中级微观经济学

Powered By SimpleNote, akkiri (2023).

VectorPikachu[1]

[1]Peking University

最初写作于：**2025** 年 **01** 月 **29** 日

最后更新于：**2025** 年 **02** 月 **01** 日

Contents

章节 1. 市场

我们将主要使用 Varian (2014) 作为教材.

经济学的研究 $\rightarrow$ **建立模型**. e.g. 美国中西部一个中等大小的大学城的住房市场. 邻近大学的住房在内城区, 其余的在外城区, 外城区的住房供应量很大, 价格固定在某个水平上, 我们只考察内城区住房价格的决定因素和谁将住在内城区. 我们说外城区的住房价格是**外生变量**, 内城区的住房价格是**内生变量**.

1.1. 最优化与均衡

最优化原理 人们总是选择他们能支付得起的最佳消费方式.
均衡原理 价格会自行调整, 直到人们的需求数量与供给数量相等.
保留价格 某人愿意支付的最高价格.
需求曲线 一条把需求和价格联系起来的曲线.

如果一个人持有保留价格p, 意味着他支付价格p和住在外城区都是可以的, 因此按照价格p^*出租的住房数量正好是所持保留价格大于或等于p^*的人数, 画成下图 Figure 1.1:

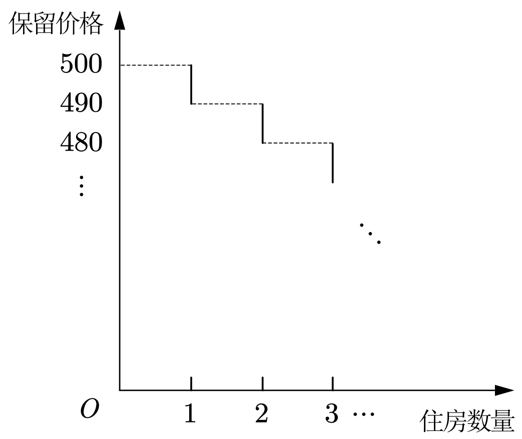


Figure 1.1: 住房需求曲线

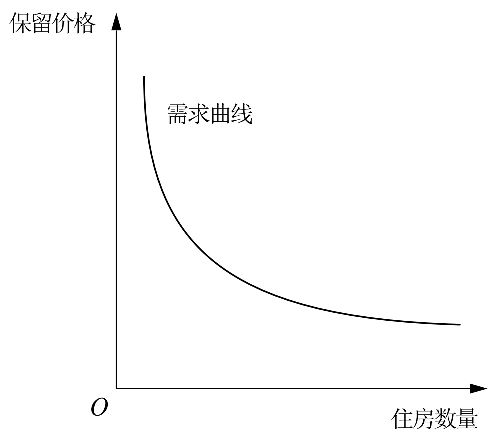


Figure 1.2: 住房需求曲线

由于存在大批需求者, 价格间的跳跃很小, 需求曲线的倾斜通常是平缓的, 如 Figure 1.2.

1.2. 供给曲线

在**短期**内, 住房的数量多少是固定不变的. 当然, 如果是考虑**长期**的情况, 住房的数量必然随着建设或者某种别的因素增加或者减少.

1.3. 市场均衡

我们用p^*表示住房需求量等于住房供给量时的价格. 这就是住房的均衡价格. 在这个价格水平上, 愿意至少支付p^*的消费者可以找到房子, 而每个房东也可以按照这个价格出租房子, 双方都没

有理由改变他们的行为. 这就是我们所说的均衡, 即人们的行为不会有任何的变化. 正如下图 Figure 1.3.

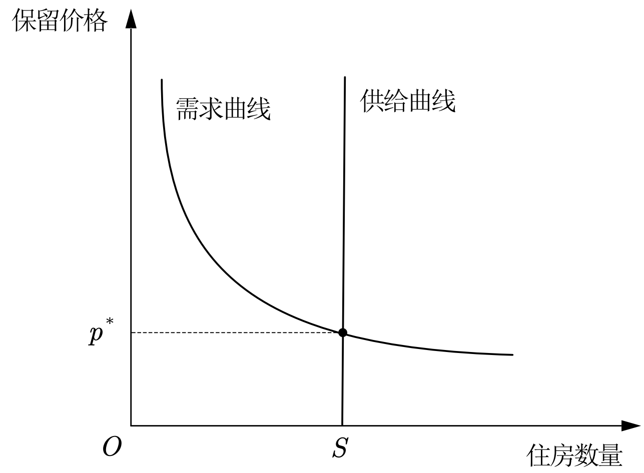


Figure 1.3: 住房市场的均衡

1.4. 比较静态分析

比较静态分析 当市场各个方面发生变化的时候, 分析均衡状态的变动. p.s. 只关心两个"静态"均衡之间的比较, 而不关心市场是如何从一个均衡到另一个均衡的.

现在我们先假设住房供给增加了:

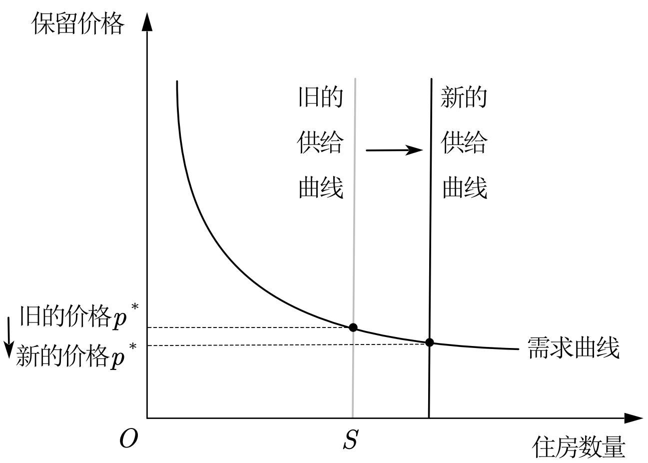


Figure 1.4: 住房供给增加

从 Figure 1.4 中我们就能清楚地看到均衡价格将会下降.

现在, 假设有一个房地产开发商决定把一些公寓改造成个人所有的公寓, 那么其余住房的价格会有怎样的变动呢?

假设私人公寓的购买者已经居住在内城区, 也就是那些愿意支付高于p^*价格的人, 那么假设有 10 个人决定购买住房, 那么住房的需求曲线就会向左移动 10 个单位, 同时供给曲线也会向左移动 10 个单位, 结果最后均衡价格就会保持不变.

现在, 假设对住房征税, 每个房东必须为他的房子支付一定比例的税. 那么当前的住房供给不变, 均衡价格p^*已经是房东所能索取的最高价格了, 房东无法抬高住房价格, 所以税收必须由房东来支付.

1.5. 配置住房的其他方法

垄断 市场被某一产品的单一卖主所支配的情况.

价格歧视垄断者 只有一个占支配地位的房东, 他拥有所有的住房. 他可以按不同的价格出租房子.
p.s. 他会按照保留价格从高到低出售给消费者, 使得最后一个人支付p^*, 从0到p^*和需求曲线围起来的面积就是房东的收益.

一般垄断者 他被迫按照同样的价格出租每一套房子. 设垄断者定价为p, 此时的需求为$D(p)$, 那么收益就是$pD(p)$, 他应该在这个式子取最大值时定价.

房租管制 制定了房租的最高值为$p_{\max}$.

1.6. 帕累托效率

帕累托改进 如果可以找到一种配置方法, 在**其他人的境况没有变坏**的情况下, 的确能够**使得一些人的境况变得更好**一点, 那么就存在帕累托改进.

帕累托低效率 如果一种配置方法存在帕累托改进, 那么它就被称为帕累托低效率的.

帕累托有效率 如果一种配置方法不存在任何的帕累托改进, 那么它就被称为帕累托有效率的.

1.7. 配置住房的不同方法的比较

任何一个拥有内城区住房的人一定要比拥有一套外城区住房的人持有一个更高的保留价格. 否则, 他俩可以交易使得双方的境况都变好, 违反了帕累托有效率配置.

