

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET UNIVERZITETA  
SARAJEVO

# Diskretna Matematika

## Zadaća 4

*Student*

Vedad Fejzagić

*Broj indeksa*

17336

**Demonstrator**

Šeila Bećirović

*Grupa*

RI2-2

January 12, 2018

## Zadatok 1

Postavka:

Data su tri neusmjerena grafa:

$$G1 = x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x1, x2, x1, x3, x1, x5, x1, x7, x2, x3, x2, x4, x2, x5, x3, x4, x3, x6, x4$$

$$G2 = x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x1, x2, x1, x3, x1, x5, x1, x6, x2, x5, x2, x7, x2, x8, x3, x4, x3, x6, x3$$

$$G3 = x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x1, x3, x1, x6, x1, x7, x1, x8, x2, x4, x2, x5, x2, x6, x2, x8, x3, x4, x5$$

Za ove grafove potrebno je uraditi sljedeće:

Predstavite ih pomoću matrica susjedstva i pomoću listi susjedstva.

Utvrdite ima li među ovim grafovima nekih koji su međusobno izomorfni. Ukoliko neka dva jesu izomorfna (ako takvih parova ima), prikažite kako glasi izomorfizam između njih. Ukoliko neka dva nisu izomorfna (ako takvih parova ima), argumentirano objasnite zašto nisu.

Utvrdite ima li među ovim grafovima planarnih grafova. Za one koji su planarni (ako ih ima), nacrtajte ih tako da im se grane ne presjecaju. Za one koji nisu planarni (ako ih ima), argumentirano objasnite zašto nisu.

Pronađite hromatske brojeve za ova tri grafa. Odgovor mora biti argumentiran.

Rješenje:

a) Matrica i lista susjedstva za graf  $G_1$

|    | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x1 | -  | 1  | 1  | -  | 1  | -  | 1  | -  |
| x2 | 1  | -  | 1  | 1  | 1  | -  | -  | -  |
| x3 | 1  | 1  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  |
| x4 | -  | 1  | 1  | -  | -  | -  | -  | 1  |
| x5 | 1  | 1  | -  | -  | -  | -  | 1  | 1  |
| x6 | -  | -  | 1  | -  | -  | -  | 1  | -  |
| x7 | 1  | -  | -  | -  | 1  | 1  | -  | 1  |
| x8 | -  | -  | -  | 1  | 1  | -  | 1  | -  |

$$G_1 = (\{x_2, x_3, x_5, x_7\}, \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \{x_2, x_3, x_8\},$$

$$\{x_1, x_2, x_7, x_8\}, \{x_3, x_7\}, \{x_1, x_5, x_6, x_8\}, \{x_4, x_5, x_7\})$$

Matrica i lista susjedstva za graf  $G_2$

|    | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x1 | -  | 1  | 1  | -  | 1  | 1  | -  | -  |
| x2 | 1  | -  | -  | -  | 1  | -  | 1  | 1  |
| x3 | 1  | -  | -  | 1  | -  | 1  | 1  | -  |
| x4 | -  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  | 1  |
| x5 | 1  | 1  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  |
| x6 | 1  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  | 1  |
| x7 | -  | 1  | 1  | -  | -  | -  | -  | -  |
| x8 | -  | 1  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  |

$$G_2 = (\{x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_1, x_5, x_7, x_8\}, \{x_1, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_5, x_8\}, \\ \{x_1, x_2, x_4, x_6\}, \{x_1, x_3, x_5, x_8\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4, x_6\})$$

Matrica i lista susjedstva za graf  $G_3$

|    | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x1 | -  | -  | 1  | -  | -  | 1  | 1  | 1  |
| x2 | -  | -  | -  | 1  | 1  | 1  | -  | 1  |
| x3 | 1  | -  | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  |
| x4 | -  | 1  | 1  | -  | 1  | -  | -  | -  |
| x5 | -  | 1  | -  | 1  | -  | -  | 1  | 1  |
| x6 | 1  | 1  | 1  | -  | -  | -  | -  | 1  |
| x7 | 1  | -  | -  | -  | 1  | -  | -  | -  |
| x8 | 1  | 1  | -  | -  | 1  | 1  | -  | -  |

$$G_3 = (\{x_3, x_6, x_7, x_8\}, \{x_4, x_5, x_6, x_8\}, \{x_1, x_4, x_6\}, \{x_2, x_3, x_5\}, \\ \{x_2, x_4, x_7, x_8\}, \{x_1, x_2, x_3, x_8\}, \{x_1, x_5\}, \{x_1, x_2, x_5, x_6\})$$

b)

