阵写成和单输入-单输出系统的传递函数相类似的形式，即

$$W(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (2)$$

式中， $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \cdots, \beta_1, \beta_0$  为  $m \times r$  维常数阵；分母多项式为该传递函数阵的特征多项式。

显然  $W(s)$  是一个严格真有理分式矩阵，且当  $m = r = 1$  时， $W(s)$  对应的就是单输入-单输出系统的传递函数。

对于式形式的传递函数阵的可控标准型实现为：

$$A_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_r & \cdots & \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{I}_r & \cdots & \mathbf{0}_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \mathbf{0}_r & \cdots & \mathbf{I}_r \\ -a_0\mathbf{I}_r & -a_1\mathbf{I}_r & -a_2\mathbf{I}_r & \cdots & -a_{n-1}\mathbf{I}_r \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$B_c = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{0}_r \\ \vdots \\ \mathbf{0}_r \\ I_r \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$C_c = (\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{n-1}) \quad (5)$$

与此类推，其可观标准型实现为：

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -a_0 I_m \\ I_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -a_1 I_m \\ \mathbf{0}_m & I_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -a_2 I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & I_m & -a_{n-1} I_m \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$C_c = (\mathbf{0}_m, \mathbf{0}_m, \dots, \mathbf{0}_m, I_m] \quad (8)$$

式中， $\mathbf{0}_m$  和  $I_m$  为  $m \times m$  阶零矩阵和单位矩阵； $m$  为输入矢量的维数。

### 4.8.3最小实现

#### 1.最小实现的定义

传递函数  $W(s)$  的一个实现:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{9}$$

如果  $W(s)$  不存在其它实现:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}u \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{10}$$

使  $\hat{\mathbf{x}}$  的维数小于  $\mathbf{x}$  的维数, 则称式(9)的实现为最小实现。

#### 2.寻求最小实现的步骤

传递函数阵  $W(s)$  的一个实现  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}$$

为最小实现的充分必要条件是 $\Sigma(A, B, C)$ 既是可控的又是可观的：

这个定理的证明从略。根据这个定理可以方便地确定任何一个具有严格的真有理分式的传递函数阵  $W(s)$  的最小实现。一般可以按照如下步骤来进行。

1) 对给定传递函数阵  $W(s)$ ，先初选出一种实现  $\Sigma(A, B, C)$ ：通常最方便的是选取可控标准型实现或可观标准型实现。

2) 对上面初选的实现  $\Sigma(A, B, C)$ ，找出其完全可控且完全可观部分  $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ ，于是这个可控可观部分就是  $W(s)$  的最小实现。

## 4.9 传递函数中零极点对消与状态可控性和可观性之间的关系

既然系统的可控且可观性与其传递函数阵的最小实现是同义的，那么能否通过传递函数阵的特征来判别其状态的可控性和可观性呢？

- 对单输入-单输出系统，要使系统是可控并可观的充分必要条件是传递函数的分子分母间没有零极点对消。
- 对多输入-多输出系统，传递函数阵没有零极点对消，只是系统最小实现的充分条件，也就是说，即使出现零极点对消，这种系统仍有可能是可控和可观的。

对于一个单输入-单输出系统  $\Sigma(A, b, c)$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{1}$$

使其是可控并可观的充要条件是传递函数

$$W(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}\tag{2}$$

的分子分母没有零极点对消。