音乐与数学学习笔记

作者：VectorPikachu

时间：2024/7/8

目录

第一章 音乐与数学

1.1 音乐的律动

音乐的要素：节奏、旋律、和声。

1.1.1 怎么看乐谱

作为一个音乐白痴，刚才（2023/12/13）突然看懂了一章乐谱，找三和弦的时候应该从上往下去找，然后相差八度的直接看成一样的来找三和弦。跨小节的临时变音是不保持的，但是连线的话是看靠近的那个音。

要注意是连音线还是延音线。

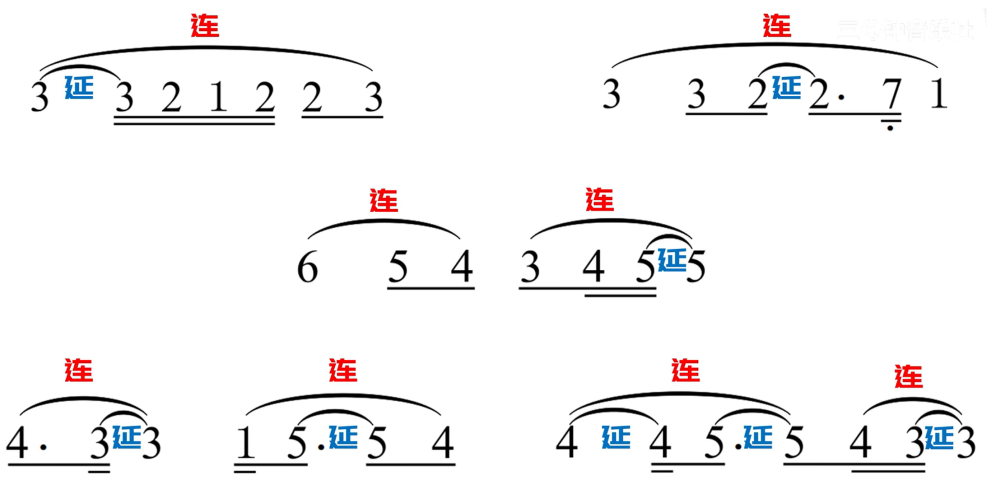


图 1.1: 连音线和延音线

N 连音：当 $2^k < N < 2^{k+1}$ 的时候，取 2^k 个音符的时值作为总时值，来分给 N 个音。当 $N = 2^k$ 的时候，代表 $3 \cdot 2^{k-2}$ 个音符的时值。二很特殊，它是二代三。

图 1.2: N 连音

调号是对于每一个高八度和低八度的音都要作用的。

1.1.2 音乐史

中世纪的时期从 5 世纪罗马帝国的衰落到 15 世纪的美国发现。这段时期与音乐最相关的方面之一是天主教会的巨大影响力，它在欧洲社会中引起了许多方面的关注。

中世纪的音乐以单调为特征，这意味着歌曲和音乐遵循一条旋律。这个时期可以持续到 12 世纪。后来，复音会发展起来，和谐，节奏的扩展和声音的复杂性将在此发展。

从 12 世纪开始，各种致力于音乐教学的学校也开始开放，例如法国的 San Marcial de Limoges 学校；巴黎圣母院；和英语学校。由于教会是为数不多的能够对僧侣进行音乐写作教育的机构，因此，包含有关当时音乐数据的许多文件本质上都是宗教性的。

在 15 至 16 世纪的**文艺复兴时期**，产生了新的创作形式和更多的音乐风格。在这段时间里演奏的许多音乐继续为宗教服务，延续了大众音乐风格，后者在 14 世纪末发展起来。在 15 世纪初期，许多音乐环境受到英国和北欧作曲家的严重影响。

巴洛克时期的音乐，从 1600 年代到 1750 年代，其特征是作品中包含的宏伟，戏剧性和活力的基调，这些乐曲也是各种风格作品的一部分。

民族音乐风格的差异变得更加明显，世俗音乐与宗教音乐之间的对比也变得更加明显。在声乐方面，最突出的形式是歌剧，颂歌和演说家。至于器乐，奏鸣曲，协奏曲和序曲应运而生。

在**古典音乐时代**，1750-，器乐以交响乐，音乐会或奏鸣曲等形式开始发扬光大。**海顿、莫扎特和贝多芬**是古典主义音乐的杰出代表。古典主义音乐承继著巴洛克音乐的发展，是欧洲音乐史上的一种音乐风格或者一个时代。这个时代出现了多乐章的交响曲、独奏协奏曲、弦乐四重奏、多乐章奏鸣曲等等体裁。而奏鸣曲式和回旋曲式成为古典时期和浪漫时期最常见的曲式，影响之深远直至 20 世纪。

浪漫主义音乐，自 19 世纪以来，音乐已成为一种与情感和戏剧联系在一起的表达方式。歌剧，管弦乐队，钢琴和钢琴伴奏唱歌是最主要的媒体。浪漫主义包括情感，主体性，个人主义和民族主义。观众与表演者之间的关系更多地取决于感官体验，而不是知识分子。传达的信息还取决于作曲家和表演者的个人想法和感受。

现代音乐

后现代/当代音乐

1.1.3 律动是个周期函数

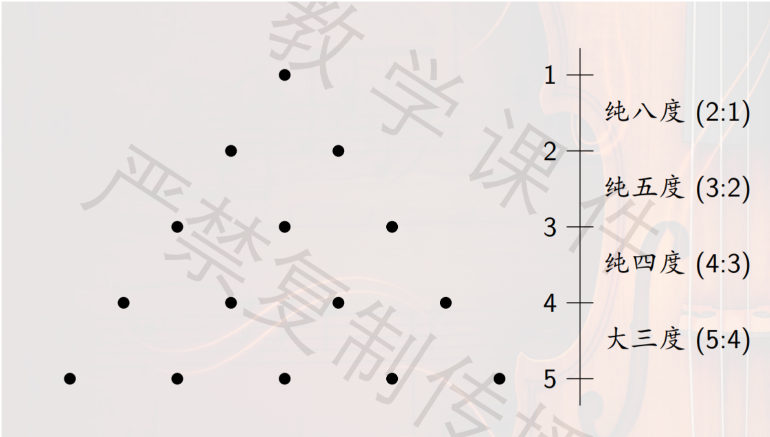


图 1.3: 律动是个周期函数

1.1.4 节拍、节奏、节奏型

节拍：

拍子（beat）是一段音乐中的基本律动（pulse）。若干拍子按照一定的强弱规律组合成**节拍（meter）**。e.g. 二拍子、三拍子、四拍子、六拍子。

构成节拍的一组拍子循环出现，每次循环构成一个小节（measure）。乐谱中用小节线（bar line）来标记一个小节的结束。

节拍是用拍号（time signature）来标示的。

拍号	备注	强弱规律
2/4	以四分音符为一拍，每小节有两拍	强、弱
3/4	以四分音符为一拍，每小节有三拍	强、弱、弱
4/4	以四分音符为一拍，每小节有四拍	强、弱、次强、弱
6/8	以八分音符为一拍，每小节有六拍	强、弱、弱、次强、弱、弱

表 1.1: 拍号

有诸如五拍子等素数节拍。

节奏（rhythm）：由音符的不同**时值（duration）**组合构成的模式。

tips：节拍是强弱规律，节奏是持续时间的组合，和强弱没关系，和音高也没关系。

固定节奏型（rhythmic ostinato）：在乐曲中无变化地反复出现，贯穿始终的节奏型。

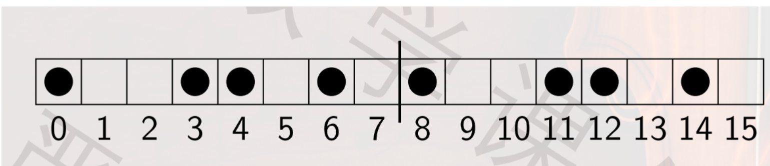


图 1.4: 固定节奏型

每个小方格代表一拍，有小黑点的是起拍（onset），空白的是休止拍。

轮唱：同一个周期函数，相位（phase）不同。

集合 $A=\{0,3,4,6\}$ 表示有四个起拍，位于 0,3,4,6 处。

集合的加法：$A+B=\{a+b|a\in A,b\in B\}$。

直和（direct sum）：对 $\forall a,a'\in A$ 和 $\forall b,b'\in B$，有 $a+b=a'+b'\Rightarrow a=a',b=b'$，这个时候记作 $A\oplus B$。也就是说，**$A\oplus B$ 里的元素表法唯一。**

记集合 $A=\{0,5,6,7\},B=\{0,4,8\}$，对其进行模 12 的加法，可以得到直和：

$$
\begin{aligned}
A\oplus B&=\{0,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15\}\\
&=\{0,1,\cdots,11\}=\mathbb{Z}_{12}\ \mathrm{mod}\ 12
\end{aligned}
$$

A 为**节奏动机（rhythmic motif）**或者**内节奏（inner rhythm）**，B 被称为**外节奏（outer rhythm）**。

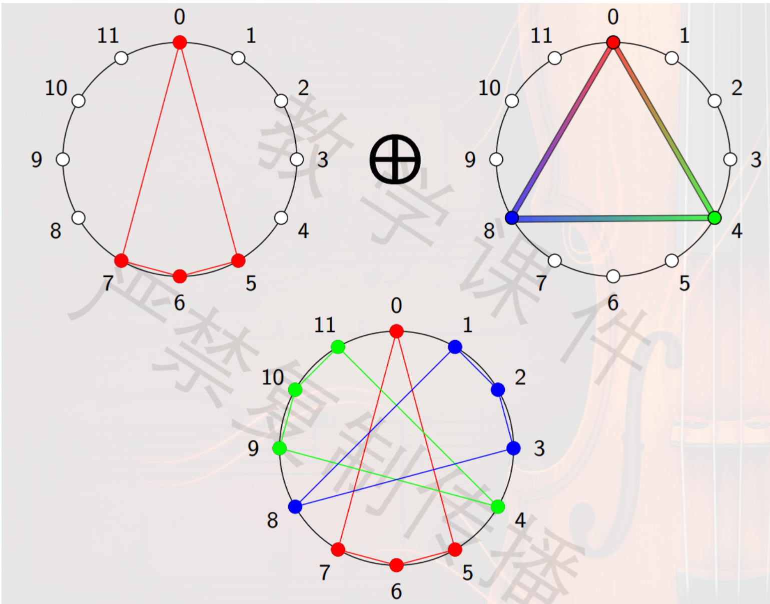


图 1.5: 直和

1.2 旋律的变化

不同音高、不同时值的音符组合起来就构成了**旋律（melody）**。

所以旋律既有音高又有时值，但是节奏只看时值。

重复才能留下印象。

1.2.1 移调

移调（transpose）就是移动一段旋律的音高。

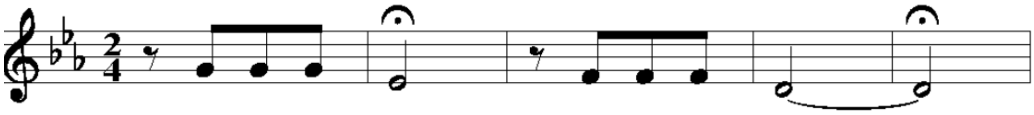


图 1.6: 移调变换

第 3、4 小节就是第 1、2 小节降低了二度的一个移调。

图 1.7: 《春江花月夜》的移调变换

这是《春江花月夜》连续运用移调的手法。

1.2.2 逆行

逆行（retrograde）就是把一段旋律从尾到头反向地演奏一遍。

图 1.8: 逆行变换

1.2.3 倒影

倒影（inversion）就是把一段旋律上下颠倒。上升音程用相同半音数的下降音程来代替，下降音程用相同半音数的上升音程来代替。

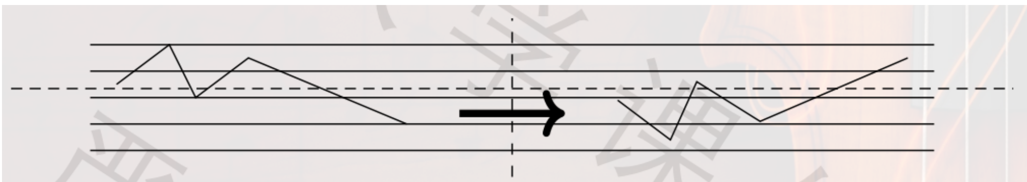


图 1.9: 倒影变换

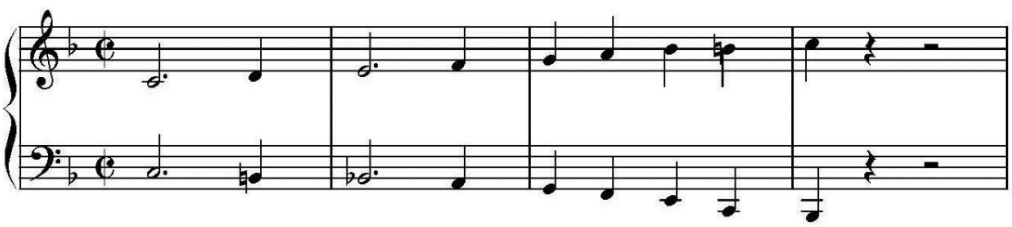


图 1.10: 苏萨的《雷神》进行曲

1.2.4 旋律与对称

移调、逆行、倒影都可以视为旋律的对称（symmetry）。传统的调性音乐（tonal music）会限制严格对称的适用范围。

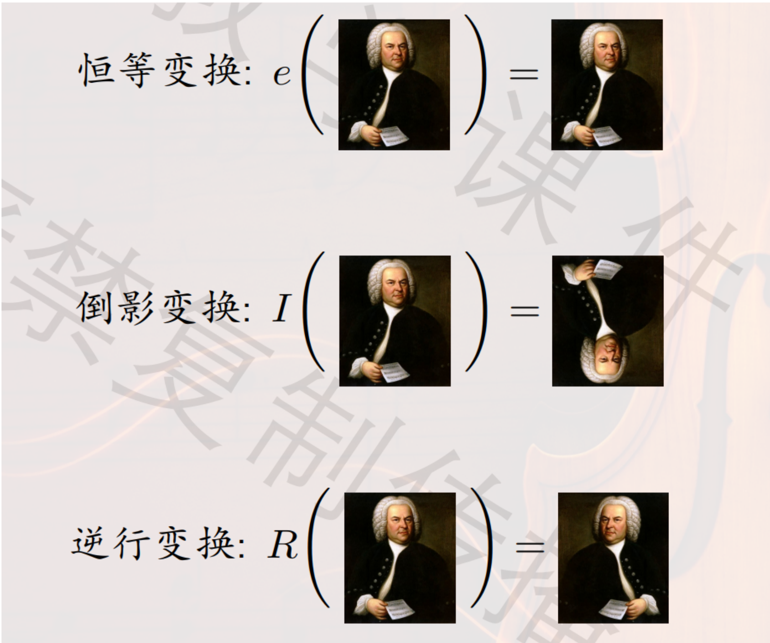


图 1.11: 恒等、倒影、逆行

变换的复合：$R * I$ 是要先 I 再 R。从右向左结合。其实本来也有交换律，怎么结合没关系。

$K = \{e, I, R, R * I\}$，那么 $(K, *)$ 构成一个群。

某段旋律 $\mathscr{X}$，如果 $\mathscr{Y} = R(\mathscr{X}), \mathscr{L} = I(\mathscr{Y})$，那么：

$$\begin{aligned} R * I(\mathscr{L}) &= R * I(I(\mathscr{Y})) \\ &= R(\mathscr{Y}) = R(R(\mathscr{X})) = \mathscr{X} \end{aligned}$$