Formiramo skupove stepena čvorova za svaki graf:

$$S_{G_1} = \{4, 4, 4, 3, 4, 2, 4, 3\}$$

$$S_{G_2} = \{3, 4, 4, 3, 4, 4, 2, 3\}$$

$$S_{G_3} = \{4, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 4\}$$

Vidimo da svaki graf ima jednak broj čvorova i grana, te su stepeni njihovih čvorova isti, pa je potreban uslov za izomorfizam zadovoljen.

c) Za početak koristimo Eulerovu teoremu  $m$ - broj grana,  $n$  - broj čvorova.  
Za sva tri grafa vrijedi:

$$n = 8, m = 14$$

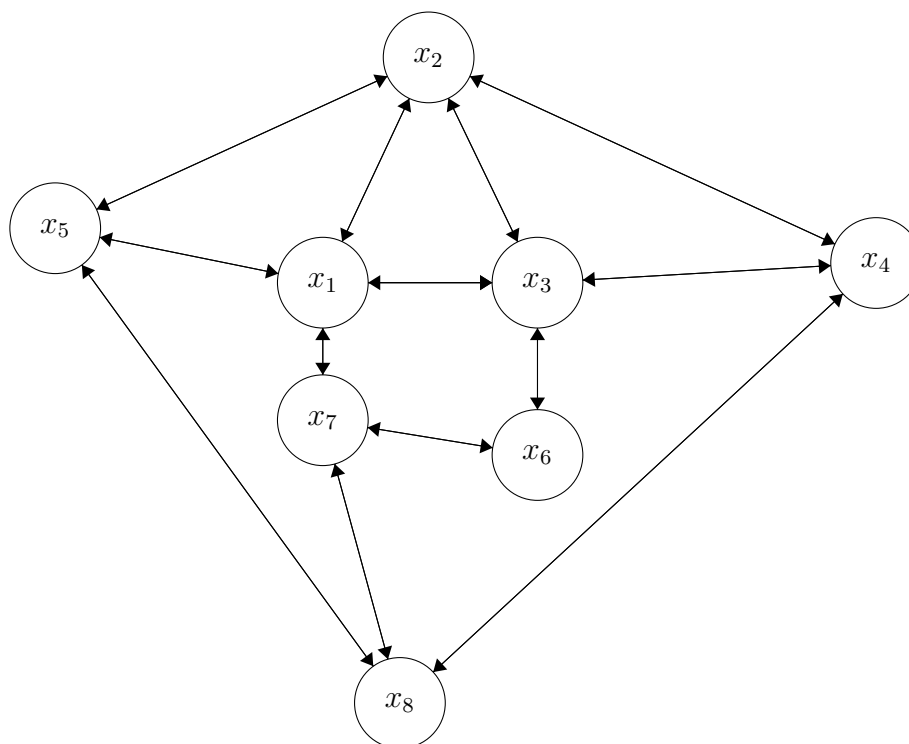
$$m \leq 3n - 6$$

$$14 \leq 18$$

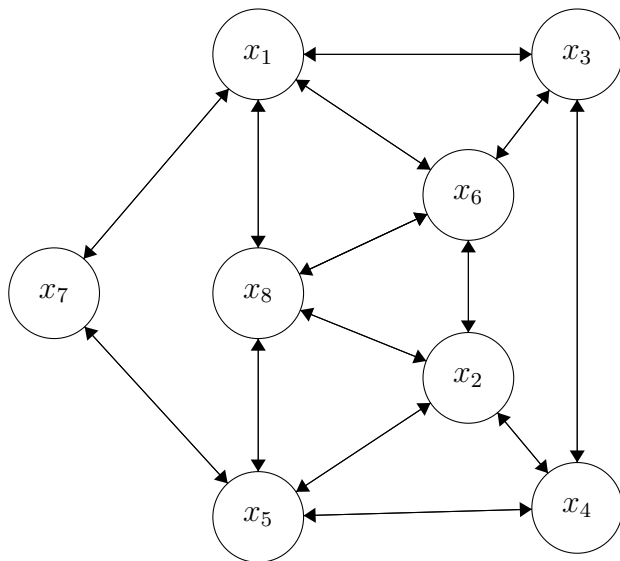
Nejednakost je istinita, te svi grafovi mogu još uvijek biti planarni.

