题 2.1 给定图 P2.1(a)和(b)所示两个电路，试列写出其状态方程和输出方程。其中，分别指定：

(a) 状态变量组 $x_1 = u_C$， $x_2 = i$； 输入变量 $u = e(t)$； 输出变量 $y = i$

(b) 状态变量组 $x_1 = u_{C_1}$， $x_2 = u_{C_2}$； 输入变量 $u = e(t)$； 输出变量 $y = u_C$

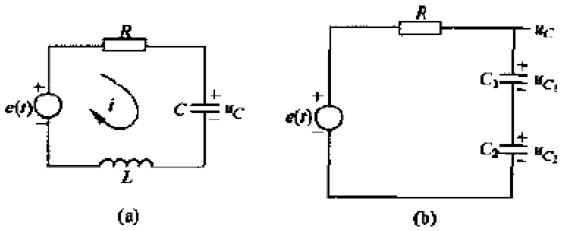

图 P2.1

解 本题属于由物理系统建立状态空间描述的基本题，意在训练正确和熟练运用电路定律列写出电路的状态方程和输出方程。

(a) 列写 P2.1(a)电路的状态方程和输出方程。首先，考虑到电容 C 和电感 L 为给定电路中仅有的两个储能元件，电容端电压 u_C 和流经电感电流 i 构成此电路的线性无关极大变量组，从而选取状态变量组 $x_1 = u_C$ 和 $x_2 = i$ 符合定义要求。基此，利用电路元件关系式和回路基尔霍夫定律，定出电路方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = e$$

再由上述电路方程导出状态变量 u_C 和 i 的导数项，可得到状态变量方程规范形式：

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C}i$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e$$

表 $\dot{u}_C = \mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$ 和 $\dot{i} = \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$，并将上述方程组表为向量方程，就得到此电路的状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e$$

继而，按约定输出 $y = i$，可直接得到此电路的输出方程：

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix}$$

(b) 列写 P2.1(b)电路的状态方程和输出方程。类似地，考虑到电容 C_1 和 C_2 为给定电路中仅有的两个储能元件，电容端电压 u_{C_1} 和 u_{C_2} 构成此电路的线性无关极大变量组，选取状态变量组 $x_1 = u_{C_1}$ 和 $x_2 = u_{C_2}$ 符合定义要求。基此，利用电路元件关系式和回路基尔霍夫定律，定出电路方程为

$$C_1 R\frac{\mathrm{d}u_{C_1}}{\mathrm{d}t} + u_{C_1} + u_{C_2} = e$$

$$C_2 R\frac{\mathrm{d}u_{C_2}}{\mathrm{d}t} + u_{C_1} + u_{C_2} = e$$

再由上述电路方程导出状态变量u_{C_1}和u_{C_2}的导数项，可得到状态变量方程规范形式：

$$\frac{du_{C_1}}{dt}=-\frac{1}{C_1R}u_{C_1}-\frac{1}{C_1R}u_{C_2}+\frac{1}{C_1R}e$$

$$\frac{du_{C_2}}{dt}=-\frac{1}{C_2R}u_{C_1}-\frac{1}{C_2R}u_{C_2}+\frac{1}{C_2R}e$$

表$\dot{u}_{C_1}=du_{C_1}/dt$和$\dot{u}_{C_2}=du_{C_2}/dt$，并将上述方程组表为向量方程，就得到此电路的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C_1}\\ \dot{u}_{C_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1R} & -\frac{1}{C_1R}\\ -\frac{1}{C_2R} & -\frac{1}{C_2R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C_1}\\ u_{C_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1R}\\ \frac{1}{C_1R}\end{bmatrix}e$$

继而，按约定输出$y=u_C$，可由电路导出：

$$y=u_C=u_{C_1}+u_{C_2}$$

将其表为向量方程，就得到此电路的输出方程：

$$y=[1\ \ 1]\begin{bmatrix}u_{C_1}\\ u_{C_2}\end{bmatrix}$$

题 2.3 图 P2.3 所示为登月舱在月球软着陆的示意图。登月舱的运动方程为

$$m\ddot{y}=-k\dot{m}-mg$$

其中，m为登月舱质量，g为月球表面重力常数，$-k\dot{m}$项为反向推力，k为常数，y为登月舱相对于月球表面着陆点的距离。现指定状态变量组$x_1=y$，$x_2=\dot{y}$和$x_3=m$，输入变量$u=\dot{m}$，试列写出系统的状态方程。

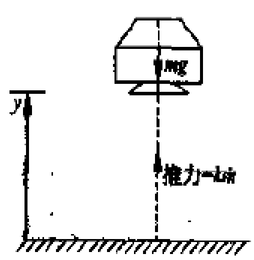

图 P2.3

解 本题属于由物理系统建立状态空间描述的基本题。

对给定力学系统，储能元件质量的相应变量即位置、速度和质量（本题中它也是随时间改变的），可被取为状态变量组$x_1=y$，$x_2=\dot{y}$和$x_3=m$。基此，利用力学定律并考虑到输入变量$u=\dot{m}$，先来导出：

$$\dot{x}_1=\dot{y}=x_2$$

$$\dot{x}_2=\ddot{y}=\frac{k}{m}\dot{m}-\frac{gm}{m}=-\frac{g}{x_3}x_3+\frac{k}{x_3}u$$

$$\dot{x}_3=\dot{m}=u$$

再将此方程组表为向量方程，就得到系统的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{g}{x_3}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{k}{x_3}\\ 1\end{bmatrix}u$$

且由状态方程形式可以看出，给定力学系统为非线性系统。

题 2.5 求出下列各输入输出描述的一个状态空间描述：

（i）$\dddot{y}+2\ddot{y}+6\dot{y}+3y=5u$

（ii）$\dddot{y}+8\ddot{y}+5\dot{y}+13y=4\dot{u}+7u$

（iii）$3\dddot{y}+6\ddot{y}+12\dot{y}+9y=6\dot{u}+3u$

解 本题属于由时间域输入输出描述导出状态空间描述的基本题。通常，可采用多种算法来实现两种描述间的转换。

容易看出，题中给出的系统均为严真三阶系统，其“首一化”输入输出描述的一般表达式为

$$\dddot{y}+a_2\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0y=b_2\ddot{u}+b_1\dot{u}+b_0u$$

当采用算法 1（主教材中结论 2.1 的算法）时，所得状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

当采用算法 2（主教材中结论 2.2 的算法）时，所得状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-6&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

（ii）确定 $\dddot{y}+8\ddot{y}+5\dot{y}+13y=4\dot{u}+7u$ 的一个状态空间描述

算法 1：由 $a_2=8$，$a_1=5$，$a_0=13$ 和 $b_2=0$，$b_1=4$，$b_0=7$，利用上述算法 1 的结果式，可得到此输入输出描述的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-13&-5&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}7&4&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

算法 2：由 $a_2=8$，$a_1=5$，$a_0=13$ 和 $b_2=0$，$b_1=4$，$b_0=7$，先来定出 $\beta_1=0$，$\beta_2=4$，$\beta_3=-25$。基此，利用上述算法 2 的结果式，可得到此输入输出描述的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-13&-5&-8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\\-25\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

（iii）确定 $3\dddot{y}+6\ddot{y}+12\dot{y}+9y=6\dot{u}+3u$ 的一个状态空间描述

算法 1：首先，将给定输入输出描述乘以 $1/3$，导出“首一化”输入输出描述：

$$\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+3y=2\dot{u}+u$$

再由“首一化”输入输出描述的系数 $a_2=2$，$a_1=4$，$a_0=3$ 和 $b_2=0$，$b_1=2$，$b_0=1$，利用上述算法 1 的结果式，可得到此输入输出描述的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

算法 2：由“首一化”输入输出描述的系数 $a_2=2$，$a_1=4$，$a_0=3$ 和 $b_2=0$，$b_1=2$，$b_0=1$，先来定出 $\beta_1=0$，$\beta_2=2$，$\beta_3=-3$。基此，利用上述算法 2 的结果式，可得到此输入输出描述的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\-3\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

题 2.6 求出下列各输入输出描述的一个状态空间描述：

(i) $\dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{2s^2+18s+40}{s^3+6s^2+11s+6}$

(ii) $\dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$

解 本题属于由传递函数型输入输出描述导出状态空间描述的基本题。通常，可以采用多种算法来实现两种描述间的转换。

(i) 确定 $\dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{2s^2+18s+40}{s^3+6s^2+11s+6}$ 的一个状态空间描述

本子题中的严真传递函数一般表达式

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

实质上等同于题 2.5 中的严真“时间域输入输出描述”，可采用上题中两种算法来确定其对应状态空间描述。

当采用上题中算法 1 时，得到给定传递函数的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0&b_1&b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40&18&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

当采用上题中算法 2 时，先来定出 $\beta_1=b_2=2$，$\beta_2=b_1-a_2\beta_1=18-(6\times 2)=6$，

$\beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 = 40-(6\times 6)-(11\times 2) = -18$，得到给定传递函数的状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 6\\ -18\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

（ii）确定 $\dfrac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{3(s+5)}{(s+3)^2(s+1)}$ 的一个状态空间描述

本子题中的严真传递函数一般表达式可进而表为

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}=b\frac{1}{(s-s_3)}\cdot\frac{1}{(s-s_2)}\cdot\frac{(s-z_1)}{(s-s_1)}=\frac{1}{(s-s_3)}\cdot\frac{1}{(s-s_2)}\cdot\left[1+\frac{(s_1-z_1)}{(s-s_1)}\right]b$$

极点 $s_1=3, s_2=3, s_3=1$， 零点 $z_1=5$

基此，可将上述传递函数表达式看成是“由右向左三个环节的串联”，且

由 $\dfrac{\hat{x}_1(s)}{\hat{u}(s)}=\dfrac{b(s_1-z_1)}{(s-s_1)}$ 导出 $\dot{x}_1=s_1x_1+b(s_1-z_1)u$

由 $\hat{x}_2(s)=\dfrac{1}{(s-s_2)}[\hat{x}_1(s)+b\hat{u}(s)]$ 导出 $\dot{x}_2=s_2x_2+x_1+bu$

由 $\hat{x}_3(s)=\dfrac{1}{(s-s_3)}\hat{x}_2(s)$ 导出 $\dot{x}_3=s_3x_3+x_2$

由 $\hat{y}(s)=\hat{x}_3(s)$ 导出 $y=x_3$

从而，可定出此输入输出描述的一个状态空间描述：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1 & 0 & 0\\ 1 & s_2 & 0\\ 0 & 1 & s_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b(s_1-z_1)\\ b\\ 0\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6\\ 3\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

题 2.7 给定图 P2.7 所示的一个系统方块图，输入变量和输出变量分别为 u 和 y，

试求出系统的一个状态空间描述。

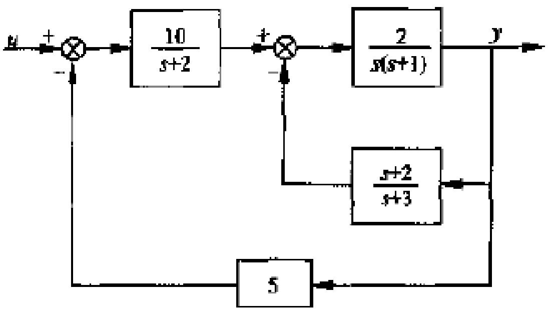

图 P2.7

解 本题属于由方块图导出状态空间描述的基本题。

首先，定出状态方程。对此，需将给定方块图化为图 P2.7A 所示规范方块图，并按图中所示把每个一阶环节的输出取为状态变量 x_1, x_2, x_3, x_4。进而，利用每个环节的因果关系，可以导出变换域变量关系式：