竞争市场, 价格歧视垄断者 $\to$ 帕累托有效率的.

一般垄断者, 房租管制 $\to$ 帕累托低效率的.

1.8. 长期均衡

住房的供给不再固定不变.

章节 2. 预算约束

2.1. 预算约束

消费束 $X \equiv (x_1, x_2)$表示消费者选择商品x_1的消费量和x_2的消费量. p.s. 两种商品的概括性很强, 因为我们可以把另外的一种商品看成是消费者想要消费的其他一切商品的总和, 代表了一种复合商品.

预算约束 假设我们知道了两种商品的价格(p_1, p_2)以及消费者要花的货币总数m, 那么预算约束就可以被写为

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq m. \tag{2.1}$$

预算集 我们把当价格为(p_1, p_2)和收入为m时能够负担的消费束称为消费者的预算集.

预算线 预算线指的是所需费用正好等于m的一系列消费束, 即

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m. \tag{2.2}$$

下面是预算约束的图示 Figure 2.1:

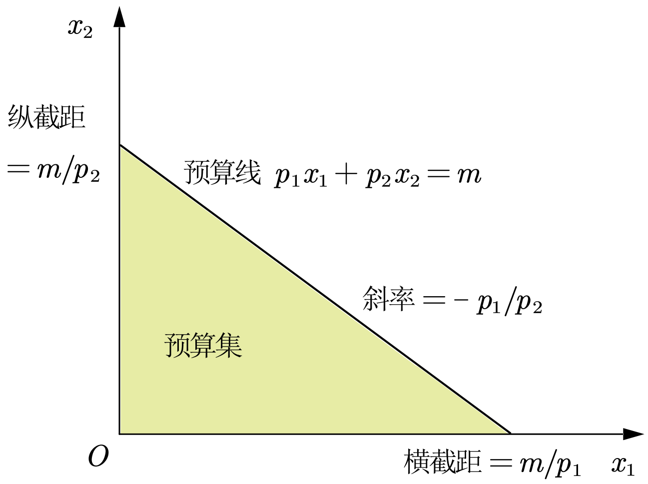


Figure 2.1: 预算约束

2.2. 预算线的变动

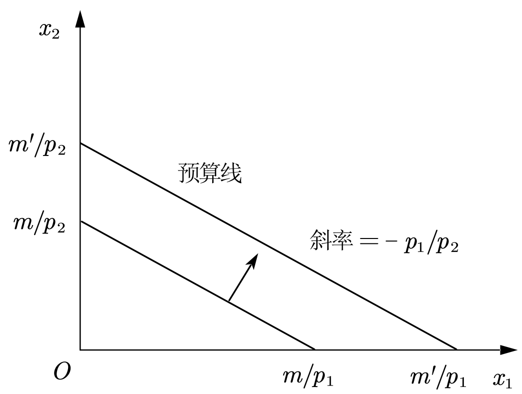


Figure 2.2: 增加收入

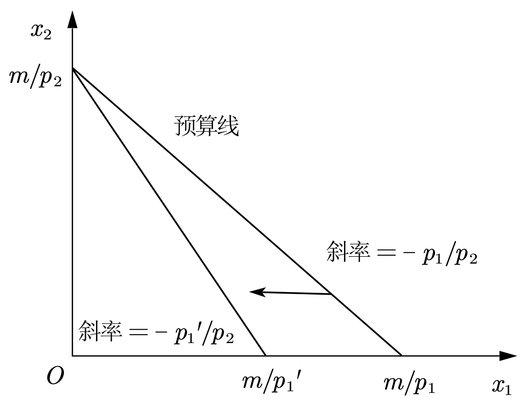


Figure 2.3: 增加价格

- 增加收入: 当收入增加时, 预算线向外移动, 但是斜率不变, 如 Figure 2.2.
- 增加价格 1: 预算线向内移动, 斜率绝对值变大, 斜率变小, 如 Figure 2.3.

2.3. 计价物

我们可以把其中一个商品或者收入看成 1, 如果把一个商品价格看成 1, 那么他的价格就被称为计价物(numeraire)价格.

2.4. 税收、补贴和配给

从量税 Quantity tax, 也称消费税, 消费者购买每单位商品都需要向政府缴纳一定的税收. 对每 1 单位商品征收t美元从量税, 会导致商品价格从p变为$p+t$.

从价税 Value tax, Ad valorem tax, 销售税, 对商品的价格征税, 通常用百分比表示. 对商品征收τ的从价税, 会导致商品价格从p变为$(1+\tau)p$.

所得税 Income tax, 对收入征税. 导致收入变少.

从量补贴 根据消费者购买商品的数量给予补贴.

从价补贴 根据商品的价格给予补贴.

总额税 不管消费者的行为如何, 政府总要取走一笔固定金额的货币.

总额补贴 不管消费者的行为如何, 政府总要给予一笔固定金额的货币.

配给供应 Rationing, 限制消费者购买商品的数量.

章节 3. 偏好

3.1. 消费者偏好

严格偏好 $(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$表示对于消费者来说(x_1,x_2)严格偏好于(y_1,y_2). 偏好这个概念是建立在消费者行为基础上的.

无差异 $(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)$表示两个消费束使得消费者获得的满足程度完全一样.

弱偏好 消费者在两个消费束之间有偏好或者无差异, 表示为$(x_1,x_2)\succeq(y_1,y_2)$.

3.2. 关于偏好的几种假设

关于消费者偏好的三条公理:

1. 完备性公理: 假定任何两个消费束之间都是可以比较的. 也就是说, 要么有$(x_1,x_2)\succeq(y_1,y_2)$或$(y_1,y_2)\succeq(x_1,x_2)$或两者都有, 最后一种情况就说明消费者对这两个消费束是无差异的.
2. 反身性公理: 假定任何消费束至少是与本身一样好的. 也就是说, $(x_1,x_2)\succeq(x_1,x_2)$.
3. 传递性公理: 假定如果$(x_1,x_2)\succeq(y_1,y_2)$且$(y_1,y_2)\succeq(z_1,z_2)$, 那么$(x_1,x_2)\succeq(z_1,z_2)$.

3.3. 无差异曲线

无差异曲线 和(x_1,x_2)无差异的消费束.

弱偏好集 弱偏好于(x_1,x_2)的所有消费束的集合.

如图 Figure 3.1 所示, 无差异曲线和弱偏好集.

注意, 无差异曲线之间不能相交. 我们先在每条无差异曲线上选择一个消费束, 分别记为X和Y, 然后再选择他们的交点Z, 我们不妨设$X\succ Y$, 同时注意到$X\sim Z$, $Y\sim Z$, 这就会导出$X\sim Y$, 这是和$X\succ Y$矛盾的.

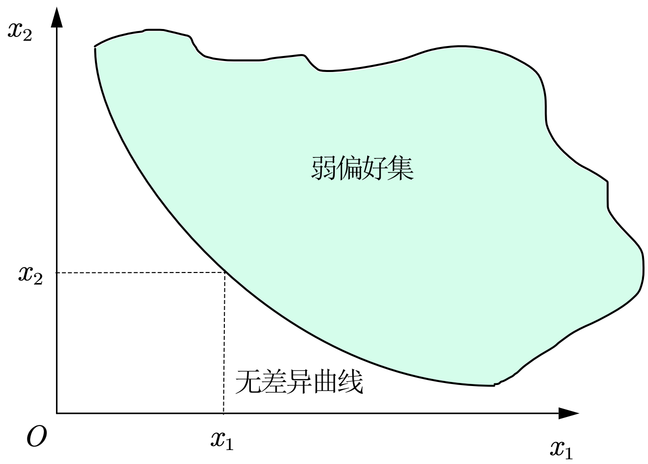


Figure 3.1: 无差异曲线和弱偏好集

3.4. 偏好的实例

对于某个点(x_1, x_2), 现在考虑给消费者增加一点商品 1, 即Δx_1, 现在考虑: 为了使得现在的消费束和之前的消费束无差异, 应该如何变动x_2? 也就是求出Δx_2, 使得$(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \sim (x_1, x_2)$.