Lahko zaključujemo da su grafovi G1 i G3 planarni:

Graf G1:



Graf G3:



Graf G2 nije planaran jer kontrakcijom ivica dobijamo graf  $K_5$ , tj. prema Wagnerovoj teoremi, nije planaran.

d)

Za graf G1:

$$x_1 \rightarrow 4$$

$$x_2 \rightarrow 1$$

$$x_3 \rightarrow 2$$

$$x_4 \rightarrow 3$$

$$x_5 \rightarrow 2$$

$$x_6 \rightarrow 1$$

$$x_7 \rightarrow 3$$

$$x_8 \rightarrow 1$$

Za graf G2:

$$x_1 \rightarrow 1$$

$$x_2 \rightarrow 2$$

$$x3 \rightarrow 3$$

$$x4 \rightarrow 1$$

$$x5 \rightarrow 3$$

$$x6 \rightarrow 2$$

$$x7 \rightarrow 1$$

$$x8 \rightarrow 3$$

Za graf G3:

$$x1 \rightarrow 4$$

$$x2 \rightarrow 1$$

$$x3 \rightarrow 1$$

$$x4 \rightarrow 2$$

$$x5 \rightarrow 3$$

$$x6 \rightarrow 3$$

$$x7 \rightarrow 1$$

$$x8 \rightarrow 2$$

## Zadatak 2

### Postavka:

Potrebno je povezati 12 lokacija L1 – L12 u računarsku mrežu. Zbog tehnoloških ograničenja, kablove nije moguće razvesti između proizvoljne dvije lokacije. Sljedeći spisak opisuje sve moguće načine kablovskog povezivanja lokacija, pri čemu trojka oblika (Li, Lj, dij) označava da je moguće spojiti lokacije Li i Lj, i to kablom dužine dij (u metrima):

(L1, L3, 360) (L1, L5, 1240) (L1, L7, 1290) (L2, L6, 410) (L2, L9, 1400) (L2, L10, 370) (L2, L11, 400) (L2, L12, 390) (L3, L4, 280) (L3, L9, 480) (L3, L11, 640) (L4, L7, 450) (L4, L9, 1200) (L4, L11, 1320) (L5, L6, 350) (L5, L8, 810) (L5, L9, 680) (L6, L8, 580) (L6, L9, 750) (L6, L10, 300) (L6, L11, 1260) (L7, L9, 740) (L8, L12, 1020) (L9, L12, 1000) (L10, L12, 1190)

Dizajnirajte računarsku mrežu u skladu sa navedenim specifikacijama tako da ukupan utrošak kablova bude minimalan i obavezno naznačite koliko iznosi taj utrošak. Dizajn obavite

Primjenom Kruskalovog algoritma sa bojenjem čvorova;

Primjenom optimalnog Kruskalovog algoritma;

Primjenom optimiziranog (kvadratnog) Primovog algoritma.

U sva tri slučaja, nemojte crtati odgovarajući graf, nego sve neophodne radnje obavljajte “naslijepo”, koristeći samo raspoložive podatke, eventualno uz bilježenje izvjesnih pomoćnih informacija.

Rješenje:

U koloni Grana smo izostavili 'L', ali se podrazumijeva.

a) Kruskalov algoritam

| Grana  | Težina | Uzeti | c1 | c2 | c3 | c4 | c5 | c6 | c7 | c8 | c9 | c10 | c11 | c12 |
|--------|--------|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| 3, 4   | 280    | da    |    |    | 1  | 1  |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 6, 10  | 300    | da    |    |    |    |    |    | 2  |    |    |    | 2   |     |     |
| 5, 6   | 350    | da    |    |    |    |    | 2  |    |    |    |    |     |     |     |
| 1, 3   | 360    | da    | 1  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 2, 10  | 370    | da    |    | 2  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 2, 12  | 390    | da    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     | 2   |
| 2, 11  | 400    | da    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     | 2   |     |
| 2, 6   | 410    | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 4, 7   | 450    | da    |    |    |    |    |    |    | 1  |    |    |     |     |     |
| 3, 9   | 480    | da    |    |    |    |    |    |    |    |    | 1  |     |     |     |
| 6, 8   | 580    | da    |    |    |    |    |    |    |    | 2  |    |     |     |     |
| 3, 11  | 640    | da    |    | 1  | 1  |    | 1  | 1  |    | 1  |    | 1   | 1   | 1   |
| 5, 9   | 680    | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 7, 9   | 740    | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 6, 9   | 750    | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 5, 8   | 810    | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 9, 12  | 1000   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 8, 12  | 1020   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 10, 12 | 1190   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 4, 9   | 1200   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 1, 5   | 1240   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 6, 11  | 1240   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 1, 7   | 1290   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 4, 11  | 1320   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |
| 2, 9   | 1400   | ne    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |

