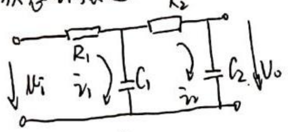
第二章:

2-1. 如图所示，u_i为输入，电容器C_1和C_2两端的电压为状态变量，以C_2两端的电压为输出变量建立该电路的状态空间表达式。



$i_1 = \frac{dC_1U_{C_1}}{dt} = C_1\frac{dU_{C_1}}{dt}$　　$i_2 = C_2\frac{dU_{C_2}}{dt} = C_2\frac{dU_0}{dt}$

则有 $u_i = R_1\times\left(C_1\frac{dU_{C_1}}{dt} + C_2\frac{dU_{C_2}}{dt}\right) + U_{C_1} = R_1C_1\dot U_{C_1} + R_1C_2\dot U_{C_2} + U_{C_1}$

$U_{C_1} = R_2C_2\frac{dU_{C_2}}{dt} + U_{C_2} = R_2C_2\dot U_{C_2} + U_{C_2}$

且 $U_{C_2} = U_0$

则状态空间表达式为:
$$\begin{bmatrix}\dot U_{C_1}\\ \dot U_{C_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}\right) & \frac{1}{C_1R_2}\\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_{C_1}\\ U_{C_2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{R_1C_1}\\ 0\end{bmatrix}u_i$$

输出方程: $U_0 = U_{C_2}$

2-4 设有一个弹簧—质量—阻尼器系统，安装在一个不计质量的小车上，u和y分别为小车和质量体的位移，k, b, m分别是弹簧系数、阻尼器阻尼系数和质量体质量，试建立u为输入，y为输出的状态空间模型。

解：由力学知识得
$k(u-y) + b\left(\frac{du}{dt} - \frac{dy}{dt}\right) = m\frac{d^2y}{dt^2}$　　令 $x_1 = y$，$x_2 = \dot y$

$\Rightarrow \ddot y + \frac{b}{m}\dot y + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}u + \frac{b}{m}\dot u$

得状态空间表达式:
$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u.$$

输出方程: $y = \begin{bmatrix}\frac{k}{m} & \frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

2-12 已知差分方程为 $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + 3u(k)$，试求控制矩阵为以下情形时的状态空间表达式。

(1). $B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$　　(2) $B = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$.

解：由差分方程得到: $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 2sU(s) + 3U(s) \Rightarrow$ 传递函数 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$
$= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$

当 $B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 时，状态方程中的控制 A 为对角形

此时状态空间表达式
$$\begin{cases}X(k+1) = \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}X(k) + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u.\\ y(k) = [1,\ 1]X(k)\end{cases}$$

当$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$时为能观标准型

此时状态空间表达式为

$$X(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=[3\ 2]\,X(k)$$

第三章：

3-2、求下列矩阵的特征向量。

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (2) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ (3) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$ (4) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -12 & -6\end{bmatrix}$

解：(1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=1\quad \lambda_2=2$

当$\lambda_1=1$时：$(\lambda I-A)P_1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}P_1=0 \Rightarrow P_1=[1\quad 0]^T$

当$\lambda_2=2$时，$(\lambda I-A)P_2=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix}P_2=0 \Rightarrow P_2=[3\ 1]^T$

(2) 特征方程为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -2 & -2\\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2\\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & \lambda-1 & -2\\ 1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}(\lambda-5)=(\lambda-5)\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$

$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2=0$ 得 $\lambda_1=5.\ \lambda_2=\lambda_3=-1$

当$\lambda_2=\lambda_3=-1$时：$(\lambda_2 I-A)=\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $(\lambda_2 I-A)P=0 \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\quad P_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

当$\lambda_1=5$时 $(\lambda_1 I-A)=\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $(\lambda_1 I-A)P_3=0 \Rightarrow P_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

(3) 特征多项式为

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ -2 & 5 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda[\lambda(\lambda-4)+5]+\cancel{\lambda(\lambda-4)}(-2)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1\quad \lambda_3=2$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时.有：$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 5 & -3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda I-A)P=0 \Rightarrow P_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=P_2.$

当$\lambda_3=2$时.有 $(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 5 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $(\lambda_3 I-A)P_3=0 \Rightarrow P_3=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$

(4) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 8 & 12 & \lambda+6 \end{vmatrix}=(\lambda+2)^3 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-2$ 时

$\lambda I-A=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 8 & 12 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(\lambda I-A)P=0 \Rightarrow P_1=P_2=P_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

3-6 已知传递函数 $G(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$，试求可控标准型（A为友矩阵）可观标准型（A为友矩阵转置），对角型（A为对角阵）动态方程.