完全替代品: 消费者愿意按固定的比率用一种商品替换另一种商品. 比如, 消费者愿意用t单位商品 2 来替换 1 单位商品 1, 那么无差异曲线的斜率就为$-t$.

在 Figure 3.2 中, 不同的无差异曲线分别代表不同的偏好. 但是他们的斜率都是$-t$.

完全互补品: 始终以固定的比例一起消费的商品. 比如鞋子, 必须要一只左脚一只右脚, 然后你无论怎么增加右脚的数量, 都不会让消费者的效用增加, 也就是$(1,1) \sim (1,x), x > 1$.

因此, 无差异曲线将是一条 L 型曲线, 正如 Figure 3.3 所示.

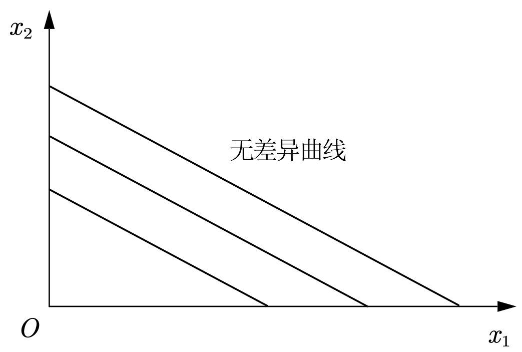


Figure 3.2: 完全替代品

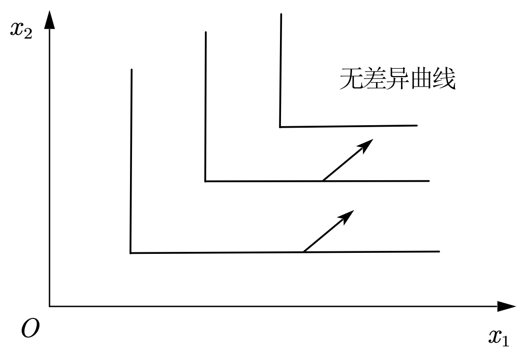


Figure 3.3: 完全互补品

厌恶品: 消费者所不喜欢的商品. 增加厌恶品, 反而会导致消费者的效用下降. 也就是在增加x_1的同时, 必须同时增加x_2来补偿消费者的效用下降.

因此, 存在厌恶品的无差异曲线的斜率必然为正, 如 Figure 3.4 所示.

中性商品: 无论数量怎么增加, 消费者都毫不在乎. 比如x_1是中性商品, 那么$(x_1, x_2) \sim (x_1', x_2), \forall x_1'$.

此时的无差异曲线是一条垂直线, 如 Figure 3.5 所示.

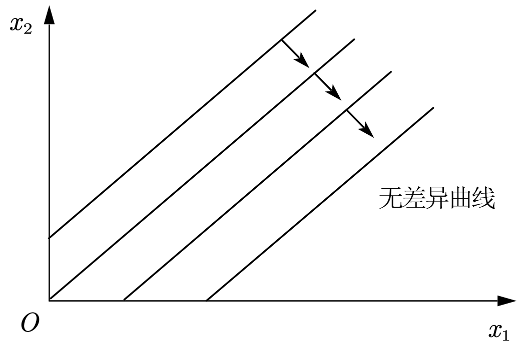


Figure 3.4: 厌恶品

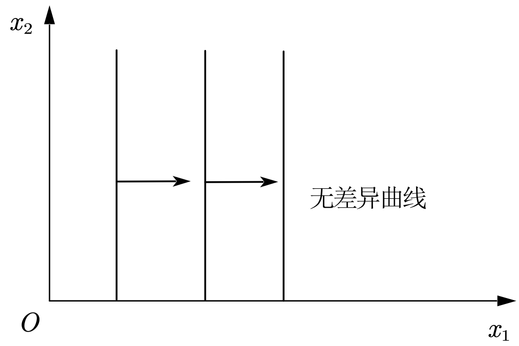


Figure 3.5: 中性商品

魇足: 对于消费者来说有一个最佳的消费束, 越靠近这个消费束越好. 比如, 有一个消费者最偏爱的消费束$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, 离这个消费束越远, 他的情况就越糟. 那么这个点就是一个魇足点或者最佳点. 如 Figure 3.6 所示.

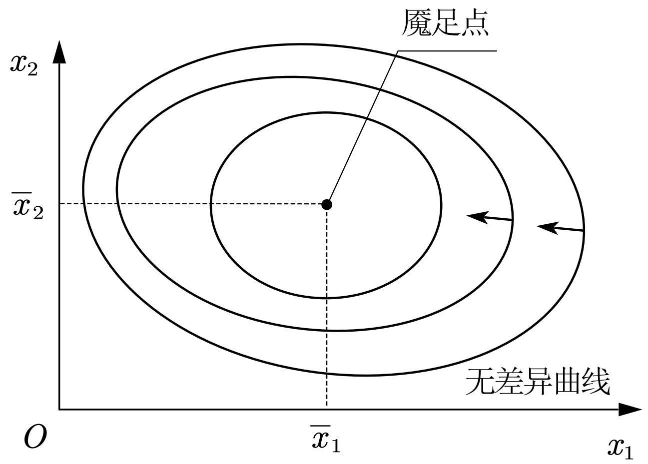
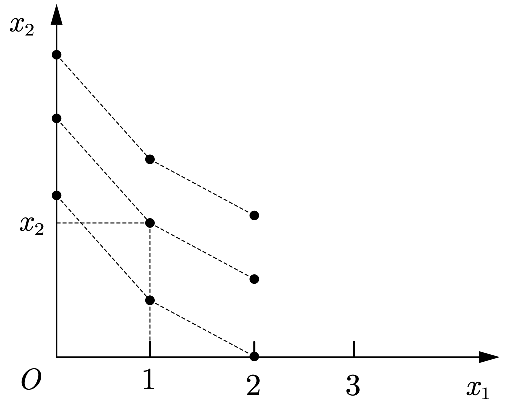


Figure 3.6: 魇足的偏好

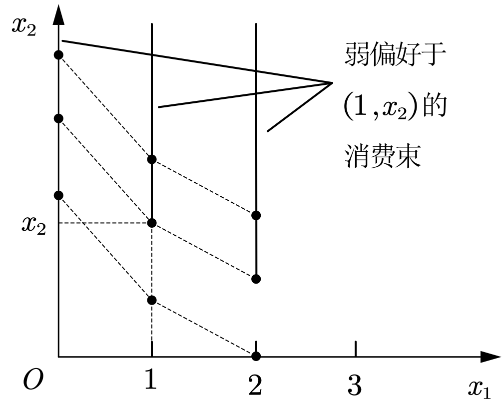
离散商品: 只能以整数量获得的商品. 我们要求出$x_1 = 0$的时候x_2在对应偏好下的取值, $x_1 = 1$的时候x_2在对应偏好下的取值, $x_1 = 2$的时候x_2在对应偏好下的取值, ..., $x_1 = n$的时候x_2在对应偏好下的取值. 然后把这些点连接起来.

而为了求出弱偏好集, 实际上就是在对应的整数x_1下, 所有的$(x_1, x_2), x_2 \geq x_2^{\text{corresponding}}$. 实际上一条无差异曲线应该是一堆$x_1$为整数的点的集合, 如 Figure 3.7(a) . 而弱偏好集则是一堆垂直的线条的集合, 如 Figure 3.7(b) .

选择是否强调一种商品的离散性取决于我们的应用. 比如消费者一般就选择1个或者2个单位的商品, 那么离散型很重要. 但是选择的商品数量很大, 离散型就没有那么重要了.