$T = \{ (L_3, L_4, 280), (L_{10}, L_6, 300), (L_5, L_6, 350), (L_1, L_3, 360), (L_2, L_{10}, 370), (L_2, L_{12}, 390), (L_2, L_{11}, 400), (L_4, L_7, 450), (L_9, L_3, 480), (L_8, L_6, 580), (L_3, L_{11}, 640) \}$

Suma svih težina je 4600.



b) Optimalni Kruskalov algoritam

| Grana  | Težina | Uzeti | x1/1 | x2/1 | x3/1 | x4/1 | x5/1 | x6/1  | x7/1 | x8/1 | x9/1 | x10/1 | x11/1 | x12/1 |
|--------|--------|-------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 3, 4   | 280    | da    |      |      | x3/2 | x3/1 |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 6, 10  | 300    | da    |      |      |      |      |      | x6/2  |      |      |      | x6/1  |       |       |
| 5, 6   | 350    | da    |      |      |      |      | x6/1 | x6/3  |      |      |      |       |       |       |
| 1, 3   | 360    | da    | x1/1 |      | x3/3 |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 2, 10  | 370    | da    |      | x6/1 |      |      |      | x6/4  |      |      |      |       |       |       |
| 2, 12  | 390    | da    |      |      |      |      |      | x6/5  |      |      |      |       |       | x6/1  |
| 2, 11  | 400    | da    |      |      |      |      |      | x6/6  |      |      |      |       | x6/1  |       |
| 2, 6   | 410    | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 4, 7   | 450    | da    |      |      | x3/4 |      |      |       | x3/1 |      |      |       |       |       |
| 3, 9   | 480    | da    |      |      | x3/5 |      |      |       |      |      | x3/1 |       |       |       |
| 6, 8   | 580    | da    |      |      |      |      |      | x6/7  |      | x6/1 |      |       |       |       |
| 3, 11  | 640    | da    |      |      | x6/4 |      |      | x6/11 |      |      |      |       |       |       |
| 5, 9   | 680    | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 7, 9   | 740    | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 6, 9   | 750    | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 5, 8   | 810    | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 9, 12  | 1000   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 8, 12  | 1020   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 10, 12 | 1190   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 4, 9   | 1200   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 1, 5   | 1240   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 6, 11  | 1240   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 1, 7   | 1290   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 4, 11  | 1320   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |
| 2, 9   | 1400   | ne    |      |      |      |      |      |       |      |      |      |       |       |       |

$T = \{ (L_3, L_4, 280), (L_{10}, L_6, 300), (L_5, L_6, 350), (L_1, L_3, 360), (L_2, L_{10}, 370), (L_2, L_{12}, 390), (L_2, L_{11}, 400), (L_4, L_7, 450), (L_9, L_3, 480), (L_8, L_6, 580), (L_3, L_{11}, 640) \}$

Suma svih težina je 4600.

