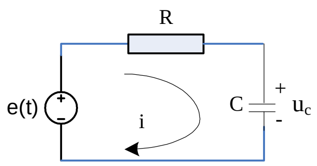
第 2 章 线性系统的状态空间描述

一、状态空间描述的建立

1. (由系统机理建立状态空间描述) 如图电路，写出系统的状态方程和输出方程。选择状态变量 $x=u_c$，输入变量 $u=e(t)$，输出变量 $y=u_c$。



解：如图电路，写出系统的状态方程和输出方程。选择状态变量 $x=u_c$，输入变量 $u=e(t)$，输出变量 $y=u_c$。

解：$e=u_c+R\cdot C\dfrac{du_c}{dt}$ ，$\dot{x}=-\dfrac{1}{RC}x+\dfrac{1}{RC}u$ ，$y=x$

2. (由输入输出描述建立状态空间描述)系统的传递函数如下，求系统的状态空间描述

$$G(s)=\frac{s^2+s+5}{s^3+6s^2+12s+4}$$

解：可控标准形， $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -4 & -12 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$；$y=\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\end{bmatrix}x$；

或可观标准形， $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -12\\ 0 & 1 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}u$；$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$

3. 例 2.3 给定单输入单输出线性定常系统的输入输出描述为

$$G(s)=\frac{4s^3+160s+720}{s^3+16s^2+194s+640}$$

试求系统的状态空间表达式。

解：此例中 $m=n=3$。由长除法得

$$G(s)=\frac{4s^3+160s+720}{s^3+16s^2+194s+640}=4+\frac{-64s^2-616s-1840}{s^3+16s^2+194s+640}$$

则系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -640 & -194 & -16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}-1840 & -616 & -64\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+[4]u$$

4．例 2.2：已知二阶系统的微分方程

$$\ddot{y}+2xw\,\dot{y}+w^2y=T\dot{u}+u$$

试求系统的状态空间表达式。

解：可控规范形实现为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{c1}\\ \dot{x}_{c2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -w^2 & -2xw\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u;\quad y=\begin{bmatrix}1 & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{c1}\\ x_{c2}\end{bmatrix}$$

则可观测规范形实现为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{o1}\\ \dot{x}_{o2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -w^2\\ 1 & -2xw\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ T\end{bmatrix}u;\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{o1}\\ x_{o2}\end{bmatrix}$$

二、传递函数矩阵的计算

1．系统的状态空间描述如下，求系统的传递函数矩阵 *G*(*s*)，

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & -5\end{bmatrix}\mathrm{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{u}\,;\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\mathrm{x}$$

解：$G(s)=C(s\mathrm{I}-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & -6\\ -2 & s+5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{s^2+6s-7}\begin{bmatrix}s+1\\ 12\end{bmatrix}$。

2． 系统的状态空间描述如下，求系统的输出变量和输入变量之间的微分方程。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ 2 & -5\end{bmatrix}\mathrm{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{u},\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\mathrm{x}$$

解：$(s\mathrm{I}-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & -6\\ -2 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{(s+7)(s-1)}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ 2 & s+1\end{bmatrix}$

$$g(s)=c(s\mathrm{I}-A)^{-1}b=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{(s+7)(s-1)}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ 2 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{s+1}{s^2+6s-7}$$

EMBED Equation.3 $g(s)=\dfrac{y(s)}{u(s)}=\dfrac{s+1}{s^2+6s-7}\rightarrow\ddot{y}+6\dot{y}-7y=\dot{u}+u$

三、化对角线规范形

1．例 2.9 已知线性定常系统的状态方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -6 & -11 & 6\\ -6 & -11 & 5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}u$$

求系统的对角线规范形。

解：①求系统特征值：系统的特征方程 $\det(sI-A)=0$，即

$$\begin{vmatrix}s & -1 & 1\\ 6 & s+11 & -6\\ 6 & 11 & s-5\end{vmatrix}=s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)=0$$

