一. 基本概念

☆a. 状态空间分析法(状态等): P12

1. 状态: 系统在时域中的全部行为或运动信息的集合.

2. 状态变量: 一组能足以完全确定系统运动状态而个数又最小的变量.

☆ 1. 个数最小,即描述系统状态的变量组的各分量相互独立,线性无关,无冗余.

2. 状态变量的个数为系统的阶数.

3. 若要描述n阶系统,则最小变量组必须由n个变量组成.

3. 状态空间法: 描述系统的输入—状态—输出关系的方法.

☆b. 可观性. 可控性; 稳定性; 最优控制.

①可控性 P88: 对于线性连续定常系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ (n个状态, m个输入, r个输出). 如果存在一个分段连续的输入 $u(t)$, 能在有限时间区间 $[t_0, t_f]$ 内, 使系统由某一初始状态 $x(t_0)$ 转移到指定的任一终端状态 $x(t_f)$, 则称状态是可控的.

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du \quad (D=0)\end{cases}$$

$\mathrm{Rank}\,M=\mathrm{Rank}[B\ AB\ A^2B\ \cdots\ A^{n-1}B]=n \Rightarrow$ 系统完全可控.

① 系统完全可控的充要条件: 可控性矩阵M的秩为n. (n个状态)

② $\mathrm{Rank}\,M'=\mathrm{Rank}[CB\ \ CAB\ \ CA^2B\ \cdots\ CA^{n-1}B\ \ D]=r$ (r个输出) $\Leftrightarrow$ 系统输出完全可控.

②可观性: 表示的是输出 $y(t)$ 反映状态矢量 $x(t)$ 的能力.

可观性矩阵N的秩必为n.

即 $N=\begin{bmatrix}C\\CA\\ \vdots\\CA^{n-1}\end{bmatrix}$ $\mathrm{Rank}\,N=n$

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax,\ x(t_0)=x_0\\ y=Cx\end{cases}$$

③. 稳定性 P101.

$\lim\limits_{t\to\infty}\|\Delta x(t)\|\le\varepsilon$ 被调量偏离其平衡位置的变化量

④. 对偶原理 P96.

$$\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u_1 \qquad \dot{x}_2=A_2x_2+B_2u_2$$
$$y_1=C_1x_1 \qquad y_2=C_2x_2$$

对偶系统: $A_2=A_1^T,\ B_2=C_1^T,\ C_2=B_1^T$

(1) 互为对偶的两个系统中, 一个系统的可控性等价于另一个系统的可观性.

(2) 互为对偶的两个系统, 其传递函数矩阵互为转置关系.

☆C. 最优控制 P151

☆d. 经典变分法

欧拉方程与横截条件. P161

$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$ 解即为最优轨迹 $x^*(t)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0 & \text{欧拉方程}\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0 & \text{横截条件}\end{cases}$$

二、Modeling 系统数学模型建立

状态空间表达式的建立

$\dot{x} = Ax + Bu$

$y = Cx + Du$

1. 从物理模型 ① 状态变量个数为独立的一阶储能元件(电感和电容)
② 通常以位移、速度选作状态变量 $x_1(t)=y(t)$, $x_2(t)=\dot{y}(t)$

2. 由微分方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}u \quad y = [1\ 0 \cdots 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

① 微分方程中不包含输入量的导数项

例 $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 8y = 5u$

$x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ $x_3 = \ddot{y}$

$a_0 = 8$ $a_1 = 11$ $a_2 = 6$ $b_0 = 5$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}u$$

$$y = x_1 = [1\ 0\ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

② 微分方程中包含输入量的导数项

例：系统微分方程为 $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 8y = 4\dot{u} + 5u$

系数为 $a_2 = 6$ $a_1 = 11$, $a_0 = 8$, $b_1 = 4$, $b_0 = 5$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = [5\ \ 4\ \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3. 由传递函数建立状态空间模型.