(a) 离散商品的无差异曲线



(b) 离散商品的弱偏好集

Figure 3.7: 离散商品

3.5. 良态偏好

良态无差异曲线的的定义性特征:

1. 就商品(goods)而不是厌恶品(bads)而言, 人们认为多多益善. 这个假设也被称为偏好的单调性. 也就是说, 假设(x_1, x_2)是一个由正常商品组成的消费束, (y_1, y_2)是一个满足$y_1 \geq x_1, y_2 \geq x_2$且两者不能均取等的消费束, 那么$(y_1, y_2) \succ (x_1, x_2)$. $\rightarrow$ 无差异曲线的斜率必须是负的. 如 Figure 3.8 所示.

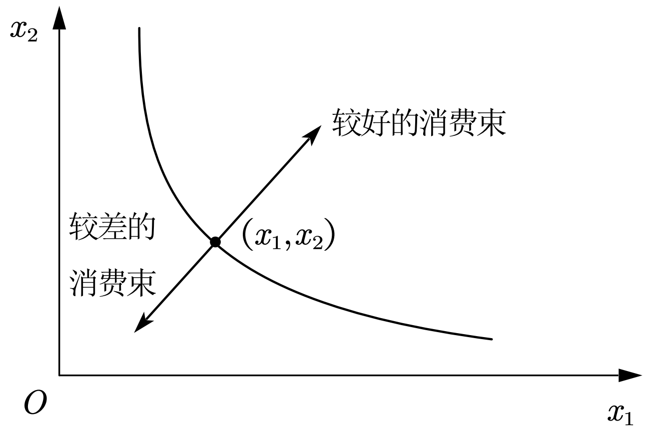


Figure 3.8: 单调性偏好

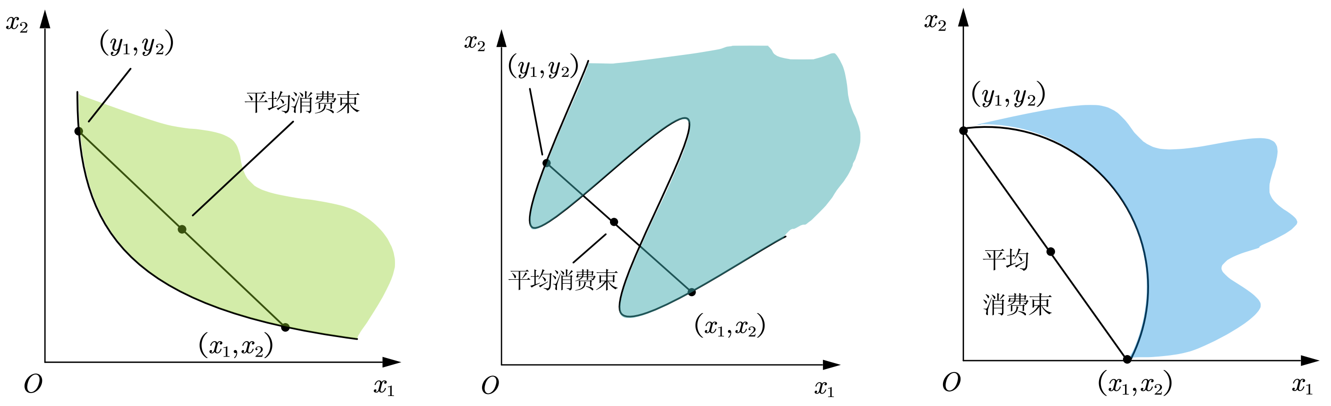
2. 平均消费束比端点消费束更受偏好. 也就是我们假定: 如果$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, 那么对于任何的$t \in [0, 1]$, 有:
$$(tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2) \succeq (x_1, x_2). \quad (3.1)$$

这件事在几何上的解释意味着弱偏好于(x_1, x_2)的所有消费束的集合是一个凸集[1]. 换句话说, (x_1, x_2)和(y_1, y_2)的所有加权平均消费束都弱偏好于(x_1, x_2)和(y_1, y_2).

严格凸的, 把上面关于凸集的定义中的弱偏好于改造成严格偏好于, 凸偏好的无差异曲线可能有平坦的部分, 但是严格凸偏好的无差异曲线不存在平坦部分.

[1]凸集具有这样的特征, 即我们如果在集上任取两个点, 则它们的连线段完全在集内. Figure 3.9 给出了各种偏好.

完全替代商品的偏好是凸的, 但**不是**严格凸的.



(a) 凸偏好 (b) 非凸偏好 (c) 凹偏好

Figure 3.9: 各种偏好

3.6. 边际替代率

边际替代率 无差异曲线的斜率, marginal rate of substitution, MRS. → 边际替代率一般是负数.

计算公式:

$$\mathrm{MRS} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}. \tag{3.2}$$

假设消费者具有良态偏好, 也就是说, 消费者的偏好是单调的、凸的, 现在提供一次交换商品的机会, 按照某个交换率E来交换, 也就是消费者放弃Δx_1单位的商品 1, 他可以得到$E\Delta x_1$单位的商品 2. 那么这就意味着消费者可以沿着一条斜率为$-E$的直线移动.

→ 现在问: 为了让消费者保持在(x_1, x_2)这个消费束上不动, 这个交换率应该是多少?

→ 那么这就意味着这条直线上的点不能出现在这条无差异曲线的上方, 否则我们就可以从上方的消费束中选择一个, 使得消费者对这个消费束有更强的偏好.

→ 这也就意味着这条直线和无差异曲线在这点相切, $-E = \mathrm{MRS}, E = -\mathrm{MRS}$, Figure 3.10 说明了这点.

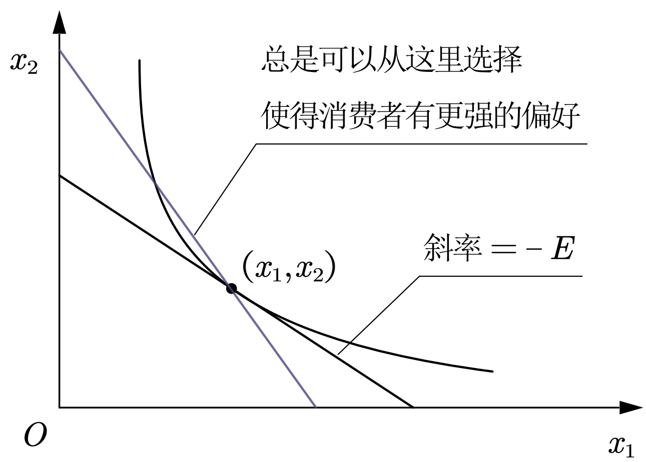


Figure 3.10: 按交换率进行交换

边际消费意愿 为了多消费一点商品 1 而愿意放弃的美元数. 我们只需要把商品 2 看成美元即可.

章节 4. 效用

效用函数 为每个可能的消费束指定一个数字，使得受较多偏好的消费束的数字大于指派给受较少偏好的消费束的数字. p.s. 这也就意味着, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$当且仅当$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$.

效用指派的唯一重要特征在于它对消费束进行的排序. → *序数效用*.

单调变换 保持数字次序不变的方式将一组数字变换成另一组数字.

一个效用函数的单调变换还是一个效用函数，这个效用函数代表的偏好与原效用函数代表的偏好相同.

4.1. 基数效用

基数效用 效用的数值具有重要意义.

4.2. 构造效用函数

根据无差异曲线构造效用函数: 画一条如 Figure 4.1 的对角线, 沿着这条线测度每条无差异曲线离原点的距离, 并且以此标记每条无差异曲线. 只要偏好是单调的, 我们就可以说明这是一个效用函数.

由效用函数推出无差异曲线: 我们假设效用函数为$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. 那么无差异曲线就是使得$k = x_1 x_2$的所有x_1和x_2的组合. → 无差异曲线满足公式

$$x_1 = \frac{k}{x_1}. \tag{4.1}$$

Figure 4.2 中的三条无差异曲线就分别是$k = 1, 2, 3$的情况.