所以系统的 3 个特征值为：$l_1=-1,\ l_2=-2,\ l_3=-3$，特征值两两相异，可以化为对角线规范形。

②求□统特征向量：由 $l_i u_i=Au_i$ 确定特征向量，与特征值 l_1 相对应的特征向量 u_1 由下式确定

$$l_1u_1=Au_1\Rightarrow(l_1I-A)u_1=0\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 6 & 10 & -6\\ 6 & 11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\\ u_{31}\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}-u_{11}-u_{21}+u_{31}=0\\ 6u_{11}+10u_{21}-6u_{31}=0\\ 6u_{11}+11u_{21}-6u_{31}=0\end{cases}$$

上式有无穷多解，设 $u_{21}=0$，从中可得 $p_{11}=p_{31}$。令 $p_{11}=p_{31}=1$，得 ，

同理可算出与特征根 l_2、 l_3 相对应的特征向量 u_2、u_3 为：$u_2=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$， $u_3=\begin{bmatrix}1\\ 6\\ 9\end{bmatrix}$。

③构造变换矩阵 P 并求逆：

$$P=\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 6\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & \frac{5}{2} & -2\\ -3 & -4 & 3\\ 1 & \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

④计算变换后系数矩阵

$$\bar{b}=P^{-1}b=\begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

⑤定出对角线规范形状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}u$$

2．例 2.10 将下列系统状态方程化为对角线规范形

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

解：（1）计算系统特征值

$$\det(sI-A)=\begin{vmatrix}s-1&0&1\\0&s-1&0\\0&0&s-2\end{vmatrix}=(s-1)^2(s-2)=0$$

则系统特征值为 $l_1=1$（ l_1的代数重数 $s_1=2$）， $l_2=2$（ l_2 的代数重数 $s_2=1$）。

（2）有重特征值，判断是否可以化为对角规范形

对于 2 重特征值 $l_1=1$，它所对应的特征矩阵

$u_{11}=1,u_{22}=1$，得到 2 个属于二重特征值 $l_1=1$的特征向量$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$。

对于单特征值 $l_2=2$，由 $Au_i=l_iu_i$ 有特征向量$u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$。

（4）构造变换矩阵、求逆并计算系数矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\\ \dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}-7&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\4&0\\7&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

解：由于对角规范型中 $\bar{B}$ 包含元素全为零的行，故系统不完全能控。

3.（约当规范形判据的应用）判断下面系统的能控性和能观性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\\1&0\end{bmatrix}u\quad y=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}x$$

解：能控。不能观。

4．例 4.15（约当规范形判据的应用）：判断下述系统的能控性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}u$$

解： $\hat{B}_{s_1}=\hat{\boldsymbol{b}}_{r11}=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}$不是全为零的行，$\hat{B}_{s_2}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{b}}_{r21}\\ \hat{\boldsymbol{b}}_{r22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，行线性相关。

所以，系统不完全能控。

5．例 4.12：确定使下列系统状态完全能控的待定参数的 *a*，*b*，*c* 取值范围

（1） Γ D Equation.3 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -a & -b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ c\end{bmatrix}u$ **（2）**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}20 & -1 & 0\\ 4 & 16 & 0\\ 12 & -6 & 18\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}u$$

解：（叵）$n=3$，能控性判别阵为

$$S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -b\\ 1 & -b & b^2-a\\ c & 0 & 0\end{bmatrix}$$

系统完全能控必有$\det S\neq 0$成立（此时$rankS=3$），即

$$\det S=\begin{vmatrix}0 & 1 & -b\\ 1 & -b & b^2-a\\ c & 0 & 0\end{vmatrix}=-ac\neq 0$$

系统完全可控时参数取值范围：$ac\neq 0$，b 任意。

（2）若应用秩判据，通过计算$\det S\neq 0$来求，理论上可行，但此题很难从$\det S\neq 0$中解出 a,b,c 的取值范围，计算很困难，故考虑使用 PBH 秩判据。根据状态方程可写出：