c) Optimizirani kvadratni Primov algoritam

Primjetimo da u tabeli oznake čvorova ne idu od L1 nego L10 - L12, te

L1 - L9

| Iteracija             | $L_{10}$ | $L_{11}$ | $L_{12}$ | $L_1$    | $L_2$    | $L_3$    | $L_4$    | $L_5$    | $L_6$    | $L_7$    | $L_8$    | $L_9$    |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Pocetno stanje        | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $(L_{10}, L_{10}, 0)$ | 0        | —        | 1190     | —        | 370      | —        | —        | —        | 300      | —        | —        | —        |
| $(L_{10}, L_6, 300)$  | 0        | 1260     | 1190     | —        | 370      | —        | —        | 350      | 300      | —        | 580      | 750      |
| $(L_6, L_5, 350)$     | 0        | 1260     | 1190     | 1240     | 370      | —        | —        | 350      | 300      | —        | 580      | 680      |
| $(L_{10}, L_2, 370)$  | 0        | 400      | 390      | 1240     | 370      | —        | —        | 350      | 300      | —        | 580      | 680      |
| $(L_2, L_{12}, 390)$  | 0        | 400      | 390      | 1240     | 370      | —        | —        | 350      | 300      | —        | 580      | 680      |
| $(L_2, L_{11}, 400)$  | 0        | 400      | 390      | 1240     | 370      | 640      | 1320     | 350      | 300      | —        | 580      | 680      |
| $(L_6, L_8, 580)$     | 0        | 400      | 390      | 1240     | 370      | 640      | 1320     | 350      | 300      | —        | 580      | 680      |
| $(L_{11}, L_3, 640)$  | 0        | 400      | 390      | 360      | 370      | 640      | 280      | 350      | 300      | —        | 580      | 480      |
| $(L_3, L_4, 280)$     | 0        | 400      | 390      | 360      | 370      | 640      | 280      | 350      | 300      | 450      | 580      | 480      |
| $(L_3, L_1, 360)$     | 0        | 400      | 390      | 360      | 370      | 640      | 280      | 350      | 300      | 450      | 580      | 480      |
| $(L_4, L_7, 450)$     | 0        | 400      | 390      | 360      | 370      | 640      | 280      | 350      | 300      | 450      | 580      | 480      |
| $(L_3, L_9, 480)$     | 0        | 400      | 390      | 360      | 370      | 640      | 280      | 350      | 300      | 450      | 580      | 480      |

$T = \{ (L_{10}, L_6, 300), (L_6, L_5, 350), (L_{10}, L_2, 370), (L_2, L_{12}, 390), (L_2, L_{11}, 400), (L_6, L_8, 580), (L_{11}, L_3, 640), (L_3, L_4, 280), (L_3, L_1, 360), (L_4, L_7, 450), (L_3, L_9, 480) \}$

Suma svih težina je 4600.

## Zadatak 3

### Postavka:

Turistička agencija “Pljačkaš tours” ima poslovnice u 8 gradova: Amcazo, Uhsuru, Quwuti, Brot, Zixa, Sosyab, Xanu i Urasoto. U sljedećoj tablici su date cijene direktnih avionskih letova između pojedinih gradova izražene u škafiškafnjacima (crtica znači da direktan let ne postoji):

|         | Amcazo | Uhsuru | Quwuti | Brot | Zixa | Sosyab | Xanu | Urasoto |
|---------|--------|--------|--------|------|------|--------|------|---------|
| Amcazo  | 0      | 470    | 260    | 500  | 220  | 1030   | 1210 | -       |
| Uhsuru  | 470    | 0      | 510    | 610  | 260  | 480    | 270  | 1490    |
| Quwuti  | 260    | 510    | 0      | 1370 | 600  | -      | -    | 460     |
| Brot    | 500    | 610    | 1370   | 0    | 610  | -      | 640  | 1060    |
| Zixa    | 220    | 260    | 600    | 610  | 0    | 500    | 370  | 240     |
| Sosyab  | 1030   | 480    | -      | -    | 500  | 0      | 770  | 250     |
| Xanu    | 1210   | 270    | -      | 640  | 370  | 770    | 0    | 370     |
| Urasoto | -      | 1490   | 460    | 1060 | 240  | 250    | 370  | 0       |

Međutim, poznato je da direktni letovi nisu uvijek i najjeftiniji način avio-transporta između gradova, nego je nekada povoljnije koristiti presjedanje (pogotovo ako se na taj način mogu koristiti usluge low-cost kompanija. Na primjer, iz Quwutija jeftinije je u Brot putovati sa presjedanjem u Uhsuru nego direktnim letom (sa presjedanjem plaćamo  $510 + 610 = 1120$  škafiškafnjaka, dok direktan let košta 1370 škafiškafnjaka). Zbog toga, turistička agencija želi da sastavi tablicu koja sadrži informacije koliko iznose najjeftinije cijene avio-transporta između svakog para gradova u kojima agencija ima poslovnice (uz dopuštanje presjedanja) kao i u kojim gradovima treba eventualno vršiti presjedanja za svaki od tih transporta. Pomozite agenciji “Pljačkaš tours” da sastavi ove tablice. Postupak obavite uz pomoć Dijkstrinog algoritma, ali bez crtanja grafova, nego samo vršeći manipulacije nad zadanom tablicom, uz eventualno bilježenje pomoćnih dopunskih informacija.