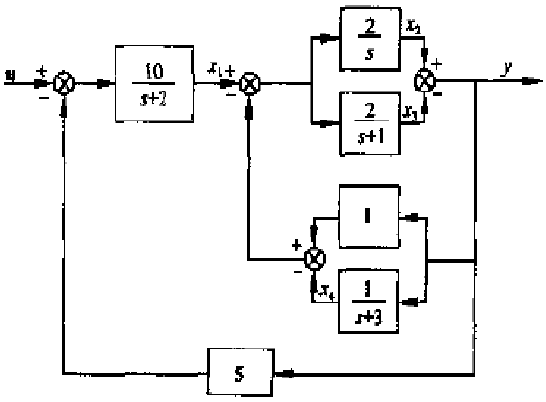

图 P2.7A

$$\hat{x}_1(s)=\frac{10}{s+2}\{\hat{u}(s)-5[\hat{x}_2(s)-\hat{x}_3(s)]\}$$

$$\hat{x}_2(s)=\frac{2}{s}\{\hat{x}_1(s)-\hat{x}_2(s)+\hat{x}_3(s)+\hat{x}_4(s)\}$$

$$\hat{x}_3(s)=\frac{2}{s+1}\{\hat{x}_1(s)-\hat{x}_2(s)+\hat{x}_3(s)+\hat{x}_4(s)\}$$

$$\hat{x}_4(s)=\frac{1}{s+3}\{\hat{x}_2(s)-\hat{x}_3(s)\}$$

基此，可以导出变换域状态变量方程：

$$s\hat{x}_1(s)=-2\hat{x}_1(s)-50\hat{x}_2(s)+50\hat{x}_3(s)+10\hat{u}(s)$$

$$s\hat{x}_2(s) = 2\hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s) + 2\hat{x}_3(s) + 2\hat{x}_4(s)$$
$$s\hat{x}_3(s) = 2\hat{x}_1(s) - 2\hat{x}_2(s) + \hat{x}_3(s) + 2\hat{x}_4(s)$$
$$s\hat{x}_4(s) = \hat{x}_2(s) - \hat{x}_3(s) - 3\hat{x}_4(s)$$

将上述关系式组取拉普拉斯反变换，并运用$L^{-1}\{sx_i(s)\} = \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}t = \dot{x}_i$，就定出此方块图的状态变量方程：

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 - 50x_2 + 50x_3 + 10u \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\
\dot{x}_3 &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\
\dot{x}_4 &= x_2 - x_3 - 3x_4
\end{aligned}$$

再将上述方程组表为向量方程，得到此方块图的状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -50 & 50 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

进而，定出输出方程。对此，由方块图中相应环节显示的因果关系，可直接导出此方块图的输出方程：

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

题 2.8 求出下列各方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程和特征值：

(i) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(ii) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

解 本题属于由系统矩阵确定特征方程和特征值的基本题。这类问题在状态空间法分析和综合线性时不变控制系统中是会经常遇到的。

(i) 确定 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ 的特征方程和特征值

对二维矩阵行列式的计算有着直接和简便的方法。基此，即可定出

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det\begin{bmatrix} s-2 & -5 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = (s-2)(s+3) + 10 = s^2 + s + 4$

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程 $\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^2 + s + 4 = 0$

再由求解 A 的特征方程，可定出给定 A 的两个特征值为

$$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{15}}{2}$$

（ii）确定方矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$ 的特征多项式和特征值

三维矩阵的行列式的计算同样有着直接和简便的方法。基此，即可定出

A 的特征多项式 $\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & 1 & s+1\end{bmatrix}=s^2(s+1)+s=s^3+s^2+s$

A 的特征方程 $\det(sI-A)=s^3+s^2+s=0$

再由求解 A 的特征方程，可定出给定 A 的特征值为

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

题 2.11 化下列各状态方程为约当规范形：

（i）$\dot{x}=\begin{bmatrix}8 & -8 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}u$

（ii）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}u$

解 本题属于化状态方程为约当规范形的基本题。

（i）确定 $\dot{x}=\begin{bmatrix}8 & -8 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}u$ 的约当规范形

首先，定出系统矩阵 A 的特征多项式

$$\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s-8 & 8 & 2\\ -4 & s+3 & 2\\ -3 & 4 & s-1\end{bmatrix}$$

$$=\{(s-8)(s+3)(s-1)-48-32\}-\{-6(s+3)+8(s-8)-32(s-1)\}$$

$$=s^3-6s^2+11s-6$$

和特征值

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=3$$

再运用特征向量关系式$Av_i=\lambda_i v_i\ (i=1,2,3)$，导出矩阵$A$的分别属于上述三个特征值的特征向量$v_1,v_2,v_3$：

$$由\begin{bmatrix}8&-8&-2\\4&-3&-2\\3&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=1\times\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix},\quad 导出\ v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\\v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3/4\\1/2\end{bmatrix}v_{11}$$

$$由\begin{bmatrix}8&-8&-2\\4&-3&-2\\3&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=2\times\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix},\quad 导出\ v_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2/3\\1/3\end{bmatrix}v_{21}$$

$$由\begin{bmatrix}8&-8&-2\\4&-3&-2\\3&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix}=3\times\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix},\quad 导出\ v_3=\begin{bmatrix}v_{31}\\v_{32}\\v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1/2\\1/2\end{bmatrix}v_{31}$$

其中，可取v_{11},v_{21},v_{31}为非零任意有限常数。

进而，基于特征向量v_1,v_2,v_3组成变换阵$\boldsymbol{P}$，则通过变换$\bar{x}=\boldsymbol{P}^{-1}x$可导出给定状态方程的约当规范形。并且，随变换阵$\boldsymbol{P}$的组成不同，所得约当规范形结果也为不同。现取变换阵为$\boldsymbol{P}=[v_1,v_2,v_3]$，其中取$v_{11}=v_{21}=v_{31}=1$，则通过计算得到

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&1\\3/4&2/3&1/2\\1/2&1/3&1/2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-4&4&4\\3&0&-6\\2&-4&2\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-4&4&4\\3&0&-6\\2&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&-8&-2\\4&-3&-2\\3&-4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\3/4&2/3&1/2\\1/2&1/3&1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-4&4&4\\3&0&-6\\2&-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&5\\7&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24&12\\-36&3\\14&-12\end{bmatrix}$$

从而，导出给定状态方程的约当规范形为

$$\dot{\bar{x}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{x}+\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}24&12\\-36&3\\14&-12\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

（ii）确定$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1\\-9&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}u$的约当规范形

首先，利用本章中的推论 2.8，对给定系统矩阵$\boldsymbol{A}$直接定出

特征多项式 $\det(sI-A)=s^2+6s+9$

特征值 $\lambda_1=-3$（代数重数$\sigma_1=2$）

进而，定出矩阵A的属于$\lambda_1=-3$的广义特征向量组。对此

由$\operatorname{rank}(\lambda_1 I-A)^0=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=2=2-\nu_0$，定出 $\nu_0=0$

由$\operatorname{rank}(\lambda_1 I-A)^1=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-3&-1\\9&3\end{bmatrix}=1=2-\nu_1$，定出 $\nu_1=1$

由$\operatorname{rank}(\lambda_1 I-A)^2=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-3&-1\\9&3\end{bmatrix}^2=0=2-\nu_2$，定出 $\nu_2=2$，$m_0=2$

且因$\nu_2=\sigma_1=2$，停止上述计算。由此，可以定出

“广义特征向量组分块表”的列数$=m_0=2$

“分块表”中“列1”的特征向量个数$=\nu_{m_0}-\nu_{m_0-1}=\nu_2-\nu_1=2-1=1$

“分块表”中“列2”的特征向量个数$=\nu_{m_0-1}-\nu_{m_0-2}=\nu_1-\nu_0=1-0=1$

基此，构成如下的“广义特征向量组分块表”：

列1 （特征向量个数=1）	列2 （特征向量个数=1）
$v_{11}^{(2)}=v_{11}$	$v_{11}^{(1)}=-(-3I-A)v_{11}$

表中，独立型特征向量v_{11}为满足“$(-3I-A)^2v_{11}=0$，$(-3I-A)v_{11}\neq 0$”的2×1向量。

故由

$$(-3I-A)^2v_{11}=\begin{bmatrix}-3&-1\\9&3\end{bmatrix}^2v_{11}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}v_{11}=0$$

$$(-3I-A)v_{11}=\begin{bmatrix}-3&-1\\9&3\end{bmatrix}v_{11}\neq 0$$

可以任取

$$v_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

由此，定出“导出型特征向量$-(-3I-A)v_{11}$”为

$$-(-3I-A)v_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\-9&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-12\end{bmatrix}$$

从而，导出一个广义特征向量组为

$$v_{11}^{(1)}=-(-3I-A)v_{11}=\begin{bmatrix}4\\-12\end{bmatrix},\quad v_{11}^{(2)}=v_{11}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

最后，基于广义特征向量组 $v_{11}^{(1)}$，$v_{11}^{(2)}$ 组成变换阵并定出其逆矩阵，有

$$Q=[v_{11}^{(1)}\ \ v_{11}^{(2)}]=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -12 & 1\end{bmatrix},\quad Q^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -12 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/16 & -1/16\\ 3/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

基此，经计算得到

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1/16 & -1/16\\ 3/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -9 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ -12 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}B=\begin{bmatrix}1/16 & -1/16\\ 3/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/8\\ 7/2\end{bmatrix}$$

于是，通过变换 $\hat{x}=Q^{-1}x$，导出给定状态方程的约当规范形为

$$\dot{\hat{x}}=Q^{-1}AQ\hat{x}+Q^{-1}Bu=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}1/8\\ 7/2\end{bmatrix}u$$

题 2.12 计算下列状态空间描述的传递函数 $g(s)$：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}u$$
$$y=[1\ \ 2]x+4u$$

解 本题属于由状态空间描述计算传递函数的基本题。

鉴于所讨论系统为二维，直接运用基本关系式 $g(s)=c(sI-A)^{-1}b$ 就可简单定出其传递函数 $g(s)$。对此，先行计算：

$$\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix}=(s+5)(s+1)+3=s^2+6s+8$$

$$\mathrm{adj}(sI-A)=\mathrm{adj}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

基此，即可定出给定系统的传递函数 $g(s)$ 为

$$g(s)=c(sI-A)^{-1}b=\frac{c\,\mathrm{adj}(sI-A)b}{\det(sI-A)}=\frac{[1\ \ 2]\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}}{s^2+6s+8}=\frac{12s+59}{s^2+6s+8}$$

题 2.17 给定方常阵 A，定义以 A 为幂的矩阵指数为

$$e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^k+\cdots$$

现知 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为两两相异，试证明 $\det[e^A]=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i}$。

解 本题要证明矩阵指数 e^A 一个关系式，意在训练运用已学知识（如相异特征值约当规范形）灵活解决这类问题。

由 A 的特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 两两相异知，必存在 n 维非奇异常阵 P 使成立

$$A = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1},\ \cdots,\quad A^k = P\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix}P^{-1},\ \cdots$$

将此代入矩阵指数 e^A 的定义式，导出

$$\begin{aligned}
e^A &= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots \\
&= P\left\{\begin{bmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{bmatrix} + \cdots\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{k!}\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix} + \cdots\right\}P^{-1} \\
&= P\begin{bmatrix}1+\lambda_1+\frac{1}{2!}\lambda_1^2+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda_1^k+\cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1+\lambda_n+\frac{1}{2!}\lambda_n^2+\cdots+\frac{1}{k!}\lambda_n^k+\cdots\end{bmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

基此，对矩阵指数 e^A 取行列式，并注意到 $\det P \det P^{-1} = 1$，证得

$$\det e^A = \det P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}P^{-1} = \det\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n}\end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i}$$

题 2.19　给定图 P2.19 所示的动态输出反馈系统，其中：

$$G_1(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2} \\ 0 & \dfrac{s+1}{s+2}\end{bmatrix},\quad G_2(s) = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+4} \\ \dfrac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

试定出反馈系统的传递函数矩阵 $G(s)$。

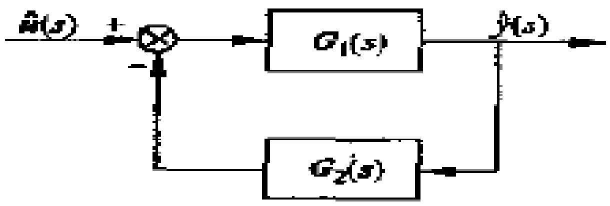

图 P2.19

解 本题属于由组成环节传递函数矩阵确定输出反馈系统传递函数矩阵的基本题。计算所依据的关系式为

$$G(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1} \text{ 或 } G(s)=[I+G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)$$

采用前一个计算公式。对此，先行计算

$$G_2(s)G_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+4}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$[I+G_2(s)G_1(s)]=\begin{bmatrix}\frac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s^2+4s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{s^2+5s+7}{(s+2)(s+3)(s+4)}\\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s^2+3s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{(s^2+3s+3)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & -\frac{(s^2+5s+7)(s+1)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41}\\ -\frac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s^4+10s^3+37s^2+62s+41)} & \frac{(s^2+4s+4)(s+2)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41}\end{bmatrix}$$