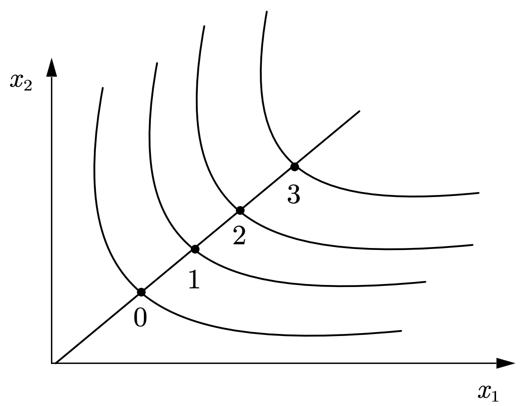


Figure 4.1: 根据无差异曲线构造效用函数

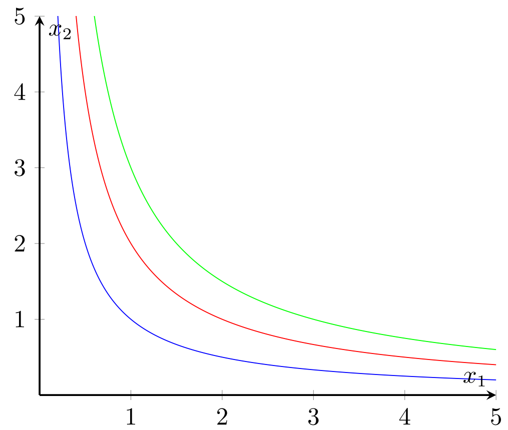


Figure 4.2: 无差异曲线

完全替代偏好: 一般地, 完全替代偏好可以使用以下形式的效用函数来描述:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2. \tag{4.2}$$

完全互补偏好: 一般地, 完全互补偏好可以使用以下形式的效用函数来描述:

$$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}. \tag{4.3}$$

拟线性偏好: 效用函数对商品 2 来说是线性的:

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2. \tag{4.4}$$

柯布-道格拉斯偏好: 柯布-道格拉斯效用函数:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d. \tag{4.5}$$

其中, c和d都是描述消费者偏好的正数. 它可以被变形为:

$$v(x_1, x_2) = \ln\left(x_1^c x_2^d\right) = c \ln x_1 + d \ln x_2. \tag{4.6}$$

也可以被变形为:

$$v(x_1, x_2) = \left(x_1^c x_2^d\right)^{\frac{1}{c+d}} = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}} = x_1^a x_2^{1-a}. \tag{4.7}$$

这里的$a = \frac{c}{c+d}$.

4.3. 边际效用

商品 1 的边际效用 marginal utility of good 1. 被定义为:

$$\mathrm{MU}_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}. \tag{4.8}$$

或者是某种微积分的定义形式:

$$\mathrm{MU}_1 = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \tag{4.9}$$

我们可以发现:

$$\mathrm{MU}_1 \Delta x_1 + \mathrm{MU}_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0. \tag{4.10}$$

根据这个式子, 我们将会推导得到:

$$\mathrm{MRS} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{\mathrm{MU}_1}{\mathrm{MU}_2}. \tag{4.11}$$

4.4. 通勤车票的效用

我们假设$(x_1, x_2, ..., x_n)$表示自己驾车时的对应的n个特征的值, $(y_1, y_2, ..., y_n)$表示坐公交时的对应的n个特征的值. 我们设效用函数表示为:

$$U(x_1, x_2, ..., x_n) = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n. \tag{4.12}$$

β_i表示各种特征的边际效用, 两个系数之间的比率, 表示一个特征和另一个特征之间的边际替代率. e.g.

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\mathrm{MU}_1}{\mathrm{MU}_2} = -\mathrm{MRS}. \tag{4.13}$$

这是说, 要是能减少 1 单位的特征 1, 消费者宁愿增加MRS个单位的特征 2.

4.5. 微分表达形式

方法一: 根据MU的计算, 我们知道:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \mathrm{d}x_2 = 0. \tag{4.14}$$

这样我们就会得到:

$$\mathrm{MRS} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}}. \tag{4.15}$$

方法二: 把x_2视作x_1的函数$x_2(x_1)$, 那么有:

$$u(x_1, x_2(x_1)) \equiv k. \tag{4.16}$$

对于这个式子两边同时对x_1求微分得到:

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = 0. \tag{4.17}$$

这个方程将会得到:

$$\text{MRS} = \frac{\partial x_2(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}. \tag{4.18}$$

边际替代率与效用的表示方法无关, 因为作单调变换$f(u)$后得到$\frac{\partial f}{\partial u}$可以消去.

单调变换不可能改变边际替代率.

柯布-道格拉斯偏好:

1. 选择对数表达式:

$$\text{MRS} = -\frac{c/x_1}{d/x_2} = -\frac{cx_2}{dx_1}. \tag{4.19}$$

2. 选择指数表达式:

$$\text{MRS} = -\frac{cx_1^{c-1}x_2^d}{dx_1^c x_2^{d-1}} = -\frac{cx_2}{dx_1}. \tag{4.20}$$

章节 5. 选择

消费者从他们的预算集中选择最偏好的消费束.

5.1. 最优选择

预算线与无差异曲线相切的消费束是消费者的最优选择, 记为(x_1^*, x_2^*). 如 Figure 5.1 所示.

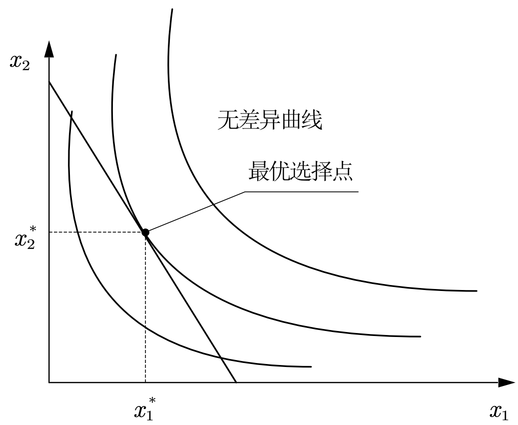


Figure 5.1: 最优选择

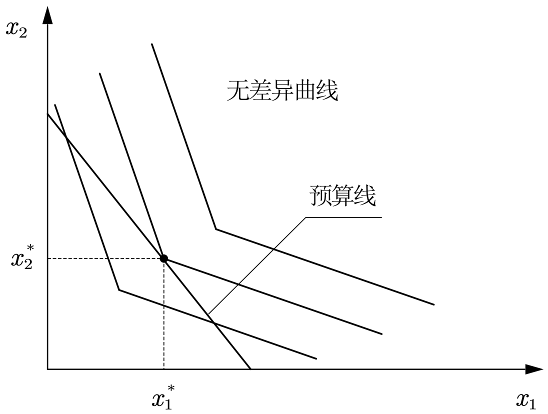


Figure 5.2: 折拗的偏好

但是最优选择并不是一定意味着相切.

1. 无差异曲线没有切线. 但是却有一个折点. 这种情况没有多少经济学含义, 如 Figure 5.2.

2. 最优选择出现在某些商品为 0 的情况. 虽然斜率不同, 但是无差异曲线没有穿过预算线, 比如 Figure 5.3. 这代表一个边界最优, 而 Figure 5.1 则代表一个内部最优.
3. 而且相切也不一定最优, 比如 Figure 5.4.

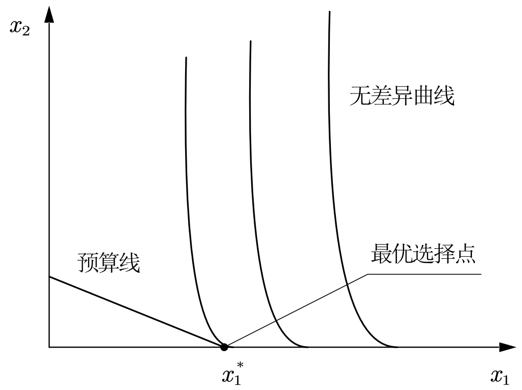


Figure 5.3: 边界最优

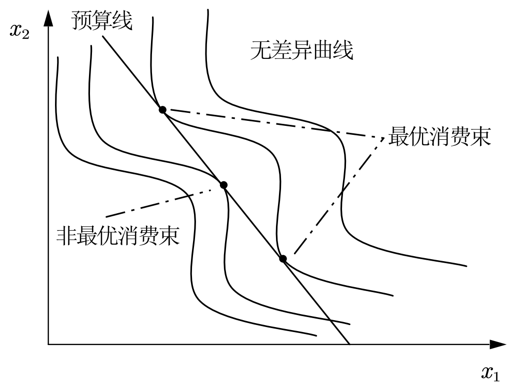


Figure 5.4: 不止一个切点

内部最优点上, 一定有:

$$\mathrm{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{5.1}$$

我们可以发现预算约束线的斜率实际上代表了两种商品的交换比率.

