

第6讲

线性系统的时间域综合 (非优化)

前面**分析**了控制系统的动态表现、可控性、可观性、稳定性，当一个系统不可控、不可观、或不稳定时，是否有办法使之可控、可观、稳定呢？

这涉及系统的**综合**问题。

控制系统的**分析与综合**是控制系统研究的两大课题。

分析是对现有系统或设计的系统，在建立系统数学模型的基础上**分析系统**的各种性能及其与系统结构、参数及外部作用之间的关系；

综合则是在分析的基础上对系统结构进行适当调整，以使其达到或具有某些希望的特性。

设计适当的控制器，通过该控制器产生改善系统性能的控制规律，使系统按照要求的性能运行。

如何综合呢？也即如何设计适当的控制器呢？

反馈是控制系统中广泛使用的手段，在经典控制论中采用的是**输出反馈**，但在现代控制系统设计中，**常常采用状态反馈**，因为状态信息远多于输出信息，因而能提供更丰富的反馈控制量和更多的反馈量的选择，能使系统容易获得更优异的性能。

6.1 状态反馈控制器设计

6.1.1 状态反馈

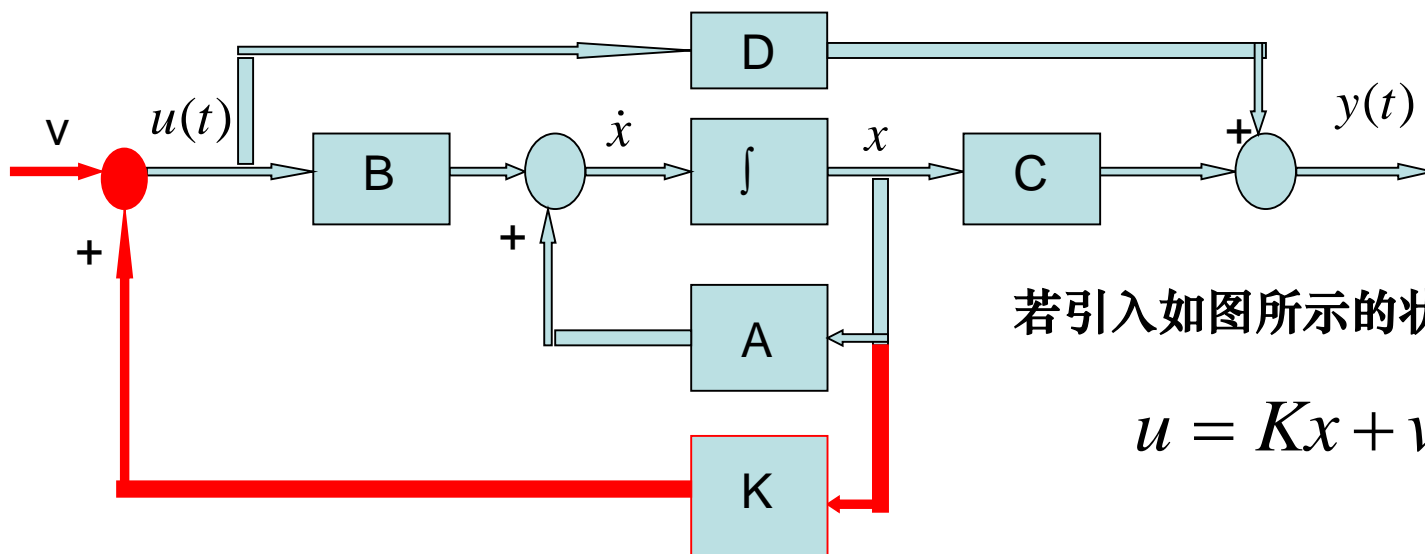
状态反馈是将系统的每一个状态变量乘以相应的反馈系数，然后反馈到输入端与参考输入相加形成新的控制规律，作为被控系统的控制输入。

对于多输入-多输出系统：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (1)$$

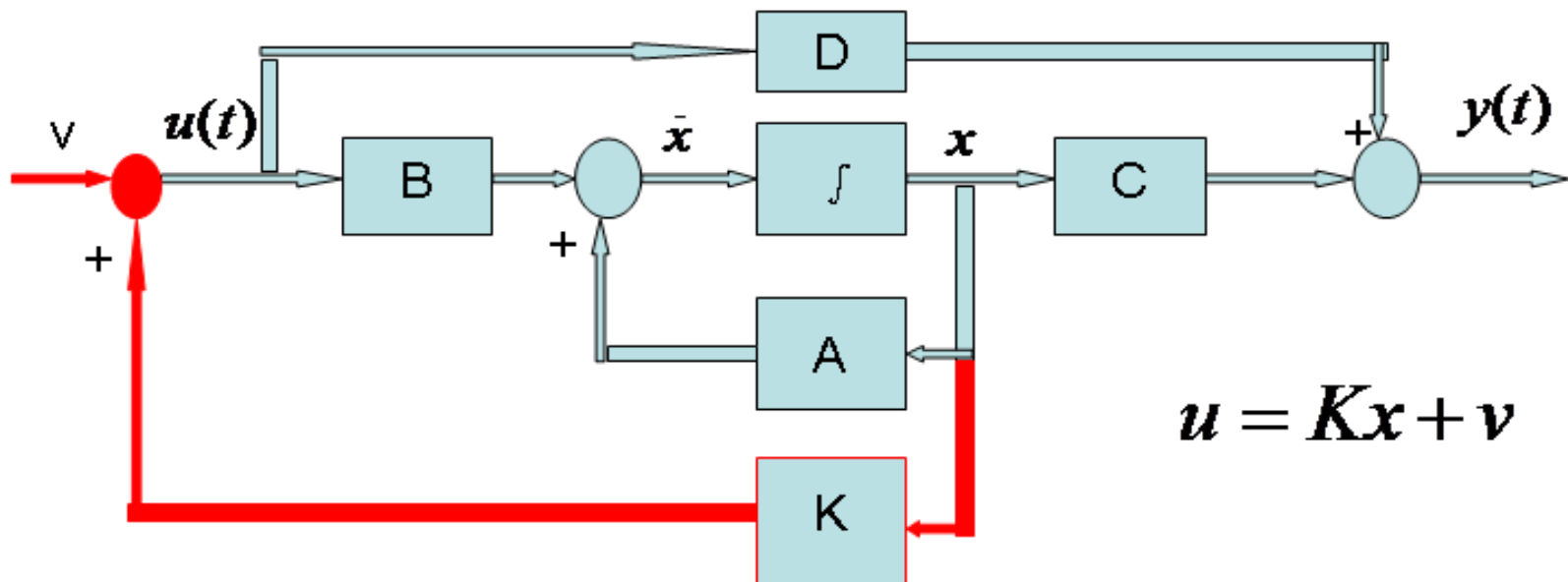
式中 $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$, $C \in R^{m \times n}$, $D \in R^{m \times r}$