解：$G(s)=1+\frac{2s+5}{s^2+4s+3}=1+\frac{\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$

则可控标准形为：

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}x+u \end{cases}$$

则可观标准型为：

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ \dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}x+u \end{cases}$$

对角形为：

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}x+u \end{cases}$$

第五章：

5-7. 当初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，输入 $u(t)$ 是单位阶跃函数，求系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x$ 的解

解：$\dot{x}=Ax+Bu \Rightarrow sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \Rightarrow (sI-A)X(s)=BU(s)+x(0)$

$\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)+(sI-A)^{-1}x(0)$

$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$ $(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$ $(sI-A)^{-1}x(0)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x(t)=L^{-1}(X(s))=L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]+L^{-1}[(sI-A)^{-1}]x(0)$

$\Rightarrow x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$. 其中 $e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$e^{A(t-\tau)}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}BU(s)]$

$=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot 1 d\tau=\begin{bmatrix} 1+t+\frac{1}{2}t^2 \\ 1+t \end{bmatrix}$

5-12. 已知系统的状态方程.

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0.2 & 1\\ 0 & 0.2\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u(k)\qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

其中输入信号 $u_1(k)$ 和 $u_2(k)$ 分别为阶跃信号和斜坡信号在采样周期为 0.25s 时的采样值. 试求系统的状态方程的解.

matlab 绘图

5-15. 判断下列系统的状态可控性和输出可控性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}u.\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$

解: (1) 状态可控性.

$$\mathrm{rank}M=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=2.$$ ∴状态可控.

$$M'=\begin{bmatrix}CB & CAB & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$ $\mathrm{rank}M'=1$. 故输出可控.

(2) 约旦块的最后一行全为0, 故系统的状态不可控.

$$M'=\begin{bmatrix}CB & CAB & CA^2B & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -5 & 3 & 11 & -9 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 3 & -3 & -7 & 9 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}\,M'=2.$

故. 输出可控.

5-16 判定如下系统的状态可观性.

(1) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\end{bmatrix}x\end{cases}$

解: (1) $M=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ $\mathrm{rank}M=2$. 故可观.

(2) $M=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -4 & -7 & -2\\ 4 & 4 & -1\end{bmatrix}$ $\mathrm{rank}M=3$. 故状态可观.

5-24. 判断下列二次型函数的符号.

(1) $Q(x)=-x_1^2-3x_2^2-11x_3^3+2x_1x_2-x_2x_3-2x_1x_3$

(2) $Q(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-6x_2x_3-2x_1x_3$

(3) $V(x)\ x^TQx=x^T\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}x$

(4) $V(x)=\begin{cases}x_1^2+x_2, & x_2\geq 0\\ x_1^2+x_2^4 & x_2<0\end{cases}$

解:(1) $Q(x)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & -\frac{1}{2} & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$ $\Delta_1=-1<0$ $\Delta_2=2>0$ $\Delta_3=-\frac{7}{4}$. 故函数是负定的

(2) $Q(x)=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta_1=1.$ $\Delta_2=3$ $\Delta_3=-16$. 故函数是不定的

(3) $\Delta_1=1$ $\Delta_2=1$ $\Delta_3=-2+2=0$ 函数是半正定的.

(4) $\cancel{V(x)}$ 当 $V_2\geq 0$ 时. $V(x)\geq 0$ 故 $V(x)$ 是半正定的
当 $V_2<0$ 时 $V(x)>0$

5-25. 确定下列二次型函数中待定系数的取值范围,从而使其成为正定的.

(1) $V(x)=x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

(2) $V(x)=ax_1^2+bx_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3$

解(1) $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$ $\Delta_1=1>0$ $\Delta_2=1>0$ $\Delta_3=2a-1-1-2-a-1=a-5>0\Rightarrow a>5$

(2) $P=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & -2\\ 1 & -2 & c\end{bmatrix}$ $\Delta_1=a>0$ $\Delta_2=ab-1>0\Rightarrow ab>1\Rightarrow b>\frac{1}{a}$

$\Delta_3=abc-2-2-b-c-4a>0\Rightarrow \cancel{ab}\ abc-c>4a+b+4$

$\Rightarrow (ab-1)c>4a+b+4$

$\Rightarrow c>\frac{4a+b+4}{ab-1}$

5-30:用李雅普诺夫第二法判断下列线性系统平衡状态的稳定性.