第二章 音乐基础知识

2.1 固定节奏型

节奏（rhythm）：由音符的不同**时值（duration）**组合构成的模式。

节拍是强弱规律，节奏是持续时间的组合，和强弱没关系，和音高也没关系。

固定节奏型（rhythmic ostinato）：在乐曲中无变化地反复出现，贯穿始终的节奏型。

对于古巴颂乐（son cubano），它的基本节奏型是：

图 **2.1:** 古巴颂乐

用十六分音符的时值作为单位，每个单位称为**一拍（pulse）**。

古巴颂乐被划分为：

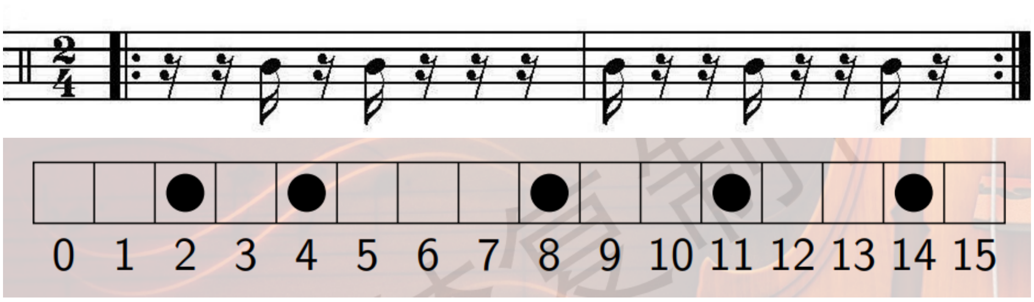


图 **2.2:** 古巴颂乐节奏型划分

包含 k 个起拍的节奏型有 C_n^k 种。

好的节奏型：极大均衡（maximal evenness）原则。在所有的拍上面，要将起拍尽可能均匀地分布。

对于古巴颂乐来说，有 5 个起拍，于是间隔应该为 3.2。

如果第一个起拍位于 0，起拍必须位于整数位置，4 个间隔，一共 16 种。如图2.3。

在圆周上，如果两个节奏型的表示相差一个旋转，本质上是一个节奏型。

图2.3的第 3 行就是古巴颂乐。

节奏奇性（rhythmic oddity）：不包含对径的起拍对。会增强节奏感和活力。

距离序列：相邻起拍点之间的距离构成的序列。（人的听觉对于音乐事件之间的相对变化更加敏感。）

古巴颂乐的距离序列：$[3, 3, 4, 2, 4]$。

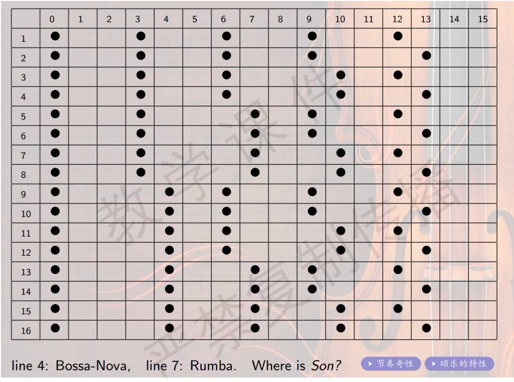


图 2.3: 包含 5 个起拍的节奏型

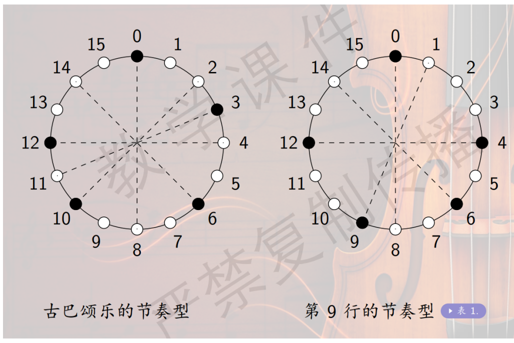


图 2.4: 两个节奏型

古巴颂乐的**轮廓**（**contour**）：$[0, +, -, +, -]$。由于节奏型是反复出现的，最后一个距离要和第一个距离比较。

轮廓同构（**contour isomorphic**）：两个轮廓序列可以通过循环移位互相得到。

影子（**shadow**）：各个起拍之间的间隔中点，形成一个与发声的节奏型对偶的节奏。

古巴颂乐：$\{0, 3, 6, 10, 12\}$，距离序列：$[3, 3, 4, 2, 4]$，轮廓：$[0, +, -, +, -]$。

影子：$\{1.5, 4.5, 8, 11, 14\}$，距离序列：$[3, 3.5, 3, 3, 3.5]$，轮廓：$[+, -, 0, +, -]$。

所以古巴颂乐的节奏型和自己的影子节奏型轮廓同构。在前面那张表中，只有古巴颂乐有这个性质。

例题 2.1 平时作业一第 9 题：

解

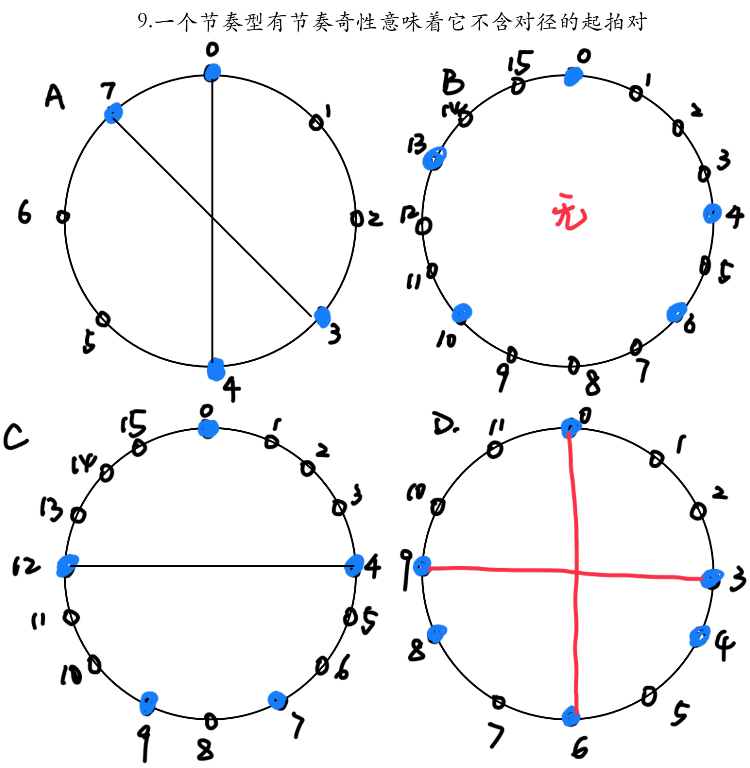


图 2.5: 节奏奇性

包含对径的起拍对意味着：如果总共有 n 拍，那么 $x+n/2=y \bmod n$。

例题 2.2 （22 秋期末 • 6）根据乐谱分析固定节奏型。错误的是：D.

图 2.6: 例题图

A. 若以四分音符为一拍，这首歌的拍号为 4/4。

B. 这是一个包含 5 个起拍的 16 拍固定节奏型。

C. 这是一个具有节奏奇性的节奏型。

D. 这个节奏型影子节奏的轮廓序列可以通过循环移位得到 $(+,0,0,-,0)$。

2.2 声音的物理属性

声音的物理属性	由什么决定的	备注
音高（pitch）	振动频率（frequency）	声音的高低
力度（dynamics）	振动幅度（amplitude）	声音的强弱 听到的声音的响度（loudness） 是传入耳朵的空气的压力决定的。
时值（duration）	持续的时间长度	/
音色（timbre）	振动波型（waveform）	不同声音的特点

表 2.1: 声音的物理属性

2.2.1 频率-音高

人耳能听到的范围是 20 20000Hz。

音乐会音高：中央 C 上方的 A 定义为 440Hz。也就是 $A_4=440$Hz。

tips: 振动体发出声音的强度（客观的强度）由振幅决定；人耳听到的声音的大小（主观的强度）是传到耳朵中的空气压力决定的。

2.2.2 声压-力度

定义 2.1

人耳对于声音强弱的感觉叫声压水平（sound pressure level,SPL）：

$$L_p = 20\log_{10}(\frac{p}{p_0})$$

其中 p_0 是 1000Hz 下的听觉下限阈值 $(20\mu Pa)$，p 是实际声压。单位是分贝（**decibel,dB**）。♣

在平时作业一的选择题 *1* 中说到：音乐的力度是由空气压力决定的。

2.2.3 音色-波型

演奏同一个音高可以听出不同的乐器：不同的音色。

振动波形由各个振动模态的频率和振幅决定。

ps：振动模态的事情在第 3 章里面。

2.2.4 频谱图与泛音列

声音的各个频率成分和随时间变化的图形叫做频谱图（spectrogram）。

把声音的各个频率成分从低到高排列起来：泛音列（overtone series,harmonic series）。

2.3 乐音体系

乐音和噪音

打击乐器中，一类是固定音高的，如木琴、定音鼓；一类是无固定音高，如小军鼓、大擦。

音乐中所使用的、具有固定音高的全体乐音构成一个集合，叫做乐音体系，其中的元素叫音级。全体音级从高到低得到音列。

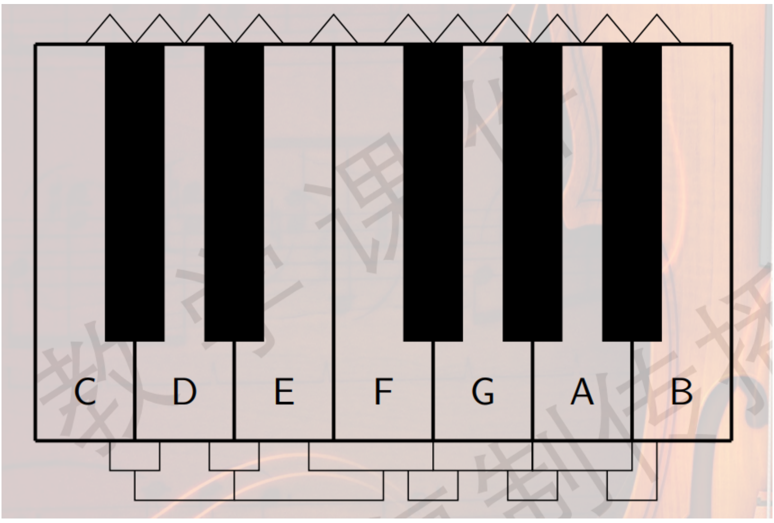


图 2.7: 钢琴

升号：♯，降号：♭，重升号：𝄪，重降号：𝄫，还原号：♮。

唱名法：do, re, mi, fa, sol, la, si

2.4 记谱法

目前音乐理论中普遍采用的记谱法是 **五线谱**, 其水平方向代表 **时间** 维度, 垂直方向代表 **音高** 维度.

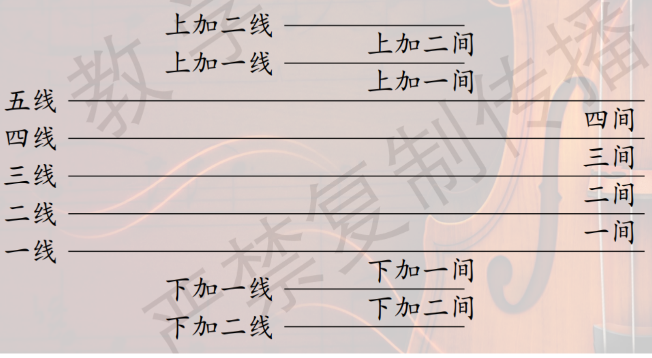


图 2.8: 五线谱

假定以四分音符为一拍

名称	音符	时值	拍数
全音符	𝅝		4
二分音符	𝅗𝅥		2
四分音符	♩		1
八分音符	♪		1/2
十六分音符	𝅘𝅥𝅯		1/4

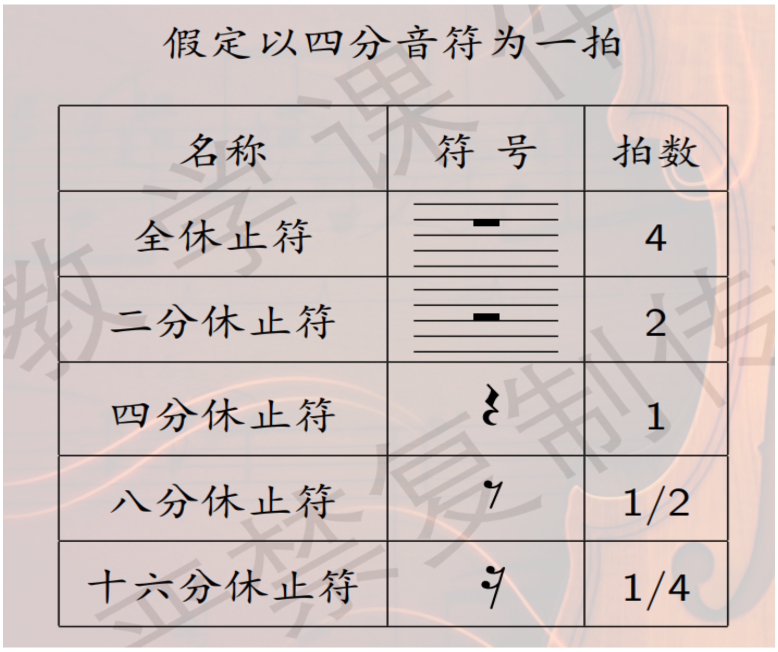
图 2.9: 音符

附点音符的时值 = 原来音符的时值 $\times \frac{3}{2}$.

假定以四分音符为一拍

音符	时值	拍数
𝅝.		6
𝅗𝅥.		3
♩.		$1\frac{1}{2}$
♪.		3/4
𝅘𝅥𝅯.		3/8

图 2.10: 音符



假定以四分音符为一拍

名称	符 号	拍数
全休止符		4
二分休止符		2
四分休止符	𝄽	1
八分休止符	𝄾	1/2
十六分休止符	𝄿	1/4

图 2.11: 音符

速度：某个音符 =x，每分钟唱 x 个某个音符。

2.4.1 高音谱号

图 2.12: 高音谱号

2.4.2 低音谱号

图 2.13: 低音谱号

2.4.3 中音谱号

中音谱号 𝄡 也称为 C 谱号，其中心位于三线，指明中央 C（即 C_4）的位置. 也有将其中心置于四线的，这时称其为 **次中音谱号 (tenor clef)**.

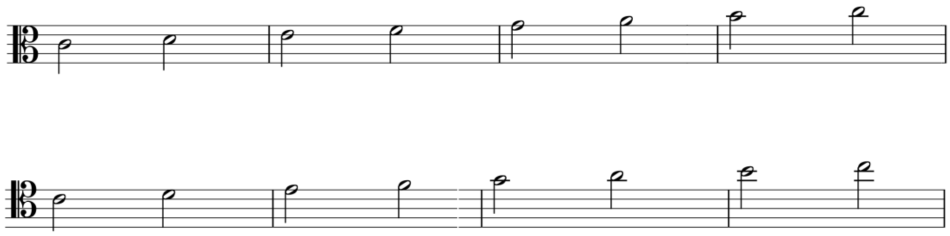


图 2.14: 中音谱号

2.4.4 变音记号

在乐谱每一行开始处，记在谱号后面的变音记号叫做谱号（key signature）。

图 2.15: 谱号

临时变音记号。

2.5 音程

怎么看音程？数钢琴相差的半音数。

两个音级之间的距离为音程（interval）。高的音为上方音，也叫冠音；低的音叫下方音，也叫根音。

两个音先后发声，旋律音程；同时发声，和声音程。

有纯音程的是一度、四度、五度、八度；有大小音程的是二度、三度、六度、七度；纯音程和大音程都来自 $C-X$，增音程来自 $C-\sharp X$，小音程来自 $C-\flat X$，减音程是在小音程上 C 再升半音。也可以记忆：0、2、4、5、7、9、11、12，再结合纯音程和大小音程来记。

	减音程	小音程	纯音程	大音程	增音程
一度			C - C (0)		C - ♯C (1)
二度	♯C - ♭D (0)	C - ♭D (1)		C - D (2)	C - ♯D (3)
三度	♯C - ♭E (2)	C - ♭E (3)		C - E (4)	C - ♯E (5)
四度	♯C - F (4)		C - F (5)		C - ♯F (6)
五度	♯C - G (6)		C - G (7)		C - ♯G (8)
六度	♯C - ♭A (7)	C - ♭A (8)		C - A (9)	C - ♯A (10)
七度	♯C - ♭B (9)	C - ♭B (10)		C - B (11)	C - ♯B (12)
八度	♯C - C′ (11)		C - C′ (12)		C - ♯C′ (13)

图 2.16: 音程

2.5.1 协和音程与不协和音程

协和音程：纯四度、纯五度、纯八度、大小三度、大小六度。

不协和音程：剩下的。

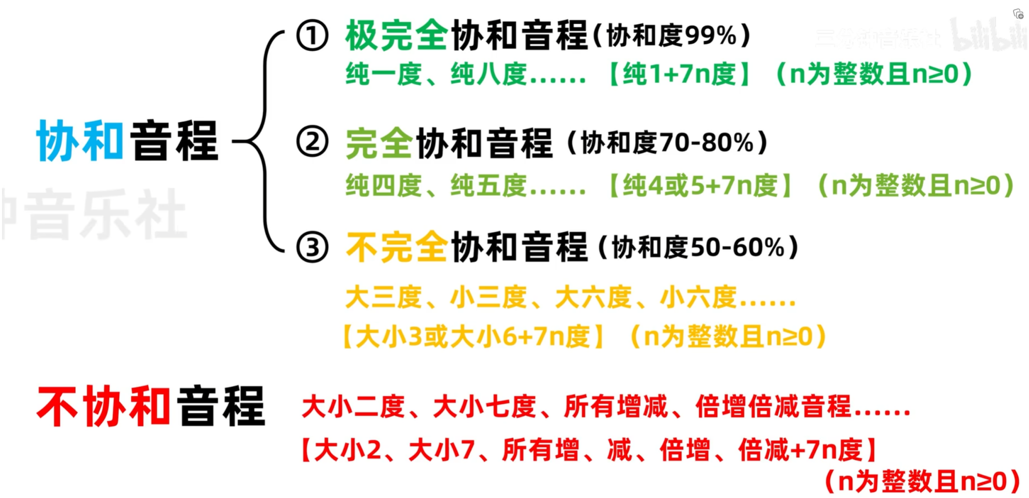
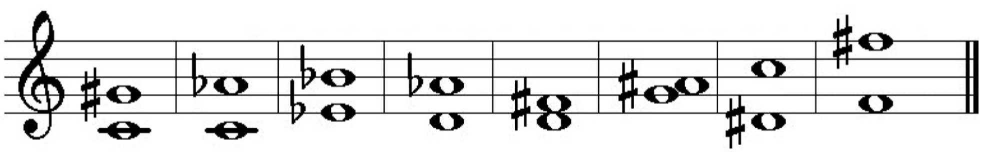


图 2.17: 音程分类

例题 2.3 平时作业一第二大题第 3 题：写出下列音程的完整名称 (如增三度).