5.2. 消费者需求

需求束 一定价格和收入水平下商品 1 和商品 2 的最优选择, 被称为消费者的需求束.

需求函数 需求函数是将最优选择(也就是需求数量)与不同的价格和收入值联系起来的函数. 我们可以把需求函数记为$x_1(p_1, p_2, m)$和$x_2(p_1, p_2, m)$.

完全替代: 那么消费者应该去买便宜的那一种. 所以商品 1 的需求函数为:

$$x_1 = \begin{cases} m/p_1 \text{ if } p_1 < p_2 \\ \text{any value between } 0 \text{ and } m/p_1 \text{ if } p_1 = p_2. \\ 0 \text{ if } p_1 > p_2 \end{cases} \tag{5.2}$$

完全互补: 最优选择应该总是出现在对角线上. e.g. 应该成对地买鞋.

$$x_1 = x_2 = \frac{m}{p_1 + p_2}. \tag{5.3}$$

中性商品和厌恶品: 消费者应该会把所有的钱购买他喜爱的商品, 所以这两类商品的需求都为 0.

离散商品: 分别比较$(0, m)$, $(1, m - p_1)$, $(2, m - 2p_1)$, ...来判断哪个消费束的效用最高. 我们这里假设商品 2 是美元, 而商品 1 是只能以整数单位获得的商品.

凹偏好: 也是应该总是购买一个商品. 因为凹偏好意味着消费者可能很喜欢商品 1 或者商品 2, 但是却不喜欢一起消费他们, 那么消费者就应该单独购买.

柯布-道格拉斯偏好: 下面使用微积分的方法说明.

我们已经从 Equation (5.1) 知道了:

$$\mathrm{MRS}(x_1, x_2) = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{5.4}$$

同时我们根据 Equation (4.15) 知道:

$$\mathrm{MRS}(x_1, x_2) = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2}. \tag{5.5}$$

结合 Equation (5.4) 和 Equation (5.5), 我们可以得到:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{5.6}$$

同时我们有预算约束:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \tag{5.7}$$

通过联立 Equation (5.6) 和 Equation (5.7), 我们可以得到:

$$\frac{\partial u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)/\partial x_1}{\partial u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{5.8}$$

我们现在只需要解出这个只含有一个未知数x_1的 Equation (5.8).

或者我们考虑采用约束最大化的求解方法, 我们当前面临的问题就是:

$$\max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) \tag{5.9.1}$$

$$\text{s.t. } p_1 x_1 + p_2 x_2 = m. \tag{5.9.2}$$

1. 我们考虑使用$x_2(x_1)$来代替x_2, 那么 Equation (5.9) 就可以转化为一个非约束最大化问题:

$$\max_{x_1} u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right). \tag{5.10}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = 0. \tag{5.11}$$

with $x_2(x_1) = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{p_1}{p_2}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial u(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2}. \tag{5.12}$$

2. 或者考虑使用拉格朗日乘数法:

$$L = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m), \tag{5.13}$$

接下来考虑下面三个条件即可:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \tag{5.14.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \tag{5.14.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1^* + p_2 x_2^* - m = 0 \tag{5.14.3}$$

现在我们把上面的结论应用到柯布-道格拉斯效用函数上:

$$x_1 = \frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1} \tag{5.15.1}$$

$$x_2 = \frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2} \tag{5.15.2}$$

5.3. 估计效用函数

之前的讨论, 我们主要是考察偏好 → 需求行为. 但在现实中, 我们却经常遇见需求行为 → 偏好, 也就是考察到底哪种偏好产生了我们观察到的需求行为. 下表中的$s_1 = p_1\frac{x_1}{m}, s_2 = p_2\frac{x_2}{m}$.

年份	p_1	p_2	m	x_1	x_2	s_1	s_2	效用
1	1	1	100	25	75	0.25	0.75	57.0
2	1	2	100	24	38	0.24	0.76	33.9
3	2	1	100	13	74	0.26	0.74	47.9
4	1	2	200	48	76	0.24	0.76	67.8
5	2	1	200	25	150	0.25	0.75	95.8
6	1	4	400	100	75	0.25	0.75	80.6
7	4	1	400	24	304	0.24	0.76	161.1

Table 5.1: 描述消费行为的若干数据

根据我们所观察到的行为, 我们可以发现$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{3}{4}}$的效用函数可以比较好的拟合这些数据.

5.4. 边际替代率条件的含义

对于每个人, 评价两种商品的方式都是一样的: 以价格比率, 也就是现在的边际替代率来评价.

5.5. 税收类型的选择

从量税: 按照税率t对商品 1 征收税收. 新的预算约束变成了:

$$(p_1 + t)x_1 + p_2x_2 = m. \tag{5.16}$$

我们设最优选择时为:

$$(p_1 + t)x_1^* + p_2x_2^* = m. \tag{5.17}$$

那么政府收入增加为$R^* = tx_1^*$.

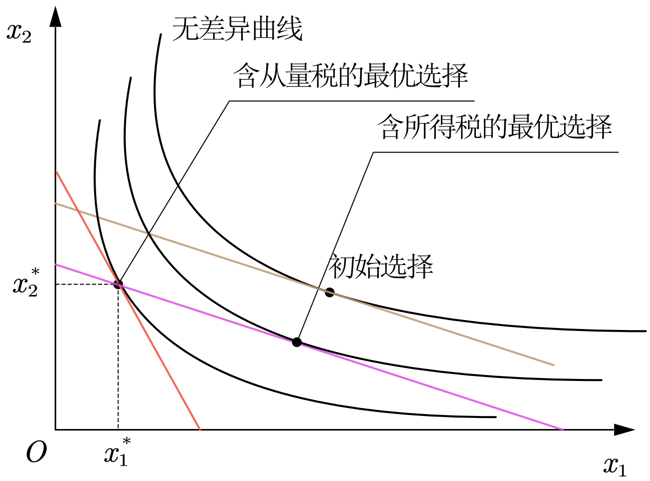


Figure 5.5: 所得税与从量税

所得税: 假设我们让政府收入也增加R^*, 那么预算约束就变为:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m - tx_1^*. \tag{5.18}$$

这条预算约束线与无差异曲线在(x_1^*, x_2^*)点相交，那么预算约束线上必然存在一些更受偏好的点. 也就是说, 征收消费税时, 消费者的境况更优.

章节 6. 需求

6.1. 正常商品与低档商品

正常商品 商品的需求随着收入的增加而增加.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta m} > 0. \tag{6.1}$$

低档商品 商品的需求随着收入减少而减少.