(1) $\dot{x}_1=-x_1+x_2.$
$\dot{x}_2=2x_1-3x_2.$

(2) $\dot{x}_1=-x_1+x_2$
$\dot{x}_2=-x_1-x_2.$

(3) $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}x$

(4) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 6 & -5\end{bmatrix}x$

解:(1) $\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{cases} \Rightarrow x_e=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 是其唯一的平衡态

构造李雅普诺夫函数 $V(x)=x_1^2+x_2^2$.

则 $\dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(-x_1+x_2)+2x_2(2x_1-3x_2)$
$=-2x_1^2-6x_2^2+6x_1x_2$ 故 $\dot{V}(x)<0.$

当 $x=0$ 时. $\dot{V}(x)=0$. ~~而~~ 当 $x\neq 0$ 时. $\dot{V}(x)<0$, 平衡态 x_e 为渐近稳定

当 $\|x\|\to\infty$ 时. $V(x)\to\infty$, 系统在原点是大范围渐近稳定.

(2) $\begin{cases}\dot{x}_1=0\\ \dot{x}_2=0\end{cases} \Rightarrow x_e=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ 是其唯一的平衡态.

$V(x)=x_1^2+x_2^2 \Rightarrow \dot{V}(x)=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=-2x_1^2-2x_2^2.$

当 $x=0$ 时, $\dot{V}(x)=0$, 当 $x\neq 0$ 时 $\dot{V}(x)<0$ 负定. 平衡态 x_e 为渐近稳定.

当 $\|x\|\to\infty$ 时 此时 $V(x)\to\infty$ 系统在原点上是大范围渐近稳定.

(3)

(3): $A^TP + PA = -I$、设 $P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{11} = -\frac{11}{12} \\ P_{12} = -\frac{4}{3} \\ P_{22} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad 则\ P=\begin{bmatrix} -\frac{11}{12} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\cdot |P| = \frac{33}{24} - \frac{16}{9} < 0$，故原系统不稳定.

(4) $x_e=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 是唯一的平衡状态、

构造李雅普诺夫函数：$V(x) = 6x_1^2 + x_2^2$. $\dot{V}(x) = 12x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -10x_2^2 < 0$

当 $x=0$ 时. 则. $V(x)=0$. 当 $x\neq 0$ 时. $\dot{V}(x)<0$，故 x_0 为渐近稳定.

当 $|x|\to\infty$ 时. $V(x)\to\infty$，系统在原点是大范围渐近稳定.

5-30. 已知系统状态方程 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u$. 当 $Q=I$ 时. $P=$?

解：由 $A^TP+PA=I$ ~~其~~中设 $P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$

$$则有 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

由于 ~~R(A)=2~~ $\mathrm{rank}\,A=2$. ~~又~~ $\mathrm{rank}\,I=3$ 故方程组无解.

故不存在矩阵 P 满足上式。

第六章：已知被控系统为 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$，$y=[1\ \ 0]x$，引入状态反馈. 试设计状态反馈控制器. 使闭环系统的特征值为 $\lambda_{1,2}=-5$.

① 判断是否可控：$M=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}\,M=2$. 故状态可控.

设状态反馈矩阵为 $K=[k_1\ \ k_2]$

$f(\lambda)=|\lambda I-(A+BK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2-k_1 & \lambda+3-k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2+(3-k_2)\lambda + 2-k_1$

由配制极点. $f(\lambda)=(\lambda+5)^2=\lambda^2+10\lambda+25$

则有 $\begin{cases} 3-k_2=10 \\ 2-k_1=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2=-7 \\ k_1=-23 \end{cases}$ 则状态反馈矩阵 $K=[-23\ \ -7]$

6-13. 给被控系统的状态空间模型为.

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

，试确定一个状态观测器. 要求将其极点配置在 $-2, -2, -3$ 点处.

判断可观性：由 $M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$，$\text{rank}\, M = 3$. 故状态可观.

令 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$. 则 $A - GC = \begin{bmatrix} -1-g_1 & -2-g_1 & -2 \\ -g_2 & -1-g_2 & 1 \\ 1-g_3 & -g_3 & -1 \end{bmatrix}$

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1+g_1 & 2+g_1 & 2 \\ +g_2 & \lambda+1+g_2 & -1 \\ -1+g_3 & +g_3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1+g_1 & 2+g_1 & 2 \\ g_2 & \lambda+1+g_2 & -1 \\ -1+g_3 & +g_3 & \lambda+1 \end{vmatrix} = a^3 + a^2(g_1+g_2) + a(2-g_3-2g_2) - 4g_2g_3 + 2g_2 - 2g_3 + g_1 + 2.$$

其中 $a = \lambda+1$

由希望的极点得.