基本结构如下图所示。



若引入如图所示的状态反馈，则

$$u = Kx + v \quad (2)$$



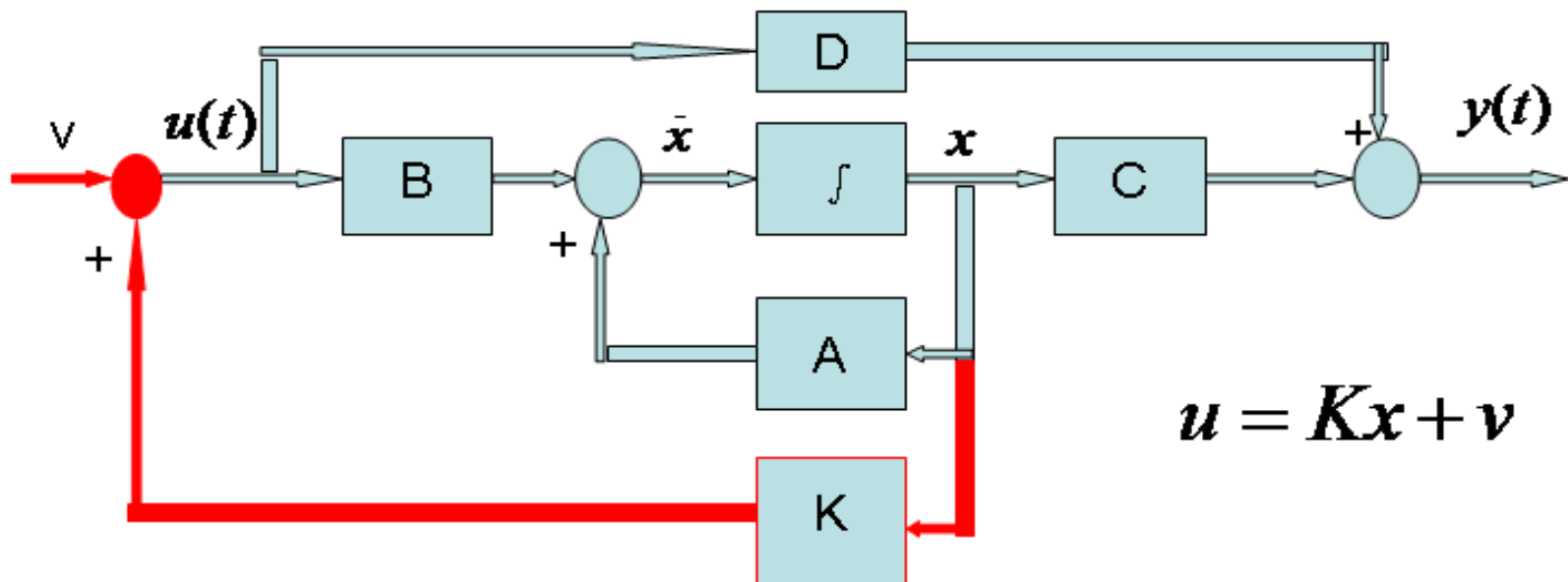
图中被控系统的状态空间表达式为：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (1)$$

被控系统的特征多项式为： $|\lambda I - A|$

状态线性反馈控制律 u 为：

$$u = Kx + v \quad (2)$$



$$u = Kx + v$$

v 为 $r \times 1$ 维参考输入； K 为 $r \times n$ 维状态反馈系数阵或状态反馈增益阵。 对单输入系统， K 为 $1 \times n$ 维行矢量。

把(2)代入(1)整理可得状态反馈闭环系统的状态空间表达式：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + BK)x + Bv \\ y &= (C + DK)x + Dv\end{aligned}\quad (3)$$

则引入状态反馈 K 后，闭环系统的特征多项式为： $|\lambda I - (A + BK)|$

比较 $|\lambda I - A|$ 可见，状态反馈阵 K 的引入，并不增加系统的维数，但可通过 K 的选择自由地改变闭环系统的特征值，使系统获得所要求的性能。

例6-1 已知被控系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, y = [1 \quad 0 \quad 0] x$$

引入状态反馈，试设计状态反馈控制器，使闭环系统的特征值为

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j, \lambda_3 = -5 \quad |\lambda I - (A + BK)|$$

解：这是一个单输入-单输出系统，因此可令 $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$

则闭环系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} |\lambda I - (A + BK)| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -k_1 & 2-k_2 & \lambda+3-k_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + (3-k_3)\lambda^2 + (2-k_2)\lambda - k_1 \end{aligned} \quad \text{①}$$

$$|\lambda I - (A + BK)| = \lambda^3 + (3 - k_3)\lambda^2 + (2 - k_2)\lambda - k_1 \quad (1)$$

而期望的闭环系统的特征多项式为

$$(\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j)(\lambda + 5) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 12\lambda + 10 \quad (2)$$

比较(1)(2)式的系数，得

$$\begin{cases} -k_1 = 10 \\ 2 - k_2 = 12 \\ 3 - k_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -10 \\ k_2 = -10 \\ k_3 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore K = [-10 \quad -10 \quad -4] \quad (\text{状态负反馈})$$

本例涉及到了极点配置问题。

控制系统的性能往往取决于系统极点在根平面上的分布。因此，作为综合系统性能指标的一种形式，往往是给定一组闭环极点或根据时域性能指标找出对应的期望极点。因而：

极点配置：就是通过选择反馈增益矩阵，将闭环系统的极点恰好配置在根平面上所期望的位置，以使系统具有期望的性能。

但并不是所有的系统都可以任意配置极点的，可以证明：采用状态反馈进行极点任意配置的充要条件是该系统完全可控（参见教材）。

在系统完全可控的情况下，若要通过状态反馈进行极点配置，当系统阶数n较大时，上述比较闭环特征多项式的系数的方法非常不便。

6.1.2 爱克曼 (Ackermann) 公式

设系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 完全可控，设期望的闭环极点为 $s_i (i = 1 \sim n)$

引入状态反馈 $u = Kx + v$ ，有期望的闭环系统的状态方程

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv$$

$$\text{令 } \bar{A} = A + BK$$

则期望的闭环特征方程为：

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= |sI - (A + BK)| = |sI - \bar{A}| = \prod_{i=1}^n (s - s_i) \\ &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0, \quad a_n = 1\end{aligned}$$

由凯莱-哈密顿定理可知， \bar{A} 应满足期望的闭环特征方程，故有

$$\Phi(\bar{A}) = \bar{A}^n + a_{n-1}\bar{A}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{A} + a_0I = 0 \quad ①$$

$$\text{也有: } \Phi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \neq 0 \quad ②$$

现考虑 $n=2$ 的情况，则有

$$\Phi(\bar{A}) = a_2 \bar{A}^2 + a_1 \bar{A} + a_0 I = 0, \quad a_2 = 1 \quad \textcircled{3}$$

$$\Phi(A) = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I \neq 0 \quad \textcircled{4}$$

考虑以下恒等式：

$$I = I$$

$$\bar{A} = A + BK$$

$$\begin{aligned} \bar{A}^2 &= (A + BK)^2 = (A + BK)(A + BK) = A^2 + ABK + BKA + BKBK \\ &= A^2 + ABK + BK\bar{A} \end{aligned}$$