### Rješenje:

Pokazat ćemo Dijkstrin algoritam za 2 tabele tj. 2 grada, ostale tabele se rade analogno. Potrebno je minimalno 7 tabela(7 različitih gradova) da bi se dobile sve potrebne informacije. Rješenje ćemo predstaviti također u vidu tabele.

Kodirati ćemo gradove tako da ih je lakše predstaviti:

Amcazo - A, Uhsuru - B, Quwuti - C, Brot - D, Zixa - E, Sosyab - F, Xanu - G, Urasoto - H

Za Amcazo:

|        | A | B     | C     | D     | E     | F      | G      | H     |
|--------|---|-------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
|        | 0 | -     | -     | -     | -     | -      | -      | -     |
| A(0)   |   | 470/A | 260/A | 500/A | 220/A | 1030/A | 1210/A | -     |
| E(220) |   | 470/A | 260/A | 500/A |       | 720/E  | 590/E  | 460/E |
| C(460) |   | 470/A |       | 500/A |       | 720/E  | 590/E  | 460/E |
| H(460) |   | 470/A |       | 500/A |       | 710/H  | 590/E  |       |
| B(470) |   |       |       | 500/A |       | 710/H  | 590/E  |       |
| D(500) |   |       |       |       |       | 710/H  | 590/E  |       |
| G(590) |   |       |       |       |       | 710/H  |        |       |
| F(710) |   |       |       |       |       |        |        |       |

Za Uhsuru

|        | A     | B | C     | D     | E     | F     | G     | H      |
|--------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
|        | -     | 0 | -     | -     | -     | -     | -     | -      |
| B(0)   | 470/B |   | 510/B | 610/B | 260/B | 480/B | 270/B | 1490/B |
| E(260) | 470/B |   | 510/B | 610/B |       | 480/B | 270/B | 500/E  |
| G(270) | 470/B |   | 510/B | 610/B |       | 480/B |       | 500/E  |
| A(470) |       |   | 510/B | 610/B |       | 480/B |       | 500/E  |
| F(480) |       |   | 510/B | 610/B |       |       |       | 500/E  |
| H(500) |       |   | 510/B | 610/B |       |       |       |        |
| C(510) |       |   |       | 610/B |       |       |       |        |
| D(610) |       |   |       |       |       |       |       |        |

Itd. za gradove C - G. Konačno se dobije:

|         | Amcazo | Uhsuru | Quwuti | Brot | Zixa | Sosyab | Xanu | Urasoto |
|---------|--------|--------|--------|------|------|--------|------|---------|
| Amcazo  | 0      | 470    | 260    | 500  | 220  | 710    | 590  | 460     |
| Uhsuru  | 470    | 0      | 510    | 610  | 260  | 480    | 270  | 500     |
| Quwuti  | 260    | 510    | 0      | 760  | 480  | 710    | 780  | 460     |
| Brot    | 500    | 610    | 760    | 0    | 610  | 1090   | 640  | 850     |
| Zixa    | 220    | 260    | 480    | 610  | 0    | 490    | 370  | 240     |
| Sosyab  | 710    | 480    | 710    | 1090 | 490  | 0      | 620  | 250     |
| Xanu    | 590    | 270    | 780    | 640  | 370  | 620    | 0    | 370     |
| Urasoto | 460    | 500    | 460    | 850  | 240  | 250    | 370  | 0       |

## Zadatak 4

Postavka:

Dat je usmjereni težinski graf

$$G = \{\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}, \{(A, I, 65), (B, G, -95), (C, D, 65), (C, F, 55), (C, I, 75), (D, A, -105), (D, H, 60), (E, H, 70), (F, D, 80), (F, E, -65), (G, A, 40), (G, C, -30), (G, E, 50), (H, B, 45), (H, G, 60), (I, H, 20), (J, C, -85), (J, D, 25)\}\}$$

Koristeći Bellman-Fordov algoritam, dokažite da u ovom grafu postoji kontura sa negativnom sumom težina u konturi. Nakon toga pronađite makar jednu takvu konturu. Postupak obavite “naslijepo”, bez crtanja grafa, koristeći samo raspoložive informacije (eventualno uz bilježenje raznih pomoćnih informacija).