解 第一个音程，$C_4-\sharp G_4$，是增五度音程；第二个音程，$C_4-\flat A_4$，是小六度音程；第三个音程，$\flat E_4-\flat B_4$，相差五度，五度的纯音程是 7 个半音，而这个音程是 7 个半音，所以是纯五度；

第四个音程，$D_4 - \flat A_4$，相差五度，五度纯音程是 7 个半音，这个音程是 6 个半音，所以是减五度；第五个音程，$D_4 - \sharp F_4$，相差三度，三度的大音程是 4 个半音，这个音程相差 4 个半音，所以是大三度；第六个音程，$G_4 - \sharp A_4$，相差两度，两度的大音程是 2 个半音，这个音程是 3 个半音，所以是增二度，这个地方要注意 $\sharp$ 是作用在中心线对的那个音符上的；第七个音程，$\sharp D_4 - C_5$，相差七度，七度的大音程是 11 个半音，这里是 9 个半音，所以是减七度；第八个音程，$F_4 - \sharp F_5$，相差八度，八度的纯音程是 12 个半音，这里是 13 个半音，所以是增八度。

2.6 赫尔霍姆兹的拍音理论

如果频率为 f，波动方程为 $\sin(2\pi ft + \phi)$。因为 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

假设一个声音的频率为 $\frac{\omega}{2\pi}$，另一个是 $\frac{\omega+\delta}{2\pi}$。那么他们俩叠加就是：

$$\sin((\omega+\delta)t) + \sin(\omega t) = 2\sin\left(\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t\right)\cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) \tag{2.1}$$

所以说产生了一个频率为 $\frac{\omega+\frac{\delta}{2}}{2\pi}$ 的音，同时音量又是周期变化的。这样就有了拍（beats）的感觉。

频率为 ω_1 和 ω_2 的两个声音叠加，每秒钟产生的拍音数为 $\delta = |\omega_1 - \omega_2|$。

不含拍音（实际上 $\delta < 6$ 或 $\delta > 120$ 也算）是协和音程。每秒含 33 个拍音最不协和。

拍音理论的缺陷：

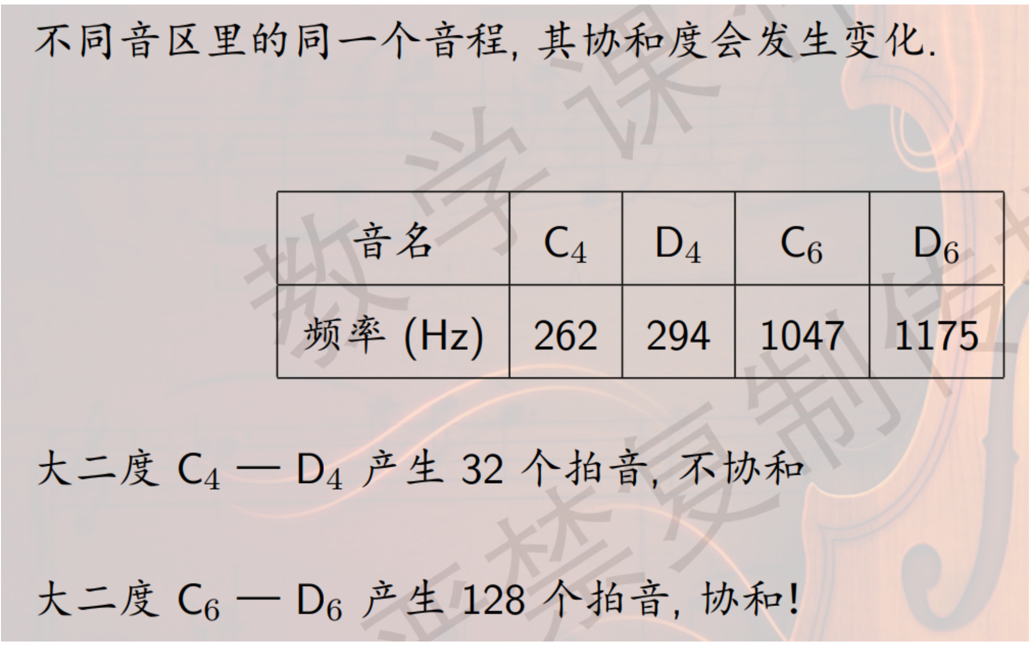


图 2.18: 拍音理论的缺陷

第三章 振动模态与泛音列

3.1 一维振动方程

乐器的分类

1. 气鸣乐器：边棱、唇鸣、簧鸣……
2. 弦鸣乐器：弓弦、弹拨、击打……
3. 电鸣乐器
4. 体鸣乐器：打击乐、木琴……
5. 膜鸣乐器：鼓、卡祖笛……

给定一根均匀的细弦，长度为 L，受到的张力为 T，线密度为 ρ。

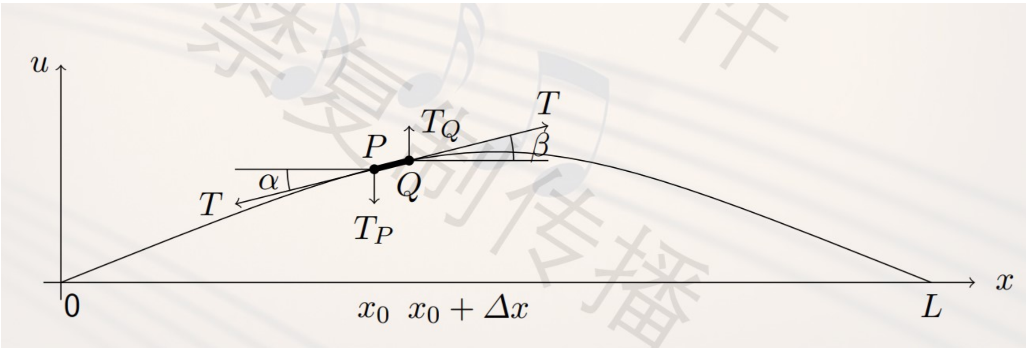


图 3.1: 受力分析图

所以 PQ 受到的力为 $F = T_Q - T_P \approx T(\tan\beta - \tan\alpha)$.

而 $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0}$，$\tan\beta = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0+\Delta x}$。

所以：

$$T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}\right) = \rho\Delta x \cdot a$$

经过整理得到：

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0}}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}\cdot a$$

令 $\Delta x \to 0$，可以得到：

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} = \frac{\rho}{T}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=x_0}$$

如果我们令 $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$，那么我们就可以得到：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

接着再满足边值条件：

$$u(0,t)=u(L,t)=0,\forall t\geqslant 0$$

最后可以解得完整解为：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}$$

如果我们记 $\omega_n=\frac{n\pi c}{L}$，那么：

$$u_n(x,t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(\omega_n t+\theta_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

其中 $\sin\theta_n=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$，$\cos\theta_n=\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$。

3.2 振动模态与泛音

振动模态：

$$u_n(x,t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(\omega_n t+\theta_n)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.1}$$

这个振动模态的频率为：

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{n}{2L}c=\frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{3.2}$$

当 $n=1$ 的时候，得到 Mersenne 定律。

$f_1,f_2,f_3,\cdots$ 组成的序列为固有频率，f_1 是基频。f_2 是第一泛音，f_3 是第二泛音。

同时如果记 $f_1=f$，那么泛音列：$f,2f,3f,\cdots$。

波节——振幅等于 0，$x=\frac{kL}{n},k=0,1,2,\cdots,n$。

波腹——振幅最大，$x=\frac{(2k+1)L}{2n},k=0,1,\cdots,n-1$。

如果基音是 C_2，那么它的第一泛音是 C_3，第二泛音是第一泛音的 $\frac{3}{2}$ 倍，应该是升高纯五度，为 G_3。

例题 3.1 平时作业二选择题第 2 题：给定一根两端固定的均匀细弦. 当其受到的张力为 T_1 时弦发出 C_4 音. 将其张力调整到 T_2 时该弦发出 G_3 音. 假定纯四度音程的频率比为 4:3, 求比值 $T_2:T_1$.

解 G_3-C_4 的音程为纯四度，从而有：

$$\begin{aligned}\frac{f_1}{f_2}&=\frac{4}{3}\\\frac{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_1}{\rho}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_2}{\rho}}}&=\frac{4}{3}\\\frac{T_1}{T_2}&=\frac{16}{9}\end{aligned}$$

3.3 拨弦与傅里叶级数

傅里叶级数：

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t\\ \beta_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

T 是周期,$T=\frac{2\pi}{n}$。

振动方程的解：

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\end{aligned}$$

现在比前面多了两个条件，一个是初始形状，一个是初始速度：

$$\begin{aligned}u(x,0)&=\phi(x),\forall x\in[0,L]\\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}&=\psi(x),\forall x\in[0,L]\end{aligned}$$

给定拨弦振动：一开始令 $\phi(x)$ 为一个折线：

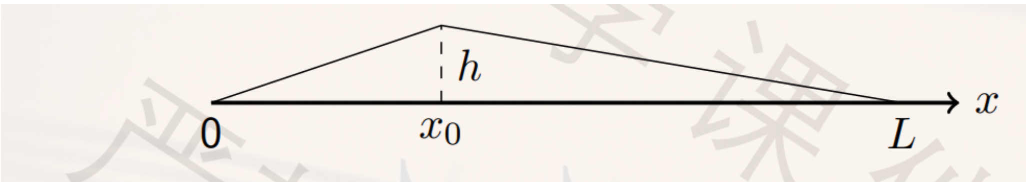


图 3.2: 拨弦振动

同时又有：

$$\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

先对 $\phi(x)$ 周期延拓：

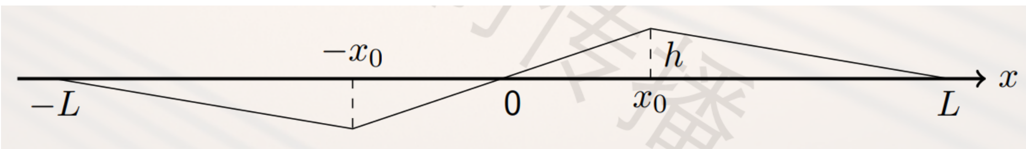


图 3.3: 周期延拓

此时可以求出：

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\phi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$$

如果假设 $\psi(x)=0, \forall x\in[0,L]$，那么可以得到 $b_n=0$。

所以如果在中点 $\frac{L}{2}$ 处拨动，得到：

$$(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi c}{L}t\right)$$

此时只有奇数倍的频率 $f_{2k+1}=\frac{(2k+1)c}{2L}$ 出现。**这里面是没有第一泛音的！**

例题 3.2 8. 一根两端固定的细琴弦，如果用手指拨动它的正中央使其振动发声，下面哪一振动模态在该声音的频谱中贡献最小？第一泛音。

3.4 管乐器

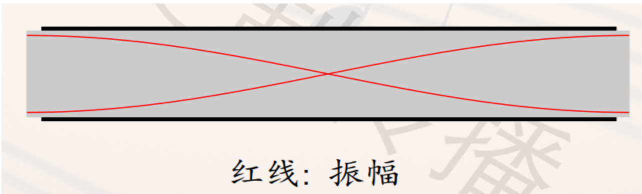


图 3.4: 管乐器

这个空气柱的长度不是管的长度，要端口校正。

波腹到波节的长度为波长的四分之一。

3.4.1 开管的振动模态

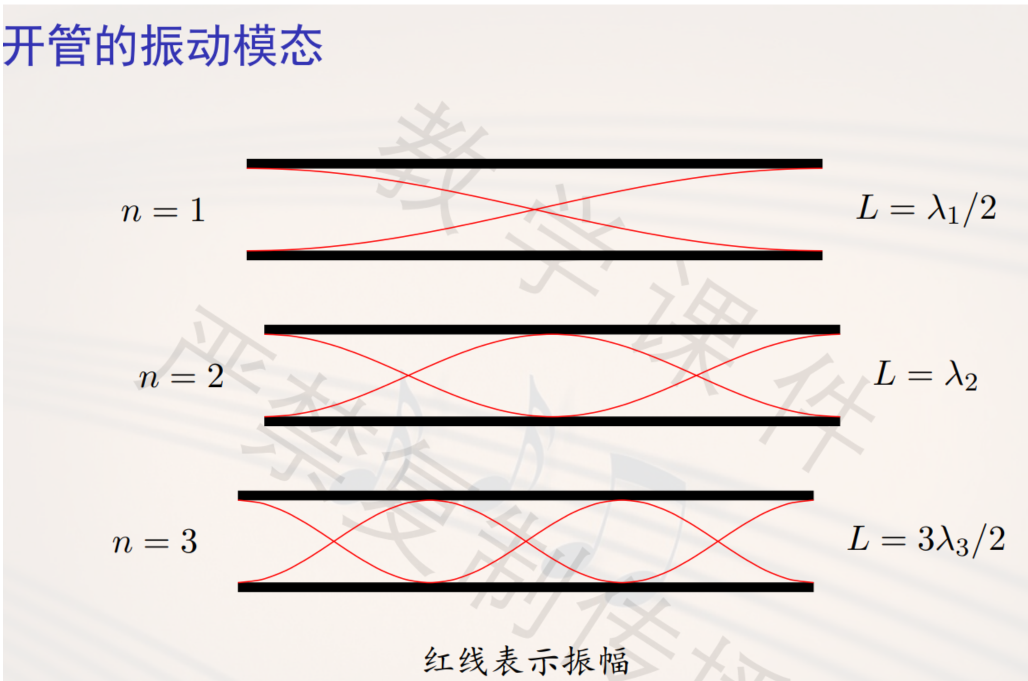


图 3.5: 开管的振动模态

所以有：

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

所以频率有：

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L}$$

泛音列为：

$$f, 2f, 3f, 4f, \ldots$$

3.4.2 闭管的振动模态

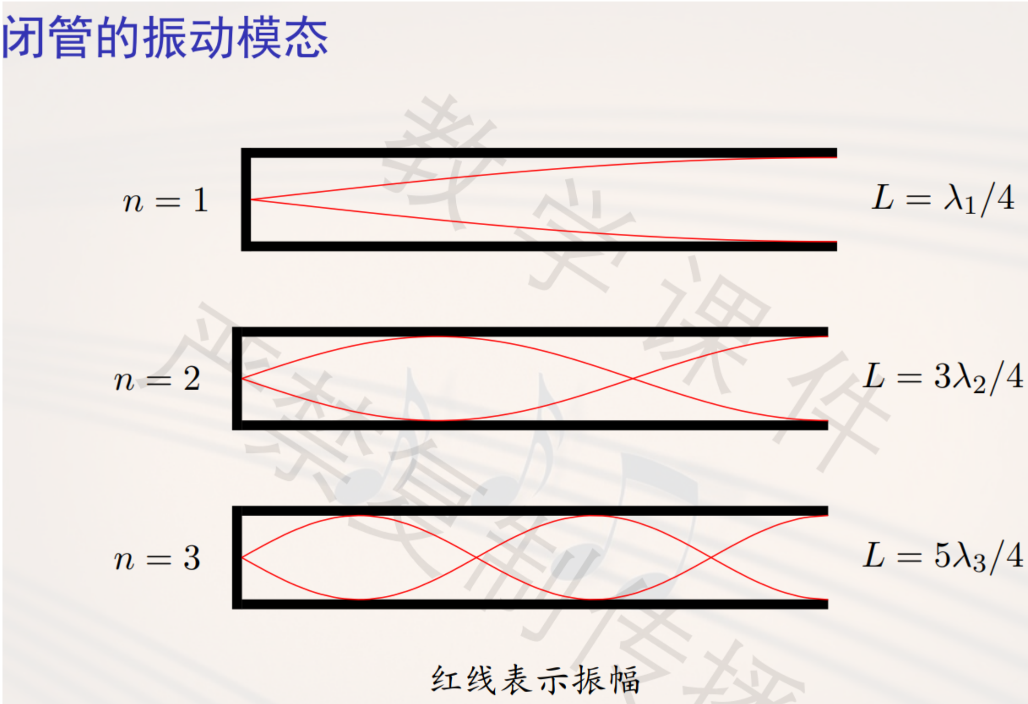


图 3.6: 闭管的振动模态

所以：

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

频率：

$$f_n = \frac{(2n-1)v}{4L}$$

泛音列为：

$$f, 3f, 5f, 7f, \ldots$$

超吹：也就是第二项。

为什么单簧管只能发出偶次泛音，而自然小号可以发出所有的泛音？这就是上面推导的泛音列的公式。

> 就簧哨乐器来说，哨子都是含于口中的，而各种号的号嘴都是同口唇紧密接触的，因此，吹奏端几近于封闭。这类乐器的管身主体部分若为圆柱形的（例如管子、筚篥、单簧管），则为五度超吹乐器；管身主体部分若为圆锥形的（例如唢呐、双簧管、萨克斯管），则为八度超吹乐器。——工学院吕浩鑫

长笛，开管，超吹高八度。

单簧管，闭管，超吹高 12 度。

例题 3.3 平时作业二选择题第 3 题：以下关于音色的说法正确的是：B

A. 音色是声音的基本物理属性之一，但是只有乐音才有音色，噪音没有音色.

B. 任何声音都有自己的波形图，并且可以通过傅里叶分析从波形图得到频谱图.

C. 鼓属于噪声乐器，所以在听觉上任何鼓都没有确切的音高.

D. 只要吹管乐器的长度和材质确定，其产生的泛音列也是确定的.（是不是开管呢）

ps: 有的鼓是有音高的，比如《爆裂鼓手》里：

图 3.7: 爆裂鼓手

例题 3.4 使用常规吹奏方式时，一支 F 调中国竹笛的筒音（按住所有指孔的最低音）音高是 C_5；若演奏者用双唇盖住吹孔，通过唇簧震动发音（可视为闭管乐器），在不考虑管口校正的情况下，其筒音音高是？C_4

解 因为开管的时候 $L=\frac{\lambda_1}{2}$，$f_1=\frac{v}{2L}$，而闭管的时候 $L=\frac{\lambda_1}{4}$，$f_1=\frac{v}{4L}$，那么闭管的时候最低音是开管的时候最低音的 $\frac{1}{2}$，也就是低了八度，所以就是 C_4。

例题 3.5 22 秋期末 • 2）吹管类乐器通过空气柱发声，一般可以分为开管乐器（两端开口）与闭管乐器（一端开口另一端封闭）。演奏家通过控制口型和气流，可以自如决定吹出基音或者吹出泛音。假设演奏家在长为 L 的开管乐器上可以吹出的最低频的泛音为 X，在长度同为 L 的闭管乐器上可以吹出的最低频的泛音为 Y。假设两乐器直径相同，且均为圆柱体，不计管口修正，那么 X 与 Y 的频率比为：4:3

解 我们要注意这里是吹出的泛音。

第四章 律学

想纯四度：4:3

理想纯五度：3:2

理想大三度：5:4

例题 4.1 18 年期末：1.（1）假定 C 的频率为 1，用不同律制求 E 的频率

五度相生（三分损益）、纯律、十二平均律

（2）求不同律制下 C 到 E 的音分数

五度相生（三分损益）、纯律、十二平均律

解 （1）五度相生：C, G, D, A, E, B，$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}$。也就是 E 的频率为 $\frac{81}{64}$。

纯律：直接用理想大三度 $\frac{5}{4}$ 来生律，所以是 $\frac{5}{4}$。

十二平均律：$r^4 = 2^{\frac{1}{3}}$。

（2）五度相生：$1200\log_2(\frac{64}{81}) = 1200(6 - 4\log_2 3)$。

纯律：$1200\log_2(\frac{5}{4}) = 1200(\log_2 5 - 2)$。

十二平均律：$1200\log_2 2^{\frac{1}{3}} = 400$。

4.1 三分损益

4.1.1 五声音阶

凡将起五音，凡首，先主一而三之。四开以合九九，以是生黄钟小素之首以成宫，三分而益之以一，为百有八，为徵，不无有三分而去其乘，适足，以是生商，有三分而复于其所，以是成羽，有三分去其乘，适足，以是成角。——《管子・地员》

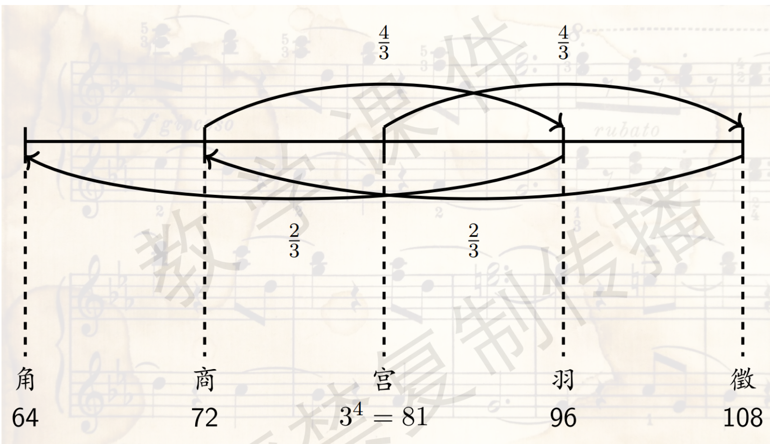


图 4.1: 五声音阶生律过程

把徵、羽除以 2，得到：**宫（81）**、**商（72）**、**角（64）**、**徵（54）**、**羽（48）**。
假定宫对应中央 C，有下面的五声音阶：