基此，求得

$$G(s)=G_1(s)[I+G_2(s)G_1(s)]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{s+1}{s+2}\end{bmatrix}\times$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(s^2+3s+3)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & -\dfrac{(s^2+5s+7)(s+1)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \\ -\dfrac{(s+2)(s+3)(s+4)}{(s+1)(s^4+10s^3+37s^2+62s+41)} & \dfrac{(s^2+4s+4)(s+2)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{(s+2)(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & -\dfrac{s^3+7s^2+15s+9}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \\ -\dfrac{(s+3)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} & \dfrac{(s^2+4s+4)(s+1)(s+4)}{s^4+10s^3+37s^2+62s+41} \end{bmatrix}$$

题 3.1　分别定出下列常阵 A 的矩阵指数函数 e^{At}：

(i) $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(ii) $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iv) $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

解　本题属于由“常阵 A”计算“矩阵指数函数 e^{At}”的基本题。这类问题在连续时间线性时不变系统的运动分析中是会经常遇到的。

本题可以采用多种算法进行计算，下面只是给出其中的一种算法。

(i) 采用“预解矩阵法”确定 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}。对此，先来定出

$$预解矩阵\ (sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}==\begin{bmatrix} L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+2}\right) & 0 \\ 0 & L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

(ii) 采用“预解矩阵法”确定 $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}。对此，先来定出

$$\text{预解矩阵}\quad (sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+2 & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{(s+2)^2}\\ 0 & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$ 和 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+a)^2}\right\}=te^{-at}$，即可定出 e^{At} 为

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}==\begin{bmatrix}L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\} & L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^2}\right\}\\ 0 & L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2t} & te^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

(iii) 采用“灵活求解法”确定 $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}。设 $B=A^{T}$，考虑到 $e^{At}=(e^{Bt})^{T}$，则利用上述推论 3.1-2b 可以定出

$$B=A^{T}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}，\text{矩阵指数函数}\, e^{At}=(e^{Bt})^{T}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{bmatrix}$$

(iv) 采用“预解矩阵法”确定 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}。对此，先来定出

$$\text{预解矩阵}\quad (sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & 1\\ -4 & s\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s^2+2^2} & -\dfrac{1}{s^2+2^2}\\ \dfrac{4}{s^2+2^2} & \dfrac{s}{s^2+2^2}\end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换 $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+\beta^2}\right\}=\cos\beta t$ 和 $L^{-1}\left\{\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}\right\}=\sin\beta t$，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\begin{bmatrix}L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2^2}\right\} & L^{-1}\left\{-\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\}\\ L^{-1}\left\{2\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\} & L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2^2}\right\}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\dfrac{1}{2}\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

题 3.2 采用除定义算法外的三种方法，计算下列各个矩阵 A 的矩阵指数函数 e^{At}：

(i) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$

(ii) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$

解 本题意在训练正确和熟练运用"由 A 计算矩阵指数函数 e^{At}"的几种基本算法。

(i) 确定 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}

特征值法。对给定矩阵 A，先行定出

特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-A)=\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}=s^2+3s+2=(s+2)(s+1)$

特征值 $\lambda_1=-2$， $\lambda_2=-1$

再定出 A 的属于特征值 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，有

由 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2v_{11}\\ -2v_{12}\end{bmatrix}$ 导出 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}v_{11}$

由 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-v_{21}\\ -v_{22}\end{bmatrix}$ 导出 $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}v_{21}$

基此，取任意非零实数 $v_{11}=v_{21}=1$，定出一个变换阵及其逆为

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{v}_1\quad \boldsymbol{v}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

从而，定出矩阵 A 的矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

有限项展开法。前已定出，矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-1$。基此，先行定出

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1\\ 1 & \lambda_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-2t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t}\\ e^{-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{-2t}+2e^{-t}\\ -e^{-2t}+e^{-t}\end{bmatrix}$$

由此，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A=\left[-e^{-2t}+2e^{-t}\right]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left[-e^{-2t}+e^{-t}\right]\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

预解矩阵法。先行定出，矩阵 A 的预解矩阵为

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

(ii) 确定 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$ 的矩阵指数函数 e^{At}

特征值法。对给定矩阵 A，先行定出

特征多项式　$\det(sI-A)=s^3+6s^2+11s+6=(s+3)(s+2)(s+1)$

特征值　$\lambda_1=-1$，　$\lambda_2=-2$，　$\lambda_3=-3$

再定出 A 的属于特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$ 和 $\lambda_3=-3$ 的特征向量 v_1，v_2 和 v_3：

由 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-v_{11}\\ -v_{12}\\ -v_{13}\end{bmatrix}$　导出　$v_1=\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\\ v_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}v_{11}$

由 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2v_{21}\\ -2v_{22}\\ -2v_{23}\end{bmatrix}$　导出　$v_2=\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\\ v_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 4\end{bmatrix}v_{21}$

由 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3v_{31}\\ -3v_{32}\\ -3v_{33}\end{bmatrix}$　导出　$v_3=\begin{bmatrix}v_{31}\\ v_{32}\\ v_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 9\end{bmatrix}v_{31}$

基此，取任意非零实数 $v_{11}=v_{21}=v_{31}=1$，定出一个变换阵及其逆为

$$P=[v_1 \quad v_2 \quad v_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix} \text{ 和 } P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 5/2 & 1/2\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

从而，定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5/2 & 1/2\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 3/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t}\\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

有限项展开法。前已定出，矩阵 A 特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$ 和 $\lambda_3=-3$。基此，先行定出

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \alpha_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -3 & 9\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 5/2 & -4 & 3/2\\ 1/2 & -1 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\\ e^{-2t}\\ e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}\\ \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\\ \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

由此，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_2(t)A^2$$

$$=\left[3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t}\right]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+\left[\frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t}\right]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}+$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\\ 36 & 60 & 25\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

预解矩阵法。先行定出，给定矩阵 A 的预解矩阵为

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s^2+6s+11}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s+6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{-6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s^2+6s}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s}{s^3+6s^2+11s+6} \\ \frac{-6s}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{-11s-6}{s^3+6s^2+11s+6} & \frac{s^2}{s^3+6s^2+11s+6} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{3}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{1}{s+3} & \frac{5/2}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{3/2}{s+3} & \frac{1/2}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1/2}{s+3} \\ -\frac{3}{s+1}+\frac{6}{s+2}-\frac{3}{s+3} & -\frac{5/2}{s+1}+\frac{8}{s+2}-\frac{9/2}{s+3} & -\frac{1/2}{s+1}+\frac{2}{s+2}-\frac{3/2}{s+3} \\ \frac{3}{s+1}-\frac{12}{s+2}+\frac{9}{s+3} & \frac{5/2}{s+1}-\frac{16}{s+2}+\frac{27/2}{s+3} & \frac{1/2}{s+1}-\frac{4}{s+2}+\frac{9/2}{s+3} \end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$，即可定出矩阵指数函数 e^{At} 为

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-3e^{-2t}+e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \\ -3e^{-t}+6e^{-2t}-3e^{-3t} & -\frac{5}{2}e^{-t}+8e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+2e^{-2t}-\frac{3}{2}e^{-3t} \\ 3e^{-t}-12e^{-2t}+9e^{-3t} & \frac{5}{2}e^{-t}-16e^{-2t}+\frac{27}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t}-4e^{-2t}+\frac{9}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

题 3.3 试求下列各连续时间线性时不变系统的状态变量解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$：

(i) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$t \geqslant 0$

(ii) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}u$，$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$u(t)=e^{-t}$，$t \geqslant 0$

解 本题属于系统运动状态分析的基本题，意在训练在给定初始状态和/或外部输入下正确和熟练地由"状态方程"定出"状态响应"。

(i) 确定"$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$t\geqslant 0$"的状态零输入响应 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)$

计算算式为 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$。首先，采用"预解矩阵法"定出给定 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵指数函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$。对此，先行导出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的预解矩阵 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$，有

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s&-1\\3&s+2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s^2+2s+3}&\dfrac{1}{s^2+2s+3}\\\dfrac{-3}{s^2+2s+3}&\dfrac{s}{s^2+2s+3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}\\-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}&\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+(\sqrt{2})^2}\end{bmatrix}$$

再利用拉普拉斯反变换

$$L^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\beta t\quad 和\quad L^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right\}=\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\beta t$$

即可得到

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t\\-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t&\mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)\end{bmatrix}$$

进而，定出系统状态的零输入响应 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)$。对此，基于算式 $\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$，即可得到

$$\boldsymbol{x}_{0u}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)&\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t\\-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin\sqrt{2}t&\mathrm{e}^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\sqrt{2}t\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-t}(\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t)\\\mathrm{e}^{-t}(\cos\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t)\end{bmatrix}$$

(ii) 确定“$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$，$\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，$u(t)=e^{-t}$，$t\geq 0$”的状态响应$\boldsymbol{x}(t)$

计算算式为$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau$。矩阵$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$的矩阵指数函数

e^{At}已在题 3.2 (i)的题解中定出，即

$$e^{At}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

基此，先行分别定出

$$e^{At}\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau&=\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau\\ &=\int_0^t\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t}e^{\tau}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t}e^{\tau}\end{bmatrix}d\tau=\begin{bmatrix}4te^{-t}-2e^{-2t}(e^{t}-1)\\ -4te^{-t}+4e^{-2t}(e^{t}-1)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+4te^{-t}+2e^{-2t}\\ 4e^{-t}-4te^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是，利用上述结果，就可定出系统的状态响应为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau\\ &=\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2e^{-t}+4te^{-t}+2e^{-2t}\\ 4e^{-t}-4te^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(4t-1)e^{-t}+2e^{-2t}\\ -(4t-3)e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

题 3.5 给定一个连续时间线性时不变系统，已知状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)$为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t}+e^{3t})\\ -e^{-t}+e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix}$$

试据此定出系统矩阵$\boldsymbol{A}$。

解 本题属于“矩阵A”和“矩阵指数函数e^{At}”间关系的反问题。未有直接关系式可以利用，意在训练运用已学知识（如矩阵指数函数性质）灵活地解决这类问题。

先建立问题一般算式。对连续时间线性时不变系统，状态转移矩阵$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{At}$。再由$e^{At}$性质$de^{At}/dt=Ae^{At}$和$(e^{At})_{t=0}=\boldsymbol{I}$，可以导出由“$e^{At}$”确定“矩阵$\boldsymbol{A}$”的一个算式为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}e^{At})_{t=0}=(de^{At}/dt)_{t=0}$$

再就给定$\boldsymbol{\Phi}(t)$即e^{At}确定矩阵$\boldsymbol{A}$。对此，由给定e^{At}可以导出

$$de^{At}/dt=d\boldsymbol{\Phi}(t)/dt=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t}) & \frac{1}{4}(-e^{-t}+e^{3t})\\ (-e^{-t}+e^{3t}) & \frac{1}{2}(e^{-t}+e^{3t})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{3t}\\ e^{-t}+3e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}$$

从而，定出系统矩阵$\boldsymbol{A}$为

$$\boldsymbol{A}=(de^{At}/dt)_{t=0}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t} & \frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{3t}\\ e^{-t}+3e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{3t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

题 3.7 给定一个时不变矩阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{P}_0$$

其中，$\boldsymbol{X}$为$n\times n$变量矩阵。证明上述矩阵方程的解阵为

$$\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}$$

解 本题属于证明题，意在训练演绎思维和逻辑推证能力。

欲证“$\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}$为解阵”等价于证明“$\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}$同时满足方程和初始条件”。对此，可以导出

满足方程 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\frac{d}{dt}(e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t})=\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right)\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}+e^{At}\boldsymbol{P}_0\left(\frac{d}{dt}e^{A^{\mathrm{T}}t}\right)$

$$=\boldsymbol{A}(e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t})+(e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^{\mathrm{T}}$$

满足初始条件 $\boldsymbol{X}(0)=\{e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}\}_{t=0}=\{e^{At}\}_{t=0}\boldsymbol{P}_0\{e^{A^{\mathrm{T}}t}\}_{t=0}=\boldsymbol{P}_0$

表明，$\boldsymbol{X}(t)=e^{At}\boldsymbol{P}_0e^{A^{\mathrm{T}}t}$为给定矩阵微分方程的解阵。证明完成。