①. 传递函数中没有零点时的实现

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1\ 0 \cdots 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

② 传递函数有零点. P31

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+3}$$

$$k_1 = \lim_{x\to -1} G(s)(s+1) = \lim_{x\to -1}\frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{2}$$

$$k_2 = \lim_{x\to -3} G(s)(s+3) = \lim_{x\to -3}\frac{s+2}{s+1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y(t) = \left[\tfrac{1}{2}\ \ \tfrac{1}{2}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

三、Analysis 系统分析

1. 状态空间表达式求解. P79

e^{At} 非齐次.

$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ 积分法

$x(t) = L^{-1}[(SI-A)^{-1}x(0)] + L^{-1}[(SI-A)^{-1}BU(s)]$ 拉氏法.

$A = \dot{\Phi}(0)$ P78 例5-3 求A.

☆ $e^{At} = \Phi(t) = L^{-1}[(SI-A)^{-1}]$

☆ 线性定常系统：$x(t) = L^{-1}[(SI-A)^{-1}]x_0 = e^{At}x_0$ (P74 例5-1).

$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$ ⟹ 当 $x(t) = e^{At}x(t_0)$ 时，$y = Ce^{At}x(t_0)$

非齐次求解方法：(P80 例5-5)

①. 积分法

②. 拉氏变换法

U(s).

2. 可控性、可观性分析

1 对系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$ n个状态，m个输入，r个输出。

系统完全可控：$Rank M = Rank[B \quad AB \quad A^2B \cdots A^{n-1}B] = n$ ……状态可控

输出完全可控：$Rank M' = Rank[CB \quad CAB \quad CA^2B \cdots CA^{n-1}B \quad D] = r$ ……输出可控

状态可观：$Rank N = Rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$ ……状态可观

3. 稳定性分析 P101

李雅普诺夫稳定性问题……(分析各种系统：线性、非线性)。

1) 四种：

① 李雅普诺夫意义下的稳定：系统的解有界，但不一定收敛于 x_e。

② 渐近稳定：$t\to\infty$ 时，系统自由解趋于平衡状态，即系统的解有界，但一定收敛于 x_e。

③ 大范围渐近稳定：系统的解 x 无界，但定收敛于 x_e。

④ 不稳定：系统解 x 无界，且不收敛于 x_e。

第1法：系统矩阵A的所有特征值都具有负实部。P108 例5-13.

第2法

4. 最优控制问题求解

(1). 静态优化问题 P154 例7-2 & 例7-4

$J(x) = f(x) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

(2). 动态优化问题 P158 例7-6、例7-7

泛函求极值——变分法

$\delta J[x(t)] = \frac{dJ}{dx}\cdot\delta x$

① 对积分型

$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t)\,dt \qquad \delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)\cdot\delta x + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\cdot\delta\dot{x}\right]dt$

P162 例7-8, 7-9, 7-10 $\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\cdot\delta x\,dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}$

泛函取得极值时：$\delta J = 0$

无约束问题可以直接用上述方程求解

$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$ ……欧拉方程

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} = 0$ ……横截条件

有等式约束时：P164.

$\dot{x} = f(x, u, t)$, $J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, t)\,dt$

求解思路

① 状态方程写成约束方程形式

$f(x, u, t) - \dot{x}(t) = 0$

② 拉格朗日乘子法构造新的增广目标泛函

$J' = \int_{t_0}^{t_f}\{L(x, u, t) + \lambda^T(t)[f(x, u, t) - \dot{x}(t)]\}\,dt$

(3). 定义标量函数 $H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, \lambda) + \lambda^T f(x, u, t)$

$J' = \int_{t_0}^{t_f}[H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T\dot{x}(t)]\,dt$

④ 由欧拉方程得

$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$

②. 对复合型.

目标函数 $J=\Phi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(x,u,t)dt$,

$\dot{x}=f(x,u,t)$

t_f自由, $x(t_f)$受约束的复合型最优控制问题的必要条件.