图 **4.2:** 五声音阶

不足：“宫——角”的比例是 81:64，不符合理想大三度的简单整数 5:4。

4.1.2 七声音阶

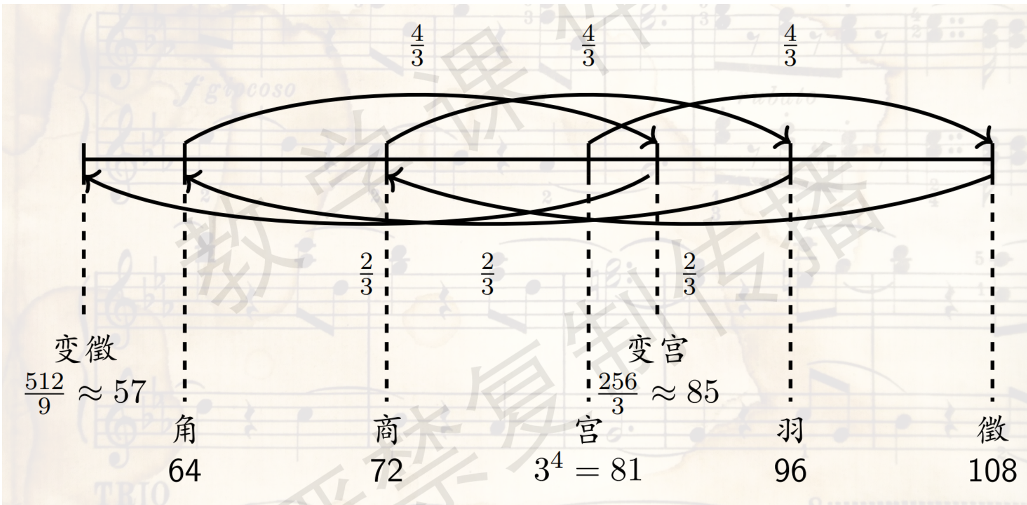


图 **4.3:** 七声音阶生律过程

(徵)	(羽)	(变宫)	宫	商	角	变徵	徵	羽	变宫
(108)	(96)	($\frac{256}{3}$)	81	72	64	$\frac{512}{9}$	54	48	$\frac{128}{3}$

图 **4.4:** 七声音阶生律过程

图 **4.5:** 七声音阶

七声音阶，雅乐音阶，古音阶。

4.1.3 十二律

黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生。三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。——《吕氏春秋》

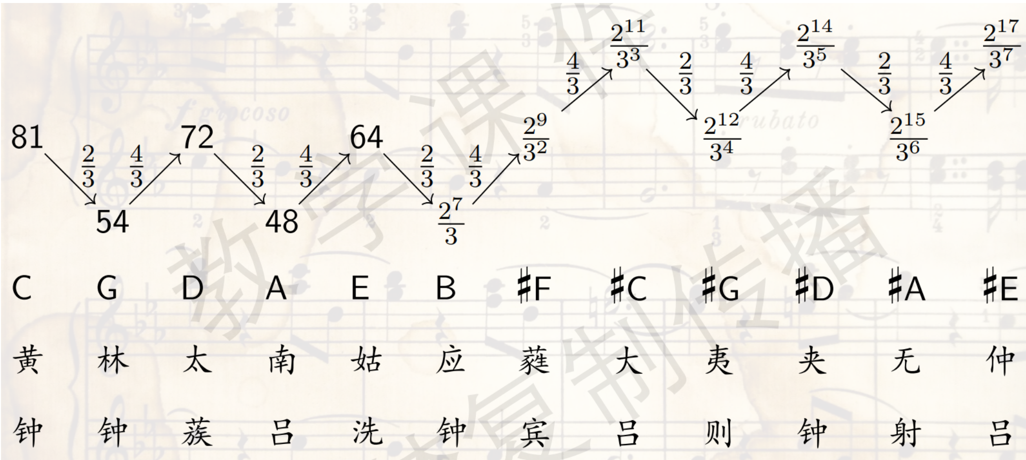


图 4.6: 十二律生律过程

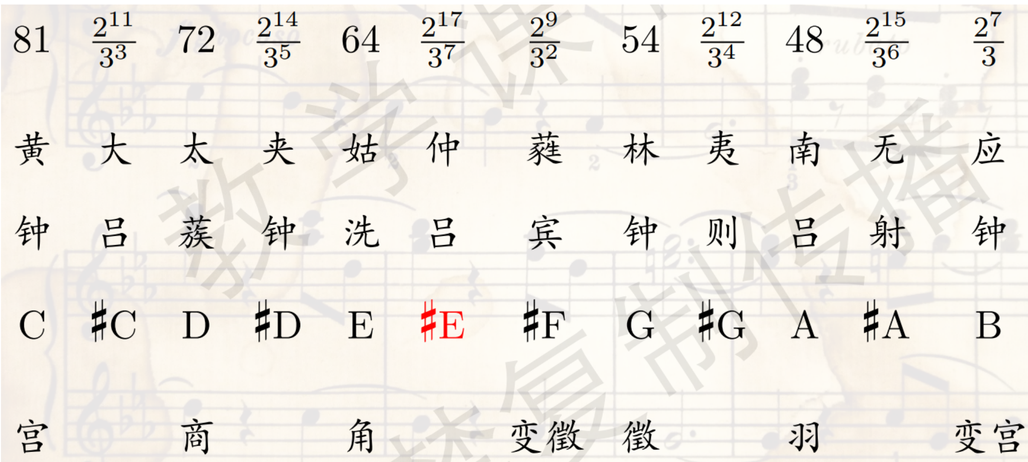


图 4.7: 十二律和七声音阶

4.1.3.1 “旋宫不归”的问题

在得到仲吕（♯E）对应的数值 $\frac{2^{17}}{3^7}$ 之后，继续三分损一，得到它上方纯五度的 ♯B，对应的数值为：

$$\alpha = \frac{2^{17}}{3^7} \times \frac{2}{3} = \frac{2^{18}}{3^8}$$

但是这个数值会小于 $\frac{81}{2}$，也就是高八度的 C′。说明对仲吕做三分损一，得到的音会比清宫略高。

例题 4.2 三分损益得出的律制没有理想的纯五度，五度相生得出的律制没有理想的大三度.（×）

理想的纯五度是 C – G，这里显然是的。

（22 秋期末 • 3）三分损益得到的变徵与毕达哥拉斯五度相生得到的 ♯F 音的频率相同。（√）

4.2 五度相生

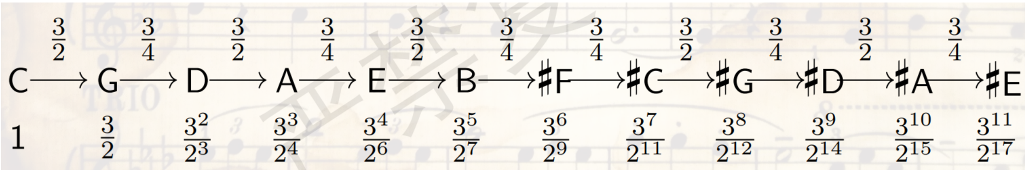


图 4.8: 五度相生生律过程

但是三度音程 C-E 的频率比为 81:64，大于理想的大三度比例 5:4。

不停地向上生成纯五度的音。超过八度就降八度。这就是把十二律的律长转换成为频率罢了。

4.2.1 毕达哥拉斯音差

如果得到了 ♯E 之后，我们继续向上升纯五度，得到 ♯B，再降低八度，这个音应该是和原来的起始音级 C 相等的。但是：

$$\frac{3^{11}}{2^{17}} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1.013643$$

这个数字就是著名的**毕达哥拉斯音差**。这也就是旋宫不归的问题了。

从 C 出现连续 12 次上升纯五度，应该有 84 个半音，再连续下降 7 个八度，也是 84 个半音，这个音应该和 C 相等，但是其实不然。

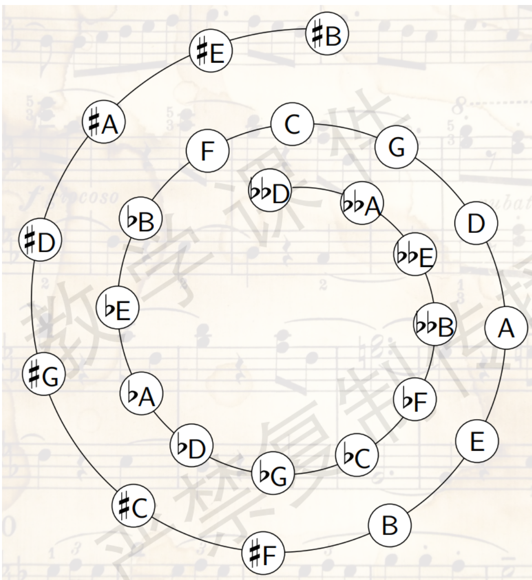


图 4.9: 毕达哥拉斯音差

例题 **4.3** 五度相生律存在毕达哥拉斯音差，所以不能用于给音域超过一个八度的乐器定音。(×)

因为你看，一直要到上升纯五度才会音高不准呢。

4.2.2 单声音乐和多声部音乐

单声音乐：单一曲调所构成的音乐。(同度或者八度)

多声音乐：公元 9 世纪前后，出现了奥尔加农。

1. 复调音乐：不同声部具有相对的独立性，按照对位法结合在一起。
2. 主调音乐：有一个主要旋律声部，其他伴奏、烘托。

贺绿汀《牧童短笛》的部分乐谱：

图 **4.10**: 《牧童短笛》部分乐谱

这张图我们可以看得出来，就是各个声部都很复杂，应该是互相独立的，是复调音乐。

这张图片我们可以看得出来，有一个声部还挺简洁的，是用来烘托的，所以是主调音乐。

4.3 纯律

主要由纯五度音程比例 3:2 和理想大三度音程比例 5:4 来生成。还有纯四度 4:3。

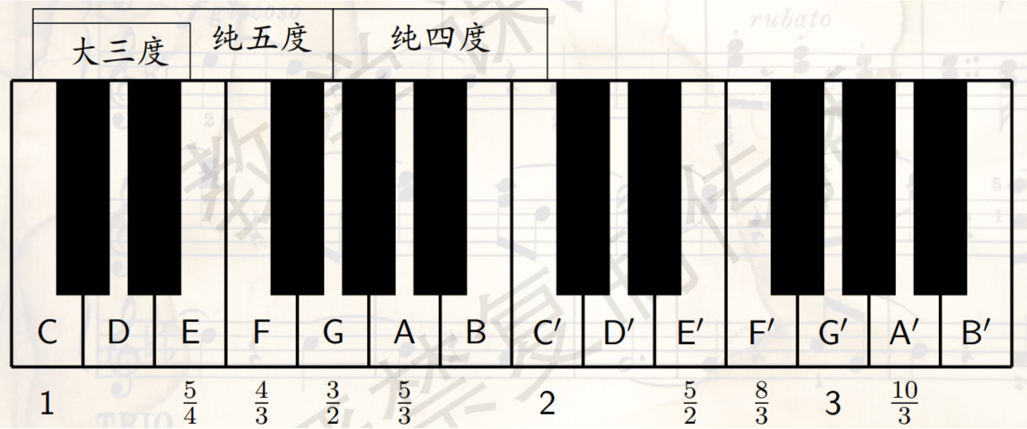


图 4.11: 纯律生律过程

首先，可以确定 C、E、G。

根据纯五度音程 $B:E=3:2$，可以解出 $B=\frac{15}{8}$。

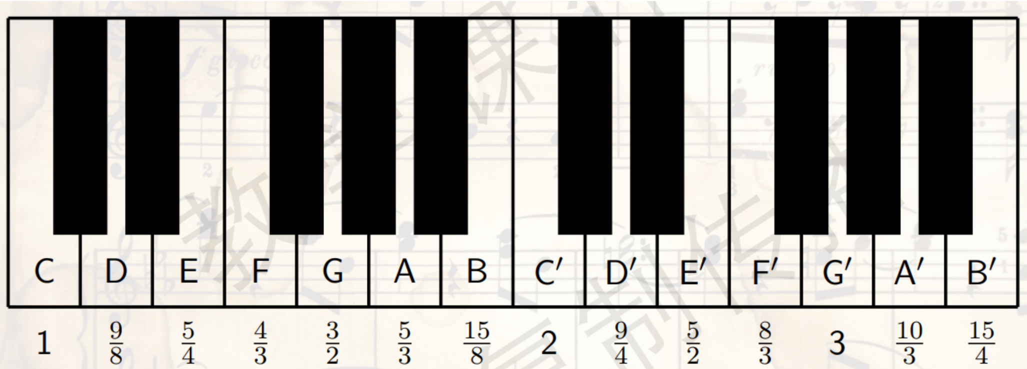


图 4.12: 纯律生律过程

正三和弦 C-E-G、F-A-C’、G-B-D’ 符合整数比 4:5:6。

先通过理想大三度和纯五度得到 E、G，再利用 B 和 E 差纯五度求出 B，利用 D’ 和 G 相差纯五度求出 D，利用 F 和 C’ 之间相差纯五度，求出 F，利用 A 和 F 之间相差大三度，得到 A。

4.3.1 不足之处

五度音程 D-A 不协和 $\frac{40}{27}$，小于 $\frac{3}{2}$。

有两种大二度，9/8 和 10/9。

谐调音差（syntonic comma）：C 连续上升 4 个纯五度（28 个半音），降低 2 个八度（24 个

半音），再降低一个大三度（4 个半音），为：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{81}{80} = 1.0125$$

转调的问题??

例题 4.4 纯律中自然音级之间所确定的自然音程中有两种不同距离的大二度，但是大三度的距离都是一致的。（√）

4.4 “中庸全音律”

设 C 的频率为 f，升高 n 个纯五度，降低 m 个八度：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot f = 2^m \cdot f$$

这也就等价于：

$$3^n = 2^{m+n}$$

这是不可能的。

对于纯律当中 C-D 为 9/8 和 D-E 为 10/9 做几何平均，这样令音级 D=$\frac{\sqrt{5}}{2}$ 就可以避免大二度音程不同的问题了。

一个八度，5 个全音（大二度）+ 两个半音（小二度），得到小二度应该为 $8 \cdot 5^{-\frac{5}{4}}$。

但是两个小二度要比一个大二度宽。

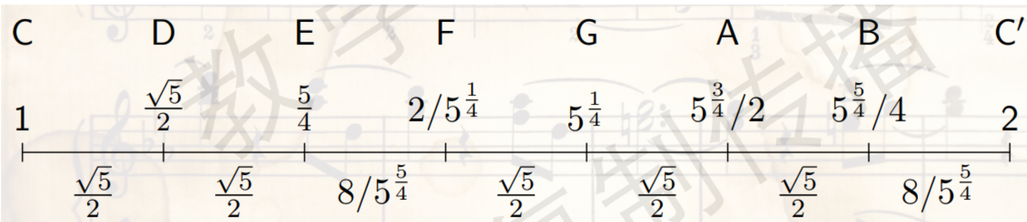


图 4.13: “中庸全音律”生律过程

消灭了谐调音差，但是产生了狼五度，因为纯五度的比例变小了。

4.5 平均律

新法密律 by 朱载堉。$r = 2^{\frac{1}{12}}$.

例题 4.5 十二平均律中的大三度不是理想大三度，因此不能用十二平均律为多声部音乐定音.（×）

4.6 音分

两个声音频率为 $f_1 < f_2$，两个声音之间的音分是：

$$1200\log_2\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

4.7 为啥有 12 个半音

连分数：

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}}$$

截取前 N 项，为 N 次渐进。

定理 4.1

设 A 是无理数，$N \geq 1$，$\frac{p_N}{q_N}$ 是 A 的连分数的 N 次渐进。如果整数 p, q 满足 $0 < q \leq q_N$，且 $\frac{p}{q} \neq \frac{p_N}{q_N}$，那么：

$$\left|A-\frac{p_N}{q_N}\right| < \left|A-\frac{p}{q}\right|$$

所以对于给定的复杂度，N 次渐进是 A 最佳有理逼近。

设 C 的频率为 f，升高 n 个纯五度，降低 m 个八度：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot f = 2^m\cdot f$$

这也就等价于：

$$\frac{m}{n} = \log_2(32)$$

再看 $\log_2(\frac{3}{2})$ 的 N 次渐进：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \cdots$$

第五章 音乐与人工智能

动机（motif）：构成旋律的最小结构单位。是最短的、清晰而又能独立的旋律音型。
随机排列：从音符 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 中有放回地随机选取若干，得到动机的胚胎。

5.1 随机过程

定义 5.1 (随机过程)

$\{\xi_t \in \Omega | t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 就称为一个随机过程。状态空间是 Ω。♣

5.1.1 马尔科夫链

定义 5.2 (马尔科夫链)

具有马尔科夫性质的随机过程是：

$$\begin{aligned} &P\{\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \ldots, \xi_{n-1} = k_{n-1}, \xi_n = k_n\} \\ =&P\{\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_n = k_n\} \end{aligned}$$

具有马尔科夫性质的随机过程是马尔科夫链。♣

下一个状态只和当前的状态有关，和过去的状态毫无关系，称为无记忆性。

定义 5.3 (时间齐次马尔科夫链)

时间齐次马尔科夫链：对任意的 $x, y \in \Omega$，相应的条件概率不随时间变化，即对任意的 $t > 0$，总有：

$$P(\xi_{t+1} = y | \xi_t = x) = P(\xi_t = y | \xi_{t-1} = x)$$

♣

我们记 $P\{\xi_{t+1} = k_j | \xi_t = k_i\} = p_{ij}$ 称作从状态 $\{\xi_{t+1} = k_j\}$ 到状态 $\{\xi_t = k_i\}$ 的转移概率。
我们有马尔科夫链的转移概率矩阵：

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵 P 的第 i 行元素 $p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{in}$ 分别是事件 $\{\xi_{t+1} = k_j\}$ 在条件 $\{\xi_t = k_i\}$ 的前提下发

生的概率。那么：

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

随机音乐：通过选定一个初始音级 $\xi_0 = k_0$，可以通过 P 选定 $\xi_1 = k_1$，依次继续。

5.1.2 高阶马尔科夫链

定义 5.4 (高阶马尔科夫链)