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta m} < 0. \tag{6.2}$$

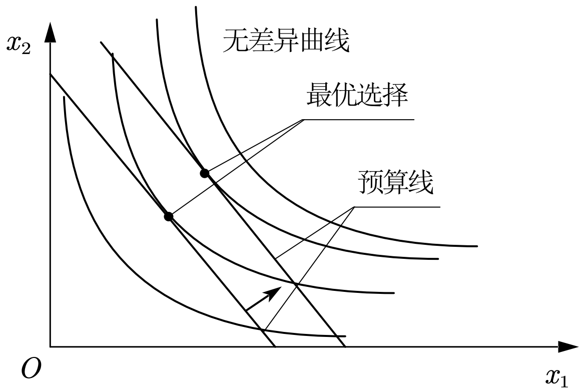


Figure 6.1: 正常商品

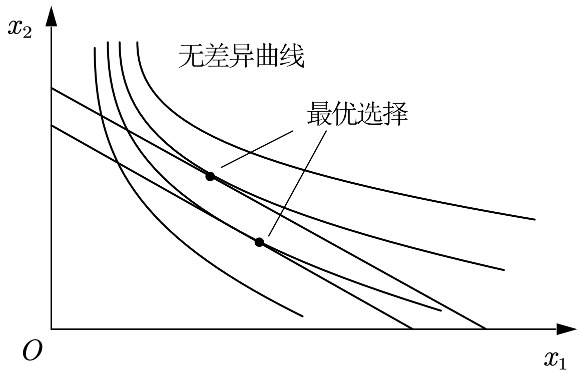


Figure 6.2: 低档商品

6.2. 收入提供曲线和恩格尔曲线

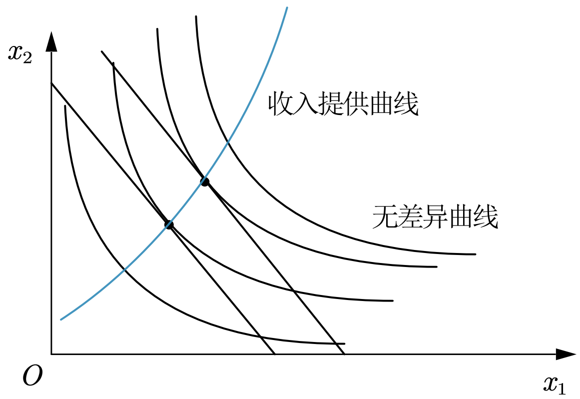


Figure 6.3: 收入提供曲线

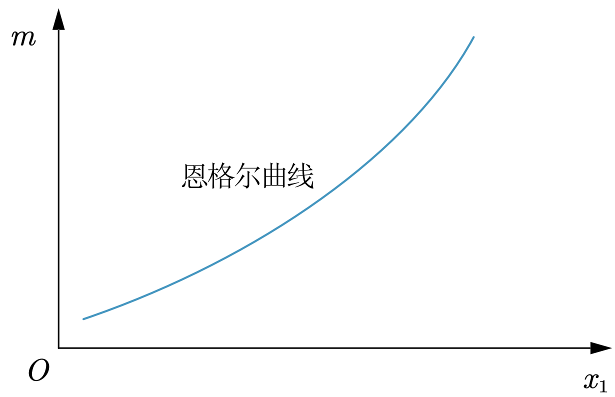


Figure 6.4: 恩格尔曲线

收入提供曲线 把预算线平行地向外移动时, 我们可以把一系列的需求束[2]连起来, 从而构成收入提供曲线, 也被称为收入扩展线.

[2]需求束的定义在 Section 5.2 处.

如果两种商品都是正常商品, 则收入提供曲线的斜率一定是正的.

恩格尔曲线 在所有的价格保持不变的情况下, 需求如何随收入变动的情况.

完全替代: 如果消费者专门消费商品 1, 则收入提供曲线就是横轴, 恩格尔曲线就是一条斜率为p_1的从原点出发的直线.

完全互补: 收入提供曲线是一条经过原点的对角线, 恩格尔曲线是一条斜率为p_1+p_2的直线.

柯布-道格拉斯偏好: 我们设$u(x_1,x_2)=x_1^a x_2^{1-a}$, 则$x_1=am/p_1, x_2=(1-a)m/p_2$. 收入提供曲线斜率为$(1-a)/a$, 商品 1 的恩格尔曲线斜率为$p_1/a$.

相似偏好:

奢侈品 同收入下, 商品需求增加的比例大, 就是奢侈品.

必需品 同收入下, 商品需求增加的比例小, 就是必需品. → 低档商品减少, 必需品增加, 只是增加的少.

相似偏好 消费者偏好只依赖于商品 1 和商品 2 的比率. 这就是说, 如果已经有$(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$, 那么必然也会对$\forall t>0$, 有$(tx_1,tx_2)\succ(ty_1,ty_2)$, 因为两种商品的比值没有发生改变, 消费者的偏好不应当发生改变. → 收入提供曲线和恩格尔曲线都将是过原点的直线.

完全替代、完全互补、柯布-道格拉斯偏好都是相似偏好.

拟线性偏好: 所有的无差异曲线都是平移的关系, 也就是$u(x_1,x_2)=v(x_1)+x_2$. 预算线与无差异曲线在(x_1^*,x_2^*)处相切, 平移之后必然也会在(x_1^*,x_2^*+k)处相切, 所以是一条垂直线. 商品 1 具有"零收入效应".

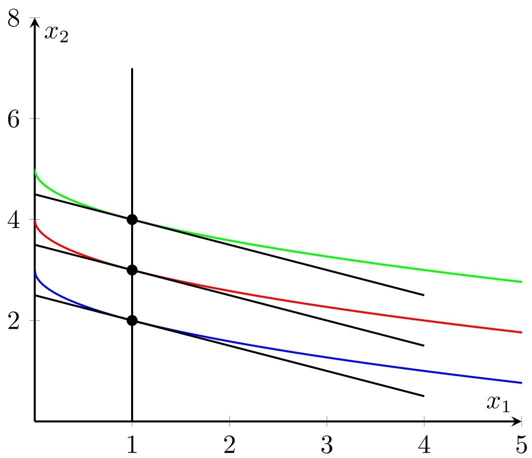


Figure 6.5: 收入提供曲线

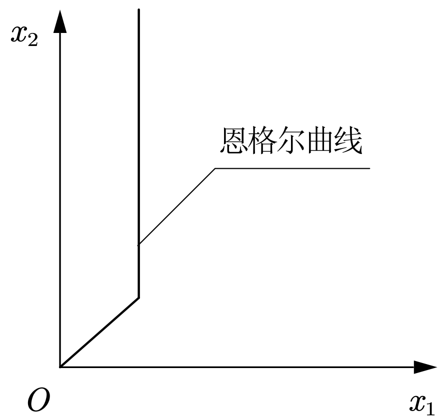


Figure 6.6: 恩格尔曲线

6.3. 普通商品与吉芬商品

普通商品 商品的需求随着它的价格的下降而增加.

吉芬商品 商品的需求随着它的价格的下降而减少. e.g. 一周消耗 7 碗粥和 7 杯牛奶, 如果粥的价格下降, 消费者就可以购买 5 碗粥和 8 杯牛奶, 但是效用增加了. 吉芬商品和低档商品有着密切的关系.

6.4. 价格提供曲线与需求曲线

价格提供曲线 通过让商品 1 的价格发生变动, 也就是让预算线的斜率发生变动, 我们可以得到一系列的需求束, 连起来就是价格提供曲线. 这要和 Section 6.2 中的收入提供曲线区分开来.

需求曲线 对每个不同的p_1标出商品 1 的最优消费水平.

