有等式约束的目标泛函的极值条件

(1)拉格朗日型问题（积分型）

在求解实际最优控制问题时，泛函 J 所依赖的变量函数往往要同时满足系统的动态方程（微分方程、状态方程等）的约束，且 J 一般为多变量目标泛函。

求解这类问题类似于求解静态优化问题，采用拉格朗日乘子法，可将这类有等式约束的泛函极值问题转化为无约束的泛函极值问题。

A、终端固定的问题

已知系统微分方程 $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$

其中 $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{u} \in \mathrm{R}^{\mathrm{r}}, \mathrm{f}-\mathrm{n}$维连续可微函数

$$t \in [t_0, t_f], \qquad x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

求使目标函数 $J(x, u, t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$

取得极值的最优轨迹 x*(t) 或最优控制 u*(t)。

此类问题的求解思路：

①先将状态方程写成约束方程形式：

$$f(x,u,t)-\dot{x}(t)=0 \qquad J(x,u,t)=\int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$$

应用拉格朗日乘子法，构造新的增广函数：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left\{L(x,u,t)+\lambda^T(t)[f(x,u,t)-\dot{x}(t)]\right\}dt$$

其中$\lambda(t)$是待定的 n 维拉格朗日成乘子矢量。

②定义标量函数 $H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$

则 $J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)]dt$

显然，J' 是一个关于 x, u , λ 的无约束多变量泛函

H也叫哈密顿函数。

③求J' 取极值的必要条件

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)]dt$$

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

根据无约束多变量泛函取极值的必要条件（欧拉方程），

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=0$$ 这里 $L=H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)$ **有：**

$$\frac{\partial}{\partial x}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]=0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T=0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{u}}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]=0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]-\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}}[H(x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]=0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}=0$$

即：

标量形式：

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T=0$$ 协态/伴随方程

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$ 控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}=0$$ 状态方程

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{\lambda}_i=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}-\dot{x}_i=0$$

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

协态/伴随方程+状态方程=哈密顿正则方程

由于第三个方程就是已有的状态方程，故只需求解，即不用求解H 关于 λ 的偏导方程。

- 在状态方程及协态方程中，因$\lambda(t)$与 x(t)在位置上相对应，两个方程只差一个符号，故有协态/伴随方程之称，相应地，$\lambda(t)$ 被称为协态向量或伴随向量。
- 控制方程也称为耦合方程，因为从控制方程中可以求出 u(t) 与 x(t) 和$\lambda(t)$的关系，它把状态方程及伴随方程联系起来，故称为耦合方程。
- 两端固定的问题的横截条件就是边界条件。

问题：当 $x(t_f), t_f$ 自由时如何求解？

例8-15：假设人造地球卫星姿态控制系统的状态方程为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=f(x,u,t)=\begin{bmatrix}x_2(t)\\ u(t)\end{bmatrix}$$

初始状态为 $x(0)=(1\ \ 1)^T$，终端状态为 $x(2)=(0\ \ 0)^T$

求能量最优控制规律 $u^*(t)$，以使系统在姿态调整过程中的能量消耗 最小。

$$J=\frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

（多变量，等式约束）

解： $L=\frac{1}{2}u^2(t),\ f=\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$

令 $\lambda(t)=\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$ （列矢量）

则：

$$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$$

① 由 $\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{\lambda}_i^T=0$ 得

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0, \qquad \Rightarrow \lambda_1=a\ (cons\tan t)$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1, \qquad \Rightarrow \lambda_2=-at+b$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \qquad \mathrm{H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u}$$

$$\lambda_2 = -at + b$$

②由：$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ 得 $\quad u + \lambda_2 = 0$，则 $\mathrm{u=at-b}$

③由状态方程，有 $\quad \dot{x}_2 = u, \quad \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}at^2 - bt + c$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}at^3 - \frac{1}{2}bt^2 + ct + d$$

④由初始条件，有

$$x_1(0) = 1, \Rightarrow d = 1 \qquad x_1(2) = 0, \Rightarrow \frac{4}{3}a - 2b + 3 = 0$$

$$x_2(0) = 1, \Rightarrow c = 1 \qquad x_2(2) = 0, \Rightarrow 2a - 2b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = 3, b = 3.5$$

所以：

$$u^*(t) = \dot{x}_2 = at - b = 3t - 3.5$$

$$x^*_1(t) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1$$

$$x^*_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1$$

注意：t 的取值范围！

B、终端不定的问题

已知系统的微分方程为 $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$

其中 $x \in R^n, u \in R^r, f-n$维连续可微函数

$t \in [t_0, t_f],\quad x(t_0) = x_0,\quad x(t_f)$ 不定，终端时间固定。

求使目标函数

$$J(x,u,t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$$

取得极值的最优轨迹 x*(t) 或最优控制 u*(t)。

此类问题的求解思路：

①先将状态方程写成约束方程形式：

$$f(x,u,t)-\dot{x}(t)=0$$

应用拉格朗日乘子法，构造新的增广函数：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left\{L(x,u,t)+\lambda^T(t)[f(x,u,t)-\dot{x}(t)]\right\}dt$$