状态方程: $\frac{\partial H}{\partial \lambda}-\dot{x}=0$

协态方程: $\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}=0$

控制方程: $\frac{\partial H}{\partial u}=0$

横截条件: $\frac{\partial \Phi}{\partial t_f}+\frac{\partial \psi}{\partial t_f}\cdot\gamma+H(t_f)=0$ 哈密顿函数H在最优轨迹上的变化规律.

$\frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial T}{\partial x(t_f)}\cdot\gamma-\lambda(t_f)=0$

③. 离散系统的最优控制 P180.

(动态)状态方程: $x(k+1)=f[x(k),u(k),k]$, $(k=0,1,\cdots N-1)$

性能指标函数: $J=\sum_{k=0}^{N-1}L[x(k),x(k+1),k]=\sum_{k=0}^{N-1}L_k$

极小值必要条件: $\frac{\partial L[x(k),x(k+1),k]}{\partial x(k)}+\frac{\partial L[x(k-1),x(k),k-1]}{\partial x(k)}=0$ 欧拉方程

$\left.\frac{\partial L[x(k-1),x(k),k-1]}{\partial x(k)}\right|_{k=0}^{k=N}=0$ 横截条件.

四. Design 系统设计

1. 状态反馈控制器设计

原控系统: $\dot{x}=Ax+Bu$
$y=Cx+Du$

引入状态反馈K后 P122 例6-1.

$\dot{x}=(A+BK)x+BV$

闭环系统特征多项式为, 令 $K=[k_1,k_2\cdots k_n]$

$|\lambda I-(A+BK)|=0$ 与期望对比求出 $k_1,k_2\cdots$

2. 状态观测器设计 P146 例6-8.

$\dot{\hat{x}}=(A-GC)\hat{x}+Bu+Gy$

$\hat{y}=C\hat{x}$

令 $G=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\\vdots\end{bmatrix}$

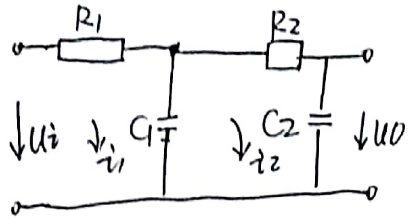
$A-GC$

观测器的特征方程为

$|\lambda I-(A-GC)|=0$

与期望对比, 求出 $g_1,g_2\cdots$

1.



$$\begin{cases} u_i t = (i_1(t) + i_2(t))R_1 + u_{C_1}t \\ u_{C_1}t = u_{C_2}t + i_2(t)R_2 \\ i_1(t) = C_1 \dfrac{du_{C_1}(t)}{dt} \end{cases}$$

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_{C_2}(t)}{dt}$$

令 $x_1 = u_{C_1}$, $x_2 = u_{C_2}$. $y = u_0 = u_{C_2}$

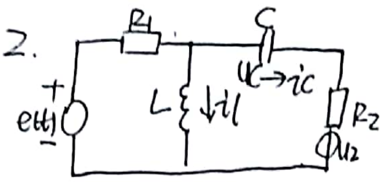
则有 $\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1R_1}u_i - \frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}x_1 + \frac{1}{C_1R_2}x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{R_2C_2}x_1 - \frac{1}{R_2C_2}x_2 \end{cases}$

$y = x_2$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2.



$$R_1(i_L + i_C) + L\frac{di_L}{dt} = e(t)$$

$$u_C + R_2 i_C = L\frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$\begin{cases} R_2C\dfrac{du_C}{dt} - L\dfrac{di_L}{dt} = -u_C \\ R_1C\dfrac{du_C}{dt} + L\dfrac{di_L}{dt} = -R_1 i_L + e(t) \end{cases}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{(R_1+R_2)C}u_C - \frac{R_1}{(R_1+R_2)C}i_L + \frac{1}{(R_1+R_2)C}e(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{R_1}{(R_1+R_2)L}u_C - \frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}i_L + \frac{R_2}{(R_1+R_2)L}e(t)$$

$$u_{R_2} = R_2 i_C = R_2C\frac{du_C}{dt} = \frac{-R_2}{R_1+R_2}u_C + \frac{-R_1R_2}{R_1+R_2}i_L + \frac{R_2}{R_1+R_2}e(t).$$