设 m 正整数，对任意的 $n > m$，有：

$$\begin{aligned} & P\{\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \ldots, \xi_n = k_n\} \\ = & P\{\xi_{n+1} = k_{n+1} | \xi_{n-m+1} = k_{n-m+1}, \ldots, \xi_n = k_n\} \end{aligned}$$

也就是说，到下一个状态只和前面的 m 个状态有关。

那么这样就是一个 m 阶的马尔科夫链。 ♣

5.2 遗传算法

个体（individuals）、种群 (population)，要对这些个体进行交叉（crossover）、变异（mutation），让他们进行进化，同时设计一个适应度函数（fitness function）来衡量当前进化的效果。

复制：事先给定一个阈值，适应度高于这个阈值的就直接进入下一代。

假设当前的种群有 N 个个体 $i_1, i_2, \ldots, i_N$，适应度为 $f(i_k)$，那么个体 i 被选定为亲本的概率为：

$$\frac{f(i)}{\sum_{k=1}^{N} f(i_k)}$$

Algorithm 1: 遗传算法

Randomly generates initial population $P = \{i_1, i_2, \cdots, i_N\}$;
repeat
  for $k \leftarrow 1$ *to* $N - 1$ **do**
    Calculate $f(i_k)$;
  if $\exists k$, *s.t.* $f(i) \geqslant \alpha$ **then**
    halt ;
  repeat
    Select fathers,crossover,mutation;
  until *Next generation's size* $= N$;
  Next population $P = \{$next generation individuals$\}$;
until M *iteration*;

5.3 机器学习：音乐信息检索

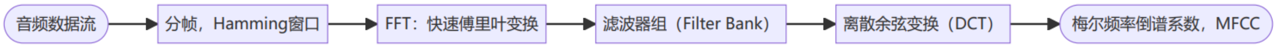


图 5.1: 机器学习

注：曾经考过梅尔频率倒数

第六章 调式、音阶与和弦

6.1 调式与音阶

调式-主音

自然大调：两个相同的四声音阶组成，这个四声音阶是大二度、大二度、小二度。两个四声音阶之间是大二度。

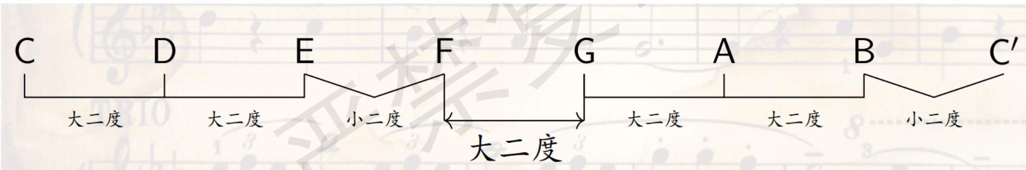


图 6.1: 自然大调

I	II	III	IV	V	VI	VII
主音	上主音	中音	下属音	属音	下中音	导音

表 6.1: 自然大调

自然小调：第一个四声音阶：大二度、小二度、大二度；第二个四声音阶：小二度、大二度、大二度。两个四声音阶之间是大二度。

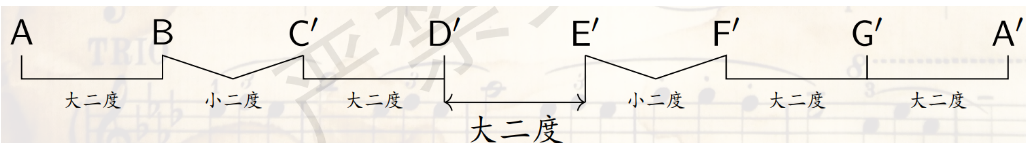


图 6.2: 自然小调

和声小调：在自然小调中，将第 VII 级导音升高半音。

旋律小调：将和声小调中的第 VI 级导音也升高半音。旋律小调音阶的下行恢复称为自然小调。

图 6.3: 调号

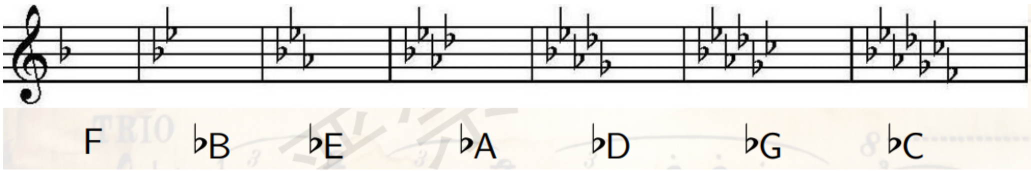


图 6.4: 调号

主音	升号数目	升号音级
C	0	
G	1	♯F
D	2	♯F,♯C
A	3	♯F, ♯C, ♯G
E	4	♯F, ♯C, ♯G, ♯D
B	5	♯F, ♯C, ♯G, ♯D, ♯A
♯F	6	♯F, ♯C, ♯G, ♯D, ♯A, ♯E
♯C	7	♯F, ♯C, ♯G, ♯D, ♯A, ♯E, ♯B

图 6.5: 升号调

主音	降号数目	降号音级
C	0	
F	1	♭B
♭B	2	♭B, ♭E
♭E	3	♭B, ♭E, ♭A
♭A	4	♭B, ♭E, ♭A, ♭D
♭D	5	♭B, ♭E, ♭A, ♭D, ♭G
♭G	6	♭B, ♭E, ♭A, ♭D, ♭G, ♭C
♭C	7	♭B, ♭E, ♭A, ♭D, ♭G, ♭C, ♭F

图 6.6: 降号调

在平时作业三里面写道：e 和声小调的调号也为一个升号。
e 和声小调：E, ♯F, G, A, B, C′, ♯D′, E′。

6.1.1 关系大小调和平行大小调

每个大调都对应于一个调号相同的小调——关系大小调。
具有相同主音的大调和小调——平行大小调。
同样的，我们也有关系大、小三和弦和平行大、小三和弦

大调	平行小调	关系小调	大调	平行小调	关系小调
C	c	a			
G	g	e	F	f	d
D	d	b	♭B	♭b	g
A	a	♯f	♭E	♭e	c
E	e	♯c	♭A	♭a	f
B	b	♯g	♭D	♭d	♭b
♯F	♯f	♯d	♭G	♭g	♭e
♯C	♯c	♯a	♭C	♭c	♭a

图 6.7: 关系大小调

6.2 和弦

6.2.1 三和弦和七和弦

三度叠置：根音、三音、冠音

大三和弦：4+3

小三和弦：3+4

增三和弦：4+4

减三和弦：3+3

在三和弦上方叠加一个七度音就会变成七和弦。

三度结构	命名结构	名称	简称
小三 + 小三 + 小三（3+3+3）	减三、减七	减减七和弦	减七和弦
小三 + 小三 + 大三（3+3+4）	减三、小七	减小七和弦	半减七和弦
小三 + 大三 + 小三（3+4+3）	小三、小七	小小七和弦	小七和弦
小三 + 大三 + 大三（3+4+4）	小三、大七	小大七和弦	/
大三 + 小三 + 小三（4+3+3）	大三、小七	大小七和弦	属七和弦
大三 + 小三 + 大三（4+3+4）	大三、大七	大大七和弦	大七和弦
大三 + 大三 + 小三（4+4+3）	增三、大七	增大七和弦	/

表 6.2: 七和弦

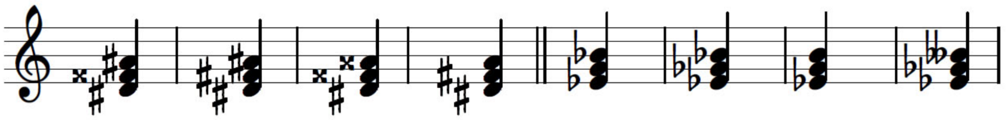
因为七和弦至少包含一个不和谐的七度音程，所以它们都是不和谐音程。

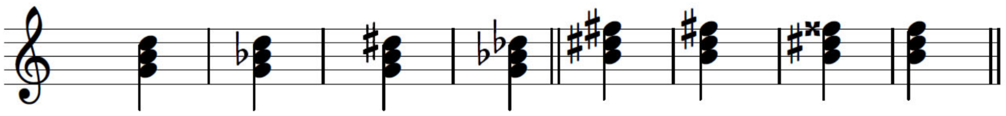
七和弦不存在增增七和弦，因为增七度和纯八度音效接近，使得该七和弦“退化”为三和弦。

例题 6.1 分别写出以音级 ♯D,♭E,G,B 为根音的大三和弦、小三和弦、增三和弦、减三和弦，并在高音谱表上用四分音符将其标出。

解

音级	大三和弦	小三和弦	增三和弦	减三和弦
♯D	{♯D,𝄪F, ♯A}	{♯D, ♯F, ♯A}	{♯D,𝄪F,𝄪A}	{♯D, ♯F, A}
♭E	{♭E, G, ♭B}	{♭E, ♭G, ♭B}	{♭E, G, B}	{♭E, ♭G, 𝄫B}
G	{G, B, D′}	{G, ♭B, D′}	{G, B, ♯D′}	{G, ♭B, ♭D′}
B	{B, ♯D′, ♯F′}	{B, D′, ♯F′}	{B, ♯D′, F′}	{B, D′, F′}





例题 6.2 请写出以 A 为根音的七个七和弦，并在高音谱表上将其标出。

解

形式	名称	和弦
3+3+3，减三和弦，减七度	减减七和弦	$\{A, C', \flat E', \flat G'\}$
3+3+4，减三和弦，小七度	减小七和弦	$\{A, C', \flat E', G'\}$
3+4+3，小三和弦，小七度	小小七和弦	$\{A, C', E', G'\}$
3+4+4，小三和弦，大七度	小大七和弦	$\{A, C', E', \sharp G'\}$
4+3+3，大三和弦，小七度	大小七和弦	$\{A, \sharp C', E', G'\}$
4+3+4，大三和弦，大七度	大大七和弦	$\{A, \sharp C', E', \sharp G'\}$
4+4+3，增三和弦，大七度	增大七和弦	$\{A, \sharp C', \sharp E', \sharp G'\}$

6.2.2 和弦的转位

三和弦有两种转位，如果是以三音为低音的是第一转位，也叫六和弦，因为此时低音与高音相差六度。

以五音作为低音的三和弦被称为第二转位，也称作四六和弦，此时低音和中音、高音相差四度、六度。

七和弦，第一转位，五六和弦；第二转位，三四和弦；第三转位，二和弦。

所谓“根音”，顾名思义，就是“根本之音”。和弦的根音，就是一个和弦的根本之音。和弦即是建立在这个根音之上的。所以，一个特定的和弦，无论各音如何排序，其根音总是特定的，不会随音高顺序而变化。在原位和弦中，和弦的根音即是最低的那个音。因为原位和弦是在根音的基础上，向上作三度音的叠加而构成的。但随着和弦的转位，和弦根音就不在最低音的位置了。要在转位和弦中，正确找到根音，就要看上下音之间的音程关系。在三和

弦的转位中，如果某音与其下方音成四度音程关系，则这个音就是和弦的根音；在七和弦的转位中，如果某音与其下方音成二度音程关系，则这个音就是根音。

6.3 调式中的和弦

用罗马数字来表示，大写为根音到三音为大三度音程，小写为小三度。

用上标 $^{\circ}$ 和 $^{+}$ 分别表示减三和弦和增三和弦。

用上标 $^{\circ}$ 和 $^{\varnothing}$ 来表示减七和弦和半减七和弦，用 ^{M} 表示大七和弦或者小大七和弦，用 $^{+}$ 表示增大七和弦，大小七和弦和小七和弦不加上标。

用下标 $_6$ 和下标 $_{\substack{6\\4}}$ 来表示三和弦的第一转位和第二转位。

用下标 $_7$，$_{\substack{6\\5}}$，$_{\substack{4\\3}}$ 和 $_2$ 分别表示七和弦的原位、第一转位、第二转位和第三转位。

例题 6.3 在低音谱表上写出下列调式中的 II、III、VI、VII 级三和弦。(注意题目中的大写罗马数字并不代表该级和弦一定为大三和弦)

a) ♭B 自然大调 b) b 和声小调

解 ♭B 自然大调：♭B, C′, D′, ♭E′, F′, G′, A′, ♭B′。

b 和声小调：B, ♯C′, D′, E′, ♯F′, G′, ♯A′, B′。

例题 6.4 根据给定的调式和三和弦，写出对应的和弦标记，包括和弦性质、转位。

解 B 大调：B, ♯C′, ♯D′, E′, ♯F′, ♯G′, ♯A′, B′。这个和弦是 ♯F_3, ♯A_3, ♯C_4，是第五级和弦，没有转位，是大三和弦，为 V。

♭A 大调：♭A, ♭B, C′, ♭D′, ♭E′, F′, G′, ♭A′。这个和弦是 ♭B_2, ♭D_3, F_3，是第二级和弦，没有转位，是小三和弦，为 ii。

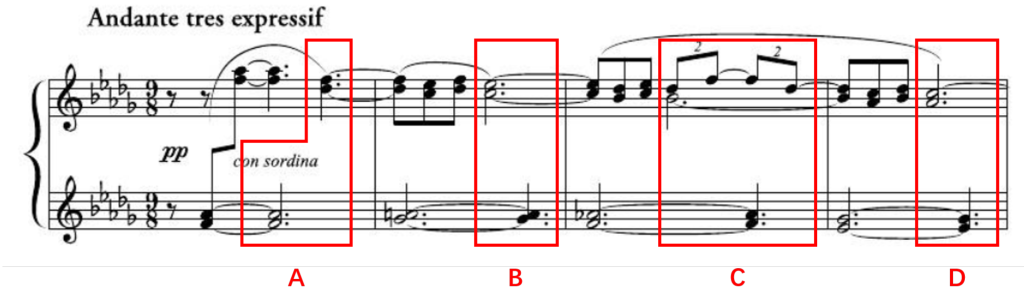
♯F 大调：♯F, ♯G, ♯A, B, ♯C′, ♯D′, ♯E′, ♯F′。这个和弦是 ♯G_2, B_2, ♯D_3，是第二级和弦，没有转位，是小三和弦，为 ii。

♭D 大调：♭D, ♭E, F, ♭G, ♭A, ♭B, C′, ♭D′。这个和弦是 ♭A_2, ♭D_3, F_3，有转位，是第二转位，大三和弦，为 $I_{\substack{6\\4}}$。

G 大调：G, A, B, C′, D′, E′, ♯F′, G′。这个和弦是 B_2, D_3, ♯F_3，小三和弦，为 iii。

C 大调：C, D, E, F, G, A, B, C′。这个和弦是 D_3, G_3, B_3，大三和弦，第二转位，$V_{\substack{6\\4}}$。

例题 6.5 下图是德彪西钢琴曲《月光》（Clair De Lune）开头部分的乐谱。请阅读下图中的谱例。除非题目涉及，否则不考虑和弦转位。请注意题目中的所有变音记号，据此判断以下 5 个命题。



1. 乐谱中，A、B、C、D 中的音各自构成七和弦。F

2. 若该片段是自然大调，那么 A 所示和弦的和弦标记为 。T

3.B 所示和弦为 $\flat$A 大小七和弦。F

4.C、D 所示和弦的和弦类型相同（即，如，均为小小七和弦）。F

5.C 所示和弦的最低音为 F_4，是该和弦的五音，所以 C 所示和弦是该和弦的第二转位。T

解 1.A 中的音为：$F_4, \flat A_4, \flat D_5, F_5$，3+5+3，这个就不能构成七和弦了。但是有 $\flat D_4, F_4, \flat A_4$ 是大三和弦。大三和弦的第一转位，六和弦。

2. 现在不考虑和弦转位，A 在 $\flat$D 大调是 I。

3.B 中的音为：$\flat G_4, A_4, C_5, \flat E_5$，现在还原为原位的和弦，$A_4, C_5, \flat E_5, \flat G_5$，3+3+3，是减减七和弦。（注意 A_4 这个音被还原了，所以没有降）

4.C 中的音：$F_4, \flat A_4, \flat B_4, \flat D_5, F_5$，还原为原位，$\flat B_3, \flat D_4, F_4, \flat A_4$，3+4+3，小小七和弦。D 中的音：$E_4, \flat G_4, \flat A_4, C_5$，还原为原位，$\flat A_3, C_4, E_4, \flat G_4$，3+4+2，这应该甚至不是和弦。

5. 正确的。

6.3.1 和弦的调性功能

在调式的主音（I）、下属音（IV）、属音（V）音级上构成的和弦分别为主和弦、下属和弦和属和弦。这些都被称为正和弦。

主和弦：稳定性、结束、完成、乐曲开始、调性特征

属和弦：不稳定性、进行到一半、尚未结束、形成对比

下属和弦：连接、过渡

在一定范围内的和弦连接被称为和声进行。

虚线表示任意和弦都可以在 I 后面出现。

从不和谐的和弦出发，连接到协和和弦或者较为协和的和弦，这样的和弦进行被称为解决（resolution）。调性音乐中最终都要进行到主和弦 I。

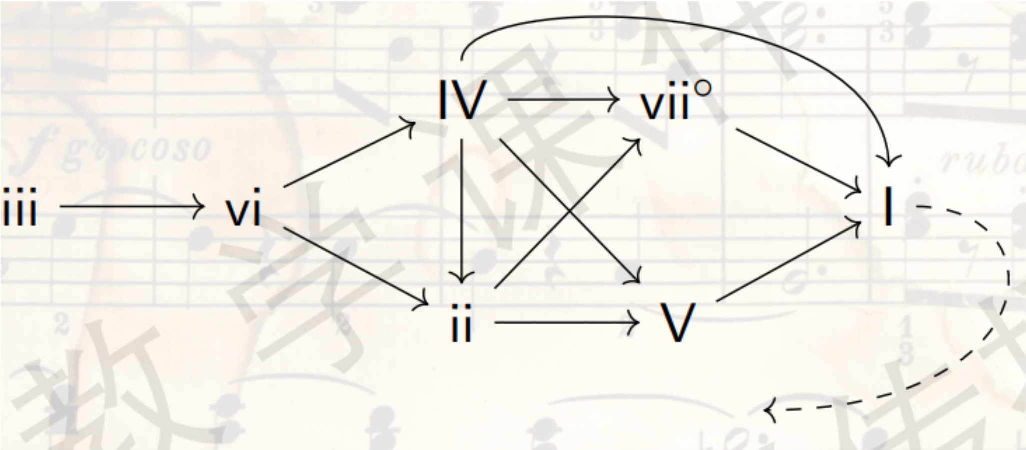


图 6.8: 和声进行

第七章 旋律与对称

7.1 三类变换

移调变换：严格移调、调式移调

e.g.C,E,G 升高四个半音的严格移调为 E,$\sharp$G,B。

但是如果属于 C 大调音阶和 F 大调音阶，做调性移调就变成了 E,G,B 和 E,G,$\flat$B。

乐音体系的数字化：

$$\mathbb{M} = \{\mathrm{C}_0, \ldots, \mathrm{B}_0, \mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{C}_8\}$$