其中$\lambda(t)$是待定的 n 维拉格朗日成乘子矢量（列矢量）。

②定义纯量函数： $H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$

则 $$J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)]dt$$

显然，J' 是一个关于 x, u , λ 的无约束多变量泛函。

③求J' 取极值的必要条件

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} [H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}(t)]dt$$

因为：

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt}(\lambda^T x)dt = \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f} = \lambda^T(t_f)x(t_f) - \lambda^T(t_0)x(t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T x dt + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt$$

所以：

$$\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x} dt = -\int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T x dt + \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f}$$

代入 J'则

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} [H + \dot{\lambda}^T x]dt - \lambda^T x \Big|_{t_0}^{t_f}$$

则 $$\delta J' = \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T)\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u]dt - \lambda^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f}$$

J' 取得极值的必要条件是： $\delta J' = 0$ 则

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

横截条件: $\lambda^T \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$

横截条件中，

$$\lambda^T \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 = \lambda^T(t_f) \cdot \delta x(t_f) - \lambda^T(t_0) \cdot \delta x(t_0) \qquad \delta x(t_0) = 0$$

则横截条件为 $\lambda^T(t_f) \cdot \delta x(t_f) = 0$

问题：$\lambda(t_f) = 0$ 对吗？

这类问题的求解方法：

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$$

$$\delta J'=\int_{t_0}^{t_f}[(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T)\delta x+\frac{\partial H}{\partial u}\delta u]dt-\lambda^T\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}$$

J’ 取得极值的必要条件是： $\delta J'=0$ 则

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}^T=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

横截条件： $\lambda^T\cdot\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}=0$$

注：一端不定时通用

例8-16: 条件如例8-15，只是终态改为 $x_1(2)=0, x_2(2)$ 自由，求使 J 取得极值的**最优控制**及**最优轨迹**。

解：$L=\dfrac{1}{2}u^2(t),\ f=\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$ 令 $\lambda(t)=\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$

则：$H=L+\lambda^T f=\dfrac{1}{2}u^2+\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

构造新的性能泛函：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left\{L(x,u,t)+\lambda^T(t)[f(x,u,t)-\dot{x}(t)]\right\}dt$$

则

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^T\dot{x}(t)]dt$$

$$H = L + \lambda^T f = \frac{1}{2}u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

①由 $\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0$

得 $\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$ 则 $\lambda_1 = a$（常数）

$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$ 则 $\lambda_2 = -at + b$（常数）

②由 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

得 $u + \lambda_2 = 0$ 则 $u = at - b$

③由状态方程，有

$$\dot{x}_2 = u, \quad u = at - b \qquad 则 \ x_2 = \frac{1}{2}at^2 - bt + c$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad 则 \ x_1 = \frac{1}{6}at^3 - \frac{1}{2}bt^2 + ct + d$$

$$t = 0时, x_1(0) = 1, \Longrightarrow d = 1$$

$$x_2(0) = 1, \Longrightarrow c = 1$$

$$t = 2时, x_1(2) = 0, \Longrightarrow \frac{4}{3}a - 2b + 3 = 0$$

$$x_2(2) = 2a - 2b + 1 = ?$$

④由横截条件

$$\lambda^T \cdot \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

$$= (\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}\Big|_{t_0}^{t_f} = (\lambda_1 \delta x_1 + \lambda_2 \delta x_2)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

$$= \lambda_1(t_f)\delta x_1(t_f) + \lambda_2(t_f)\delta x_2(t_f)$$

$$-\lambda_1(t_0)\delta x_1(t_0) - \lambda_2(t_0)\delta x_2(t_0)$$

$$= \underline{\lambda_1(2)\delta x_1(2)} + \lambda_2(2)\delta x_2(2)$$

$$-\underline{\lambda_1(0)\delta x_1(0)} - \underline{\lambda_2(0)\delta x_2(0)}$$