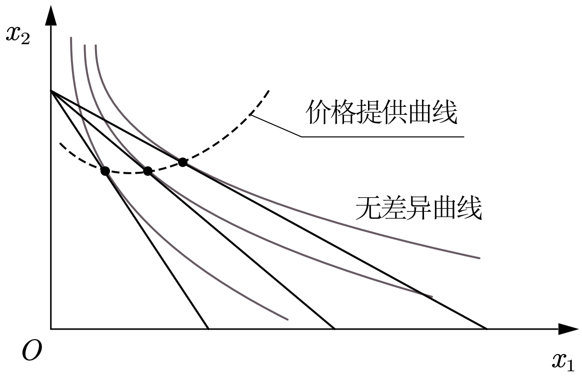


Figure 6.7: 价格提供曲线

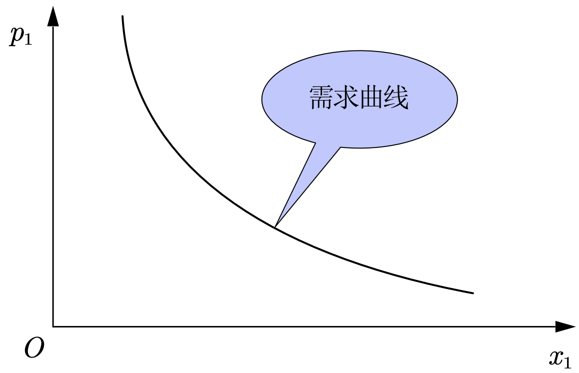
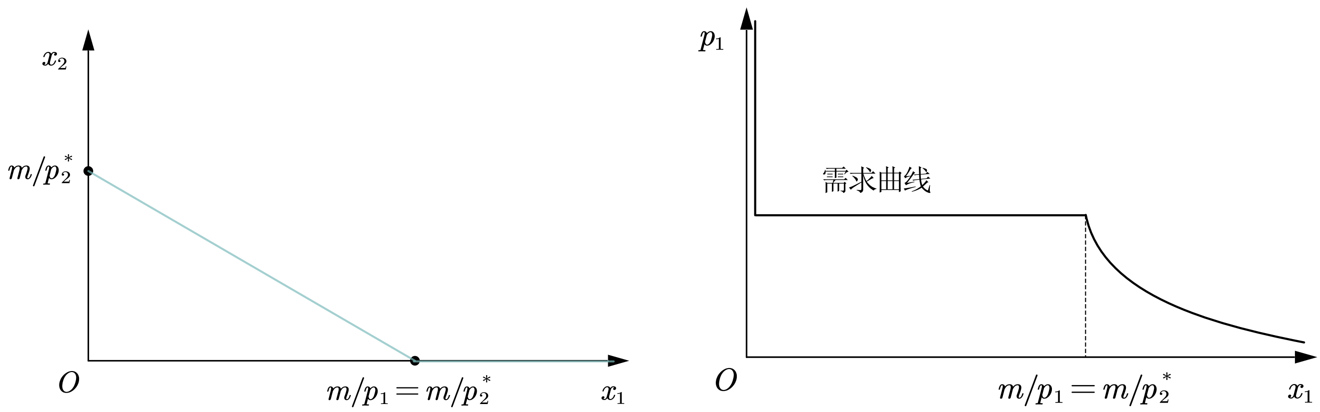


Figure 6.8: 需求曲线

通常来说, 典型的需求曲线具有负的斜率:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} < 0. \tag{6.3}$$

完全替代: 在$p_1 > p_2^*$时, 随着p_1的增加, 需求束始终是$(0, m/p_2^*)$; 当$p_1 = p_2^*$的时候, 需求束在$p_1x_1 + p_2^*x_2 = m$这条线上任意一点均可; 当$p_1 < p_2^*$时, 需求束始终是$(m/p_1, 0)$, 随着p_1不断接近 0, 这个需求束也逐渐趋向正无穷.



(a) 价格提供曲线 (b) 需求曲线

Figure 6.9: 完全替代的价格提供曲线和需求曲线

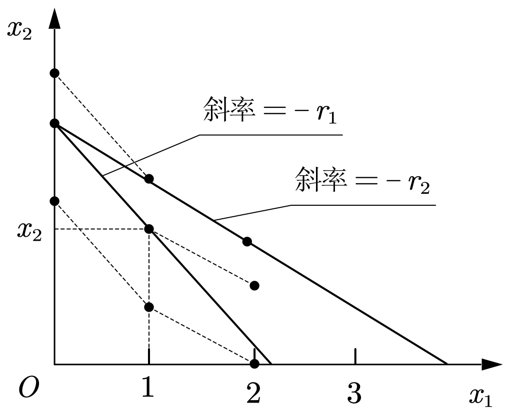
完全互补: 商品 1 的需求总是为:

$$x_1 = \frac{m}{p_1 + p_2}. \tag{6.4}$$

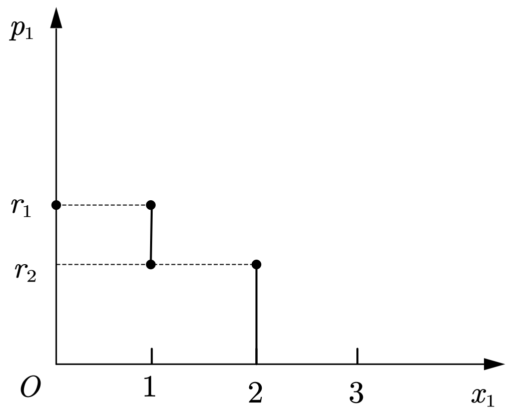
所以价格提供曲线是一条直线, 需求曲线是一条递减的线.

离散商品: 使得消费者刚好消费或者不消费某个商品的价格被称为保留价格.

如 Figure 6.10(b), 我们之所以直接画成$0 \sim r_2$都是需求量为 2, 是因为在 Figure 6.10(a) 我们把这个预算线的斜率不停地旋转, 发现$0 \sim -r_2$之间已经没有相切的了, 否则我们就应该继续画出对应的需求.



(a) 价格提供曲线



(b) 需求曲线

Figure 6.10: 离散商品的价格提供曲线和需求曲线

这些价格可以用原效用函数描述. 例如, 在价格r_1处, 消费者刚好在 0 单位或者 1 单位之间无差异, 于是就一定有

$$u(0, m) = u(1, m - r_1). \tag{6.5}$$

同样的, 对于r_2有

$$u(1, m - r_2) = u(2 - m - 2r_2). \tag{6.6}$$

如果效用函数是拟线性的, 也就是$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$, 并且$v(0) = 0$, 那么就可以解得

$$v(0) + m = v(1) + m - r_1 \Rightarrow r_1 = v(1). \tag{6.7}$$

同样的,

$$v(1) + m - r_2 = v(2) + m - 2r_2 \Rightarrow r_2 = v(2) - v(1). \tag{6.8}$$

依此类推.

接下来还可以说明: 如果$r_6 \geq p \geq r_7$, 那么说么消费者为了得到 6 单位的商品 1 愿意放弃p美元/单位, 而不愿意放弃p美元来得到第 7 个单位的商品 1.

6.5. 替代和互补

替代品 当商品 *2* 的价格上升时, 商品 1 的需求增加, 我们就称商品 1 是商品 2 的替代品, 也就是:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_2} > 0. \tag{6.9}$$

→ 总替代品

互补品 当商品 *2* 的价格上升时, 商品 1 的需求减少, 我们就称商品 1 是商品 2 的互补品, 也就是:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_2} < 0. \tag{6.10}$$

→ 总互补品

6.6. 反需求函数

反需求函数 把价格视作数量的函数.

6.7. 拟线性偏好的需求函数

我们考虑下面的最大化问题:

$$\max_{x_1,x_2} v(x_1)+x_2 \tag{6.11.1}$$

$$\text{s.t. } p_1x_2+p_2x_2=m \tag{6.11.2}$$

也就是考虑下面的最大化问题:

$$\max_{x_1,x_2} v(x_1)+\frac{m}{p_2}-p_1\frac{x_1}{p_2} \tag{6.12}$$

求导得到一阶条件:

$$v'(x_1^*)=\frac{p_1}{p_2} \tag{6.13}$$

因此我们就看到: *对商品 1 的需求一定独立于收入.*

e.g. 对于

$$u(x_1,x_2)=\ln x_1+x_2 \tag{6.14}$$

就可以得到:

$$x_1=\frac{p_2}{p_1} \tag{6.15}$$

继而得到

$$x_2=\frac{m}{p_2}-1 \tag{6.16}$$

但是一种更好的描述商品 2 的需求的方法是:

$$x_2=\begin{cases}0 & \text{if } m\le p_2\\ m/p_2-1 & \text{if } m>p_2\end{cases}. \tag{6.17}$$

章节 7. 显示偏好

参考文献

akkiri (2023) *SimpleNote*. Available at: https://github.com/a-kkiri/SimpleNote

Varian, H. R. (2014) *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. 9th ed. New York: W.W. Norton & Company