$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$ 即 $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1+R_2)C} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \frac{1}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} e(t).$$

第二题：

解：设 m 的移动量为 $y(t)$，为正方向，

弹簧的作用力为 $-ky(t)$

阻尼器的作用力为 $-f\frac{dy(t)}{dt}$

重力为 $G=mg$

$[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}][k_1\ k_2]$

由牛顿第二定律有 $m\frac{d^2y(t)}{dt^2}=F(t)+mg-f\frac{dy(t)}{dt}-ky(t)$

设 $x_1(t)=y(t)$ $x_2(t)=\dot{y}(t)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\frac{k}{m}x_1-\frac{f}{m}x_2+\frac{1}{m}F(t)+g\end{cases}$$

输出方程 $y=x_1$

∴ 状态空间模型为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & \frac{1}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g\\ F\end{bmatrix}$$

第三题

$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$ 系统输出为 $y(t)=[1\ 1]x$，初态 $x(0)=[1\ 2]^T$，输入量 $u(t)=1(t)$

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ (P64)

解：①. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，$C=[1\ 1]$ $D=0$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1}B=[1\ 1]\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

∴ $G(s)=\frac{1}{s+1}$

②. 系统有2个状态，1个输入，1个输出.

$\text{Rank}M=\text{Rank}[B\ \ AB]=\text{Rank}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}=1$ $\text{Rank}M=1<2$ 所以系统状态不可控.

$\text{Rank}M'=\text{Rank}[CB\ \ CAB\ \ D]=\text{Rank}[1\ -1\ 0]=1$ $\text{Rank}M'=1=1$. 所以系统输出可控.

$\text{Rank}N=\text{Rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\text{Rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=1$ $\text{Rank}N=1<2$，所以系统状态不可观.

③. $u(t)=0$

∴ $x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}x_0]$

$(sI-A)^{-1}x_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1}\\ \frac{2}{s+1}\end{bmatrix}$ ∴ $x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 2e^{-t}\end{bmatrix}$

第四题

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ C=[-1\ 1\ 1]$$

解: ①. 设 $K=[k_1\ \ k_2\ \ k_3]$

闭环系统特征多项式为

$$|\lambda I-(A+BK)|=\left|\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\left\{\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}\right\}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\k_1&2+k_2&k_3\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\-3&\lambda+1&-1\\-k_1&-2-k_2&\lambda-k_3\end{vmatrix}=\lambda^3-k_3\lambda^2+(k_2-9)\lambda+7k_3-2k_1+k_2+2$$

而期望的闭环系统特征多项式为

$$(\lambda+10)(\lambda+1+j\sqrt{3})(\lambda+1-j\sqrt{3})=\lambda^3+12\lambda^2+24\lambda+40$$

比较两式系数得 $\begin{cases}-k_3=12\\k_2-9=24\\7k_3-2k_1+k_2+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_3=-12\\k_2=33\\k_1=-\frac{49}{2}\end{cases}$

②. 由于 $n=3$, y 为 1×1 维矢量, 故 G 为 3×1 维矩阵, 令 $G=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}$ 则

$$A-GC=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}[-1\ 1\ 1]=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&-1&1\\0&2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-g_1&g_1&g_1\\-g_2&g_2&g_2\\-g_3&g_3&g_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+g_1&2-g_1&-g_1\\3+g_2&-1-g_2&1-g_2\\g_3&2-g_3&-g_3\end{bmatrix}$$

观测器的特征方程为

$$|\lambda I-(A-GC)|=\begin{vmatrix}\lambda-1-g_1&g_1-2&g_1\\-3-g_2&\lambda+1+g_2&g_2-1\\-g_3&g_3-2&\lambda+g_3\end{vmatrix}=$$

$$\begin{matrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{matrix}$$

$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$

第五题　　P111. 例5-15　　非线性系统.