将上述等式两边依次分别乘以 a_0, a_1, a_2 ($a_2=1$) 并相加，

$$\text{左边} = a_0 I + a_1 \bar{A} + \bar{A}^2 = 0 \quad (\text{由}\textcircled{3}\text{式})$$

$$\text{右边} = a_0 I + a_1 (A + BK) + a_2 (A^2 + ABK + BK\bar{A})$$

$$= a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_1 BK + ABK + BK\bar{A}$$

$$\text{即：} \quad \underline{a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I} + a_1 BK + ABK + BK\bar{A} = 0 \quad \textcircled{5}$$

$$\text{将}\textcircled{4}\text{代入}\textcircled{5}\text{得：} \quad \underline{\Phi(A)} + a_1 BK + ABK + BK\bar{A} = 0$$

$$\Phi(A) = -(a_1 BK + ABK + BK\bar{A})$$

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= -(a_1 BK + ABK + BK\bar{A}) \\ &= -\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 K + K\bar{A} \\ K \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \textcircled{6}$$

由于原系统是状态可控的，故其可控性矩阵 $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$ 为满秩矩阵，其逆矩阵存在。在方程⑥两边同时左乘 $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1}$ ，有

$$\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A) = - \begin{bmatrix} a_1 K + K\bar{A} \\ K \end{bmatrix}$$

将上式两边同时左乘 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，得

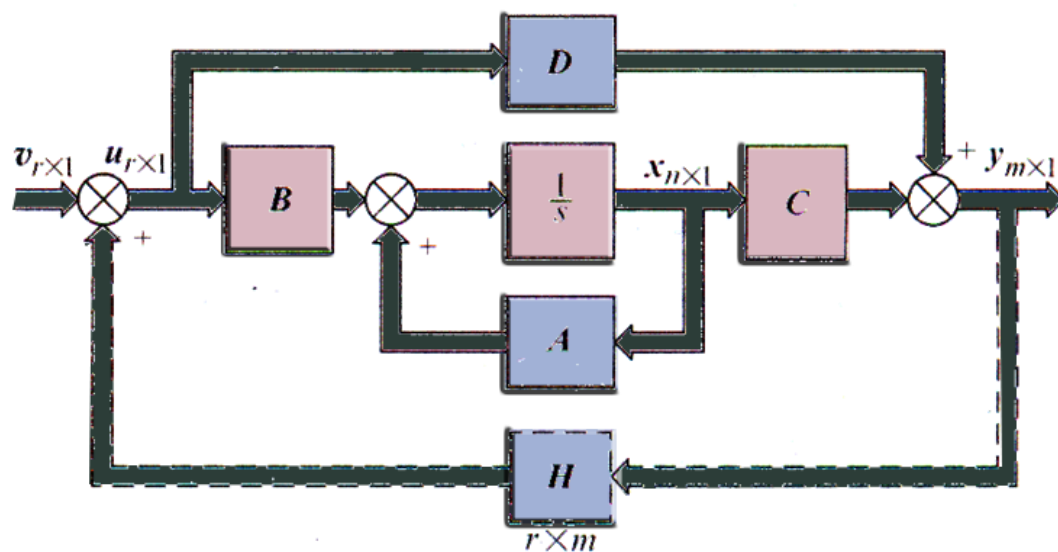
$$K = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A)$$

同理，对任意大于2的正整数 n ，有

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A)$$

6.1.3 输出反馈

输出反馈是采用输出矢量 y 构成线性反馈律。在经典控制理论中主要讨论这种反馈形式。（图二）示出多输入一多输出系统输出反馈的基本结构。



多输入—多输出系统的输出反馈结构

图二

被控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}\tag{1}$$

或

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= (A, B, C) \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{2}$$

输出线性反馈控制律为：

$$\mathbf{u} = \mathbf{Hy} + \mathbf{v}\tag{3}$$

其中 \mathbf{H} 为 $r \times m$ 维输出反馈增益阵。对单输出系统， \mathbf{H} 为 $r \times 1$ 维列矢量。

闭环系统状态空间表达式可由式(1)代入式(3)得:

$$u = H(Cx + Du) + v = HCx + HDu + v \quad (4)$$

整理得:

$$u = (I - HD)^{-1} (HCx + v) \quad (5)$$

再把式(5)代入式(1)求得:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + B(I - HD)^{-1}HC]x + B(I - HD)^{-1}v \\ y &= [C + D(I - HD)^{-1}HC]x \end{aligned} \quad (6)$$

若 $D=0$, 则

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BHC)x + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7)$$

简记 $\Sigma_H = ((A + BHC), B, C)$ 。由式(7)可见, 通过选择输出反馈增益阵也可以改变闭环系统的特征值, 从而改变系统的控制特性。

输出反馈系统的传递函数矩阵为:

$$W_H(s) = C[sI - (A + BHC)]^{-1}B \quad (8)$$

若被控系统的传递函数矩阵为:

$$W_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (9)$$

$W_0(s)$ 和 $W_H(s)$ 存在下列关系:

$$W_H(s) = [I - W_0(s)H]^{-1}W_0(s) \quad (10)$$

或

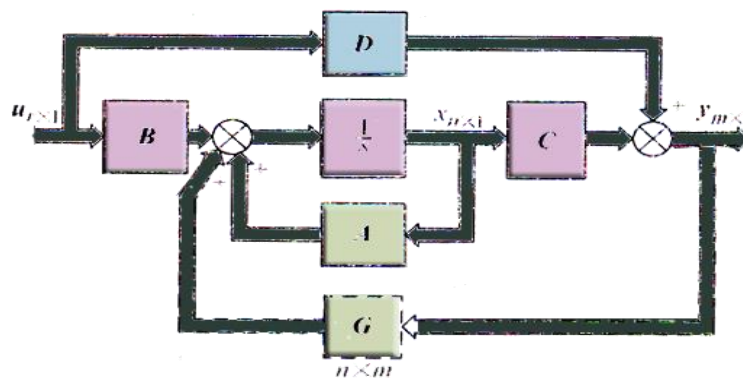
$$W_H(s) = W_0(s)[I - HW_0(s)]^{-1} \quad (11)$$

比较上述两种基本形式的反馈可以看出，输出反馈中的 HC 与状态反馈中的 K 相当。但由于 $m < n$ ，所以 H 可供选择的自由度远比 K 小，因而输出反馈只能相当于一种部分状态反馈。只有当 $C = I$ 时， $HC = K$ ，才能等同于全状态反馈。因此，在不增加补偿器的条件下，输出反馈的效果不如状态反馈系统好。但输出反馈在技术实现上的方便性则是其突出优点。

6.1.4 从输出到状态矢量导数反馈

从系统输出到状态矢量导数 \dot{x} 的线性反馈形式在状态观测器获得应用。

(图三) 表示这种反馈结构：



多输入—多输出系统从输出到 \dot{x} 反馈的结构

设被控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{1}$$

加入从输出 y 到状态矢量导数 \dot{x} 的反馈增益阵 $G \in R^{n \times m}$, 可得闭环系统:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Gy + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2}$$

将式(2)中的 y 代入 \dot{x} 整理得:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + GC)x + (B + GD)u \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3}$$

若 $D=0$ ，则

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{GC})\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (4)$$

记作 $\Sigma_G = ((\mathbf{A} + \mathbf{GC}), \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 。