令$\det(sI-A)=0$求特征值得

$$\det(sI-A)=\begin{vmatrix} s-20 & 1 & 0 \\ -4 & s-16 & 0 \\ -12 & 6 & s-18 \end{vmatrix}=(s-18)\left[(s-20)(s-16)+4\right]=(s-18)^3=0$$

故特征值为：　　　　　　　　。

当　　　　　　　　时，有

$$rank\left[sI-A \quad B\right]=rank\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & a \\ -4 & 2 & 0 & b \\ -12 & 6 & 0 & c \end{bmatrix}<3$$

因为第 1 列与第 2 列线性相关，第 3 列为 0，故不管 a,b,c 取何值，$rank\left[sI-A \quad B\right]$ 最大为 2，所以：a,b,c 为任何值都不能控。

6．已知系统状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -5 \end{bmatrix}x \qquad y=\begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix}x$$

且状态完全能观，求 a,b,c 。

解：　$rankQ_o=rank\begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & c \\ a & b-5c \end{bmatrix}=2$， $\det Q_o=b-5c-ac\neq 0$

9．例 4.25：已知系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

设系统状态完全可控且完全可观，试求 a 的范围。

解：这种题型的解题思路：可先写出系统的能控（或能观测）规范形实现，再通过判据确定使系统完全能观测（或能控）的参数范围即可。

写出可控标准型实现，然后检查可观性：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u;$$

$$y=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \end{bmatrix}x$$

能控规范形系统完全可控，故只检查能观测性即可。能观测性判别阵：

$$V=\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -8 & -14 & a-7 \end{pmatrix}$$

系统完全可观，必有 $rankQ_o = n = 3$，即必有 $\det Q_o \neq 0$，即

$$\det Q_o = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ -8 & -14 & a-7 \end{vmatrix} = a^3 - 7a^2 + 14a - 8 \neq 0 \Rightarrow (a-1)(a-2)(a-4) \neq 0$$

所以 $a_1 \neq 1$ 、 $a_2 \neq 2$ 和 $a_3 \neq 4$ 时系统完全能控且完全能观测。

二、能控性指数和能观测性指数

1. **例 4.17** 给定一个连续时间线性时不变系统为

EMBED Equation.DSMT4

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u , \quad n = 3, \quad rankB = 2$$

通过计算得到

$$rankQ_c = rank\begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & * & * & * \\ 0 & 1 & -1 & * & * & * \\ 1 & 1 & 1 & * & * & * \end{bmatrix} = 3 = n$$

这表明，系统完全能控，且能控性指数集和能控性指数为

$$\{m_1 = 2, m_2 = 1\} \quad 和 \quad m = \max\{m_1 = 2, m_2 = 1\} = 2$$

三、化能控规范形和能观测规范形

1．求下面系统的能观测规范形 (要求写出变换矩阵)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解：$\det(sI-A) = s^3+6s^2+11s+6$

$rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -10 & 5 \\ 30 & 49 & -29 \end{bmatrix} = 3$，系统能观测，能化成能观规范形。

引入变换矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 49 & -29 \\ -6 & -10 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则能观测规范形为：

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, B_o = Qb = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, C_o = CQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

四、结构分解：

例 4.31（胡寿松 $\mathbf{P_{497}}$ 例 9-21）： 已知系统$(A,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

试将系统作能控性规范分解。

解：1）能控性判别矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{rank}Q_c = 2 < 3; \qquad \text{故系统不完全能控。}$$

2）从能控性矩阵中选出两个线性无关的列向量$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$和$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$，附加任意列向量$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$，构成非奇异变换矩阵$P^{-1}$：

$$P^{-1} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

则：

$$P=\left[\begin{array}{ccc}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 1 & 0\end{array}\right],\quad \bar{A}=PAP^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right],\quad \bar{\boldsymbol{b}}=P\boldsymbol{b}=\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hline 0\end{array}\right],\quad \bar{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{c}P^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