因 $\delta x_1(0) = \delta x_2(0) = \delta x_1(2) = 0,$

$\delta x_2(2) \neq 0$ （因x_2（2）自由）

则必有 $\lambda_2(2) = 0$ 而 $\lambda_2 = -at + b$ 则有 $b = 2a$

又 $\frac{4}{3}a-2b+3=0$ $\quad\therefore a=\frac{9}{8},b=\frac{9}{4}$

所以：

$$u^*(t)=\dot{x}_2=at-b=\frac{9}{8}t-\frac{9}{4}$$

$$x_1^*(t)=\frac{3}{16}t^3-\frac{9}{8}t^2+t+1$$

$$x_2^*(t)=\frac{9}{16}t^2-\frac{9}{4}t+1$$

注意时间范围！

比较：例8-15结果

$$u^*(t)=\dot{x}_2=at-b=3t-3.5$$

$$x_1^*(t)=\frac{1}{2}t^3-\frac{7}{4}t^2+t+1$$

$$x_2^*(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{2}t+1$$

(2)复合型性能指标，与终端有关

已知系统的微分方程为 $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$

其中 $x \in R^n$, $u \in R^r$, f—n维连续可微函数

目标函数：$J = \phi[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt$

其中 $t \in [t_0,t_f], t_0, x(t_0)$固定，$f, L, \phi$连续可微，

t_f自由，$x(x_f)$受约束，即$N[x(t_f), t_f]=0$ $N \in R^r, (r \le n)$

最优控制问题是：寻求最优轨迹 x*(t) 或最优控制u*(t)，使系统由初态转移到终态的过程中J取得极值。

此类问题的求解思路：（2个约束方程）

①先将状态方程写成约束方程形式： $f(x,u,t)-\dot{x}(t)=0$

②引入拉格朗日乘子矢量： $\lambda(t)\in R^n,\gamma(t)\in R^r$

③构造广义泛函：

$$J_a=\phi[x(t_f),t_f]+\gamma^T N[x(t_f),t_f]$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t)+\lambda^T[f(x,u,t)-\dot{x}(t)]\}dt$$

④构造哈密顿函数（标量）： $H=L(x,u,t)+\lambda^T f(x,u,t)$

则 $$J_a = \phi[x(t_f),t_f] + \gamma^T N[x(t_f),t_f]$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[H(x,u,\lambda,t) - \lambda^T \dot{x}(t)]dt$$

因为：

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}[\lambda^T x(t)]dt = \int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T x(t)dt + \int_{t_0}^{t_f}\lambda^T \dot{x}(t)dt = \lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}$$

所以：

$$-\int_{t_0}^{t_f}\lambda^T \dot{x}(t)dt = -\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\dot{\lambda}^T x(t)dt$$

则

$$J_a = \phi[x(t_f), t_f] + \gamma^T N[x(t_f), t_f]$$

$$-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(x,u,\lambda,t) + \dot{\lambda}^T x(t)]dt$$

考虑到 $x, u, x(t_f), t_f$ 均可变，则上式各部分的变分分别为：

$$\delta_1 = \frac{\partial\phi[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)}\delta x(t_f) + \frac{\partial\phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f}\delta t_f$$

$$\delta_2 = \frac{\partial N[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)}\delta x(t_f)\cdot\gamma + \frac{\partial N[x(t_f), t_f]}{\partial t_f}\delta t_f \cdot \gamma$$

$$J_a = \phi[x(t_f), t_f] + \gamma^T N[x(t_f), t_f]$$

$$-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x(t)]dt$$

$$\delta_3 = \delta[-\lambda^T x(t)\Big|_{t_0}^{t_f}] = \delta[-\lambda(t_f)x(t_f) + \lambda(t_0)x(t_0)]$$

$$= -\lambda(t_f)\delta x(t_f)$$

$$\delta_4 = \int_{t_0}^{t_f} [\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u + \frac{\partial H}{\partial t}\delta t_f + \dot{\lambda}\delta x]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda})\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u]dt + H(t_f)\delta t_f$$

由积分中值
定理得出

则 $\delta J_a = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$

$$
\begin{aligned}
\delta J_a = & \frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} \delta x(t_f) + \frac{\partial \phi}{\partial t_f} \delta t_f \\
& + \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} \delta x(t_f) \cdot \gamma + \frac{\partial N}{\partial t_f} \delta t_f \cdot \gamma \\
& - \lambda(t_f) \delta x(t_f) \\
& + \int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial u} + \dot{\lambda}) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u] dt + H(t_f) \delta t_f
\end{aligned}
$$

由积分中值定理得出

$$\delta J_a = [\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} \cdot \gamma - \lambda(t_f)]\delta x(t_f)$$

$$+ [\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N}{\partial t_f} \cdot \gamma + H(t_f)]\delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f} [(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda})\delta x+\frac{\partial H}{\partial u}\delta u]dt$$

考虑到 $\delta x, \delta u, \delta x(t_f), \delta t_f$ 的任意性，根据泛函取极值的必要条件，要使 $\delta J_a = 0$ ，则等价于以下方程：它们全部是受约束的泛函取得极值的必要条件。

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} = 0$$ 状态方程

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0$$ 协态方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$ 控制方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N}{\partial t_f} \cdot \gamma + H(t_f) = 0$$ 哈密顿函数H在最优轨迹上的变化规律

$$\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} \cdot \gamma - \lambda(t_f) = 0$$ 横截条件

$$\delta J_a = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial N}{\partial x(t_f)} \cdot \gamma - \lambda(t_f)\right]\delta x(t_f)$$

$$+ \left[\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N}{\partial t_f} \cdot \gamma + H(t_f)\right]\delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)\delta x+\frac{\partial H}{\partial u}\delta u\right]dt$$

极值的必要条件：

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} = 0, \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0, \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_f} + \frac{\partial N}{\partial t_f}\gamma + H(t_f) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial N}{\partial x(t_f)}\gamma - \lambda(t_f) = 0$$