$\dot{x}_1=f_1(x_1)+f_2(x_2)$, $\dot{x}_2=x_1+ax_2$ $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 是连续可微, 试确定使平衡状态 $x_e=0$ 渐
当 $x=0$ 时, $f_1(0)=f_2(0)=0$, 当 $x\neq0$ 时, $f_1(x_1)\neq0$, $f_2(x_2)\neq0$,

解: $\dot{x}_1=f_1(x_1)+f_2(x_2)$

$\dot{x}_2=x_1+ax_2$

$\dot{x}=f(x)=\begin{bmatrix} f_1(x_1)+f_2(x_2) \\ x_1+ax_2 \end{bmatrix}$

由于 $f(x)$ 连续可导. 且 $f^T(x)f(x)=[f_1(x_1)+f_2(x_2) \quad x_1+ax_2]\begin{bmatrix} f_1(x_1)+f_2(x_2) \\ x_1+ax_2 \end{bmatrix}$

$=[[f_1(x_1)+f_2(x_2)]^2+(x_1+ax_2)^2]>0$

选作李雅普诺夫函数, 因此, 有

$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}$

$\hat{J}(x)=J(x)+J^T(x)=\begin{bmatrix} f_1'(x_1) & f_2'(x_2) \\ 1 & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_1'(x_1) & 1 \\ f_2'(x_2) & a \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2f_1'(x_1) & 1+f_2'(x_2) \\ 1+f_2'(x_2) & 2a \end{bmatrix}$

故平衡状态 $x_e=0$ 渐近稳定, 需 $2f_1'(x_1)<0$, 且 $2a<0$, $\therefore a<0$.

第六题. P165.　　$\dot{x}_1=x_2$　$\dot{x}_2=u$　　$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$

解: 令 $\lambda^T=\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}^T$, $L=\frac{1}{2}u^2$, $f=\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$

则 $H=L+\lambda^Tf=\frac{1}{2}u^2+[\lambda_1\ \lambda_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$

由 $\frac{\partial H}{\partial x_1}+\dot{\lambda}_1^T=0$ 得 $\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$　$\therefore \lambda_1=a$ (常数)

$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1$, $\therefore \lambda_2=-at+b$ (常数　由 $\frac{\partial H}{\partial u}=0$ 得 $u+\lambda_2=0$, 则 $u=at-b$

由状态方程, 有 $\dot{x}_2=u$, 则 $x_2=\frac{1}{2}at^2-bt+c$ (常数)

由 $\dot{x}_1=x_2$, 则 $x_1=\frac{1}{6}at^3-\frac{1}{2}bt^2+ct+d$

$t=0$ 时, $x_1(0)=-1$, $\Rightarrow d=-1$

$x_2(0)=0$, $\Rightarrow c=0$

$t=3$ 时, $x_1(3)=1$, $\frac{27}{6}a-\frac{9}{2}b-1=1$　$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{9} \\ b=2 \end{cases}$

$x_2(3)=-1$, $\frac{9}{2}a-3b=-1$

$\therefore u^*(t)=at-b=\frac{10}{9}t-2$

所以 $x_1^*(t)=\frac{5}{27}t^3-t^2-1$

$x_2^*(t)=\frac{5}{9}t^2-2t$

例1. 求使泛函 $J=\int_1^2(\dot{x}^2+x^2)dt$，取得极值的最优轨迹 $x^*(t)$，$x(1)$，$x(2)$，均不定。

解：$L=\dot{x}^2+x^2$，$\frac{\partial L}{\partial x}=2x$　$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}$　$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\ddot{x}$　代入欧拉方程