题 3.8 给定连续时间时变自治系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$及其伴随系统$\dot{\boldsymbol{z}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}$，表$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$和$\boldsymbol{\Phi}_z(t,t_0)$分别为它们的状态转移矩阵，试证明$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_z^{\mathrm{T}}(t,t_0)=\boldsymbol{I}$。

解 本题为证明题，意在训练演绎思维和逻辑推证能力。

首先，导出使$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_z^{\mathrm{T}}(t,t_0)=\boldsymbol{I}$的矩阵：

$$\boldsymbol{\Phi}_z(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{-\mathrm{T}}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)$$

进而，利用性质$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t_0,t)=-\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{A}(t)$和上述结果$\boldsymbol{\Phi}_z(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)$，可对伴随系统导出

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_z(t,t_0)=\dot{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(t_0,t)=(-\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{A}(t))^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)$$

$$=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}_z(t,t_0)\text{（满足状态转移矩阵方程）}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_z(t_0,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t_0)=\boldsymbol{I}\quad\text{（满足初始条件）}$$

表明$\boldsymbol{\Phi}_z(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)$为伴随系统状态转移矩阵，从而证得

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}_z^{\mathrm{T}}(t,t_0)=\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{\Phi}(t_0,t)=\boldsymbol{I}$$

题 3.9 给定连续时间线性时变系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}(t) & \boldsymbol{A}_{12}(t)\\ \boldsymbol{A}_{21}(t) & \boldsymbol{A}_{22}(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1(t)\\ \boldsymbol{B}_2(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{u},\quad t\geqslant t_0$$

表系统状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(t,t_0)\end{bmatrix}$$

试证明：若$\boldsymbol{A}_{21}(t)\equiv\boldsymbol{0}$，则必有$\boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0)\equiv\boldsymbol{0}$。

解 本题为证明题，意在训练演绎思维和逻辑推证能力。

由$\boldsymbol{A}_{21}(t)\equiv\boldsymbol{0}$，可导出系统状态转移矩阵方程及其初始条件为

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t,t_0)=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{11}(t,t_0) & \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{12}(t,t_0)\\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{21}(t,t_0) & \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{22}(t,t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}(t) & \boldsymbol{A}_{12}(t)\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(t,t_0)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0,t_0)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11}(t_0,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(t_0,t_0)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_0,t_0) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(t_0,t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

基此，对$\boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0)$可以导出

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{21}(t,t_0)=\boldsymbol{A}_{22}(t)\boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}_{21}(t_0,t_0)=\boldsymbol{0}$$

从而，由$\boldsymbol{A}_{22}(t)\neq\boldsymbol{0}$并考虑到方程解的惟一性，可知“同时满足上述方程及其初始条件的解阵”只可能为$\boldsymbol{\Phi}_{21}(t,t_0)\equiv\boldsymbol{0}$。证明完成。

题 4.1 判断下列各连续时间线性时不变系统是否完全能控：

(i) $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$

(ii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 21\\0 & -25 & -20\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}u$

(iii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 1\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\4 & 1\\0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}u$

(iv) $\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 4 & 1\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\\0 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}u$

解 本题属于由系统矩阵对 $\{A, B\}$ 判断能控性的基本题。通常，需随系统矩阵 A 的形式，选择计算上最为简便的判据。

(i) 判断 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-2 & -4 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}u$ 的能控性

鉴于 A 无特定形式，采用秩判据较简便。对此，计算判别阵的秩，并注意到 $n=3$，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & * & * & *\\0 & 1 & -1 & * & * & *\\-1 & 1 & 1 & * & * & *\end{bmatrix}=3=n$$

其中，式中前 3 列已为线性无关，所以无须再计算后 3 个*列。基此，可知系统完全能控。

(ii) 判断 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 3\\0 & 20 & 21\\0 & -25 & -20\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}u$ 的能控性

鉴于 A 无特定形式，采用秩判据较简便。对此，计算判别阵的秩，并注意到 $n=3$，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1 & 12 & 15\\3 & 60 & -375\\0 & -75 & 0\end{bmatrix}=3=n$$

基此，可知系统完全能控。

（iii）判断 $\dot{x}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2&0\\4&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}u$ 的能控性

鉴于 A 为约当规范形，以采用“约当规范形判据”较简便。可以看出，A 约当规范形中，相应于特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$ 和 $\lambda_3=4$ 各都只有一个约当小块。对此情形，系统完全能控充要条件是矩阵 B 中对应于“三个约当小块的末行”的行，即行 $b_1^{\mathrm{T}},b_2^{\mathrm{T}}$ 和 b_4^{T}，均为非零行。基此，由给定矩阵 B，有

$$b_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&0\end{bmatrix}\neq 0,\quad b_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&1\end{bmatrix}\neq 0,\quad b_4^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\neq 0$$

可知系统完全能控。

（iv）判断 $\dot{x}=\begin{bmatrix}4&1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&2\\0&0\\2&1\end{bmatrix}u$ 的能控性

鉴于 A 为约当规范形，以采用约当规范形判据较简便。可以看出，A 约当规范形中，相应于惟一特征值 $\lambda_1=4$ 有两个约当小块。对此情形，系统完全能控充要条件是矩阵 B 中对应于“两个约当小块的末行”的行，即行 b_2^{T} 和 b_4^{T}，为线性无关。基此，由给定矩阵 B，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}b_2^{\mathrm{T}}\\b_4^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=2$$

可知系统完全能控。

题 4.2 确定使下列各连续时间线性时不变系统完全能控的待定参数 a，b，c 取值范围：

（i）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a&1\\2&4\\b&1\end{bmatrix}u$

（ii）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&a\\b&c\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

解 本题属于由矩阵对 $\{A,B\}$ 判断系统能控性的基本题。

（i）确定 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a&1\\2&4\\b&1\end{bmatrix}u$ 中 a，b 取值范围

本题可采用多种方法求解。下面给出其中两种方法。

约当规范形判据法。可以看出，矩阵 A 为约当规范形，相应于惟一特征值 $\lambda_1=-2$ 共有三个约当小块。对此情形，系统完全能控充要条件是矩阵 B 中对应于“三个约当小块的末行”的行为线性无关，即 B 中三个行 $b_1^{\mathrm{T}},b_2^{\mathrm{T}}$ 和 b_3^{T} 为线性无关。基此，由给定矩阵 B，不管待定参数 a，b 取为什么值，必有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \\ b & 1 \end{bmatrix} < 3 = n$$

即在参数a，b任意取值下系统均为不完全能控。

秩判据法。运用推论4.1的计算简化结论，就两种情形分别讨论。

当“$a \neq 1/2$，$b \neq 1/2$”时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$，系统完全能控当且仅当$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}=3$。对此情形，判别阵中“第1列和第3列为线性相关”和“第2列和第4列为线性相关”，而$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=2$，必有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & 1 & -2a & -2 \\ 2 & 4 & -4 & -8 \\ b & 1 & -2b & -2 \end{bmatrix} = 2 < 3 = n$$

参数a，b在此取值下系统均为不完全能控。

当“$a=b=1/2$”时，$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=1$，系统完全能控当且仅当$\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_1]=3$。对此情形，由于

$$\operatorname{rank}[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_1] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 8 \\ 1/2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 1 < 3 = n$$

参数a，b在此取值下系统为不完全能控。

综上可知，不管待定参数a，b取为什么值，系统均为不完全能控。

（ii）确定$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$中待定参数$a$，$b$，$c$的取值范围

本题可采用多种方法求解。鉴于矩阵$\boldsymbol{A}$无特定形式，采用秩判据较简便。对此，注意到$n=2$，由要求

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{Ab}\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = 2$$

可定出待定参数a，b，c的取值范围为

$$a = \text{任意有限值}, \quad b \neq 0, \quad c = \text{任意有限值}$$

题 4.3　判断下列各连续时间线性时不变系统是否完全能观测：

（i）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，$y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

（ii）$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$

(iii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}x$

解 本题属于由矩阵对 $\{A, C\}$ 判断系统能观测性的基本题。并且，应随矩阵 A 的形式，选择计算较简便的判据。

(i) 判断“$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}x,\quad y=[1\quad 4\quad 2]x$”的能观测性

矩阵 A 为非约当规范形，采用秩判据较简便。计算判别阵的秩，并注意到 $n=3$，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}c\\ cA\\ cA^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ -4 & -7 & -2\\ 4 & 4 & -1\end{bmatrix}=3=n$$

可知系统完全能观测。

(ii) 判断“$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 8\end{bmatrix}x$”的能观测性

矩阵 A 为约当规范形，采用约当规范形判据较简便。A 约当规范形中，相应于惟一特征值 $\lambda_1=-2$ 有两个约当小块。对此情形，系统完全能观测充分必要条件是，矩阵 C 中对应于两个“约当小块的首列”的列即列 c_1 和 c_3 线性无关。基此，由给定矩阵 C，有

$$\operatorname{rank}[c_1\quad c_3]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\end{bmatrix}=1<2$$

可知系统不完全能观测。

(iii) 判断“$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 6\\ 2 & 1 & 7\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}x$”的能观测性

矩阵 A 无特定形式，采用秩判据较简便。计算判别阵的秩，并注意到 $n=3$，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\\ * & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{bmatrix}=3=n$$

由于式中前 3 行线性无关，无须再计算 3 个 $*$ 行。从而，可知系统完全能观测。

题 4.4 确定使下列各连续时间线性时不变系统完全能观测的待定参数 a，b，c 取值范围：

(i) $\dot{x}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & 0\end{bmatrix}x,\quad y=[1\quad 0]x$

(ii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x,\quad y=\begin{bmatrix}1 & a & b\\ 4 & 0 & 4\end{bmatrix}x$

解 本题属于由矩阵对 $\{A,C\}$ 判断系统能观测性的基本题。并且，应随矩阵 A 的形式，选择计算较简便的判据。

（i）确定“$\dot{x}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}x$，$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x$”中 a，b，c 的取值范围

矩阵 A 无特定形式，采用秩判据较简便。计算判别阵的秩，并注意到 $n=2$，由要求

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}=2$$

可以定出 a，b，c 取值范围为

$$a=\text{任意有限值}, \quad b\neq 0, \quad c=\text{任意有限值}$$

（ii）确定“$\dot{x}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}x$，$y=\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}x$”中 a，b 的取值范围

A 无特定形式，采用秩判据较简便。由推论 4.3 的简化计算结论，就两种情形分别讨论。

当“$a\neq 0$，$b\neq 1$”时，$\operatorname{rank}C=2$，系统完全能观测当且仅当 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=3$。对此情形，使系统完全能观测即满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 4 & 0 & 4 \\ a-2 & -2a & -2b \\ -8 & 0 & -8 \end{bmatrix}=3=n$$

的 a，b 的取值范围为

$$a\neq 0, \quad b\neq 1$$

当“$a=0$，$b=1$”时，$\operatorname{rank}C=1$，系统完全能观测当且仅当 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ c_1A^2 \end{bmatrix}=3$。对此情形，由于

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ c_1A^2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}=1<3=n$$

系统不完全能观测。

综上可知，使系统完全能观测的 a，b 的取值范围为

$$a\neq 0, \quad b\neq 1$$

题 4.5 确定使下列各连续时间线性时不变系统联合完全能控和完全能观测的待定参数 a 和 b 取值范围：

（i）$\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x$

(ii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&-3&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0&1&b\end{bmatrix}x$

解 本题属于由矩阵对 $\{A, B, C\}$ 判断系统联合能控性和能观测性的基本题。

(i) 确定“$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&1&a\\0&-2&1\\0&0&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x$”中 a 的取值范围

矩阵 A 无特定形式，采用秩判据较简便。基于能控性判据和能观测性判据，由

$$\det\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&a&1-4a\\0&1&-5\\1&-3&9\end{bmatrix}=-a-1,\quad \det\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-3\\0&0&9\end{bmatrix}=0$$

可知，不管 a 取为什么值，系统均不是联合完全能控和完全能观测。

(ii) 确定“$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&-3&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0&1&b\end{bmatrix}x$”中 a，b 的取值范围

矩阵 A 无特定形式，采用秩判据较简便。基于能控性和能观测性的秩判据，由要求

$$\det\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&a&-5a-3\\1&1&1\\a&-5a-3&23a+12\end{bmatrix}=8a^2+21a+9$$
$$=8(a+0.5394)(a+2.0856)\neq 0$$

$$\det\begin{bmatrix}c\\cA\\cA^2\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&1&b\\-2b&-3b+1&-5b\\10b&12b+1&23b\end{bmatrix}=6b^3-16b^2=6b^2\left(b-\frac{8}{3}\right)\neq 0$$