$$f(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+3) = \lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12. = (a-1)^3+7(a-1)^2+16(a-1)+12 = a^3-4a^2+5a+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1+g_2=-4 \\ 2-g_3-2g_2=5 \\ 2+g_1-2g_3+2g_2-4g_2g_3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1+g_2=-4 \\ 2g_2+g_3=-3 \\ g_1+2g_2-2g_3-4g_2g_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1=-3 \\ g_2=-1 \\ g_3=-1 \end{cases}$$

故 $G = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 则状态观测器为 $\dot{\hat{x}} = [A-GC]\hat{x} + Bu + Gy$

第七章：

7-1 设目标函数 $J = f(x) = 10 - 2x_1 + 4x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$，约束条件为 $g(x) = x_1 + x_2 - 6 = 0$. 求 $J = f(x)$ 的极值点和极值，并判断是极大值还是极小值.

解：由拉格朗日函数乘数法得.

$$f(x_1, x_2, \lambda) = 10 - 2x_1 + 4x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + \lambda(x_1+x_2-6)$$

$$\begin{cases} f'_{x_1} = -2 + 2x_1 + \lambda - (x_2) = 0 \\ f'_{x_2} = 4 + 6x_2 - x_1 + \lambda = 0 \\ f'_{\lambda} = x_2 + x_1 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{24}{5} \\ x_2 = \frac{6}{5} \\ \lambda = -\frac{32}{5} \end{cases}$$

故目标函数在 $[\frac{24}{5}, \frac{6}{5}]$ 处取得极点.

则 $f''_{x_1x_1} = 2$，$f''_{x_1x_2} = -1$，$f''_{x_2x_2} = 6$，$f''_{x_1x_2} = -1$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11 > 0$$ 故. 存在极小值.

7-2. 求下列泛函的变分.

(1) $J=\int_0^1[\dot{x}^2(t)+1]dt$　(2) $J=\int_0^1[\dot{x}^2(t)+tx(t)]dt$　(3) $J=\int_{t_0}^{t_f}[t^2+x^2(t)+\dot{x}^2(t)]dt$.

(4) $J=\int_0^1\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}\,dt$

由变分公式: $\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}(t)\right]dt$

解:(1): $\delta J=\int_0^1 2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t)dt$

(2): $\delta J=\int_0^1[t\delta x(t)+2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t)]dt$.

(3): $\delta J=\int_{t_0}^{t_f}[2x(t)\delta x(t)+2\dot{x}(t)\delta\dot{x}(t)]dt$.

(4): $\delta J=\int_0^1\left[\frac{1}{2\sqrt{1+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2}}\left(2\dot{x}_1\delta\dot{x}_1(t)+2\dot{x}_2\delta\dot{x}_2(t)\right)\right]dt$

7-3. 在性能指标 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2)dt$ 在边界条件 $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_1(\frac{\pi}{2})=1$, $x_2(\frac{\pi}{2})=-1$ 下的极值曲线:

解: ~~由欧拉方程~~ $\cancel{\frac{\partial L}{\partial x}-d}$

令 $L=\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+2x_1x_2$. 则 $\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_2$　$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_1$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=2\dot{x}_1,\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=2\dot{x}_2\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=2\ddot{x}_1,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=2\ddot{x}_2\end{cases}$$

代入欧拉方程:
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)=0\end{cases}$$

得 $\begin{cases}2x_2-2\ddot{x}_1=0\\ 2x_1-2\ddot{x}_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=\ddot{x}_1\\ x_1=\ddot{x}_2\end{cases}\Rightarrow x_1=\ddddot{x}_1=x_1^{(4)}$

~~其解为~~ $\cancel{\Rightarrow r-r^4=0}$

$\cancel{\Rightarrow r(1-r^3)=0\Rightarrow r_1=0\quad r_2=r_3=r_4=1}$

$\cancel{则\ x_1=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^t+C_4e^{0t}=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^t+C_4}$

得 $r^4=1\Rightarrow r_1=1\quad r_2=-1\quad r_3=i\quad r_4=-i$

则四阶微分方程的解为 $x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}+e^{0t}(C_3\cos t+C_4\sin t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$

由 $x_1(0)=0\Rightarrow C_1+C_2+C_3=0$

$x_1(\frac{\pi}{2})=1\Rightarrow C_1e^{\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}+C_4=1$

又 $x_2=\ddot{x}_1\Rightarrow x_2=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$.

由 $x_2(0)=0\Rightarrow C_1+C_2-C_3=0$

$x_2(\frac{\pi}{2})=-1\Rightarrow C_1e^{\frac{\pi}{2}}+C_2e^{-\frac{\pi}{2}}-C_4=-1$

解得 $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, $C_4=1$

则 $x_1=\sin t$.

$x_2=-\sin t$.