Rješenje:

Dovoljno je da pokažemo da suma grana u konturi kojoj pripada prvi čvor tj. čvor A bude  $\lambda_A < 0$ . Pokazuje se da je za konrektan problem dovoljno 4 iteracije da bi se dobio traženi uslov.

Iteracija1:

|   | A | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H        | I        | J        | $\lambda$    |
|---|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------|
|   | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |              |
| A |   |          |          |          |          |          |          |          | 65       |          | $\infty$     |
| B |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| C |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| D |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| E |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| F |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| G |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |
| H |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 85$ |
| I |   |          |          |          |          |          |          | 85       |          |          | $\infty, 65$ |
| J |   |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$     |

Iteracija2:

|   | A | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H  | I  | J        | $\lambda$     |
|---|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|----|----------|---------------|
|   | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 85 | 65 | $\infty$ |               |
| A |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |
| B |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty, 130$ |
| C |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |
| D |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |
| E |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |
| F |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |
| G |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty, 145$ |
| H |   | 130      |          |          |          |          | 145      |    |    |          | 85            |
| I |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | 65            |
| J |   |          |          |          |          |          |          |    |    |          | $\infty$      |

Iteracija 3:

|   | A | B   | C        | D        | E        | F        | G   | H  | I  | J        | $\lambda$    |
|---|---|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----|----|----------|--------------|
|   | 0 | 130 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 145 | 85 | 65 | $\infty$ |              |
| A |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty$     |
| B |   |     |          |          |          |          | 35  |    |    |          | 130          |
| C |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty, 5$  |
| D |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty$     |
| E |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty, 85$ |
| F |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty$     |
| G |   |     | 5        |          | 85       |          |     |    |    |          | 145, 35      |
| H |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | 85           |
| I |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | 65           |
| J |   |     |          |          |          |          |     |    |    |          | $\infty$     |

Iteracija 4:

|   | A   | B   | C | D        | E  | F        | G  | H  | I  | J        | $\lambda$     |
|---|-----|-----|---|----------|----|----------|----|----|----|----------|---------------|
|   | 0   | 130 | 5 | $\infty$ | 85 | $\infty$ | 35 | 85 | 65 | $\infty$ |               |
| A |     |     |   |          |    |          |    |    |    |          | 0, -35        |
| B |     |     |   |          |    |          |    |    |    |          | 130           |
| C |     |     |   | 70       |    | 60       |    |    |    |          | 5             |
| D | -35 |     |   |          |    |          |    |    |    |          | $\infty$ , 70 |
| E |     |     |   |          |    |          |    | 65 |    |          | 85, -5        |
| F |     |     |   | 140      | -5 |          |    |    |    |          | $\infty$ , 60 |
| G |     |     |   |          |    |          |    |    |    |          | 35            |

Dobili smo  $\lambda_A = -35 < 0$ , pa je pronađen put negativne dužine koji spaja čvor A sam sa sobom. Algoritam sigurno neće terminirati. Dakle, kontura sa negativnom sumom težina je: A-I-H-B-G-C-D-A.



## Zadatak 5

Postavka:

Dat je usmjereni težinski graf

$$G = \{\{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11\}, \{(x1, x5, 33), (x1, x6, 17), (x1, x8, 14), \\ (x2, x3, 25), (x2, x7, 26), (x4, x3, 35), (x5, x9, 8), (x5, x10, 5), \\ (x6, x5, 32), (x6, x8, 8), (x7, x3, 26), (x7, x4, 14), (x8, x9, 18), \\ (x8, x11, 25), (x9, x10, 18), (x9, x11, 10), (x10, x4, 40), (x10, x7, 18), \\ (x11, x2, 21), (x11, x7, 20)\}\}$$

Pokažite da u ovom grafu ima tačno jedan izvor (čvor ulaznog stepena 0) i tačno jedan ponor (čvor izlaznog stepena 0), te da se radi o acikličkom grafu;

Izvršite topološko sortiranje čvorova ovog grafa obavljajući DFS pretragu počev od izvora grafa;

Primjenom Dijkstrinog algoritma, pronađite najkraći put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta;

Primjenom Bellman-Fordovog algoritma, pronađite najkraći put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta;

Primjenom Bellman-Fordovog algoritma, pronađite najduži put od izvora do ponora grafa i navedite koliko iznosi dužina tog puta.