闭环系统的传递函数矩阵：

$$\mathbf{W}_G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{GC})]^{-1}\mathbf{B} \quad (5)$$

6.1.5 动态补偿器

上述三种反馈基本结构的共同点是，不增加新的状态变量，系统开环与闭环同维。其次，反馈增益阵都是常矩阵，反馈为线性反馈。在更复杂的情况下，常常要通过引入一个动态子系统来改善系统性能，这种动态子系统，称为动态补偿器。

它与被控系统的连接方式如图6.4所示，其中图a为串联连接，图b为反馈连接。

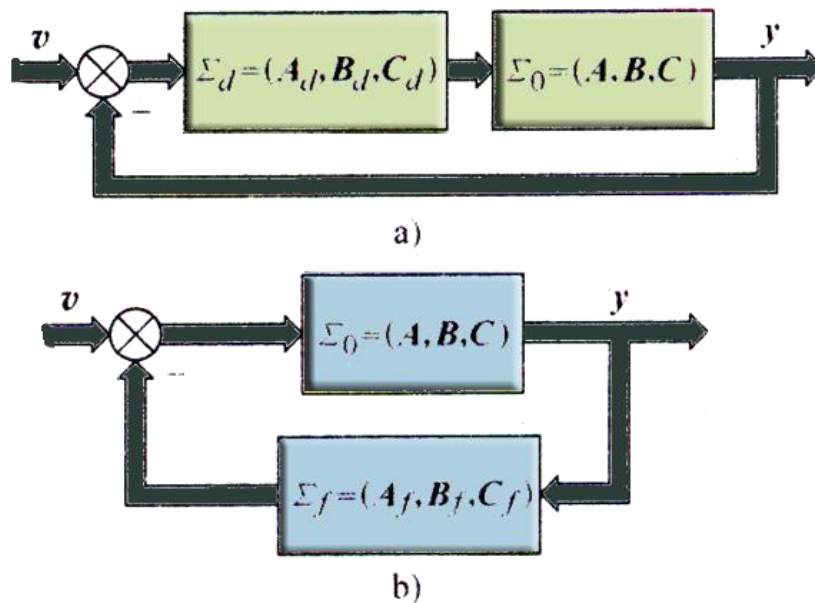


图6.4 带动态补偿器的闭环系统结构

6.1.6 闭环系统的能控性与能观性

定理6.1.1 状态反馈不改变被控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的能控性。

但不保证系统的能观性不变。

证明 只证能控性不变。证明它们的能控判别阵**同秩**即可。

被控系统 Σ_0 和状态反馈系统 Σ_0 的能控判别阵为：

$$\mathbf{Q}_{c0} = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad (1)$$

$$\mathbf{Q}_{ck} = (\mathbf{B}, (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{B}, (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^2\mathbf{B}, \dots, (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{B}) \quad (2)$$

实际上，被控系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$ 的传递函数为：

$$W_0(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \quad (3)$$

将 Σ_0 的能控标准I型代入上式，得：

$$\begin{aligned}
 W_0(s) &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} + d \\
 &= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}
 \end{aligned} \tag{4}$$

引入状态反馈后，闭环系统的传递函数为：

$$\begin{aligned}
 W_k(s) &= c[sI - (A + bK)]^{-1}b + d \\
 &= \frac{[(b_{n-1} + da_{n-1}) - d(a_{n-1} - k_{n-1})]s^{n-1} + \cdots + [(b_0 + da_0) - d(a_0 - k_0)]}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} + d \\
 &= \frac{ds^n + (b_{n-1} + da_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (b_1 + da_1)s + (b_0 + da_0)}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)}
 \end{aligned} \tag{5}$$

定理6.1.2 输出反馈不改变被控系统的能控性和能观性。

证明：关于能控性不变。因为

$$\dot{x} = (A + BHC)x + Bu \quad (6)$$

若把 (HC) 看成等效的状态反馈阵 K ，那么状态反馈便保持被控系统的能控性不变。

关于能观性不变。由能观判别矩阵

$$Q_{00} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

和

$$Q_{0H} = \begin{pmatrix} C \\ C(A + BHC) \\ \vdots \\ C(A + BHC)^{n-1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

6.2 极点配置问题

6.2.1 采用状态反馈

定理6.2.1 采用状态反馈对系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$ 任意配置极点的充要条件是 Σ_0 完全能控。

证明 只证充分性。若 Σ_0 完全能控，通过状态反馈必成立

$$\det[\lambda I - (A + bK)] = f^*(\lambda) \quad (1)$$

式中， $f^*(\lambda)$ 为期望特征多项式。

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_1^* \lambda + a_0^* \quad (2)$$

式中, λ_i^* ($i=1, 2, \dots, n$) 为期望的闭环极点(实数极点或共轭复数极点)。

1)若 Σ_0 完全能控, 必存在非奇异变换:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_{\text{cl}} \bar{\mathbf{x}}$$

能将 Σ_0 化成能控标准I型:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}} u \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{\text{cl}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{\text{cl}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{\text{cl}}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}T_{cl} = (b_0, \quad b_1, \quad \cdots, \quad b_{n-1})$$

被控系统 Σ_0 的传递函数为：

$$\mathbf{W}_0(s) = \bar{\mathbf{c}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{b}} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (4)$$

2)加入状态反馈增益阵：

$$\bar{\mathbf{K}} = (\bar{k}_0, \quad \bar{k}_1, \quad \cdots, \quad \bar{k}_{n-1}) \quad (5)$$

可求得对 $\bar{\mathbf{x}}$ 的闭环状态空间表达式：

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{K}})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 - \bar{k}_0) & -(a_1 - \bar{k}_1) & -(a_2 - \bar{k}_2) & \cdots & -(a_{n-1} - \bar{k}_{n-1}) \end{pmatrix}$$

闭环特征多项式为：

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda \mathbf{I} - (\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{K}})| \\ &= \lambda^n + (a_{n-1} - \bar{k}_{n-1}) \lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{k}_1) \lambda + (a_0 - \bar{k}_0) \end{aligned} \quad (7)$$

闭环传递函数为：

$$\begin{aligned}
 W_k(s) &= \bar{c} [sI - (\bar{A} + \bar{b} \bar{K})]^{-1} \bar{b} \\
 &= \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + (a_{n-1} - \bar{k}_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - \bar{k}_1)s + (a_0 - \bar{k}_0)}
 \end{aligned}$$

3)使闭环极点与给定的期望极点相符，必须满足： (8)

$$f(\lambda) = f^*(\lambda)$$

由等式两边 λ 同次幂系数对应相等，可解出反馈阵各系数：

$$\bar{k}_i = a_i - a_i^* \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \quad (9)$$

于是得：

$$\bar{K} = [a_0 - a_0^*, \quad a_1 - a_1^*, \quad \cdots, \quad a_{n-1} - a_{n-1}^*]$$

4)最后, 把对应于 \bar{x} 的 \bar{K} , 通过如下变换, 得到对应于状态 x 的 K :

$$K = \bar{K}T_{cl}^{-1}$$

由于 $u = v + \bar{K}\bar{x} = v + KT_{cl}^{-1}x$ 的缘故。

6.2.2 采用输出反馈

定理6.2.2 对完全能控的单输入-单输系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$, 不能采用输出线性反馈来实现闭环系统极点的任意配置。