即可得到系统按能控性分解的规范表达式为：

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\bar{x}}_c\\ \hline \dot{\bar{x}}_{\bar{c}}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc:c}0 & -4 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\bar{x}_c\\ \hline \bar{x}_{\bar{c}}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}1\\ 0\\ \hline 0\end{array}\right]\boldsymbol{u},\qquad \bar{y}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 2 & -1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\bar{x}_c\\ \hline \bar{x}_{\bar{c}}\end{array}\right]$$

故能控子系统动态方程为：

$$\dot{\bar{x}}_c=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 4\end{bmatrix}\bar{x}_c+\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}\bar{x}_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y_c=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\bar{x}_c$$

不能控子系统动态方程为：

五、最小实现

1．例 4.35（补充）已知系统传递函数为

$$G(s)=\frac{2s^3+20s^2+55s+39}{s^3+10s^2+27s+18}$$

试求出系统的一个最小实现。

解：$G(s)=\dfrac{2s^3+20s^2+55s+39}{s^3+10s^2+27s+18}=2+\dfrac{s+3}{s^3+10s^2+27s+18}$

$$=2+\frac{s+3}{(s+1)(s+3)(s+6)}=2+\frac{1}{s^2+7s+6}$$

则最小实现为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x+2u$$

第 5 章 系统运动的稳定性

定常系统稳定性判断：

1．例 1（补充，**结论 5.3，5.6 的应用**）已知系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

判断系统的 BIBO 稳定性和渐近稳定性。

解：（1）传递函数矩阵

$$G(s)=c(sI-A)^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

极点 $s=-1$ 具有负实部，所以系统是 BIBO 稳定的。

（2）由系统特征方程

$$a(s)=\det(s\boldsymbol{I}-A)=\det\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}=(s-1)(s+1)=0$$

求得系统矩阵 A 的特征值为 $l_1=-1, l_2=1$，因其具有一个正的实特征值，不满足系统矩阵 A 的特征值均具有负实部的条件，所以不是渐近稳定的。

2．例 5.5（补充，结论 5.22 的应用）：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解：系统矩阵 A 为奇异矩阵，系统存在无穷多个平衡状态。系统的平衡状态为 $\boldsymbol{x}_e=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ 0\end{bmatrix}$，其中 x_1 和 x_2 为任意实数，即状态空间中 x_1-x_2 平面上的每一个点均为平衡状态，解系统的特征方程

$$\det(sI-A)=s^2(s+1)=0$$

得特征值分别为：$l_1=-1$，$l_2=l_3=0$。又：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2(s+1)}\begin{bmatrix}s(s+1) & 0 & 0\\ 0 & s(s+1) & 0\\ 0 & 0 & s^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s(s+1)}\begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}$$

显然，最小多项式为 $f(s)=s(s+1)$。系统所有特征值均具有非正实部，且具有零实部的特征值是最小多项式的单根，因此系统的每一个平衡状态都是李亚普诺夫意义下稳定的。

3．例 5.6（补充，结论 5.23 的应用）：判断下述线性定常系统的稳定性

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

解：系统矩阵 A 为非奇异，显然原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是系统的唯一平衡状态，解系统的特征方程

$$\det(sI-A)=s^3+6s^2+11s+6=(s+1)(s+2)(s+3)=0$$

得特征值分别为：$l_1=-1$，$l_2=-2$，$l_3=-3$。显然，系统的所有特征值都具有负实部，所以系统的唯一平衡状态 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 是渐近稳定的。

4．例 5.7（结论 5.24）设系统为

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=2x_1-x_2$$

试用李亚普诺夫方程判断系统的渐近稳定性。

解：系统状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$，则，□EMBED Equation.DSMT4