然后把这 97 个音级与数字 0,1,2,. . . , 96 相对应。

定义 7.1 (移调变换)

$$T_n(x) = x + n$$

♣

定义 7.2 (倒影变化)

以 $\mathrm{C}_4 = 48$ 为对称轴，

$$I(x) = 96 - x, \forall x \in \mathbb{M}$$

♣

定义 7.3 (逆行变换)

$$R(x_1 x_2 \ldots x_k) = x_k x_{k-1} \ldots x_1$$

♣

例题 7.1 在某个自然小调内的一段旋律经过严格移调变换后，一定存在某个自然小调调式，使移调后所有的音都落在其中。

7.2 等价关系和音类

二元等价关系要求自反性、对称性、传递性，不要求完备性。

协和音程关系：自反性 $\surd$ 对称性 $\surd$ 传递性 $\times$

八度关系是等价关系，构成的等价类为音类。

12 个音类：

$$\overline{\mathrm{C}}, \overline{\sharp\mathrm{C}} = \overline{\flat\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}, \ldots, \overline{\mathrm{A}}, \overline{\sharp\mathrm{A}} = \overline{\flat\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}$$

音类空间：

$$\mathscr{PC} = \{\overline{\mathrm{C}}, \overline{\sharp\mathrm{C}} = \overline{\flat\mathrm{D}}, \overline{\mathrm{D}}, \ldots, \overline{\mathrm{A}}, \overline{\sharp\mathrm{A}} = \overline{\flat\mathrm{B}}, \overline{\mathrm{B}}\}$$

图 **7.1:** 音类圆周

7.3 移调变换群

移调变换构成的集合为:

$$\mathscr{T} = \{T_i | 0 \leqslant i \leqslant 11\}$$

$(\mathscr{T}, *)$ 满足结合律，有单位元 T_0，有逆元 $T_{-n \bmod 12}$。还满足交换律，是一个阿贝尔群。同时它还是一个循环群 $\langle T_1 \rangle$，因为都可以由 T_1 生成。

定义 7.4 (同构)

(1) 设 $(G, *)$ 和 $(H, \star)$ 是两个群，如果映射：$\alpha : G \longrightarrow H$ 满足

$$\alpha(a * b) = \alpha(a) \star \alpha(b), \forall a, b \in G,$$

我们就称 α 是一个从 G 到 H 的同态。

(2) 如果群同态 α 还是一个双射，那么 α 是一个同构映射，这个时候也称 G 和 H 是同构的。$G \cong H$。 ♣

定理 7.1

$(\mathscr{T}, *) \cong (\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$. ♡

证明 定义映射 $\alpha : \mathscr{T} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12}$：$\alpha(T_k) = \overline{k}, 0 \leqslant k \leqslant 11$ 即可。

$$I(\overline{x}) = \overline{-x}, \forall\, \overline{x} \in \mathbb{Z}_{12}$$

定理 7.2

$\forall k = 0, 1, 2, \ldots, 11,$

$$T^k * I : x \mapsto k - x \,(\mathrm{mod} 12), 0 \leqslant x \leqslant 11$$

移调变换和倒影变换生成的群记作：

$$\mathscr{D} = \langle I, T \rangle$$

它不是交换群，因为有 $T^k * I = I * T^{-k} = I * T^{12-k}$，它同构于正十二边形的变换群（二面体群）：

$$\mathscr{D} \cong D_{24}$$

加入逆行变换的话，得到：

$$\mathscr{M} = \langle T, I, R \rangle$$
$$|\mathscr{M}| = 48$$
$$\mathscr{M} \cong \langle T, I \rangle \times \langle R \rangle$$

7.4 十二音技术

奥地利作曲家勋伯格建立的。

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	♭E	♯A	D	F	E	C	♯F	♯G	♯C	A	B	G	R_0
P_5	♯G	♭E	G	♯A	A	F	B	♯C	♯F	D	E	C	R_5
P_1	E	B	♭E	♯F	F	♯C	G	A	D	♯A	C	♯G	R_1
P_{10}	♯C	♯G	C	♭E	D	♯A	E	♯F	B	G	A	F	R_{10}
P_{11}	D	A	♯C	E	♭E	B	F	G	C	♯G	♯A	♯F	R_{11}
P_3	♯F	♯C	F	♯G	G	♭E	A	B	E	C	D	♯A	R_3
P_9	C	G	B	D	♯C	A	♭E	F	♯A	♯F	♯G	E	R_9
P_7	♯A	F	A	C	B	G	♯C	♭E	♯G	E	♯F	D	R_7
P_2	F	C	E	G	♯F	D	♯G	♯A	♭E	B	♯C	A	R_2
P_6	A	E	♯G	B	♯A	♯F	C	D	G	♭E	F	♯C	R_6
P_4	G	D	♯F	A	♯G	E	♯A	C	F	♯C	♭E	B	R_4
P_8	B	♯F	♯A	♯C	C	♯G	D	E	A	F	G	♭E	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

图 7.2: 十二音技术

给定初始音列 P_0，P_0 是 12 个音类排列成的，移调变换得到 $P_0, P_1, \ldots, P_{11}$。
对 P_n 做关于其第一个音类的倒影变换，得到一个倒影音列 I_n。
对 P_n 逆行，得到逆行音列 R_n。

逆行倒影得到 RI_n。

每个格子里是音类，一行 12 个音类构成一个音列。

然后在乐曲中具体使用当前音类中的哪个音符是由作曲家自己决定的。

7.5 音列的对称性

例:设 P_0 是一个全半音音阶:$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$。那么有 $I_0:0,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1$。所以有 $I_0 = R_1$，同样的可以得到 $I_1 = R_2, I_2 = R_3, \ldots, I_{11} = R_0$，再用逆行变换，得到：$RI_0 = P_1, RI_1 = P_2, \ldots, RI_{11} = P_0$。所以我们最后就得到 24 个互异的音列。

$P_0, P_1, \ldots, P_{11}$ 和 $I_0, I_1, \ldots, I_{11}$ 是不同的。

证明思路：假设有 $I_k = P_n$，可以说明 $k = n$，然后推出矛盾。

因为 $P_0 = I_k$ 不可能了，所以就去考虑 $P_0 = RI_k, P_0 = R_k$ 这样子。

定理 7.3

给定音列 $P_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}, a_{11}$，则存在 $k: 0 \le k \le 11$，使得 $I_k = R_0$ 的充要条件是：

$$0 + a_{11} = a_1 + a_{10} = \cdots = a_5 + a_6 = k \pmod{12}$$

证明 这也很简单，将 $I_k = I * T^k(P_0) = I((k, k+a_1, \ldots, k+a_{11})) = (k, k-a_1, \ldots, k-a_{11})$ 带入即可。

上面也等于 $RI_k = P_0$。

上述定理7.3中的 k 是奇数。因为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 6k = 66 \pmod{12}, k = 2q + 11$。

满足定理7.3的，现在我们不假设第一项是 0，也就是说我们现在引入了 a_0，那么 $a_0 + a_{11} = k \pmod{12}$，现在 a_0 有 12 中取法，现在 k 还没有被决定，考虑到 k 是奇数，所以 k 会有 6 种取法，k 一旦被取定，那么 a_{11} 也就被取定了。现在 a_1 有 10 种取法，如果 a_1 被取定了，那么 a_{10} 也将被取定了。依此类推。所以总共有：

$$12 \times 6 \times (10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2) = 276480$$

定理 7.4

给定音列 $P_0 = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}, a_{11}$，则存在 $k: 0 \le k \le 11$，使得 $P_0 = R_k$ 的充要条件是：$k = 6$ 而且

$$\begin{cases} a_6 = a_5 + 6 \\ a_7 = a_4 + 6 \\ \cdots\cdots \\ a_{10} = a_1 + 6 \\ a_{11} = a_0 + 6 \end{cases} \pmod{12}$$

证明 同样的道理我们带入 $R_{k,i} = a_{11-i} + k \pmod{12}$，也就是：$a_i = a_{11-i} + k \pmod{12}$，同

时又有 $a_{11-i} = a_i + k \pmod{12}$，两者相加得到 $a_i + a_{11-i} = a_i + a_{11-i} + 2k \pmod{12}$，那么 $2k = 0 \pmod{12}$，所以 $k = 6$。

和定理7.3不同的是我们的 k 现在被决定了，于是总的数量为：

$$12 \times 10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 46080$$

稀缺的对称性。

第八章 音类集合与新黎曼理论

8.1 音类集合

若干音类构成的集合，叫做音类集合（pitch class set），也叫做 pc 集。
包含 n 个音类的 pc 集有时候也被称为 $n-$ 和弦。

$$\{\overline{\mathrm{C}},\ \overline{\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{G}}\} = \{\overline{0},\ \overline{4},\ \overline{7}\}\ \text{对应于一个大三和弦;}$$

$$\{\overline{\mathrm{A}},\ \overline{\mathrm{C}},\ \overline{\mathrm{E}}\} = \{\overline{9},\ \overline{0},\ \overline{4}\}\ \text{对应于一个小三和弦;}$$

$$\{\overline{\mathrm{G}},\ \overline{\mathrm{B}},\ \overline{\mathrm{D}},\ \overline{\mathrm{F}}\} = \{\overline{7},\ \overline{11},\ \overline{2},\ \overline{5}\}\ \text{对应于一个属七和弦;}$$

$$\{\overline{\mathrm{F}},\ \overline{\mathrm{B}},\ \overline{\sharp\mathrm{D}},\ \overline{\sharp\mathrm{G}}\} = \{\overline{5},\ \overline{11},\ \overline{3},\ \overline{8}\}\ \text{对应于特里斯坦和弦;}$$

$$\{\overline{\mathrm{C}},\ \overline{\mathrm{D}},\ \overline{\mathrm{E}},\ \overline{\mathrm{F}}\} = \{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{5}\}\ \text{对应于一个非传统和弦.}$$

图 8.1: 音类和和弦的对应

音级 $\to$ 音类（音类空间）$\to$ 音类集合
按照紧凑原则规定 pc 集的标准序。
音类圆周：

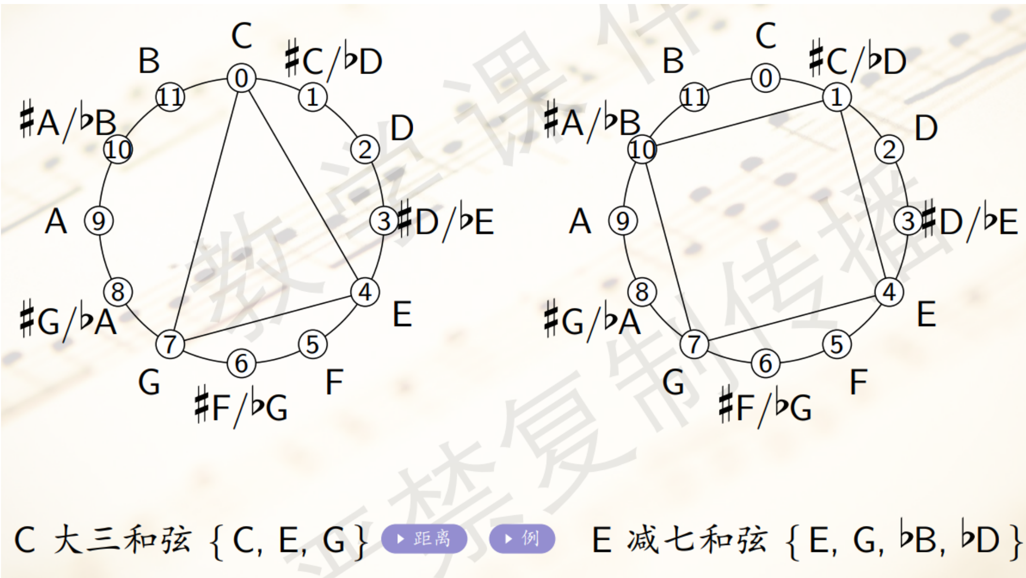


图 8.2: 音类圆周

一共有多少个 pc 集，实际上是在求音类空间 $\mathscr{PC}$ 的所有子集，所以一共 $2^{12}=4096$ 个。

现在有一个大三和弦 $\mathscr{X}=\{\mathrm{C},\mathrm{E},\mathrm{G}\}$。将 $\mathscr{T}=\langle T\rangle$ 作用在上面可以得到 12 个 pc 集。再用倒影变化作用得到 12 个小三和弦。我们设群 $\mathscr{D}=\langle T,I\rangle$。设 $\mathscr{S}$ 是 24 个 pc 集构成的集合。

也就是说，我们实际上有一个在集合 $\mathscr{S}$ 上的变换构成的群 $\mathscr{D}$。而且里面的元素都可以通过某种变换得到集合中的另外一个元素。轨道就是说，包含了所有可以互相变换得到的元素的集合。

8.1.1 轨道

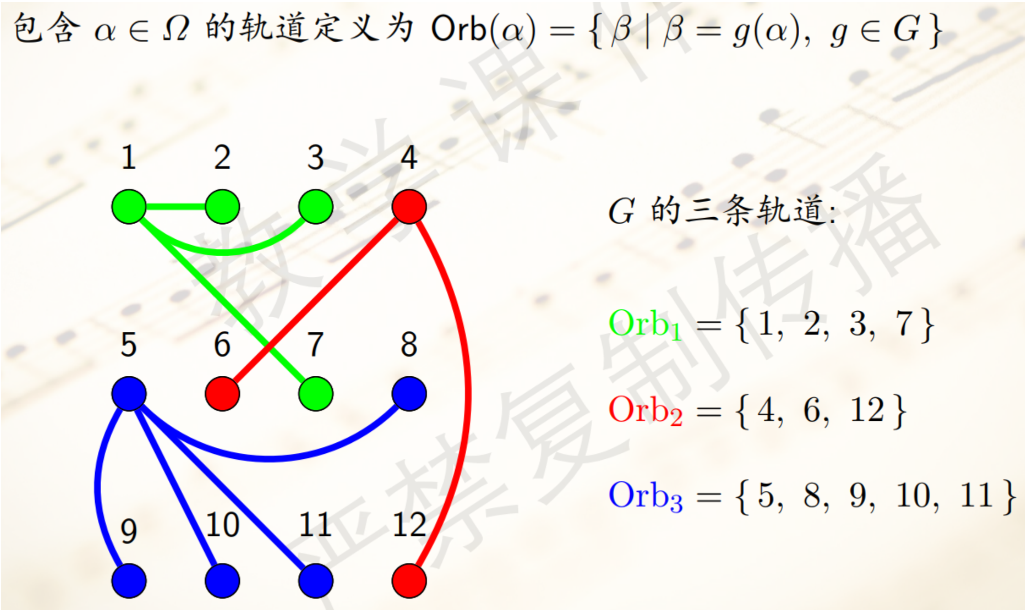


图 **8.3:** 轨道

稳定化子是之前群 G 的一个子群，且 $G_\alpha=\{g\in G|g(\alpha)=\alpha\}$。那么我们知道轨道长度应该是这样的：$|\mathrm{Orb}(\alpha)|=\frac{|G|}{|G_\alpha|}$。这件事和商群、陪集可能有关系。

总共的 pc 集有：

$$1+C_{12}^{1}+C_{12}^{2}+\cdots+C_{12}^{11}+C_{12}^{12}=2^{12}=4096$$

总的说来，我们现在通过群 $\mathscr{D}$ 将原先的 4096 个 pc 集进行了一个分类。每个轨道一个分类。但是总共有几条轨道呢？我们要看 9.4 的讨论，其实其中主要是依靠 Burnside 引理来计算。

引理 8.1 (Burnside 引理)

设 G 是集合 Ω 上的一个置换群，共有 t 条轨道，那么

$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)|$$

♡

音类集合表。福特发明的 $k-xx$ 的表示方法。其中 k 是该集合类中 pc 集包含的音类数目，xx 是序号。例如：$\{0,3,7\}$ 所在的集合被命名为 $3-11$。

8.1.2 距离向量

音类之间的距离为音类圆周上到对方的最短距离。$1 \leqslant d \leqslant 6$。

pc 集的距离向量 $\delta = (num_1, num_2, \ldots, num_6)$。

这里非常阴间，它是求某个距离的顶点对数目。要和之前的固定节奏型的距离序列区分。

但是如果加在一起，$\sum_{i=1}^{6} num_i = C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$。

不动点：$\mathscr{X}$ 中的音类 X_i 是关于变换 T^k 的一个不动点，如果 $X_i \in T^k(\mathscr{X})$。也说明了存在 $j : 1 \leqslant j \leqslant n$，使得 $X_i = T^k(X_j)$，同时也说明了 $X_i \in \mathscr{X} \cap T^k(\mathscr{X})$。

现在有如果正整数 $k < 6$，音类 X 和 Y 距离也为 k，那么：

$$|\{X, Y\} \cap \{T^k(X), T^k(Y)\}| = 1$$

$$|\{X, Y\} \cap \{T^{-k}(X), T^{-k}(Y)\}| = 1$$

如果距离不为 k，上面两个式子为 0。

但是如果 $k = 6$，则上面的式子为 2。

8.1.3 共同音定理

定理 8.1 (共同音定理)

设一个音类集合 $\mathscr{X}$ 的距离向量为 $\delta = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$。

那么对于 $1 \leqslant k \leqslant 5$，有：

$$|\mathscr{X} \cap T^k(\mathscr{X})| = d_k = |\mathscr{X} \cap T^{-k}(\mathscr{X})|$$

对于 $k = 6$, 则有：

$$|\mathscr{X} \cap T^6(\mathscr{X})| = 2d_6$$

这根据上面的结论就可以知道了。

8.1.4 全音程和弦

全音程和弦：距离向量 $\delta = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$。

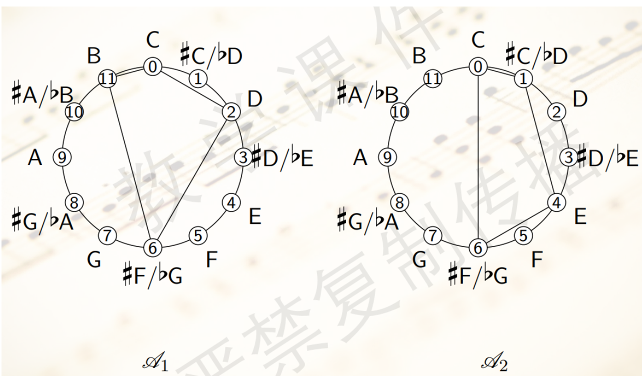


图 8.4: 全音程和弦

在群 $\mathscr{D}$ 的作用下，只有上面两个全音程和弦。

8.2 音阶

音阶是把音类列在一起。音列是把音级列在一起。

8.2.1 通过距离表来计算距离向量

我们可以通过距离表来计算距离向量，对于五声音阶 $\mathscr{V} = \{\sharp\mathrm{F}, \sharp\mathrm{G}, \sharp\mathrm{A}, \sharp\mathrm{C}, \sharp\mathrm{D}\}$，距离表如下：