证明 对单输入-单输出反馈系统 $\Sigma_h = ((A + bhc), b, c)$, 闭环传递函数为:

$$W_h(s) = c[sI - (A + bhc)]^{-1}b = \frac{W_0(s)}{1 + hW_0(s)} \quad (10)$$

定理6.2.3 对完全能控的单输入-单输出系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$ 通过带动态补偿器的输出反馈实现极点任意配置的充要条件是：

1) Σ_0 完全能观。

2) 动态补偿器的阶数为 $n-1$ 。

6.2.3 采用从输出到反馈

定理 6.2.4 对系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$ 采用从输出到 \dot{x} 的线性反馈实现闭环极点任意配置的充要条件是 Σ_0 完全能观。

证明 根据对偶原理，如果 $\Sigma_0 = (A, b, c)$ 能观，则 $\widetilde{\Sigma}_0 = (A^T, c^T, b^T)$ 必能控，因而可以任意配置 $(A^T + c^T G^T)$ 的特征值，而 $(A^T + c^T G^T)$ 的特征值和 $(A^T + c^T G^T)^T$ 的特征值相同，又因为

$$(A^T + c^T G^T)^T = A + Gc$$

因此，对 $(A^T + c^T G^T)^T$ 任意配置极点就等价于对 $A + Gc$ 任意配置极点。于是设计 Σ_0 输出反馈阵 G 的问题便转化成对其对偶系统 Σ_0 设计状态反馈阵 K 的问题。具体步骤如下：

(1)取线性变换：

$$x = T_{0\Pi} \bar{x} \quad (11)$$

式中， $T_{0\Pi}$ 为能将系统化成能观标准 Π 型的变换矩阵。

将系统 $\Sigma_0 = (A, b, c)$ 化成能观标准 Π 型：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y &= \bar{c}\bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}_{0\text{II}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{0\text{II}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{0\text{II}}^{-1} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}_{0\text{II}} = (0, \quad 0, \quad \cdots, \quad 0, \quad 1)$$

(2)引入反馈阵 $\bar{\mathbf{G}} = [\bar{g}_0 \quad \bar{g}_1 \quad \cdots \quad \bar{g}_{n-1}]^T$ 后, 得闭环系统矩阵:

$$\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & - (a_0 - \bar{g}_0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & - (a_1 - \bar{g}_1) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & - (a_2 - \bar{g}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & - (a_{n-1} - \bar{g}_{n-1}) \end{pmatrix} \quad (13)$$

和闭环特征多项式:

$$f(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{c}})| = \lambda^n + (a_{n-1} - \bar{g}_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_0 - \bar{g}_0) \quad (14)$$

(3)由期望极点得期望特征多项式:

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_{n-1}^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_1^* \lambda + a_0^*$$

(4)比较 $f(\lambda)$ 与 $f^*(\lambda)$ 各对应项系数,可解出:

$$\bar{g}_i = a_i - a_i^*, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

即

$$\bar{G} = (a_0 - a_0^*, a_1 - a_1^*, \dots, a_{n-1} - a_{n-1}^*)^T \quad (15)$$

(5)将在 \bar{x} 得的 G 变换到 x 状态下便得:

$$G = T_{0II} \bar{G} \quad (16)$$

和求状态反馈阵 K 的情况类似,当系统的维数较低时,只要系统能观,也可不化成能观标准 II 型,通过直接比较特征多项式系数确定 G 矩阵。

6.3 系统镇定问题

定理6.3.1 对系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用状态反馈能镇定的充要条件是其不能控子系统为渐近稳定。

证明 (1) 设系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 不完全能控，因此通过线性变换可将其按能控性分解为：

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_c = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_c^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \mathbf{R}_c = (\tilde{\mathbf{C}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_2) \quad (1)$$

式中， $\tilde{\Sigma}_c = (\tilde{\mathbf{A}}_{11}, \tilde{\mathbf{B}}_1, \tilde{\mathbf{C}}_1)$ 为能控子系统； $\tilde{\Sigma}_{\bar{c}} = (\tilde{\mathbf{A}}_{22}, 0, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ 为不能控子系统。

(2) 由于线性变换不改变系统的特征值，所以有：

$$\begin{aligned}\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] &= \det[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}] \\ &= \det\begin{pmatrix} s\mathbf{I}_1 - \tilde{\mathbf{A}}_{11} & -\tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2)$$

(3) 由于 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ 与 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 在能控性和稳定性上等价。考虑对 $\tilde{\Sigma}_0$ 引入状态反馈阵:

$$\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{\mathbf{K}}_1 \quad \tilde{\mathbf{K}}_2] \quad (3)$$

于是得闭环系统的状态矩阵:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{K}} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{\mathbf{K}}_1 \quad \tilde{\mathbf{K}}_2] \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{K}}_1 & \tilde{\mathbf{A}}_{12} + \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{K}}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4)$$

和闭环特征多项式：

$$\det[sI - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})] = \det[sI_1 - (\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1)] \cdot \det[sI_2 - \tilde{A}_{22}] \quad (5)$$

比较式(5)与式(2)可见，引入状态反馈阵 \tilde{K} ，只能通过选择 \tilde{K}_1 使 $(\tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1\tilde{K}_1)$ 的特征值均具有负实部，从而使 $\tilde{\Sigma}_c$ 这个子系统为渐近稳定。

但 \tilde{K} 的选择并不能影响 $\tilde{\Sigma}_c$ 的特征值分布。因此，仅当 \tilde{A}_{22} 的特征值均具有负实部，即不能控子系统 $\tilde{\Sigma}_c$ 为渐近稳的此时整个系统 $\tilde{\Sigma}_0$ 才是状态能镇定的。

定理6.3.2 系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 通过输出反馈能镇定的充要条件是 Σ_0 结构分解中的能控且能观子系统是输出反馈能镇定的，其余子系统是渐近稳定的。

证明 (1)对 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 进行能控性能观性结构分解，有：

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} & \tilde{\mathbf{A}}_{23} & \tilde{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{43} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = (\tilde{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \tilde{\mathbf{C}}_3 \quad 0) \quad (6)$$

(2)因为 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}})$ 与 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 在能控性和能观性和能镇定性上**完全等价**，所以对 $\tilde{\Sigma}_0$ 引入输出反馈阵 \mathbf{H} ，可得闭环系统的状态矩阵：

$$\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{H}\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} & \tilde{\mathbf{A}}_{23} & \tilde{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{43} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{H} (\tilde{\mathbf{C}}_1, \quad 0, \quad \tilde{\mathbf{C}}_3, \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_1 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{13} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_3 & 0 \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_1 & \tilde{\mathbf{A}}_{22} & \tilde{\mathbf{A}}_{23} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_3 & \tilde{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{A}}_{43} & \tilde{\mathbf{A}}_{44} \end{pmatrix} \quad (7)$$