$\mathbf{Q}\det A=-2\neq 0$，即 A 为非奇异矩阵，原点 x=0 是唯一平衡状态。
令李亚普诺夫方程为

$$A^TP+PA=-Q=-\boldsymbol{I}$$

$$P=P^T=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

得到：

得到 3 个线性方程

$$\begin{cases}4p_{12}=-1\\ p_{11}-p_{12}+2p_{22}=0\\ 2p_{12}-2p_{22}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_{11}=-0.75\\ p_{12}=-0.25\\ p_{22}=\ \ 0.25\end{cases};$$

$$P=\begin{bmatrix}-0.75 & -0.25\\ -0.25 & 0.25\end{bmatrix},$$

由于 $p_{11}=-0.75<0$， $\det P=-0.25<0$，故 P 负定，则系统不是渐近稳定的。

5．求系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -5 & a\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$ **的原点平衡状态为渐近稳定时参数 a 的取值范围。**

解： $\det(sI-A)=s^3-as^2+5s+3$,

劳斯表计算

ò刍

□

第 6 章 线性反馈系统的时间域综合

一、状态反馈对系统能控性、能观测性的影响：

1．例 6.1(补充题) ：已知系统的状态空间描述

（1）求出系统的传递函数；

（2）引入状态变量的线性反馈，反馈增益矩阵为 $K=\begin{bmatrix}4 & 8 & 2\end{bmatrix}$，反馈后闭环系统的能控性和能观性是否改变，请说明理由。

解: 根据传递函数分子、分母多项式的系数与能控规范型系数矩阵之间的对应关系，可直接写出

$$=\frac{s+1}{s^2(s+3)}$$

注：也可由公式计算 $G(s)=c(sI-A)^{-1}b=\dfrac{s+1}{s^3+3s^2}$

(2)定理：系统实现□**EMBED Equation.DSMT4** □ 为最小实现，即为能控且能观测的充要条件是，传递函数 G(s)的分子分母间没有零极点的对消，即□**EMBED Equation.DSMT4** □ 与□**EMBED Equation.DSMT4** □ 互质。本题求出的 G(s)的分子分母间没有零极点的对消，是互质的，所以原系统是完全能控且完全能

观测的。

引入上述状态反馈后的闭环反馈系统是能控不能观测的，即能控性不变，能观性发生了改变。

状态反馈的引入不改变系统的能控性，而能观测性是否发生改变，要视具体情况而定，讨论如下：

引入状态反馈后，闭环反馈系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=(A-bK)x+bv=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-4&-8&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=cx=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x$$

其传递函数矩阵为：$G_k(s)=\dfrac{s+1}{s^3+5s^2+8s+4}=\dfrac{s+1}{(s+2)^2(s+1)}=\dfrac{1}{(s+2)^2}$

闭环反馈系统出现零极点对消，被对消掉的极点就不能观测了，所以引入状态反馈后的闭环反馈系统是能控不能观测的。

二、状态反馈镇定问题：

1．例 6.2(补充题) ：已知系统的状态空间描述

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}u$$

能否通过状态反馈镇定？请说明理由。

解：由于此对角规范型中 c 包含元素全为零的行，故系统不完全能控。不能控的特征值为-1，满足结论 6.16: 当且仅当线性定常系统的不能控部分渐近稳定时，系统是状态反馈可镇定的。故该系统可以通过状态反馈镇定。

2．例 6.3(补充题) ：已知系统的状态空间描述

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-3\\0&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

判断系统能控性，若不完全能控，请进行结构分解，并讨论能否用状态反馈使闭环系统稳定。

解：1. 因为 $rankQ_c=rank\begin{bmatrix}b&Ab&A^2b\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-3\\0&1&-2\end{bmatrix}=2<n=3$，故系统不完全能控。

. 结构分解：构造变换矩阵 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，计算得 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$