$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$　即 $2x-2\ddot{x}=0$　通解为 $x(t)=ae^t+be^{-t}$

则 $\dot{x}(t)=ae^t-be^{-t}$，$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}=2ae^t-2be^{-t}$

由 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_0}=0$ 得 $a=be^{-2}$　由 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f}=0$，得 $a=be^{-4}$　则 $a=b=0$　因此 $x^*(t)=0$

例2. 求使以下性能指标泛函取极值的轨迹 $x^*(t)$，要求 $x^*(0)=0$，$x^*(1)$ 任意。$J=\int_0^1[\dot{x}^2+\dot{x}^3]dt$

解：本例为始端固定，终端自由，两端时刻固定的问题。

由题意得：$L=\dot{x}^2+\dot{x}^3$

由欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$　有 $-\frac{d}{dt}(2\dot{x}+3\dot{x}^2)=0$　即 $2\dot{x}+3\dot{x}^2=$常数

则 $\dot{x}=$常数　令：$x=at+b$

由 $x(0)=0\Rightarrow b=0\Rightarrow x(t)=at\Rightarrow \dot{x}(t)=a$

由终端横截条件 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f}=0$ 得 $(2\dot{x}+3\dot{x}^2)\Big|_{t_f=1}=0$

则 $2a+3a^2=0\Rightarrow a=0$，$a=-\frac{2}{3}$

当 $a=0$ 时，$x(t)=0$，$J=0$

当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$x(t)=-\frac{2}{3}t$，$J=\frac{4}{27}$

例3. 始端固定，终端受约束，终端时刻自由的问题。

已知 $x(0)=1$，$x(t_f)=C(t_f)=2-t_f$，t_f 待定。求使性能指标泛函为极值时最优轨迹 $x^*(t)$，t_f^*，J^*。

$J=\int_0^{t_f}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt$

解：$L=\sqrt{1+\dot{x}^2}$

由欧拉方程 $\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$ 有 $-\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]=0$　则 $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}=C$

$\dot{x}^2=\frac{C^2}{1-C^2}=a^2\Rightarrow \dot{x}=a\Rightarrow x=at+b$　由 $x(0)=1$ 得 $b=1$，$x=at+1$

$\left\{L(x,\dot{x},t)+[\dot{C}(t)-\dot{x}(t)]\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right\}\Big|_{t_f}=0\Rightarrow\left[\sqrt{1+\dot{x}^2}+(-1-\dot{x})\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right]\Big|_{t=t_f}=0$

解得 $\dot{x}(t_f)=1$，又 $\dot{x}=a$，故 $a=1$。　$\therefore$ 最优曲线 $x^*(t)=t+1$

又 $x(t_f)=C(t_f)=2-t_f=t_f+1$　故 $t_f=0.5$　$J^*=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$

序号	拉氏变换 F(s)	时间函数 f(t)	Z 变换 F(z)
1	1	δ (t)	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a\to0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
15	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

序号	拉氏变换 $E(s)$	时间函数 $e(t)$,$e(k)$	z 变换 $E(z)$
1	1	$\delta(t)$	1
2	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
11	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{aT}\sin\omega T}{z^2e^{2aT}-2ze^{aT}\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14		a^k	$\frac{z}{z-a}$
15		$a^k\cos k\pi$	$\frac{z}{z+a}$

先求解二阶常系数齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=0$.

a. 写出 $y''+py'+qy=0$ 对应的特征方程 $r^2+pr+q=0$.

b. 求出特征方程的两个根 r_1,r_2.

c. 根据 r_1,r_2 的不同形式，我们有如下的公式：

$r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
r_1,r_2 为两个不同实根	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
r_1,r_2 为两个相同实根	$y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$
r_1,r_2 为一对共轭虚根 $\alpha\pm i\beta$	$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$