1	0				
3	2	0			
6	5	3	0		
8	5	5	2	0	
10	3	5	4	2	0
	1	3	6	8	10

图 **8.5:** 距离表

它的距离向量 $\delta = (0, 3, 2, 1, 4, 0)$。

现在来看自然大调音阶。从 C 大调自然音阶来看：$\mathscr{C} = \{\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. 这个也是 a 自然小调的 pc 集。

距离向量为 $\delta = (2, 5, 4, 3, 6, 1)$。根据共同音定理，移调变换 $T^i(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{C}$ 的共音数只能为 2,5,4,3,6 和 2。没有等于 7 的。所以一定可以通过移调变换生成所有的 12 个自然大调音阶。

8.2.2 五度圆周

五度圆周-根据五度相生原则来排列 12 个音类。

五度圆周上的每一个半圆弧都对应于一个自然大调音阶，主音是这个半圆弧顺时针方向上的第二项。

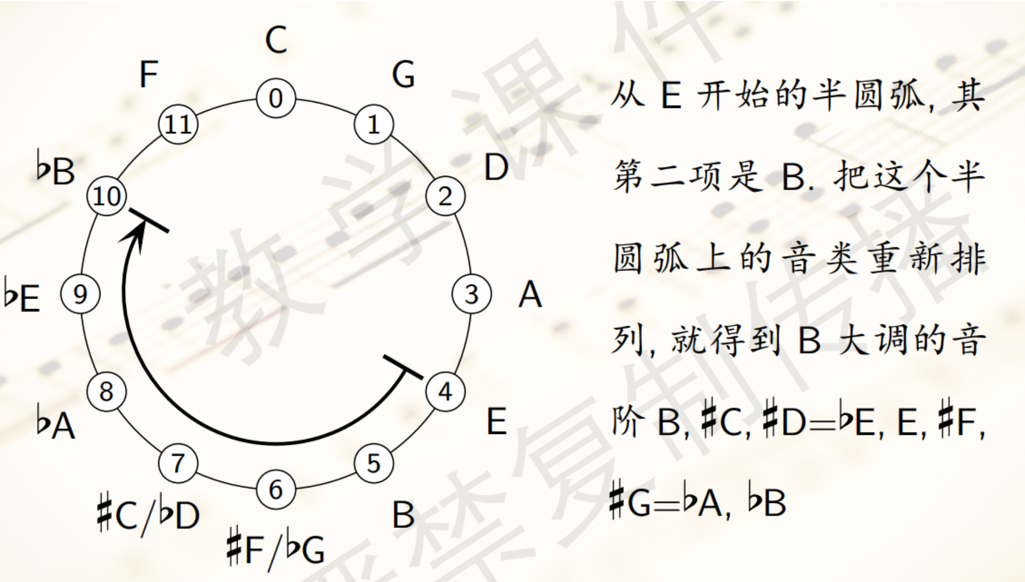


图 8.6: 五度圆周

近关系调：C 大调和 G 大调有 6 个相同的音类，是近关系调。$\mathscr{G} = T^7(\mathscr{C}) = T^{-5}(\mathscr{C})$。根据共同音定理，应该有 $d_5 = 6$ 个共同音。

远关系调。

8.2.3 自然大调音阶的补：五声音阶

pc 集和其补集的距离向量

定理 8.2

设 $\mathscr{X}$ 是一个 pc 集，其距离向量为 $\delta = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6)$。$\mathscr{X}'$ 是 $\mathscr{X}$ 的补集，其距离向量为 $\delta' = (d_1', d_2', d_3', d_4', d_5', d_6')$。则有：

$$d_i = |\mathscr{X}| - |\mathscr{X}'| + d_i', (1 \leqslant i \leqslant 5), \quad d_6 = \frac{1}{2}(|\mathscr{X}| - |\mathscr{X}'|) + d_6'$$

证明 不妨设 $|\mathscr{X}| \geqslant |\mathscr{X}'|$，那么 $|\mathscr{X}| \geq 6$，那么根据共同音定理8.1可以得到：

$$|\mathscr{X} \cap T^i(\mathscr{X})| = d_i, (1 \leqslant i \leqslant 5), \qquad |\mathscr{X} \cap T^6(\mathscr{X})| = 2d_6$$
$$|\mathscr{X}' \cap T^{-i}(\mathscr{X}')| = d_i', (1 \leqslant i \leqslant 5), \qquad |\mathscr{X}' \cap T^6(\mathscr{X}')| = 2d_6'$$

同时我们可以知道：

$|\mathscr{X} \cap T^i(\mathscr{X})| = |\mathscr{X}| + |T^i(\mathscr{X})| - |\mathscr{X} \cup T^i(\mathscr{X})| = |\mathscr{X}| + |\mathscr{X}| - |\mathscr{X} \cup T^i(\mathscr{X})|$.

同样的道理：

$|\mathscr{X}' \cap T^i(\mathscr{X}')| = |\mathscr{X}'| + |T^i(\mathscr{X}')| - |\mathscr{X}' \cup T^i(\mathscr{X}')| = |\mathscr{X}'| + |\mathscr{X}'| - |\mathscr{X}' \cup T^i(\mathscr{X}')|$.

现在我们设 $X \in \mathscr{X}$ 且 $X \notin T^i(\mathscr{X})$，那么说明 $T^i(X) \in \mathscr{X}'$，同时 $T^{-i}(T^i(X)) = X \notin \mathscr{X}'$。也就是说，$|\mathscr{X} \cup T^i(\mathscr{X})| - |\mathscr{X}| \geqslant |\mathscr{X}' \cup T^i(\mathscr{X}')| - |\mathscr{X}'|$.

同样的道理，如果 $X' \in \mathscr{X}'$ 且 $X' \notin T^{-i}(\mathscr{X}')$，那么说明 $T^{-i}(X') \in \mathscr{X}$，同时 $T^i(T^{-i}(X')) = X' \notin \mathscr{X}$，这也是在说，$|\mathscr{X}' \cup T^i(\mathscr{X}')| - |\mathscr{X}'| \geqslant |\mathscr{X} \cup T^i(\mathscr{X})| - |\mathscr{X}|$.

所以最后有，$|\mathscr{X}\cup T^i(\mathscr{X})|-|\mathscr{X}|=|\mathscr{X}'\cup T^i(\mathscr{X}')|-|\mathscr{X}'|$.

那么：

$$\begin{aligned}
d_i-d_i' &= |\mathscr{X}\cap T^i(\mathscr{X})|-|\mathscr{X}'\cap T^{-i}(\mathscr{X}')| \\
&= |\mathscr{X}|-|\mathscr{X}'|+(|\mathscr{X}|-|\mathscr{X}\cup T^i(\mathscr{X})|)-(|\mathscr{X}'|-|\mathscr{X}'\cup T^i(\mathscr{X}')|) \\
&= |\mathscr{X}|-|\mathscr{X}'|,(1\leqslant i\leqslant 5) \\
2d_6-2d_6' &= |\mathscr{X}\cap T^6(\mathscr{X})|-|\mathscr{X}'\cap T^6(\mathscr{X}')| \\
&= |\mathscr{X}|-|\mathscr{X}'|
\end{aligned}$$

8.3 和弦连接与黎曼变换

德国的音乐理论家、作曲家胡戈·黎曼，不是数学家波恩哈德·黎曼。

有一个福特名称为 3-11 的 24 个大、小三和弦对应的 pc 集构成的一个集合类。(8.1)

现在我们来研究集合类 3-11 上的变换。我们用 $\mathscr{S}$ 来表示这 24 个 pc 集构成的集合。

平行变换 $P:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{S}$，表示把任意一个三和弦变为与之平行的三和弦。(大三音降低半音，小三音升高半音)

关系变换 $R:\mathscr{S}\longrightarrow\mathscr{S}$，表示把三和弦变为关系三和弦。什么叫关系三和弦？就是调号相同的。就是所有的升降号啥的都一样的。

导音交换 L：把大三和弦的根音降低一个半音，把小三和弦的冠音升高一个半音。

最后，集合 $\mathscr{S}$ 上这三个变换就成为黎曼变换。

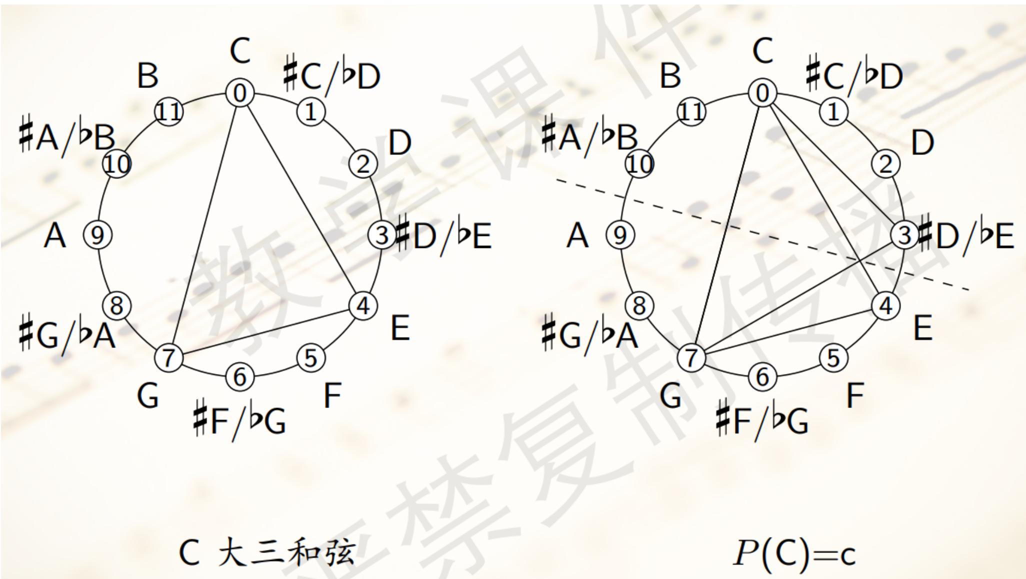


图 8.7: 黎曼变换

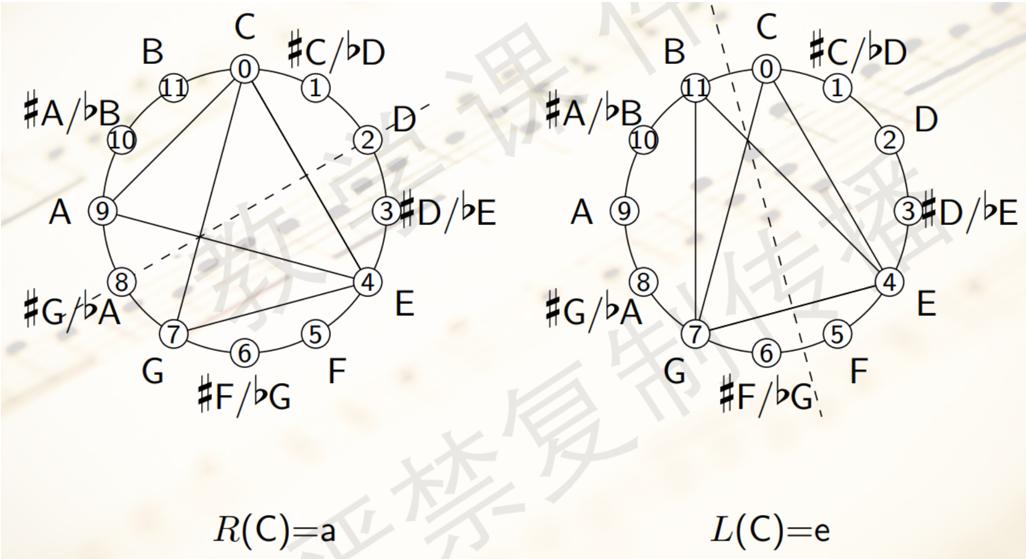


图 8.8: 黎曼变换

哪两个音不变，就使用哪两个音的垂直平分线来做对称。因为这三个变换都是只改变一个音而不改变另外两个音。P 只改变中间的一个音，具体的改变还是要自己看吧。R 就是其实可以试一下每种的对称方法，看一下到底哪个是可以的。

其实改变三音的肯定是平行变换 P，对于大三和弦而言，改变根音的是导音交换 L，改变冠音的是关系变换 R；对于小三和弦来说改变冠音的是导音交换 L，改变根音的是关系变换 R。

例题 8.1 （22 秋期末・5）下面的都是正确的：

A. 一段旋律经过严格移调变换或严格倒影后，有可能仍然处于原本的调式音阶中。换句话说，在某些特殊的情况下，严格移调变换或严格倒影变换也可以是调性移调或调性倒影变换。

B. 乐音体系中的倒影变换可以将大三和弦和小三和弦互相转换，但不能将减三和弦和增三和弦相互转换。

C. 可以通过平行变换 P 相互转换的一对大小三和弦，一定不会出现在同一条自然大调音阶中，也不会出现在同一条自然小调音阶中。

D. 新黎曼群中，$L * R * P = P * R * L$。

8.4 音网

P, R, L 循环

$$\mathrm{C}\xrightarrow{P}\mathrm{c}\xrightarrow{R}\flat\mathrm{E}\xrightarrow{L}\mathrm{g}\xrightarrow{P}\mathrm{G}\xrightarrow{R}\mathrm{e}\xrightarrow{L}\mathrm{C}$$

$$\mathrm{E}\xrightarrow{P}\mathrm{e}\xrightarrow{R}\mathrm{G}\xrightarrow{L}\mathrm{b}\xrightarrow{P}\mathrm{B}\xrightarrow{R}\flat\mathrm{a}/\sharp\mathrm{g}\xrightarrow{L}\mathrm{E}$$

可以有 12 个大三和弦，得到 12 个循环，也就是 12 个六边形，再按照公共边重合起来，得到音网（Tonnetz）。

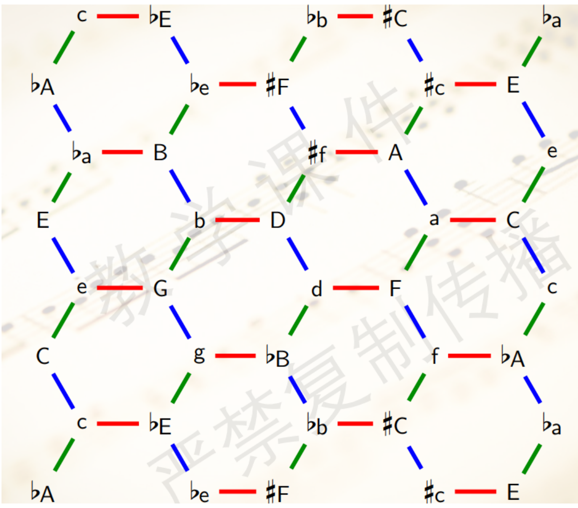


图 8.9: 音网

在这个循环里：

$$C \xrightarrow{P} c \xrightarrow{R} \flat E \xrightarrow{L} g \xrightarrow{P} G \xrightarrow{R} e \xrightarrow{L} C$$

六个三和弦唯一包含一个共同的音类 G。所以这个六边形的记号就是 G。

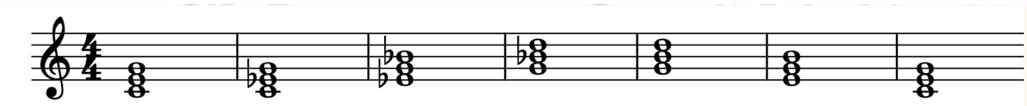


图 8.10: 六个三和弦

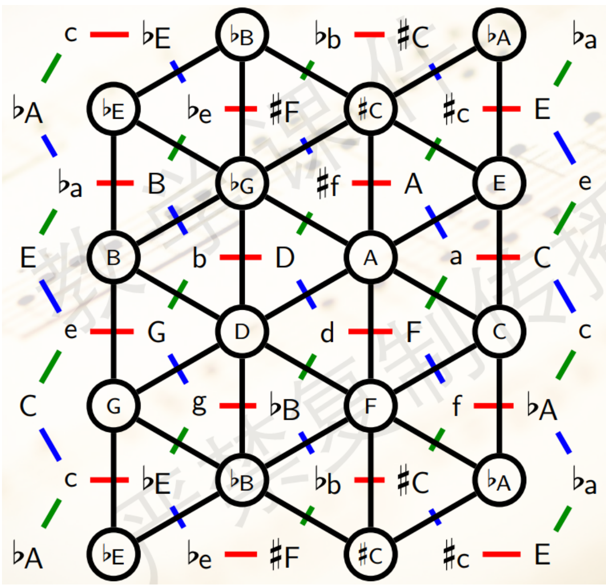


图 8.11: 音网的对偶形式

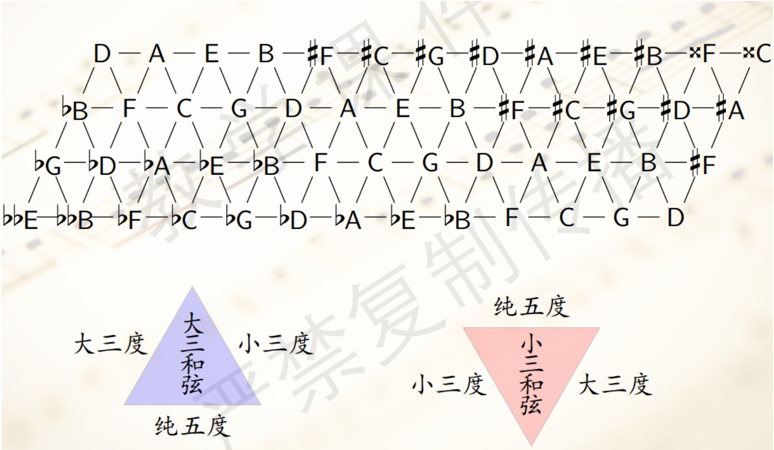


图 8.12: 音网的使用

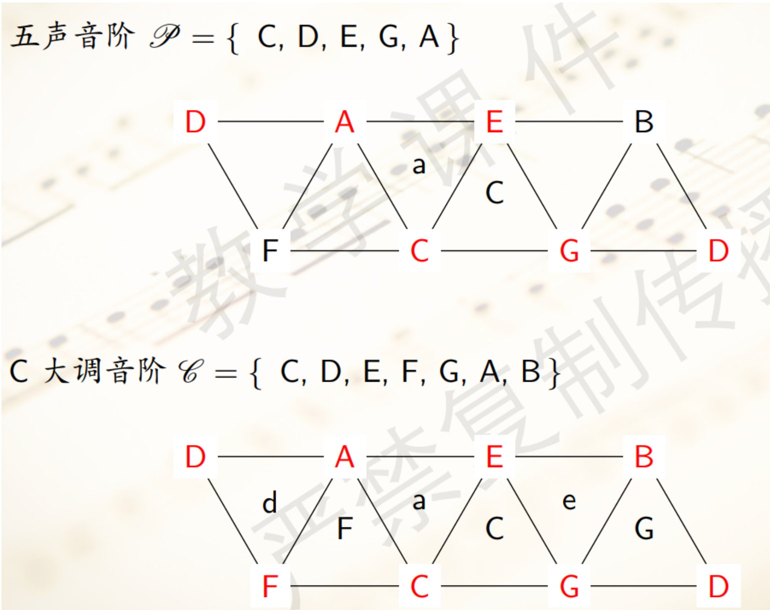


图 8.13: 音网的使用

8.5 新黎曼理论

以 David Lewin 为代表。

现在用 $\mathscr{N} = \langle P, R, L \rangle$ 构成新黎曼群。但是如果考虑到：

$$R * (L * R)^3 = P$$

从音网的任意小三和弦 $\triangledown$ 出发，依次经过 R, L 的作用相当于每次右移一个三角形，移动七次后得到的大三和弦 $\triangle$，必定等于 P 对于出发时的小三和弦 $\triangledown$ 的作用。