和闭环系统特征多项式：

$$\begin{aligned} & \det[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{C}})] \\ &= \det[s\mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_1)] \cdot \det[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{22}] \cdot \det[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{33}] \cdot \det[s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{44}] \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)表明，**当且仅当** $(\tilde{\mathbf{A}}_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_1 \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{C}}_1)$, $\tilde{\mathbf{A}}_{22}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{33}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{44}$ 的特征值均具负实部时，闭环系统才为渐近稳定。定理得证。

定理6.3.3 对系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 采用从输出到 \dot{x} 反馈实现镇定的充要条件是 Σ_0 的不能观子系统为渐近稳定。

证明 (1) 将系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 进行能观性分解, 得:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= R_0^{-1} A R_0 = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}, \bar{B} = R_0^{-1} B = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{pmatrix} \\ \bar{C} &= C R_0 = (\bar{C}_1, 0)\end{aligned}\quad (9)$$

式中 $\bar{\Sigma}_0 = (\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 为能观子系统; $\bar{\Sigma}_{\bar{0}} = (\bar{A}_{22}, \bar{B}_2, 0)$ 为不能观子系统。

开环系统特征多项式为:

$$\begin{aligned}\det[sI - \bar{A}] &= \det \begin{pmatrix} sI_1 - \bar{A}_{11} & 0 \\ -\bar{A}_{21} & sI_2 - \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det[sI_1 - \bar{A}_{11}] \cdot \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]\end{aligned}\quad (10)$$

(2) 由于 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 与 (A, B, C) 在能控性和稳定性上等价, 考虑对 $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ 引入从输出到 $\dot{\mathbf{x}}$ 的反馈阵 $\bar{G} = (\bar{G}_1 \quad \bar{G}_2)^T$, 于是有:

$$\begin{aligned}\bar{A} + \bar{G} \bar{C} &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 \end{pmatrix} (\bar{C}_1, \quad 0) \\ &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} + \bar{G}_1 \bar{C}_1 & 0 \\ \bar{A}_{21} + \bar{G}_2 \bar{C}_1 & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (11)$$

和

$$\begin{aligned}\det[sI - (\bar{A} + \bar{G} \bar{C})] &= \det \begin{pmatrix} sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1 \bar{C}_1) & 0 \\ -(\bar{A}_{21} + \bar{G}_2 \bar{C}_1) & sI_2 - \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det[sI_1 - (\bar{A}_{11} + \bar{G}_1 \bar{C}_1)] \cdot \det[sI_2 - \bar{A}_{22}]\end{aligned}\quad (12)$$

式(12)表明, 引入反馈阵 \bar{G} , 只影响 $(\bar{A}_{11}, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ 的特征值。

6.4 系统解耦问题

解耦问题是多输入-多输出系统综合理论中的重要组成部分，目的是寻求适当的控制规律，使输入输出相互关联的多变量系统实现每一个输出仅受相应的一个输入所控制，每一个输入也仅能控制相应应的一个输出，这样的问题称为解耦问题。

设 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 是一个 m 维输入， m 维输出的被控系统，即

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{1}$$

若其传递函数矩阵：

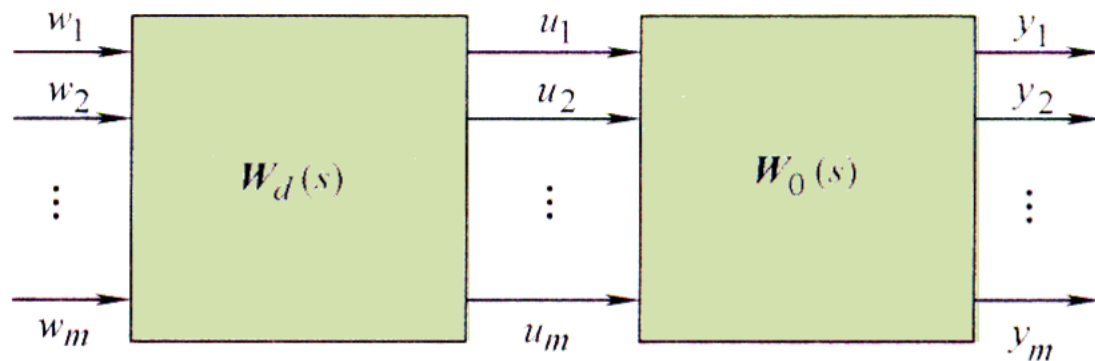
$$\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & & \mathbf{0} \\ & W_{22}(s) & \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ & & W_{mm}(s) \end{pmatrix}\tag{2}$$

实现系统解耦主要有两种方法：

- (1)前馈补偿器解耦
- (2)状态反馈解耦

6.4.1 前馈补偿器解耦

前馈补偿器解耦的框图如下图所示。



前馈补偿器解耦系统框图

根据**串联组合**系统可写出整个系统的传递函数矩阵：

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{W}_0(s) \mathbf{W}_d(s) \quad (3)$$

式中， $\mathbf{W}(s)$ 为加串联补偿器后系统的传递函数矩阵。

$$\mathbf{W}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & & \\ & W_{22}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ & & W_{mm}(s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

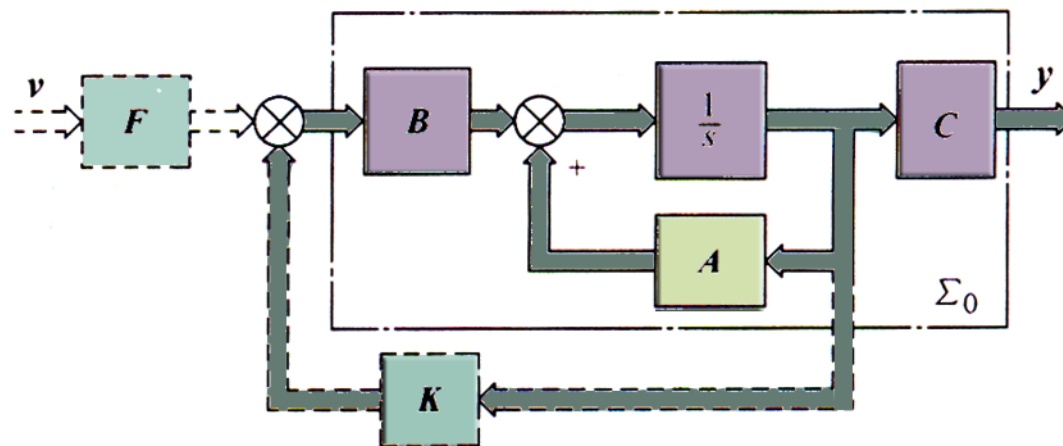
显然，只要 $\mathbf{W}_0^{-1}(s)$ 存在，则**串联补偿器**的传递函数矩阵为：

$$\mathbf{W}_d(s) = \mathbf{W}_0^{-1}(s) \mathbf{W}(s) \quad (5)$$

6.4.2 状态反馈解耦

1. 状态反馈解耦中的几个特征量

状态反馈解耦系统的结构如下图所示：



状态反馈解耦系统

为了便于讨论状态反馈解耦的条件，首先定义几个特征量。

1) 定义 d_i ，是满足

$$\mathbf{c}_i \mathbf{A}^l \mathbf{B} \neq 0 \quad (l = 0, 1, \dots, m-1) \quad (6)$$