计算：$\bar{A}=PAP^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}$　　$\bar{B}=PB=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$　　$\bar{C}=CP^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}$

所以系统按能控性结构分解后的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\\\dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

可见，不能控子系统对应的特征值为 $l_3=-1$，即不能控子系统是渐近稳定的，而能控子系统可通过状态反馈实现闭环极点的任意配置，故用状态反馈可以使闭环Y统S定。

三、极点配置与状态观测器设计

1.（极点配置问题）：已知系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&5&-2\\6&11&9\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}u\,,\quad y=[\,2\ \ 3\ \ 1\,]x\,;$$

求状态反馈矩鸵 K=ε酫 k_2 k_3]，使闭环系统的特征值为-2，-4，-5。

求状态反馈矩阵 K=[k_1 k_2 k_3]，使闭环系统的特征值为-2，-4，-5 謸

解：期望特征多项式为 $\bar{a}(s)=s^3+11s^2+38s+40$；

闭环系统特征多项式为：

$$a_K(s)=s^3+(-k_2+k_3-14)s^2+(-k_1+7k_2-16k_3+67)s+7k_1-6k_3+12\,;$$

比较特征多项式系数得到 $K=[\,-9.04\quad-40.22\quad-15.22\,]$。

2.（极点配置问题）： 例 6.8 已知系统的传递函数为

$$g(s)=\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s-2)(s+4)}$$

试问：是否存在状态反馈矩阵 k，使闭环系统的传递函数矩阵为

$$g_k(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+4)}$$

如果存在，求出此状态反馈矩阵 k。

解： **1.** 系统的传递函数化简为：

$$g(s)=\frac{s^2+5s+6}{s^3+3s^2-6s-8}$$

由上式得到系统的能控规范形实现为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 8 & 6 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}6 & 5 & 1\end{bmatrix}x$$

系统完全能控，可以通过状态反馈实现极点的任意配置。根据结论 6.11 状态反馈不改变系统传递函数的零点，所以期望的闭环系统的传递函数为：

$$g_k(s)=\frac{(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+2)}$$

因此，闭环系统期望的特征多项式为：

$$a^*(s)=(s+2)(s+4)(s+2)=s^3+8s^2+20s+16 \qquad (1)$$

引入状态反馈 $k=[k_1 \quad k_2 \quad k_3]$ 后，得到的闭环系统实际的特征多项式为：

$$a(s)=\det[sI-A+bk]=s^3+(3+k_3)s^2+(-6+k_2)s+(-8+k_1) \qquad (2)$$

比较(1)和(2)，可得

$$\begin{cases}-8+k_1=16\\ -6+k_2=20\\ 3+k_3=8\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}k_1=24\\ k_2=26\\ k_3=5\end{cases}$$

所以，所求的状态反馈增益矩阵 $k=\begin{bmatrix}24 & 26 & 6\end{bmatrix}$。

3．（状态观测器的设计）：（10 分）已知系统的状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \quad y=[\,1 \quad 0\,]x\,;$$

设计全维状态观测器的反馈矩阵 $H=[\,h_1 \quad h_2\,]^{\mathrm{T}}$，使观测器的极点为-2，-4。

解：期望的观测器特征多项式为 $\bar{a}(s)=s^2+6s+8$；

观测器特征多项式为 $a_H(s)=\det(SI-A+HC)=s^2+(h_1+3)s+3h_1+h_2+2$；

比较特征多项式系数得到 $H=[\,3 \quad -3\,]^T$。观测器方程为

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}y\text{。}$$

4.（**引入状态观测器的状态反馈极点配置，即分离性原理的应用）：**设系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

1）设计全维状态观测器，将观测器极点配置在{ EMBED Equation.DSMT 耴 舁
約；

2）用估计出的状态进行状态反馈，设计一状态反馈增益阵 K，将系统闭环极点配置在$\{-5+5j,\ \ -5-5j\}$处；

3）画出整个闭环系统的结构框图.