可以定出，a，b 的取值范围为

$$a\neq 0.5394\ \text{或}\ 2.0856,\qquad b\neq 8/3\ \text{或}\ 0$$

题 4.6 计算下列连续时间线性时不变系统的能控性指数和能观测性指数：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&3&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}x$$

解 本题属于由矩阵对 $\{A, B, C\}$ 计算能控性指数和能观测性指数的基本题。

对给定系统，可以看出

$$B\ \text{满秩即}\ \mathrm{rank}\,B=2,\quad C\ \text{满秩即}\ \mathrm{rank}\,C=2$$

基此，运用推论 4.1 和推论 4.3 给出的简化秩判据，通过计算判别阵的秩，有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&1&1&*\\1&0&0&*\\0&0&3&*\end{bmatrix}=3=n,\quad \mathrm{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&4&-1\\*&*&*\end{bmatrix}=3=n$$

其中，$*$ 列和 $*$ 行无需计算。表能控性指数为 μ，能观测性指数为 ν，则由上述判别矩阵

结果中最高幂次项 $A^{\alpha}B$ 和 CA^{β} 中的幂次分别为 $\alpha=1$ 和 $\beta=1$，并据定义有 $\mu-1=\alpha$ 和 $\nu-1=\beta$，即可定出

$$\text{能控性指数}\ \mu=\alpha+1=2,\quad \text{能观测性指数}\ \nu=\beta+1=2$$

题 4.11 给定完全能控和完全能观测的单输入单输出线性时不变系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

试定出：(i) 能控规范形和变换阵；(ii) 能观测规范形和变换阵。

解 本题属于将线性时不变系统矩阵组 $\{A,b,c\}$ 变换为"能控规范形"和"能观测规范形"的基本题。

先行定出给定系统 $\{A,b,c\}$ 的特征多项式

$$\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s+1 & 2 & 2\\ 0 & s+1 & -1\\ -1 & 0 & s-1\end{bmatrix}=s^3+s^2+s+3$$

和一组常数

$$\beta_2=cb=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=2$$

$$\beta_1=cAb+\alpha_2cb=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+(1\times 2)=-3+2=-1$$

$$\beta_0=cA^2b+\alpha_2cAb+\alpha_1cb=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\1\\3\end{bmatrix}+[1\times(-3)]+(1\times 2)=-3$$

(i) 确定能控规范形及其变换阵。基于单输入单输出系统能控规范形构成形式，可直接给出给定系统 $\{A,b,c\}$ 的能控规范形为

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \beta_2\end{bmatrix}\bar{x}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\end{bmatrix}\bar{x}$$

再据变换矩阵组成算式，可定出变换矩阵 P 及其逆为

$$P=\begin{bmatrix}A^2b & Ab & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha_2 & 1 & 0\\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}-6 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1 & 10 & -2\\ -3 & -12 & 6\\ 9 & 18 & 0\end{bmatrix}$$

作为校核，还可对规范形矩阵组$(\bar{A}_c,\bar{b}_c,\bar{c}_c)$作验证：

$$\bar{A}_c=P^{-1}AP=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1 & 10 & -2\\ -3 & -12 & 6\\ 9 & 18 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1 & 10 & -2\\ -3 & -12 & 6\\ 9 & 18 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & -8 & -4\\ 0 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_c=P^{-1}b=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}1 & 10 & -2\\ -3 & -12 & 6\\ 9 & 18 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_c=cP=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & -2 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

（ii）确定能观测规范形及其变换阵。对此，基于单输入单输出系统能观测规范形构成形式，可直接给出给定系统$\{A,b,c\}$的能观测规范形为

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & -\alpha_0\\ 0 & 1 & -\alpha_2\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}-3\\ -1\\ 2\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\hat{x}$$

再据变换矩阵的组成算式，可定出变换矩阵Q及其逆为

$$Q=\begin{bmatrix}1 & \alpha_2 & \alpha_1\\ 0 & 1 & \alpha_2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cA^2\\ cA\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 5 & -2\\ -1 & -3 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\left(-\frac{1}{9}\right)\begin{bmatrix}1 & -3 & -9\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

作为校核，还可对规范形矩阵组$(\hat{A}_o,\hat{b}_o,\hat{c}_o)$作验证：

$$\hat{A}_o=QAQ^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -3\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & -9\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\times\left(-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & -3 & 0\\ -1 & 2 & -3\\ -1 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3 & -9\\ -1 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\times\left(-\frac{1}{9}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\hat{b}_o = Qb = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}_o = cQ^{-1} = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -3 & -9 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{9}\right) = [0 \quad 0 \quad 1]$$

题 4.14 定出下列线性时不变系统按能控性的结构分解式：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 本题属于将系统矩阵组 $\{A, b\}$ 按能控性分解的基本题。

首先，构造变换阵。考虑到系统维数 $n = 2$，并基于能控性判别结果

$$\text{rank}[b \ \ Ab] = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2 = n$$

可知变换阵 Q = "2×2 矩阵 $[q_1 \ \ q_2]$"，其中

q_1 =$[b \ \ Ab]$ 中的非零列向量 b

q_2 =$[b \ \ Ab]$ 以外与 b 线性无关任一列向量

基此，可导出一个变换阵 Q，并计算其逆 P，得到

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

进而，基于状态变换 $\bar{x} = Px$，导出变换后系统的系数矩阵为

$$\bar{A} = PAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = Pb = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

基此，得到给定系统状态方程按能控性的结构分解式为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

其中

能控部分 $\dot{\bar{x}}_1 = 0\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + u$，不能控部分 $\dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_2$

题 4.15 定出下列线性时不变系统的能控和能观测子系统：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & \lambda_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1] x$$

解 本题属于将系统矩阵组 $\{A, b, c\}$ 进行规范结构分解的基本题。

由系统矩阵 A 为约当规范形，可运用能控性和能观测性的约当规范形判据，对系统状态 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^{\mathrm{T}}$ 的各个变量直观地区分为能控和不能控、能观测和不能观测。

首先，将 $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^{\mathrm{T}}$ 的变量按能控性分解。注意到约当规范形 A 中对应于特征值 λ_1 和 λ_2 各只有一个约当小块，且矩阵 b 中对应于约当小块末行的两个行为 $b_3=0$ 和 $b_5\neq 0$，基此可知

$$\{x_1,x_2,x_3\}\text{不完全能控，}\quad \{x_4,x_5\}\text{完全能控}$$

再由系统状态方程，可导出

$$\dot{x}_3=\lambda_1 x_3$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x_3$$

这就表明，不完全能控 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 中“x_3 不能控”和“$\{x_1,x_2\}$ 能控”。综上导出，系统状态 $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^{\mathrm{T}}$ 中：

$$x_1,x_2,x_4,x_5\text{能控，}\quad x_3\text{不能控}$$

进而，将状态 $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^{\mathrm{T}}$ 的变量按能观测性分解。由于约当规范形 A 中对应于特征值 λ_1 和 λ_2 各只有一个约当小块，且矩阵 c 中对应于约当小块首行的两个列为 $c_1=0$ 和 $c_4=0$，基此可知：

$$\{x_1,x_2,x_3\}\text{不完全能观测，}\quad \{x_4,x_5\}\text{不完全能观测}$$

再由系统自治状态方程和输出方程，可导出

$$\dot{x}_1=\lambda_1 x_1+x_2,\quad y_1=c_1x_1=0$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_3\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad y_{23}=[1\ \ 1]\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

和

$$\dot{x}_4=\lambda_2 x_4+x_5,\quad y_4=c_4x_4=0$$

$$\dot{x}_5=\lambda_2 x_5,\quad y_5=x_5$$

这就表明，不完全能观测 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 中“x_1 不能观测”和“$\{x_2,x_3\}$ 能观测”，不完全能观测 $\{x_4,x_5\}$ 中“x_4 不能观测”和“x_5 能观测”。综上导出，系统状态 $x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^{\mathrm{T}}$ 中：

$$x_2,x_3,x_5\text{能观测，}\quad x_1,x_4\text{不能观测}$$

最后，导出给定系统的能控和能观测子系统。归纳上述分析，先来定出能控和能观测状态变量 x_2 和 x_5，能控和不能观测状态变量 x_1 和 x_4，不能控和能观测状态变量 x_3。基此，将系统状态方程和输出方程改写为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_1\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_5\\ x_1\\ x_4\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y=[1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]\begin{bmatrix}x_2\\ x_5\\ x_1\\ x_4\\ x_3\end{bmatrix}$$

于是，由此定出给定系统的能控和能观测子系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u,\quad y_{co}=[1\ \ 1]\begin{bmatrix}x_2\\ x_5\end{bmatrix}$$

题 5.1 给定一个单输入单输出连续时间线性时不变系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\250&0&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}-25&5&0\end{bmatrix}x$$

试判断：（i）系统是否为渐近稳定；（ii）系统是否为 BIBO 稳定。

解 本题属于判断线性时不变系统渐近稳定性和 BIBO 稳定性的基本题。

（i）判断系统的渐近稳定性。首先，基于

$$\det\left(sI-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-\alpha_0&-\alpha_1&-\alpha_2\end{bmatrix}\right)=\alpha(s)=s^3+\alpha_2s^2+\alpha_1s+\alpha_0$$

的一般结论，定出给定 A 的特征多项式：

$$\det\left(sI-\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\250&0&-5\end{bmatrix}\right)=\alpha(s)=s^3+5s^2-250$$

进而，由经典控制理论中劳斯（Routh）判据知，$\alpha(s)=0$ 根均具有负实部的必要条件是，系数 $\{\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0\}$ 均为同号。可以看出，“$\alpha(s)=s^3+5s^2-250=0$”中系数不满足上述必要条件。基此可知，$\alpha(s)=s^3+5s^2-250=0$ 根不均具有负实部，即矩阵 A 的特征值不均具有负实部，给定系统不是渐近稳定的。

（ii）判断系统的 BIBO 稳定性。基于给定系统状态空间描述，先行定出其传递函数 $g(s)$：

$$\begin{aligned}g(s)&=\frac{1}{\det(sI-A)}c\,\mathrm{adj}(sI-A)b\\&=\frac{1}{s^3+5s^2-250}\begin{bmatrix}-25&5&0\end{bmatrix}\cdot\mathrm{adj}\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\-250&0&s+5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{s^3+5s^2-250}\begin{bmatrix}-25&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}*&*&1\\ *&*&s\\ *&*&s^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\10\end{bmatrix}\\&=\frac{50(s-5)}{(s^2+10s+50)(s-5)}=\frac{50}{(s^2+10s+50)}\end{aligned}$$

进而，由 $g(s)$ 的分母多项式 $\alpha(s)=s^2+10s+50$ 的系数均为正值知，$g(s)$ 的极点必均具有负实部，系统为 BIBO 稳定。

（iii）解释上述结果的合理性。综上，给定系统为“BIBO 稳定”但为“非渐近稳定”，这是由系统“完全能控”但“不完全能观测”所导致的。为说明这一点，构造按能观测性分解的变换阵 F，并计算其逆 F^{-1}，有

$$F=\begin{bmatrix}-25&5&0\\0&-25&5\\0&0&1\end{bmatrix},\quad F^{-1}=\frac{1}{625}\begin{bmatrix}-25&-5&25\\0&-25&125\\0&0&625\end{bmatrix}$$

基此，定出变换后系统矩阵 $\hat{A}$ 为

$$\hat{A}=FAF^{-1}=\begin{bmatrix}-25&5&0\\0&-25&5\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\250&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-25&-5&25\\0&-25&125\\0&0&625\end{bmatrix}\times\frac{1}{625}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\-50&-10&0\\-10&-2&5\end{bmatrix}$$

其中，不能观测部分系统矩阵 $\hat{A}_{\bar{o}}=5$，其特征值为 $\lambda_{\bar{o}}=5$，而能观测部分的特征多项式 $\alpha(s)=s^2+10s+50$ 为稳定。再由状态空间描述和传递函数的关系知，传递函数 $g(s)$ 只能表征系统的能控且能观测部分。这就表明，尽管存在正特征值 $\lambda_{\bar{o}}=5$ 而导致系统为非渐近稳定，但因 $\lambda_{\bar{o}}=5$ 所属的不能观测部分不能反映于传递函数 $g(s)$ 中，从而系统 BIBO 稳定。