且介于0到 $m-1$ 之间的一个最小整数 l 。

式中， \mathbf{c}_i 为系统输出矩阵 \mathbf{C} 中的第 i 行向量 ($i = 1, 2, \dots, m$) 因此， d_i 的下标 i 表示行数。

2. 能解耦性判据

定理6.4.1 被控系统 $\Sigma_0 = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 采用状态反馈能解耦的充要条件是 $m \times m$ 维矩阵 \mathbf{E} 为非奇异。即

$$\det \mathbf{E} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{d_1} \mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{d_2} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m \mathbf{A}^{d_m} \mathbf{B} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

3. 积分型解耦系统

定理6.4.2 若系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 是状态反馈能解耦的，则闭环系统

$$\Sigma_p = (A_p, B_p, C_p):$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A_p \mathbf{x} + B_p \mathbf{v} = (A + BK) \mathbf{x} + BF \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= C_p \mathbf{x} = C \mathbf{x}\end{aligned}\quad (8)$$

是一个积分型解耦系统。其中状态反馈矩阵为：

$$K = -E^{-1}L \quad (9)$$

输入变换矩阵为：

$$F = E^{-1} \quad (10)$$

闭环系统的传递函数为：

$$W_{K,F}(s) = C[sI - (A + BK)]^{-1}BF = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^{d_1+1}} & & & \\ & \frac{1}{s^{d_2+1}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{s^{d_m+1}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

式(11)表明，用式(9)和(10)实现 (K, F) 解耦的系统，其每个子系统都是相当于一个 $(d_i + 1)$ 阶积分器的独立子系统。

4. 能解耦标准形

定理6.4.3 状态反馈 (\hat{K}, \hat{F}) 使系统 $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 解耦并任意配置极点的充要条件是，它们具有以下形式：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}} &= \begin{pmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_m \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{F}} &= \begin{pmatrix} f_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & f_m \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (12)$$

式中, $k_i = k_{i0} \cdots k_{id_i}$, $f_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$ 。

5. 状态反馈解耦的设计步骤

用状态反馈实现系统解耦可归纳如下:

- 1) 检验系统是否满足式(7)所述充要条件。
- 2) 按照(9)和(10)计算状态反馈阵K和输入变换阵F, 化成积分型解耦形式。
- 3) 按照(12)对各独立子系统采用附加状态反馈, 将其极点配置为期望值。

6.5 状态观测器设计

系统综合设计时的极点配置、系统镇定、解耦等都离不开状态完全反馈，但系统的状态变量并非都能直接用传感器检测得到，有的甚至根本无法检测，因而不可能实现状态反馈控制了。

需要对不能直接检测的状态变量进行观测或重构，这实际上是对已有系统的另一种改造方法。

由Luenberger提出的状态观测器理论为确定性条件下的状态重构提供了指导。

假如被控系统 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 不可观或部分状态变量不能直接检测，但系统稳定且可控，则可以在计算机上建立一个模拟系统，该模拟系统的动态方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu, \hat{y} = C\hat{x}$$

其中， \hat{x} ， \hat{y} 分别为计算机模拟系统的状态估计值及输出向量。

当模拟系统与被控系统的初始条件相同时，在同样的输入作用下，两个系统的解必定相同，即 $\hat{x} = x$

因此，可以用 \hat{x} 作为状态反馈所需要的信息。

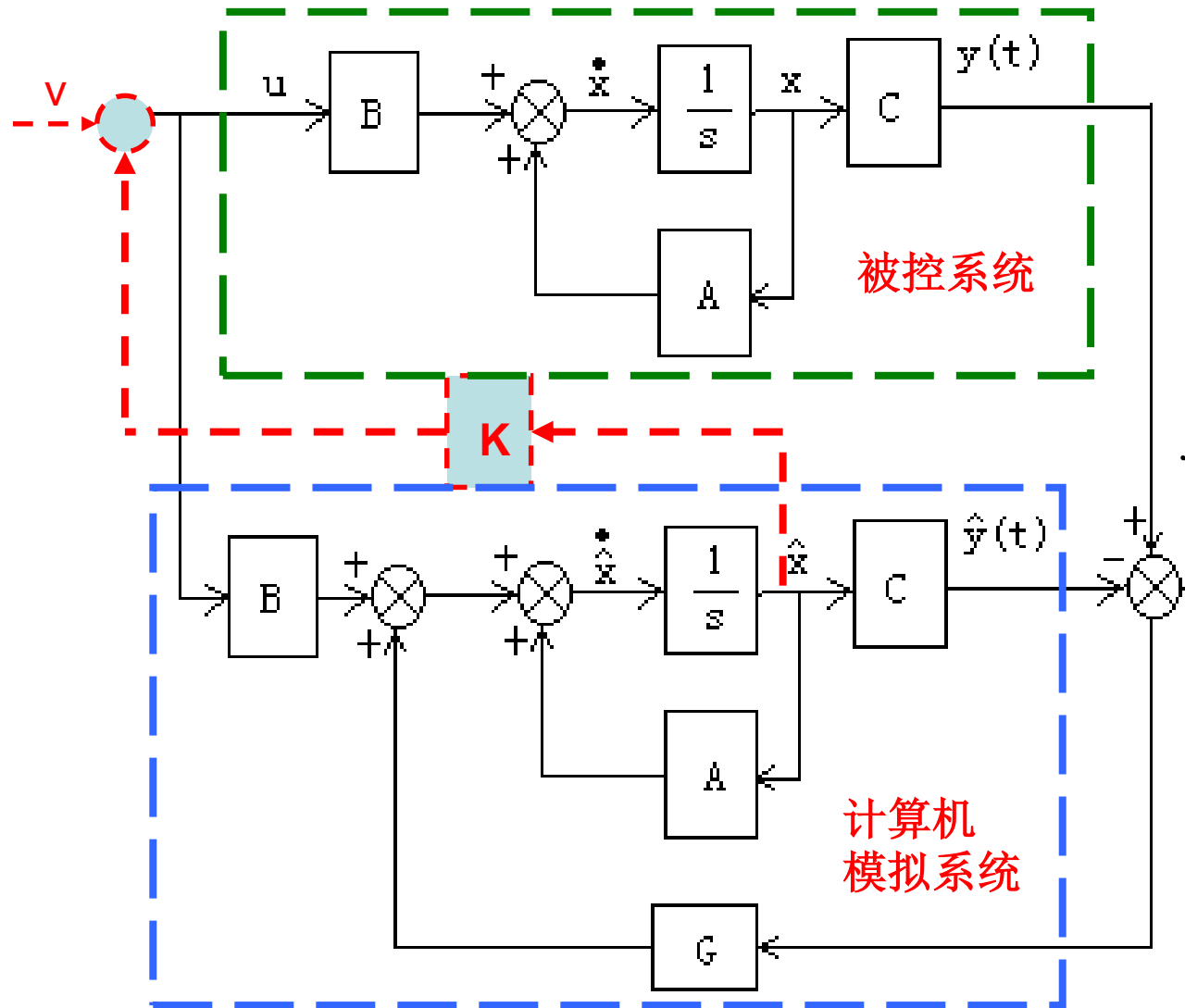
但是，被控系统的初始条件 $x(t_0)$ 与模拟系统的初始条件 $\hat{x}(t_0)$ 可能很不相同，而且模拟系统的初始条件的设置往往是预估值，因而两个系统的初态总有差异，即使两个系统的A、B、C矩阵完全一样（由于计算机的运算误差，通常也不可能一样），必定存在估计状态与被控系统的实际状态的偏差 $(\hat{x} - x)$ 。

