考试课程名称：现代控制理论　学时：40　考试方式：开卷

考试内容：

$$\begin{cases} C\dot{x}_1 = x_1 + i_2 \\ u_1 = x_1 + R i_2 \\ u_2 = R_2 i_2 + R_1 x_2 + L\dot{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C} & \frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{R_2C} & 0\\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & R_1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_1$$

*答案请写在答题纸上，写在试题纸上无效

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 + R_2 C\dot{x}_1 - R_2 x_2 \\ u_2 = u_1 - x_1 + R_1 x_2 - L\dot{x}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = R_1 x_1 \\ v_2 = u_1 - x_1 \end{cases}$$

$R_2 v_2 = R_1 v_L + L\frac{dv_c}{dt} + v_2$

第一题：（共 20 分）如右图所示的电路中，设电容两端的电压为 $x_1$，电感中的电流为 $x_2$。 P606

（1）试写出以 $R_1$、$R_2$ 两端电压 $V_1$、$V_2$ 为输出的状态空间表达式。（8 分）

（2）如果 $R_1=R_2=1\Omega$，$C=1f$，$L=1h$，判断系统的状态可控性、可观性及输出可控性。（12 分）

$[CB \quad CAB \quad D]$ 可控，可观

第二题：（共　分）已知双输入-三输出系统的方程为

$\dddot{y}_1 + \dot{y}_1 + 2y_1 + y_2 + 3y_3 = u_1 + 2u_2$　设 $x_1=y_1, x_2=\dot{y}_1, x_3=y_2, x_4=y_3$

$\dot{y}_1 + 2y_1 + 3y_2 + y_3 = 2u_1 + u_2$

$\dot{y}_3 + y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 3u_1 + 2u_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + u_1 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_3 - x_4 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{x}_4 = -x_1 - 2x_3 - 3x_4 + 3u_1 + 2u_2 \end{cases}$$

试写出其状态空间表达式。

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & -1 & -1 & -3\\ -2 & 0 & -3 & -1\\ -1 & 0 & -2 & -3\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix},\quad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

第三题：（共 20 分）已知系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 4\end{bmatrix}u$$

系统的输出为 $y(t) = (1 \;\; 1 \;\; 0)x$

初始状态为 $x(0) = (1 \;\; 2 \;\; 1)^T$，

输入量为 $u(t) = 1(t)$。

（1）求系统的传递函数矩阵 $G(s) = Y(s)/U(s)$（10 分）

（2）在输入作用下达到稳态后关掉输入，求此后系统的解 $x(t)$。（10 分） P44

$$sI - A = \begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & 0 & s+2\end{bmatrix}$$

$$[sI-A]^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\begin{bmatrix}s^2+3s+2 & 0 & \\ 0 & s^2+3s+2 & 0\\ & & \end{bmatrix}$$

$C[sI-A]^{-1} = (1, 1, 0)\frac{1}{\Delta}[\ ]$

$C[sI-A]^{-1}B = \frac{1}{\Delta}[s^2+3s+2, s^2+3s+2, 0]\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$　$(s+1)(s+2)$　$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} =$

特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+1-j\sqrt{3})(\lambda+1+j\sqrt{3}) = \lambda^3 + 12\lambda + \ldots$

系统特征多项式 $f(\lambda) = \det[\lambda I - (A+bk)] = \lambda^3 - k_3\lambda^2 - (k_2+2+6+1)\lambda + 7k_3 + 14 + 2 - 2k_1$

第四题：（共 15 分）设有不稳定的线性定常系统（A，b，c），试求使系统闭环极点配置在 −10 及 $-1 \pm j\sqrt{3}$ 处的状态反馈增益向量 K；

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad c = [1 \;\; 1 \;\; 1]$$

P195　$(-76.5 \;\; -33 \;\; -10)$

第五题：（共 10 分）设二阶系统 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = ax_1 - x_2$，

（1）试确定系统的平衡状态；$x_e = 0$ 即 $x_1 = 0$　$x = 0$　$\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

（2）用李雅普诺夫稳定性理论确定使系统稳定的 a 的取值范围。 P167

$V(x) = x_1^2 + x_2^2$　$a = -1$

$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = 2x_1x_2 + 2x_2(ax_1 - x_2)$

$= 2x_1x_2 + 2ax_1x_2 - 2x_2^2 = (2+2a)x_1x_2 - 2x_2^2 < 0$

第六题：（共 10 分，每题 5 分）：

（1）设目标函数为 $J = f(x) = 60 - 9x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$，约束条件为 $g(x) = x_1 + x_2 - 8 = 0$，求 $J = f(x)$ 的极值点。

$x_1 = 8 - x_2 \Rightarrow f(x_2) = \ldots$　$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$

（2）已知性能指标函数为 $J = \int_0^1 [x^2(t) + \dot{x}(t)]dt$，试求 δJ 的表达式。

$\Delta J = \int_0^1 \{[x(t) + \delta x(t)]^2 + [\dot{x}(t) + \delta\dot{x}(t)] - x^2(t) - \dot{x}(t)\}dt$

$= \int_0^1 \{[2x(t) + t]\delta(t) + [\delta x(t)]^2\}dt$　$\therefore \delta J = \int_0^1 [2x(t) + t]\,\delta x(t)\,dt$

第七题：（共 15 分）已知被控系统的动态方程为 $\dot{x}(t) = u(t)$，$x(0) = 0, x(1) = 1$，求 $u(t)$，使 $J = \int_0^1 (x^2 + u^2)dt$ 取极值。

$J = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2)dt$

$L = [x, \dot{x}] = x^2 + \dot{x}^2$

P250

欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2x - 2\ddot{x} = 0$

可得：$x(t) = C_1e^{t} + C_2e^{-t}$

$\because x(0) = C_1 + C_2 = 0$，$x(1) = C_1e + C_2e^{-1}$ $\Big\}$ $\Rightarrow C_1 = \frac{e}{e^2-1}$，$C_2 = \frac{e}{1-e^2}$

$x^*(t) = \frac{e}{e^2-1}e^{t} + \frac{e}{1-e^2}e^{-t}$

$u^*(t) = \dot{x}^*(t) = \frac{e}{e^2-1}e^{t} - \frac{e}{1-e^2}e^{-t}$

何东