题 5.2 给定一个二阶连续时间非线性时不变系统为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-\sin x_1-x_2$$

试：(i) 定出系统所有平衡状态；(ii) 定出各平衡点处线性化状态方程，并分别判断是否为渐近稳定。

解 本题属于确定系统平衡状态和判断线性化系统渐近稳定性的基本题。

(i) 确定系统平衡状态。表 x_{e1} 和 x_{e2} 为系统的平衡状态分量，由平衡状态定义知，x_{e1} 和 x_{e2} 满足方程：

$$x_{e2}=0$$
$$-\sin x_{e1}-x_{e2}=0$$

基此，即可定出系统所有平衡状态为

$$x_{e1}=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$$
$$x_{e2}=0$$

(ii) 确定平衡点处线性化状态方程并判断稳定性

情形 I：平衡点为

$$\{x_{e1}=0,x_{e2}=0\},\ \{x_{e1}=\pm2\pi,x_{e2}=0\},\ \{x_{e1}=\pm4\pi,x_{e2}=0\},\ \cdots$$

对此，由一般关系式

$$\sin(x\pm k\pi)=\sin x,\quad k=0,2,4,\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

可知，在平衡点邻域内，一次近似式为

$$\sin(x\pm k\pi)\cong x,\quad k=0,2,4,\cdots$$

基此，对给定非线性系统状态方程

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=-\sin x_1-x_2$$

可导出其在这类平衡点邻域内的线性化状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

而由线性化系统的特征多项式

$$\alpha(s)=s^2+s+1$$

并据推论 5.1B，可知线性化系统在这类平衡点邻域内为渐近稳定。

情形 II：平衡点为

$$\{x_{e1}=\pi, x_{e2}=0\}，\{x_{e1}=3\pi, x_{e2}=0\}，\ \cdots$$

对此，由一般关系式

$$\sin(x\pm k\pi)=-\sin x，\quad k=1,3,5,\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

可知，在平衡点邻域内，一次近似式为

$$\sin(x_1\pm k\pi)\cong -x_1，\quad k=1,3,5,\cdots$$

基此，对给定非线性系统状态方程

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\sin x_1-x_2$$

可导出其在这类平衡点邻域内的线性化状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

而由线性化系统的特征多项式

$$\alpha(s)=s^2+s-1$$

并据推论 5.1B，可知线性化系统在这类平衡点邻域内不为渐近稳定。

题 5.3 对下列连续时间非线性时不变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=0$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\\dot{x}_2=-x_1-x_1^2x_2\end{cases}$$

解 本题属于分析非线性时不变系统渐近稳定性的基本题。

基于李雅普诺夫第二方法的渐近稳定性定理进行分析。

(i) 选取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$。对给定非线性系统，表状态 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2]^T$，并取 $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$，可知

$$V(\mathbf{0})=0，\ V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2>0,\ \forall x_1\neq 0, x_2\neq 0$$

即 $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$ 为正定。

（ii）计算 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 并判断其定号性。对取定 $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$ 和系统状态方程，计算得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2x_1 & 2x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1-x_1^2x_2\end{bmatrix}=-2x_1^2x_2^2$$

基此，可知

$$\dot{V}(\boldsymbol{0})=0\,,\quad \dot{V}(\boldsymbol{x})\begin{cases}=0, & \forall\{x_1=0,x_2\neq 0\},\ \forall\{x_1\neq 0,x_2=0\}\\ <0, & \forall x_1\neq 0,x_2\neq 0\end{cases}$$

即 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-2x_1^2x_2^2$ 为负半定。

（iii）判断 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$。对此，只需判断使 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 的

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\ x_2\end{bmatrix}\text{和}\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}$$

不为系统状态方程的解。为此，将 $\boldsymbol{x}=[0\quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 代入状态方程，导出

$$0=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_1-x_1^2x_2=0$$

这表明，状态方程的解只为 $\boldsymbol{x}=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=[0\quad x_2]^{\mathrm{T}}$ 不是系统状态方程的解。通过类似分析，也可证得 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad 0]^{\mathrm{T}}$ 不是状态方程的解。基此，可知 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$。

（iv）结论。综上，对给定非线性时不变系统，可构造李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2$，满足

$$V(\boldsymbol{x})\ \text{正定；}\ \dot{V}(\boldsymbol{x})\ \text{负半定；对任意}\ \boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}\text{，}\ \dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$$

$$\text{当}\ \|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty\text{，有}\ V(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2\to\infty$$

基此，并据李雅普诺夫方法渐近稳定性定理知，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 为大范围渐近稳定。

题 5.4 对下列连续时间非线性时不变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1^3-x_2\end{cases}$$

解 本题属于分析非线性时不变系统渐近稳定性的基本题。

基于李雅普诺夫第二方法的渐近稳定性定理进行分析。

（i）选取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$。对给定非线性系统，表状态 $\boldsymbol{x}=[x_1\quad x_2]^{\mathrm{T}}$，并取 $V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2$，可知

$$V(\boldsymbol{0})=0\,,\quad V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2>0,\ \forall x_1\neq 0,x_2\neq 0$$

即 $V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2$ 为正定。

（ii）计算 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 并判断其定号性。对取定 $V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2$ 和系统状态方程，计算得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4x_1^3 & 4x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3-x_2\end{bmatrix}=-4x_2^2$$

基此，可知

$$\dot{V}(\mathbf{0})=0\,,\quad \dot{V}(\boldsymbol{x})\begin{cases}=0, & \forall\,\{x_1,\ x_2=0\}\\ <0, & \forall\,\{x_1\neq 0,\ x_2\neq 0\}\end{cases}$$

即 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=-4x_2^2$ 为负半定。

（iii）判断 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$。对此，只需判断使 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ 的 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ 不为系统状态方程的解。为此，将 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ 代入状态方程，导出

$$\dot{x}_1=x_2=0$$

$$0=\dot{x}_2=-x_1^3-x_2=-x_1^3$$

这表明，状态方程的解只为 $\boldsymbol{x}=[0\ \ 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}=[x_1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ 不是系统状态方程的解。基此，可知 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$。

（iv）结论。综上，对给定非线性时不变系统，可构造李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2$，满足

$$V(\boldsymbol{x})\text{ 正定；}\ \dot{V}(\boldsymbol{x})\text{ 负半定；对任意 }\boldsymbol{x}_0\neq\mathbf{0},\ \dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0))\neq 0$$

$$\text{当}\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty,\ \text{有 } V(\boldsymbol{x})=x_1^4+2x_2^2\to\infty$$

基此，并据李雅普诺夫方法渐近稳定性定理知，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\mathbf{0}$ 为大范围渐近稳定。

题 5.5 对下列连续时间线性时变系统，判断原点平衡状态即 $\boldsymbol{x}_e=\mathbf{0}$ 是否为大范围渐近稳定：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{t+1} & -10\end{bmatrix}\boldsymbol{x},\quad t\geqslant 0$$

（提示：取 $V(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{2}[x_1^2+(t+1)x_2^2]$）。

解 本题属于分析线性时变系统渐近稳定性的基本题。

基于李雅普诺夫第二方法的渐近稳定性定理进行分析。

（i）选取候选李雅普诺夫函数 $V(\boldsymbol{x})$。对给定线性时变系统，表 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2]^{\mathrm{T}}$，并取

$$V(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}[x_1^2+(t+1)x_2^2]$$

可知，$V(\mathbf{0},t)=0$，$V(\boldsymbol{x},t)$ 为正定。

（ii）计算 $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ 并判断其定号性。对取定 $V(\boldsymbol{x},t)=[x_1^2+(t+1)x_2^2]/2$ 和系统状态方程，计算得到

$$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x},t)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial V(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}+\frac{\partial V(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

$$=[x_1\quad (t+1)x_2]\begin{bmatrix}x_2\\ -\dfrac{1}{t+1}x_1-10x_2\end{bmatrix}+\frac{1}{2}x_2^2=-(10t+9.5)x_2^2$$

可知，$\dot{V}(\mathbf{0},t)=0$，$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 为负半定。

（iii）判断 $\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0),t)\neq 0$。对此，除原点处 $\dot{V}(\mathbf{0},t)=0$，容易判断使 $\dot{V}(\mathbf{0},t)=0$ 的 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ 不是系统状态方程的解。从而，$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0),t)\neq 0$。

（iv）结论。综上，对给定线性时变系统，可构造 $V(\boldsymbol{x},t)=[x_1^2+(t+1)x_2^2]/2$，满足 $V(\boldsymbol{x},t)$ 正定；$\dot{V}(\boldsymbol{x},t)$ 负半定；对任意 $\boldsymbol{x}_0\neq\mathbf{0}$ 和任意 $t\geqslant 0$，$\dot{V}(\boldsymbol{\phi}(t;\boldsymbol{x}_0,0),t)\neq 0$

$$\text{当}\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty,\ \text{有 } V(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}[x_1^2+(t+1)x_2^2]\to\infty$$

基此，并据李雅普诺夫方法渐近稳定性定理知，系统原点平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\mathbf{0}$ 为大范围渐近稳定。

题 5.9 对下列连续时间线性时不变系统，试用李雅普诺夫判据判断是否为大范围渐近稳定：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x,\quad Q=I$$

解 本题属于运用李雅普诺夫判据判断线性时不变系统渐近稳定性的基本题。

首先，组成李雅普诺夫方程。对给定系统矩阵 A，并取 $Q=I$，有

$$\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

进而，确定李雅普诺夫方程的解阵 P。对此，由上述李雅普诺夫方程，导出

$$-2p_1+4p_2+0p_3=-1$$
$$p_1-4p_2+2p_3=0$$
$$0p_1+2p_2-6p_3=-1$$

并表其为

$$\begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

由此，计算定出

$$\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 2 & -6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\left(-\frac{1}{16}\right)\begin{bmatrix}20 & 24 & 8\\ 6 & 12 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/4\\ 5/8\\ 3/8\end{bmatrix}$$

从而，得到李雅普诺夫方程的解阵为

$$P=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\\ p_2 & p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/4 & 5/8\\ 5/8 & 3/8\end{bmatrix}$$

最后，判断系统渐近稳定性。由上述解阵 P 的结果，可以导出

$$\Delta_1=p_1=7/4>0$$
$$\Delta_2=p_1p_3-p_2^2=(7/4)(3/8)-(5/8)^2=17/64>0$$

即李雅普诺夫方程解阵 P 为正定。从而，据李雅普诺夫判据知，系统为大范围渐近稳定。

题 5.11 给定完全能控的连续时间线性时不变系统为

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

其中，取 $u=-B^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}t}W^{-1}(T)x_0$，而

$$W(T)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-At}BB^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t,\quad T>0$$

试证明：基此构成的闭环系统为渐近稳定。

解 本题属于证明题，意在训练演绎思维和逻辑推证能力。

对任意初始状态 $x_0\neq 0$，给定线性时不变系统在 $u=-B^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}T}W^{-1}(T)x_0$ 作用下的状态具有特性：

$$x(T)=\mathrm{e}^{AT}x_0+\int_0^T\mathrm{e}^{A(T-t)}Bu(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{AT}x_0-\left\{\mathrm{e}^{AT}\int_0^T\mathrm{e}^{-At}BB^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-A^{\mathrm{T}}t}\mathrm{d}t\right\}W^{-1}(T)x_0$$
$$=\mathrm{e}^{AT}x_0-\mathrm{e}^{AT}W(T)W^{-1}(T)x_0=\mathrm{e}^{AT}x_0-\mathrm{e}^{AT}x_0=0$$

这表明，对所构成闭环系统，由任意初始状态 $x_0\neq 0$ 所引起的运动为

$$x(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{At}x_0+\int_0^t\mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, & 0\leqslant t<T\\ 0, & T\leqslant t\leqslant\infty\end{cases}$$

即有

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0,\quad \forall x_0\neq 0$$

从而，证得闭环系统渐近稳定。证明完成。

题 6.1 判断下列各连续时间线性时不变系统能否可用状态反馈任意配置全部特征值:

(i) $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

(ii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}u$

(iii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-2 & -4 & -3 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}u$

解 本题属于运用状态反馈配置特征值定理条件的基本题。

对线性时不变受控系统，状态反馈可任意配置其全部闭环特征值的充要条件是系统完全能控。基此，判断“状态反馈能否任意配置系统全部特征值”归结为判断“系统是否完全能控”。