$$\mathscr{N} = \langle R, L \rangle \cong D_{24}$$

8.5.1 和弦进行

级	I	ii	iii	IV	V	vi	vii°
和弦	C	d	e	F	G	a	/

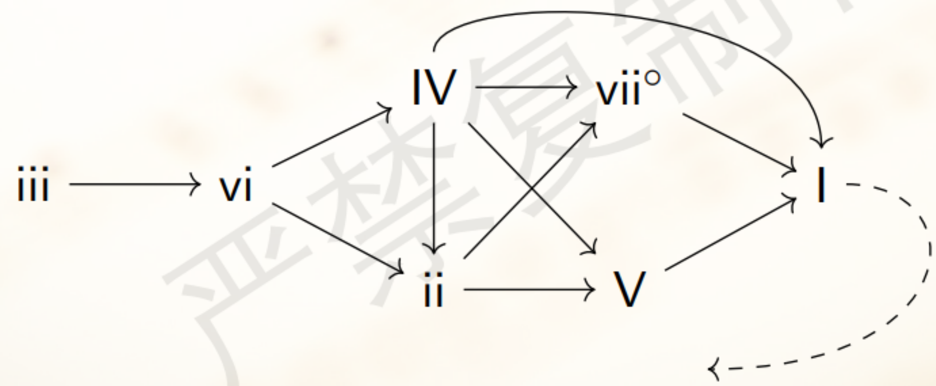
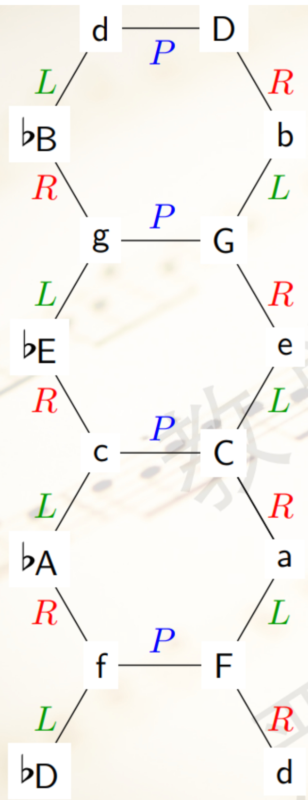


图 8.14: 和弦进行



$$\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{I}: \quad \mathrm{G} \xrightarrow{L*R} \mathrm{C}$$

$$\mathrm{IV} \longrightarrow \mathrm{I}: \quad \mathrm{F} \xrightarrow{R*L} \mathrm{C}$$

$$\mathrm{vi} \longrightarrow \mathrm{IV}: \quad \mathrm{a} \xrightarrow{L} \mathrm{F}$$

$$\mathrm{IV} \longrightarrow \mathrm{ii}: \quad \mathrm{F} \xrightarrow{R} \mathrm{d}$$

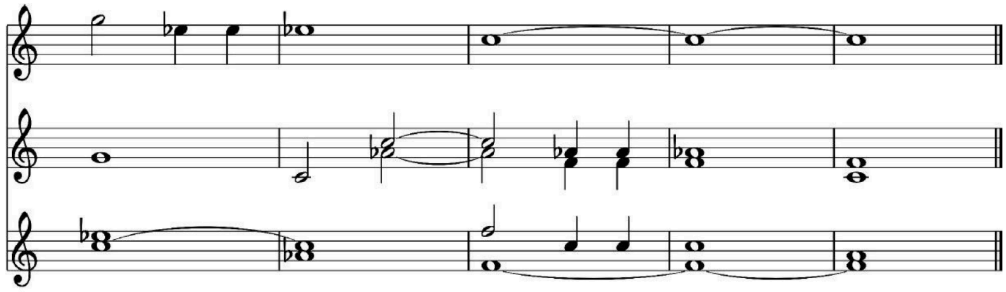
$$\mathrm{iii} \longrightarrow \mathrm{vi}: \quad \mathrm{e} \xrightarrow{R*L} \mathrm{a}$$

$$\mathrm{vi} \longrightarrow \mathrm{ii}: \quad \mathrm{a} \xrightarrow{R*L} \mathrm{d}$$

$$\mathrm{ii} \longrightarrow \mathrm{V}: \quad \begin{cases} \mathrm{d} \xrightarrow{L*R*P} \mathrm{G} \\ \mathrm{d} \xrightarrow{P*R*L} \mathrm{G} \end{cases}$$

图 8.15: 和弦进行

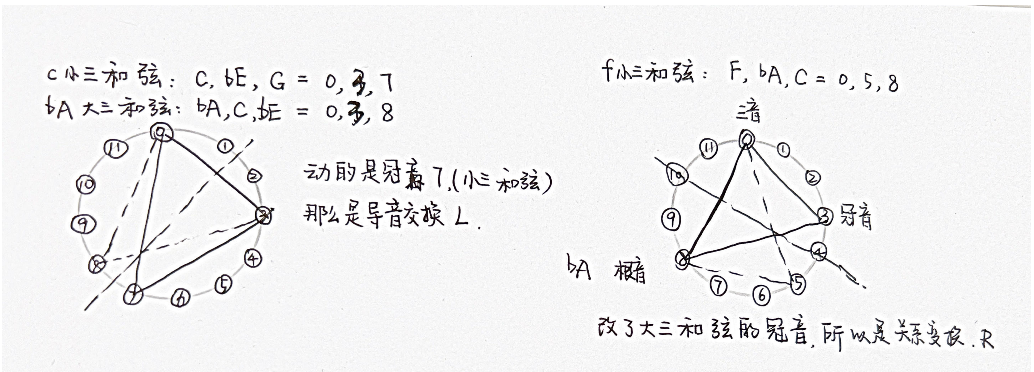
例题 8.2 杰苏阿尔多的牧歌（madrigal）结尾部分如下图所示。试分析其中的和弦进行，并找出 $\mathscr{N}$ 中相应的变换。



解 在第一个小节里出现的音为 C, ♭E, G，这是 c 小三和弦；第二个小节中的音是 ♭A, C, ♭E，是 ♭A 大三和弦；第三个和第四个小节里是 F, ♭A, C，是 f 小三和弦；第五个小节里是 F, A, C（注意临时升降号是不跨小节的），是 F 大三和弦。所以和弦进行为：

$$\mathrm{c} \xrightarrow{L} \flat\mathrm{A} \xrightarrow{R} \mathrm{f} \xrightarrow{P} \mathrm{F}$$

如果不提供音网的图的话，我们这样来判断其中的关系：



8.5.2 新黎曼群 $\mathscr{N}$ 里的字

换言之，在群 G 中没有包含集合 S 的真子群，则称集合 S **生成**了群 G，集合 $S \subseteq G$ 称作群 G 的生成集合，集合 S 中的元素 $s \in S$ 称作群 G 的生成元。

设 G 是一个群，子集合 $S \subset G$ 是 G 的一个生成元集合，S 上的一个字是形如

$$s_1^{\varepsilon_1} * s_2^{\varepsilon_2} * \cdots * s_k^{\varepsilon_k}$$

的表达式，其中 $s_i \in S, \varepsilon_i = \pm 1, 1 \leq i \leq k$。

在新黎曼群 $\mathscr{N}$ 里面，$S = \{P, R, L\}$ 是一个生成元集合。

给定一个字，从某个三和弦（三角形是三个顶点，音网是根音）出发，就会得到一条路径。

8.5.3 音网上的哈密尔顿路

音网上存在哈密尔顿回路，意味着我们可以遍历音网一遍，同时还挺平滑。

第九章 数学的节奏与节奏的数学

9.1 时值序列

对于初始的时值序列是 1, 4, 3, 2，分别进行 4 倍、3 倍、2 倍的增值变换，得到 4, 16, 12, 8、3, 12, 9, 6、2, 8, 6, 4。

9.2 整体序列主义

勋伯格的十二音技术是对音列进行移调、倒影、逆行、逆行倒影变换。

Babbit 发展了勋伯格的思想，进一步把音列（音类序列）与时值序列以及力度、音区、音色这样序列化的元素有机结合在一起，形成了整体上的序列音乐。

初始音列 + 时值序列就会得到一段旋律。

9.3 节奏卡农

设 A 是节奏卡农的内节奏（节奏动机），B 是外节奏，周期为 $n > 1$，那么就是一个周期为 n 的严格卡农就等价于 $\mathbb{Z}_n$ 的一个直和分解：

$$\mathbb{Z}_n = A \oplus B \pmod n$$

其中 $A, B \in \mathbb{Z}_n$，且有 $|A||B| = n$。

反例：以 $A = \{0, 2, 3\}$ 作为内节奏，无法形成节奏卡农。

模 n 周期的：对 $A \subset \mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$，如果存在正整数 n 使得

$$A + d = A \pmod n$$

满足上式的最小的 n 被称为集合 A 模 n 的周期。

9.3.1 Vuza 卡农

内外节奏都不是周期性的，被称为 Vuza 卡农。这和 Hajós 群的概念有关。

G 被称为一个 Hajós 群，如果其中任何一个分解 $G = A \oplus B$ 中，A, B 至少有一个是周期的。

存在 Vuza 卡农的条件是 $\mathbb{Z}_n$ 不是 Hajós 群。$\mathbb{Z}_{72}$ 是最小的 Hajós 群。

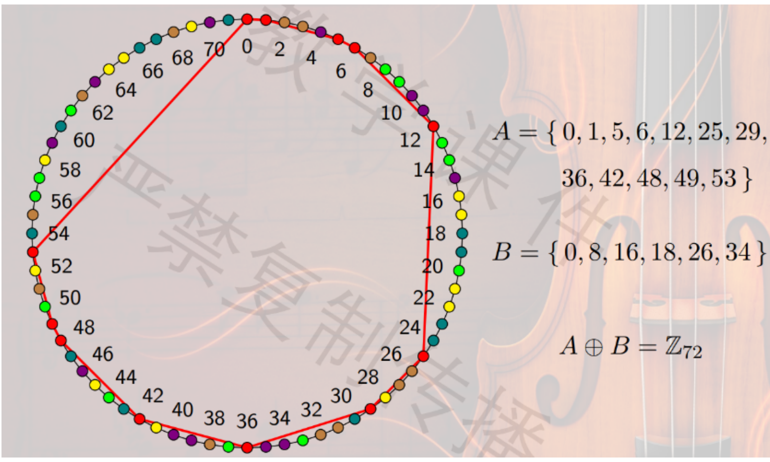


图 **9.1:** Vuza 卡农

9.4 拍掌音乐

如果恰有四拍休止符，休止符不可以连续出现，那么一共有多少可能的节奏型？（总共 12 拍）

首拍不是休止符，那么在 8 个空位里面选择四个放置：

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

首拍是休止符，那么在 7 个空位里面选择 3 个放置：

$$C_7^3 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

现在一共有 105 种，但是还要考虑循环左移位变换 ROL。

把它们放在项链上，其中我们可以看到下面两种项链是一样的：

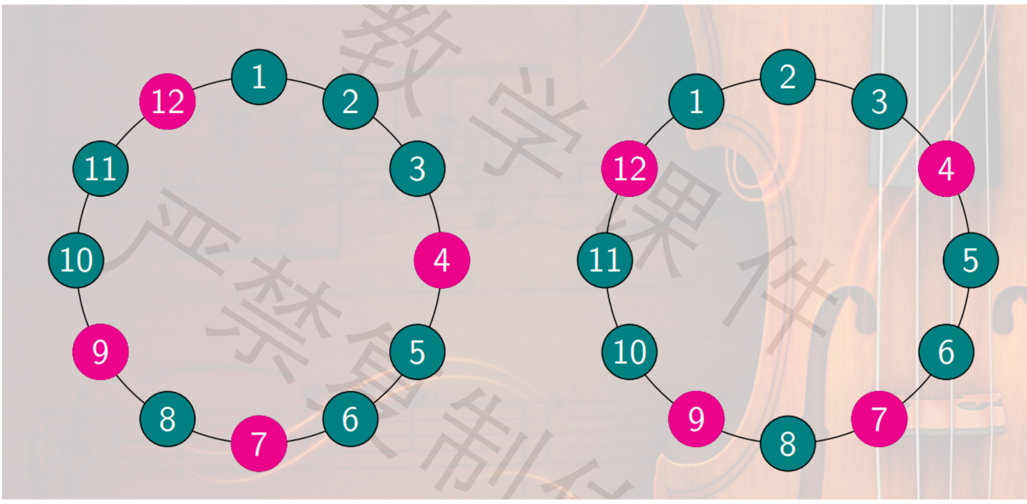


图 **9.2:** 循环位移

设 $\mathscr{C}$ 是上述项链构成的集合，定义 $\mathscr{C}$ 上的变换 σ：对任意的项链 $X \in \mathscr{C}$，σ 把 X 按照逆时针方向旋转 30，变换 σ 生成了一个 12 阶的循环群 $G = \langle\sigma\rangle = \{\sigma^k | 0 \leq k \leq 11\}$。

在 $\mathscr{C}$ 中定义一个等价关系 $\sim$：给定任意两条项链 X 和 Y，$X \sim Y$ 当且仅当存在整数 k，使得 $\sigma^k(X) = Y$。

那么现在的问题是：在这样的等价关系下，集合 $\mathscr{C}$ 中的项链被分为几个等价类？

对于项链 X，它的轨道是：

$$\mathrm{Orb}(X) = \overline{X} = \{Y \in \mathscr{C} | Y \sim X\} = \{Y \in \mathscr{C} | \exists \sigma^k \in G, s.t. Y = \sigma^k(X)\}$$

现在问题是求 $\mathscr{C}$ 中的轨道数。

不动点集合：

$$\mathrm{fix}(g) = \{\alpha \in \Omega | g(\alpha) = \alpha\}$$

在有 Burnside 引理：设 G 是集合 Ω 上的一个置换群，共有 t 条轨道，那么

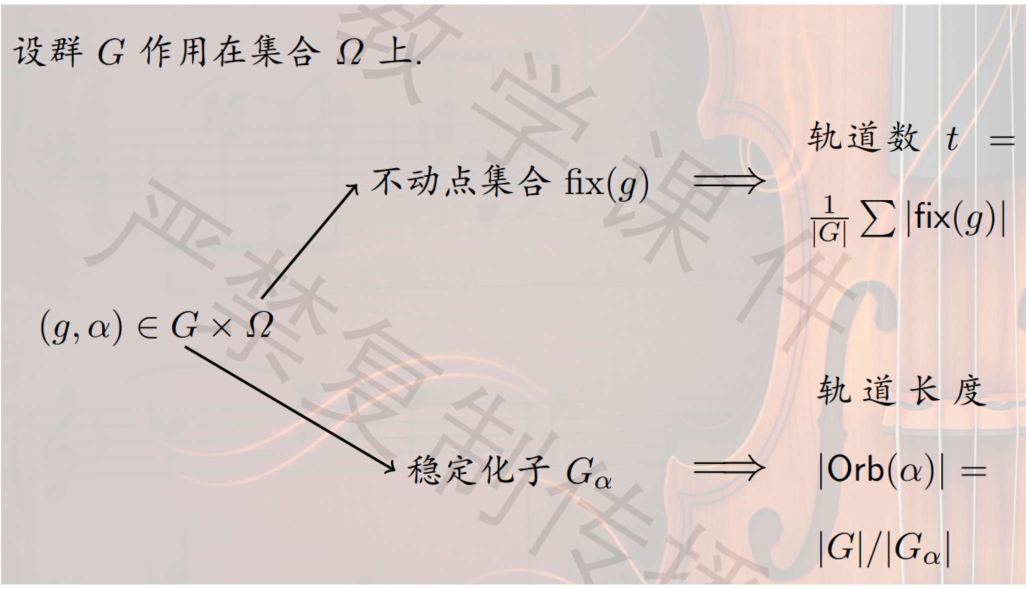
$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{fix}(g)|$$

稳定化子：

$$G_\alpha = \{g \in G | g(\alpha) = \alpha\}$$

那么有：

$$\mathrm{Orb}(\alpha) = |G : G_\alpha| = \frac{G}{G_\alpha}$$



将变换表示称为轮换的形式：

$$\sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

同理，$\sigma^2 = (1, 3, 5, 7, 9, 11)(2, 4, 6, 8, 10, 12)$

四个红柱子，轮换也是里面要有 4 个的。

最后的结果如下：

$g \in G$	$\mathrm{fix}(g)$
e	105
$\sigma, \sigma^2, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^7, \sigma^8, \sigma^{10}, \sigma^{11}$	0
σ^3, σ^9	3
σ^6	9

所以总共有：

$$t = \frac{1}{12}(105 + 3 + 3 + 9) = 10$$

9.5 序列主义 VS 简约主义

整体序列音乐中，留给听者极少的潜在冗余，很难理解整个事件。