此时模拟系统的状态估计值不能真正替代被控系统的状态变量来用于状态反馈控制，否则会带来不确定性或难以控制。

然而 $(\hat{x} - x)$ 的存在，也必然会导致偏差 $(\hat{y} - y)$ 的存在，尽管被控系统的某些状态变量不能直接检测，但其输出总是可以用传感器检测得到的。

于是，可以根据一般反馈控制的原理，将 $(\hat{y} - y)$ 反馈至 $\dot{\hat{x}}$ ，以控制 $(\hat{y} - y)$ 尽快趋于0，进而使 $(\hat{x} - x)$ 尽快趋于0，这时便可利用 \hat{x} 替代 x 了。

按照上述思路构造的观测器系统如图所示。



由图，有

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + G(y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + GC(x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (2)$$

两个状态方程相减，得

$$\dot{\hat{x}} - \dot{x} = A(\hat{x} - x) + GC(x - \hat{x}) = (A - GC)(\hat{x} - x) \quad \text{则}$$

$$\hat{x} - x = e^{(A - GC)t} [\hat{x}(t_0) - x(t_0)]$$

$$\hat{x} - x = e^{(A-GC)t} [\hat{x}(t_0) - x(t_0)] \quad \textcircled{3}$$

显然，当初始条件 $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ 时， $\hat{x}(t) \equiv x(t)$

但这种情况很难保证，因而会有 $\hat{x}(t_0) \neq x(t_0)$ ，从而 $\hat{x}(t) \neq x(t)$ 。

事实上，只要 **[A-GC]** 的**特征值具有负实部**，则③式才能按指数衰减，当 $t \rightarrow \infty$ 时，必有

$$\hat{x}(t) - x(t) \rightarrow 0$$

通过对模拟系统状态变量的计算，即可以估计出被控系统的**状态X**。

换言之，尽管**X**不能直接检测，但观测器计算出的状态估计值是可以得到的，因而，可以用计算机对状态变量的估计值用于状态反馈。

观测器的极点可以由观测器矩阵**[A-GC]**来确定，也就是通过**极点配置**的方法来选择矩阵**G**，进而构造出观测器，**G**的选择决定了 \hat{x} 趋于 x 的速度。

因此，状态观测器的状态空间表达式为：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

观测器特征方程为：

$$|\lambda I - (A - GC)| = 0$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy \quad \hat{y} = C\hat{x}$$

例6-2 被控系统为 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$

设计全阶观测器，使观测器的极点配置为-10， -10；（极点越负，衰减越快。）

并写出观测器状态空间表达式。

解：由被控系统的传函，可写出被控系统的状态空间表达式为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [2 \quad 0]x$$

由于n=2，y为1X1维矢量，故G为2X1维矩阵。令 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$ 则

$$A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [2 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2g_1 & 0 \\ 2g_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2g_1 & 1 \\ -2-2g_2 & -3 \end{bmatrix}$$

观测器的特征方程为： $|\lambda I - (A - GC)| = \begin{vmatrix} \lambda + 2g_1 & -1 \\ 2 + 2g_2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$ 即：

$$\lambda^2 + (2g_1 + 3)\lambda + (6g_1 + 2g_2 + 2) = 0$$

期望的观测器特征方程为: $(\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 2g_1 + 3 = 20 \\ 6g_1 + 2g_2 + 2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = 8.5 \\ g_2 = 23.5 \end{cases}$$

则 $A - GC = \begin{bmatrix} -17 & 1 \\ -49 & -3 \end{bmatrix}$

观测器的状态空间表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \begin{bmatrix} -17 & 1 \\ -49 & -3 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 8.5 \\ 23.5 \end{bmatrix} y \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} \end{aligned}$$

观测器设计时的爱克曼（Ackermann）公式：

全阶观测器设计的主要问题是观测器反馈增益矩阵 \mathbf{G} 的设计，以使得由状态误差方程 $\dot{\hat{x}} - \dot{x} = (A - GC)(\hat{x} - x)$ 定义的动态方程以足够快的速度渐近稳定。

设被控系统为 $\dot{x} = Ax + Bu$ ；其对偶系统为 $\dot{x} = A^T x + C^T u$

$$y = Cx$$

$$y = B^T x$$

又设对偶系统状态反馈控制信号为 $u = Kx + v$

若对偶系统可控（则被控系统可观），则可通过确定状态反馈增益 \mathbf{K} ，使对偶系统具有期望的特征值（对偶系统的闭环极点）。

设 $\lambda_i (i = 1 \sim n)$ 为状态观测器的特征值（为被控系统的观测器），也设通过 \mathbf{K} 的选择使对偶系统状态反馈后的闭环特征值同样为 $\lambda_i (i = 1 \sim n)$ ，

则对观测器有

$$|\lambda I - (A - GC)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \quad ①$$

对偶系统状态反馈后的闭环方程为

$$\dot{x} = (A^T + C^T K)x + C^T v$$

$$|\lambda I - (A - GC)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \quad ①$$

又对偶系统状态反馈后的闭环特征多项式为：

$$\Phi(s) = |\lambda I - (A^T + C^T K)| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \quad ②$$

$$\text{由①②有：} |\lambda I - (A - GC)| = |\lambda I - (A^T + C^T K)| \quad ③$$

矩阵的
性质

$$\text{又} \quad |\lambda I - (A - GC)| = |\lambda I - (A^T - C^T G^T)| \quad ④$$

$$\text{比较③④有} \quad K = -G^T \quad G = -K^T \quad ⑤$$

换言之，若观测器的闭环极点与被控系统的对偶系统状态反馈后的闭环极点相同，则可通过闭环对偶系统的极点配置确定的状态反馈增益矩阵**K**确定观测器的反馈增益矩阵**G**。

由设计状态反馈控制器的爱克曼公式，对偶闭环系统的状态反馈增益**K**为：

$$K = -[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A^T)$$

由⑤有

$$\begin{aligned}
 G = -K^T &= -\left\{ -[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A^T) \right\}^T \\
 &= \underline{\Phi^T(A^T)} \left\{ \underline{\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1}} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \textcircled{6}
 \end{aligned}$$

$$\text{又 } \underline{\Phi(A^T)} = (A^T)^n + a^{n-1}(A^T)^{n-1} + \cdots + a_1 A^T + a_0 I$$

$$\therefore \Phi^T(A^T) = A^n + a^{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = \Phi(A) \quad \text{又}$$

$$\underline{\left\{ \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^{-1} \right\}^T} = \left\{ \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \cdots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

上两式代入⑥得：

$$\therefore G = \Phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

比较:

状态观测器设计:

$$G = \Phi(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

状态反馈控制器设计:

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \Phi(A)$$