(i)对 $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$ 运用能控性秩判据，由 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}=2=n$ 知系统完全能控，从而系统用状态反馈能任意配置全部闭环特征值。

(ii)对 $\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}u$ 运用能控性约当规范形判据，由“$b_1=[1\ \ 0]$满足$\neq 0$，$b_3=[0\ \ 0]$不满足$\neq 0$”知系统不完全能控，从而系统用状态反馈不能任意配置全部闭环特征值。

(iii)对 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\-2 & -4 & -3 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}u$，由 $\operatorname{rank}B=3$ 而运用能控性简化计算的秩判据导出的结果

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & -5 & -3 & -4\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}=4=n$$

题 6.2 给定单输入连续时间线性时不变受控系统:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

试确定一个状态反馈阵 k，使闭环特征值配置为 $\lambda_1=-2+\mathrm{j}$ 和 $\lambda_2=-2-\mathrm{j}$。

解 本题属于运用状态反馈配置特征值的算法综合状态反馈阵的基本题。

本题受控系统同于题 5.1 (i)，前已判断其为完全能控，可用状态反馈配置全部闭环特征值。

(i) 定出受控系统特征多项式 $\alpha(s)$ 和期望闭环特征多项式 $\alpha^*(s)$。对此，有

$$\alpha(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s-1 & -2\\-3 & s-1\end{bmatrix}=s^2-2s-5$$

$$\alpha^*(s)=(s+2-j)(s+2+j)=s^2+4s+5$$

（ii）定出化能控规范形的变换阵$\boldsymbol{P}$及其逆$\boldsymbol{P}^{-1}$。对此，有

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Ab} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ 1 & 1/3\end{bmatrix}$$

（iii）定出状态反馈阵$\boldsymbol{k}$。对此，即可导出

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\alpha_0^*-\alpha_0 & \alpha_1^*-\alpha_1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}5+5 & 4+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ 1 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/3\\ 1 & 1/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 16/3\end{bmatrix}$$

题 6.5 给定连续时间线性时不变受控系统：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试确定一个输出反馈阵$\boldsymbol{f}$，使闭环特征值配置为$\lambda_1^*=-2$和$\lambda_2^*=-4$。

解 本题属于输出反馈配置指定闭环特征值的一类特殊问题。输出反馈一般不能任意配置系统的全部特征值。但本题中输出矩阵$\boldsymbol{C}$为非奇异，使得可先定出配置极点的状态反馈矩阵$\boldsymbol{k}$，再基此确定配置指定极点的输出反馈阵$\boldsymbol{f}$。

（i）判断受控系统能控性。对此，运用能控性秩判据，由

$$\text{rank}[\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{Ab}]=\text{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=2=n$$

知系统完全能控，表明可用状态反馈任意配置指定极点。

（ii）综合配置指定极点的状态反馈阵。先行定出受控系统特征多项式$\alpha(s)$和期望闭环特征多项式$\alpha^*(s)$，有

$$\alpha(s)=\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\det\begin{bmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s-1\end{bmatrix}=s^2-2s+1$$

$$\alpha^*(s)=(s+2)(s+4)=s^2+6s+8$$

再导出化能控规范形的变换矩阵$\boldsymbol{P}$及其逆$\boldsymbol{P}^{-1}$：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Ab} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \alpha_1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

基此，定出配置指定极点的状态反馈阵为

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\alpha_0^*-\alpha_0 & \alpha_1^*-\alpha_1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 8\end{bmatrix}$$

（iii）综合配置指定极点的输出反馈阵。对此，考虑到输出矩阵$\boldsymbol{C}$为非奇异，由使

$$\boldsymbol{kx}=\boldsymbol{kC}^{-1}\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{kC}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{fy}$$

即可导出配置指定极点的输出反馈阵为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{kC}^{-1}=\begin{bmatrix}15 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}15 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15/2 & 8\end{bmatrix}$$

题 6.13 给定下列连续时间线性时不变系统的传递函数矩阵或状态空间描述，分别判断系统能否可用状态反馈和输入变换实现动态解耦：

(i) $G_0(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{s^2+2} & \dfrac{2}{s^2+s+1}\\ \dfrac{4s+1}{s^3+2s+1} & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$

(ii) $\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$

$y=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x$

解 本题属于对线性时不变系统运用可动态解耦条件判断系统可否动态解耦的基本题。

(i) 判断 $G_0(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{3}{s^2+2} & \dfrac{2}{s^2+s+1}\\ \dfrac{4s+1}{s^3+2s+1} & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$ 由"状态反馈和输入变换"的可动态解耦性

首先，确定系统结构特性指数和结构特性向量。由其基于传递函数矩阵 $G_0(s)$ 的定义，并注意到方 $G_0(s)$ 的维数为 2，可计算定出给定系统的"结构特性指数"

$$\sigma_{ij}=\text{“}g_{ij}(s)\text{分母次数”}-\text{“}g_{ij}(s)\text{分子次数”},\quad i=1,2$$

$$d_1=\min\{\sigma_{11},\sigma_{12}\}-1=\min\{2-0,2-0\}-1=2-1=1$$

$$d_2=\min\{\sigma_{21},\sigma_{22}\}-1=\min\{3-1,1-0\}-1=1-1=0$$

和"结构特性向量"

$$E_1=\lim_{s\to\infty}s^{d_1+1}\begin{bmatrix}g_{11}(s) & g_{12}(s)\end{bmatrix}=\lim_{s\to\infty}s^2\begin{bmatrix}\dfrac{3}{s^2+2} & \dfrac{2}{s^2+s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$$

$$E_2=\lim_{s\to\infty}s^{d_2+1}\begin{bmatrix}g_{21}(s) & g_{22}(s)\end{bmatrix}=\lim_{s\to\infty}s\begin{bmatrix}\dfrac{4s+1}{s^3+2s+1} & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

进而，判断系统可动态解耦性。对此，组成可解耦性判别矩阵

$$E=\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

易知矩阵 E 非奇异。从而，此 $G_0(s)$ 表征的受控系统可用状态反馈和输入变换实现动态解耦。

(ii) 判断 $\dot{x}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}x$ 由状态反馈和输入变换的可动态解耦性

首先，确定系统结构特性指数和结构特性向量。由其基于状态空间描述的定义，并注意到系统的输出和输入维数为 2，可计算定出给定系统的"结构特性指数" $\{d_1,d_2\}$ 和"结构特性向量" $\{E_1,E_2\}$：

由 $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$，得到 $d_1=0$ 和 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{A}^{d_1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}$

由 $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$，得到 $d_2=0$ 和 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{A}^{d_2}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$

进而，判断系统可动态解耦性。对此，组成可解耦性判别矩阵

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{E}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$$

易知矩阵 $\boldsymbol{E}$ 非奇异。从而，此状态空间描述表征的受控系统可用状态反馈和输入变换实现动态解耦。

题 6.14 给定连续时间线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & -3\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试：(i) 判断系统能否可由输入变换阵和状态反馈阵实现动态解耦；(ii) 若能，定出使系统实现积分型解耦的输入变换阵和状态反馈阵 $\{\boldsymbol{L},\boldsymbol{K}\}$。

解 本题属于对线性时不变系统运用动态可解耦条件进行判断和运用动态解耦算法进行综合的基本题。

(i) 判断系统的可动态解耦性。首先，运用基于状态空间描述的定义，计算给定系统的“结构特性指数”$\{d_1,d_2\}$ 和“结构特性向量”$\{\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2\}$：

由 $\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$，得到 $d_1=0$ 和 $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{A}^{d_1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$

由 $\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & -3\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$，

得到 $d_2=1$ 和 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{A}^{d_2}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$

基此，组成可解耦性判别矩阵

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_1\\\boldsymbol{E}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}$$

易知矩阵 $\boldsymbol{E}$ 非奇异。从而，此状态空间描述表征的受控系统可用状态反馈和输入变换实现动态解耦。

（ii）综合实现积分型解耦的输入变换阵和状态反馈阵 $\{L, K\}$ 。对此，先行定出

$$E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1/2 & -1/2\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}c_1'A^{d_1+1}\\c_2'A^{d_2+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1'A\\c_2'A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -6\\-3 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

基此，即可定出使系统实现积分型解耦的输入变换阵和状态反馈阵 $\{L, K\}$ 为

$$L=E^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$K=E^{-1}F=\begin{bmatrix}0 & 1\\1/2 & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4 & -6\\-3 & 4 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 4\\1 & -4 & -5\end{bmatrix}$$

题 6.15 对上题给出的受控系统，试：（i）判断系统能否可由输入变换阵和状态反馈阵实现静态解耦；（ii）若能，定出使系统实现静态解耦的一对输入变换阵和状态反馈阵 $\{L, K\}$ 。

解 本题属于对线性时不变系统运用可静态解耦条件进行判断和运用静态解耦算法进行综合的基本题。

（i）判断给定系统的可静态解耦性

对此，对给定系统就可静态解耦性两个条件进行判断，有

由 $\text{rank}[B\quad AB\quad A^2B]=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & * & * & *\\0 & 1 & 0 & * & * & *\\0 & -1 & 1 & * & * & *\end{bmatrix}=3=n$（$*$元无需计算就可判断），表明系统完全能控即满足“系统可由状态反馈镇定条件”

由 $\text{rank}\begin{bmatrix}A & B\\C & 0\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & -2 & -3 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & -1\\1 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=5=3+2=n+p$，表明系统满足“可静态解耦的秩条件”

从而可知，给定系统能由输入变换和状态反馈实现静态解耦。

（ii）综合实现静态解耦的输入变换阵和状态反馈阵 $\{L, K\}$

首先，按镇定或不失一般性按指定的 3 个稳定期望闭环特征值 $\lambda_1^*=-4$，$\lambda_2^*=-2$ 和 $\lambda_2^*=-3$，运用极点配置算法综合状态反馈阵 K。为此，需要导出给定系统状态空间描述的龙伯格能控规范形。对上述能控性判别阵按行搜索找出三个线性无关列 $\{b_1, b_2, Ab_1\}$，由此组成“预变换阵”并计算其逆，有

$$P^{-1}=[b_1\ Ab_1\ b_2]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

基此，可构造变换阵并定出其逆，有

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}p_2'\\p_2'A\\p_3'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & -2 & -2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\1 & -2 & -2\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

于是，即可导出给定系统状态空间描述的龙伯格能控规范形为

$$\bar{A}=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-2&-2\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-2&-3&0\\-3&0&1\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}=S^{-1}B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-2&-2\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

在此基础上，相应于 $\bar{A}$ 的对角块为“2 维块阵”和“1 维块阵”，将期望闭环特征值分成相应两组，并导出其两个期望闭环特征多项式为

$$\alpha_1^*(s)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)=(s+4)(s+2)=s^2+6s+8,\quad \alpha_2^*(s)=s-\lambda_3^*=s+3$$

据此，先构造定出相对于龙伯格能控规范形的状态反馈阵 $\bar{K}$ 为

$$\bar{K}=\begin{bmatrix}\alpha_{10}^*-\alpha_{10}&\alpha_{11}^*-\alpha_{11}&\beta_{13}-\gamma(\alpha_{20}^*-\alpha_{20})\\0&0&\alpha_{20}^*-\alpha_{20}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-2&6-3&0-0\times[3-(-1)]\\0&0&3-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

而相对于原系统的状态反馈阵 K 为

$$K=\bar{K}S^{-1}=\begin{bmatrix}6&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&-2&-2\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\end{bmatrix}$$

进而，确定输入变换阵 L。对此，先行计算

$$(A-BK)=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-6&-3\\1&4&1\end{bmatrix}$$

$$(A-BK)^{-1}=\begin{bmatrix}-4&0&0\\0&-6&-3\\1&4&1\end{bmatrix}^{-1}=\left(-\frac{1}{24}\right)\begin{bmatrix}6&0&0\\-3&-4&-12\\6&16&24\end{bmatrix}$$

$$C(A-BK)^{-1}B=\left(-\frac{1}{24}\right)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0&0\\-3&-4&-12\\6&16&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2/3\\-1/8&0\end{bmatrix}$$

$$[C(A-BK)^{-1}B]^{-1}=\begin{bmatrix}0&-2/3\\-1/8&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-8\\-3/2&0\end{bmatrix}$$

再之，若取闭环系统的期望稳态增益为

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$$

那么可定出输入变换阵 L 为

$$L=-[C(A-BK)^{-1}B]^{-1}\tilde{D}=-\begin{bmatrix}0&-8\\-3/2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&8\\3&0\end{bmatrix}$$

题 6.18 给定连续时间线性时不变系统：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

试用两种方法确定其全维状态观测器，且指定观测器的特征值为 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-4$ 。

解 本题属于按配置期望特征值要求综合全维状态观测器的基本题。

对给定线性时不变系统，系统维数 $n=2$ ，有

$$\text{rank}\begin{bmatrix}c\\cA\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=2=n$$

按能观测性秩判据知，（ A,c ）完全能观测。从而，可构造任意配置特征值的全维状态观测器。

方法一：归结为配置状态观测器矩阵 $(A-Lc)$ 的特征值 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-4$ 综合 2×1 矩阵 L 。对此，先行定出

待定矩阵 $L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}$

观测器特征多项式 $\alpha_L(s)=\det(sI-A+Lc)=\det\left\{\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right\}$

$$=\det\begin{bmatrix}s+l_1 & -1\\l_2 & s\end{bmatrix}=s^2+l_1s+l_2$$

观测器期望特征多项式 $\alpha^*(s)=(s+2)(s+4)=s^2+6s+8$

据此，得到

$$s^2+6s+8=\alpha^*(s)=\alpha_L(s)=s^2+l_1s+l_2$$

$$L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix},\quad A-Lc=\begin{bmatrix}-l & 1\\-l & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\-8 & 0\end{bmatrix}$$

从而，就可定出

全维状态观测器 $\dot{\hat{x}}=(A-Lc)\hat{x}+Ly+bu=\begin{bmatrix}-6 & 1\\-8 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$

被观测系统状态 x 的重构状态为 $\hat{x}$

方法二：归结为按配置特征值 $\lambda_1=-2$ 和 $\lambda_2=-4$ 综合 $\dot{z}=Fz+Gy+Hu$ 。对此，先行定出

观测器期望特征多项式 $\alpha^*(s)=(s+2)(s+4)=s^2+6s+8=s^2+\alpha_1^*s+\alpha_0^*$

矩阵 A 特征多项式 $\alpha(s)=\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix}s & -1\\0 & s\end{bmatrix}=s^2$

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\-\alpha_0^* & -\alpha_1^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-8 & -6\end{bmatrix},\quad \lambda_i(F)\neq\lambda_j(A),\ \forall i,j=1,2$$

进而

取 $G=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ，使“ $\text{rank}[G\quad FG]=\text{rank}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -6\end{bmatrix}=2=n$ ”即 $\{F,G\}$ 完全能控

再之，组成矩阵方程 $TA-FT=Gc$ ，有

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由此，导出

$$-t_{21}=0\text{，}\ t_{11}-t_{22}=0\text{，}\ 8t_{11}+6t_{21}=1\text{，}\ t_{21}+8t_{12}+6t_{22}=0$$

$$t_{21}=0\text{，}\ t_{11}=\frac{1}{8}\text{，}\ t_{22}=\frac{1}{8}\text{，}\ t_{12}=-\frac{3}{32}$$

得到

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{32} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\text{，}\ \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\text{，}\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{32} \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{32} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

从而，就可定出

全维状态观测器 $\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{G}y+\boldsymbol{H}u=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}y+\begin{bmatrix} -3/32 \\ 1/8 \end{bmatrix}u$

被观测系统状态 $\boldsymbol{x}$ 的重构状态 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}$

题 6.19 给定连续时间线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试用两种方法确定其降维状态观测器，且指定观测器的特征值为 $\lambda_1=-3$。

解 本题属于按配置期望特征值要求综合降维状态观测器的基本题。

对给定线性时不变系统，系统维数 $n=2$，$\gamma=\text{rank}\,\boldsymbol{c}=\text{rank}[0\quad 1]=1$，定出降维状态观测器的维数 $m=n-\gamma=2-1=1$。再由

$$\text{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{A} \end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=2=n$$

按能观测性秩判据知，（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{c}$）完全能观测。从而，可构造任意配置特征值的降维状态观测器。

方法一：归结为对降维被观测系统构造配置特征值 $\lambda_1=-3$ 的全维状态观测器。对此，先行定出

非奇异变换阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{R} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{Q}_1\quad \boldsymbol{Q}_2]$

变换后系数矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$

$$\bar{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

变换后导出的降维被观测系统维数为 1

进而，由降维被观测系统为 1 维，按配置期望特征值 $\lambda_1=-3$ 要求，定出

$$-3=\lambda_1=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\,\bar{A}_{12})=(1-2\bar{L})\text{，}\quad \bar{L}=2$$

基此，得到

$$\bar{A}_{22}-\bar{L}\,\bar{A}_{12}=1-2\times 2=-3$$
$$\bar{A}_{21}-\bar{L}\,\bar{A}_{11}=3-2\times 1=1$$
$$(\bar{A}_{22}-\bar{L}\,\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\,\bar{A}_{11})=(-3\times 2)+1=-5$$
$$\bar{B}_2-\bar{L}\,\bar{B}_1=1-2\times 2=-3$$

从而，就可定出降维状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{z}&=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\,\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\,\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\,\bar{A}_{11})]y+(\bar{B}_2-\bar{L}\,\bar{B}_1)u\\&=-3z-5y-3u\end{aligned}$$

被观测系统状态 $\boldsymbol{x}$ 的重构状态

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Q}_1y+\boldsymbol{Q}_2(z+\bar{L}y)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(z+2y)=\begin{bmatrix}z+2y\\y\end{bmatrix}$$

方法二：归结为按配置特征值 $\lambda_1=-3$ 综合 $\dot{z}=Fz+Gy+Hu$。对此，按配置 $\lambda_1=-3$ 先行定出 $F=-3$，再基于 $\{F,G\}$ 完全能控选取 $G=1$。进而，组成矩阵方程 $\boldsymbol{TA}-F\boldsymbol{T}=G\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{T}=[t_1\quad t_2]$，有

$$[t_1\quad t_2]\begin{bmatrix}1&3\\2&1\end{bmatrix}-(-3)[t_1\quad t_2]=1\times[0\quad 1]=[0\quad 1]$$

由此，导出

$$4t_1+2t_2=0\,,\quad 3t_1+4t_2=1$$
$$\begin{bmatrix}4&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5&-1/5\\-3/10&2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/5\\2/5\end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{T}=[t_1\quad t_2]=[-1/5\quad 2/5],\quad H=\boldsymbol{Tb}=[-1/5\quad 2/5]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\frac{3}{5}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1/5&2/5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2&-5\\1&0\end{bmatrix}$$

从而，就可定出

一维降维状态观测器 $\dot{z}=Fz+Gy+Hu=-3z+y+\dfrac{3}{5}u$

被观测系统状态 $\boldsymbol{x}$ 的重构状态 $\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-5\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2y-5z\\y\end{bmatrix}$

题 6.20 给定连续时间线性时不变系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=[1\quad 1\quad 0]\boldsymbol{x}$$

试：(i) 确定特征值为 −3，−3 和 −4 的一个三维状态观测器；(ii) 确定特征值为 −3 和 −4 的一个二维状态观测器。

解 本题属于按配置期望特征值综合全维状态观测器和降维状态观测器的基本题。

(i) 构造“特征值为 −3，−3 和 −4 ”的三维状态观测器。对给定被观测系统，系统维数为 3，则由

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{cA}\\\boldsymbol{cA}^2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-3&-1\\0&5&0\end{bmatrix}=3=n$$

并据能观测性秩判据，可知$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c})$完全能观测。从而，可构造“特征值为−3，−3和−4”的全维状态观测器。进而，基于状态反馈极点配置算法，导出

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-2&-1&0\\-2&1&-1\end{bmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ (\bar{\boldsymbol{A}},\bar{\boldsymbol{b}})\text{完全能控}$$

$$\alpha(s)=\det(s\boldsymbol{I}-\bar{\boldsymbol{A}})=\det\begin{bmatrix}s+1&0&-1\\2&s+1&0\\2&-1&s+1\end{bmatrix}=s^3+3s^2+5s+5$$

$$=s^3+\alpha_2s^2+\alpha_1s+\alpha_0$$

$$\alpha^*(s)=(s+3)(s+3)(s+4)=s^3+10s^2+33s+36=s^3+\alpha_2^*s^2+\alpha_1^*s+\alpha_0^*$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{A}}^2\bar{\boldsymbol{b}}&\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{b}}&\bar{\boldsymbol{b}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\alpha_2&1&0\\\alpha_1&\alpha_2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\5&-3&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\5&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&0&1\\-3&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1&1&-2\\3&-3&1\\1&4&2\end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{k}}=[\alpha_0^*-\alpha_0\quad \alpha_1^*-\alpha_1\quad \alpha_2^*-\alpha_2]=[36-5\quad 33-5\quad 10-3]=[31\quad 28\quad 7]$$

$$\boldsymbol{k}=\tilde{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}^{-1}=[31\quad 28\quad 7]\begin{bmatrix}-1&1&-2\\3&-3&1\\1&4&2\end{bmatrix}\times\frac{1}{5}=[12\quad -5\quad -4]$$

基此，得到

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}12\\-5\\-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\\-5\\-4\end{bmatrix}[1\quad 1\quad 0]=\begin{bmatrix}-13&-14&-2\\5&4&1\\5&4&-1\end{bmatrix}$$

从而，就可定出三维状态观测器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{c})\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{L}y+\boldsymbol{b}u$$

$$=\begin{bmatrix}-13&-14&-2\\5&4&1\\5&4&-1\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}12\\-5\\-4\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$$

被观测系统状态$\boldsymbol{x}$的重构状态为$\hat{\boldsymbol{x}}$。

（ii）构造“特征值为−3和−4”的二维状态观测器。对给定被观测系统，系统维数为 3，$\gamma=\operatorname{rank}\boldsymbol{c}=\operatorname{rank}[1\quad 1\quad 0]=1$，可知能构造维数“$m=n-\gamma=3-1=2$”的降维状态观测器。而由前知，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{c})$完全能观测，可配置降维观测器特征值为−3和−4。进而，导出

$$\text{非奇异变换阵}\quad \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\text{变换后系数矩阵}\quad \tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\bar{b}=Pb=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ \hdashline 0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{B}_1\\ \bar{B}_2\end{bmatrix}$$

变换后导出的降维被观测系统维数为 2

再按"配置$(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})$特征值为$-3$和$-4$"确定矩阵$\bar{L}=[l_1 \quad l_2]^{\mathrm{T}}$。为此，基于状态反馈极点配置算法，导出

$$\tilde{A}=\bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix},\quad \tilde{B}=\bar{A}_{12}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix},\quad (\tilde{A},\tilde{B})\text{完全能控}$$

$$\alpha(s)=\det(sI-\tilde{A})=\det\begin{bmatrix}s+1&1\\-1&s+1\end{bmatrix}=s^2+2s+2=s^2+\alpha_1 s+\alpha_0$$

$$\alpha^*(s)=(s+3)(s+4)=s^2+7s+12=s^2+\alpha_1^* s+\alpha_0^*$$

$$T=[\tilde{A}\tilde{B}\quad \tilde{B}]\begin{bmatrix}1&0\\\alpha_1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&-1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-2\\-3&1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{k}=[\alpha_0^*-\alpha_0\quad \alpha_1^*-\alpha_1]=[12-2\quad 7-2]=[10\quad 5]$$

$$k=\tilde{k}T^{-1}=[10\quad 5]\begin{bmatrix}1&-2\\-3&1\end{bmatrix}\times\frac{1}{5}=[-1\quad -3]$$

基此，得到

$$\bar{L}=k^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}[-2\quad -1]=\begin{bmatrix}-3&0\\-7&-4\end{bmatrix}$$

$$(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}=\begin{bmatrix}-3&0\\-7&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\19\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}[-1]=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

$$[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11})]=\begin{bmatrix}3\\19\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\17\end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}[2]=\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}$$

从而，就可定出二维状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{z}&=(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})z+[(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L}+(\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11})]y\\&\quad+(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1)u=\begin{bmatrix}-3&0\\-7&-4\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}2\\17\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}u\end{aligned}$$

系统状态 x 的重构状态为

$$\hat{x}=P^{-1}\begin{bmatrix}y\\z+\bar{L}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z_1-y\\z_2-3y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}z$$