Postupak provedite “naslijepo”, bez crtanja grafa, koristeći samo raspoložive informacije (eventualno uz bilježenje raznih pomoćnih informacija).

Rješenje:

a)

Izvor je čvor x1 jer u njega ne ulazi niti jedna grana, također on je jedini izvor.

Ponor je čvor x3 jer iz njega ne izlazi niti jedna grana, također on je jedini ponor.

Radi se o transportnoj mreži. Graf sadrži izvor i ponor, pa je potreban uslov acikličnosti zadovoljen. Ako bilo koji čvor uzmemo da je početni i počnemo pratiti usmjerenje grana, doći ćemo uvijek do ponora. Dakle, dati graf je acikličan graf.

b) Topološko sortiranje koristeći DFS. Uradit ćemo zadatak na čisto 'programerski' način. Dodavat ćemo čvorove na stack, kada čvor pop-amo sa stacka dodat ćemo ga u listu. Na kraju, listu ćemo samo prevrnuti tako da prvi element ima indeks zadnjeg elementa itd. Uradit ćemo nekoliko koraka, pa ćemo napisati rješenje jer se radi analogno kao i prethodni koraci. Pop-anje i pushanje na stack je zapravo DFS.

Pratimo redom čvorove:  $x_1 - x_5 - x_9 - x_{10} - x_4 - x_3$

Stack trenutno izgleda ovako (prvi element predstavlja vrh stacka, a zadnji dno):  $x_3 - x_4 - x_{10} - x_9 - x_5 - x_1$

Pošto je  $x_3$  ponor, on nema granu koja vodi u neki drugi čvor, pa njega slobodno pop-amo sa stacka, te ga dodamo u listu.

Lista:  $x_3$

Stack:  $x_4 - x_{10} - x_9 - x_5 - x_1$

Čvor  $x_4$  ima jedan put koji vodi do čvora  $x_3$ , ali čvor  $x_3$  se nalazi u listi dakle posjećen je, pa možemo slobodno pop-ati čvor  $x_4$ .

Lista:  $x_3, x_4$

Stack:  $x_{10} - x_9 - x_5 - x_1$

Čvor  $x_{10}$  ima put koji vodi do  $x_7$  pa  $x_7$  pushamo na stack:

Lista:  $x_3, x_4$

Stack:  $x_7 - x_{10} - x_9 - x_5 - x_1$

Čvor  $x_7$  vodi do  $x_3$  i  $x_4$ . Oba čvora na koji vodi  $x_7$  su posjećeni, pa pop-amo  $x_7$  sa stacka:

Lista:  $x_3, x_4, x_7$

Stack:  $x_{10} - x_9 - x_5 - x_1$

Sljedeće korake uradimo na osnovu do sada objašnjenih koraka, te na kraju dobijemo listu:

$x_3, x_4, x_7, x_{10}, x_2, x_{11}, x_9, x_5, x_8, x_6, x_1$

sa indeksima redom od 1 do 11. Kada prevrnemo listu, dobijemo sljedeće indekse čvorova što je zapravo i rješenje:

$x_3 - 11, x_4 - 10, x_7 - 9, x_{10} - 8, x_2 - 7, x_{11} - 6, x_9 - 5, x_5 - 4, x_8 - 3, x_6 - 2, x_1 - 1$

c) Zanima nas najkraći put od  $x_1$  do  $x_3$

|              | $x_1$ | $x_2$       | $x_3$    | $x_4$       | $x_5$    | $x_6$    | $x_7$       | $x_8$    | $x_9$    | $x_{10}$ | $x_{11}$ |
|--------------|-------|-------------|----------|-------------|----------|----------|-------------|----------|----------|----------|----------|
|              | 0     | -           | -        | -           | -        | -        | -           | -        | -        | -        | -        |
| $x_1(0)$     |       | -           | -        | -           | $33/x_1$ | $17/x_1$ | -           | $14/x_1$ | -        | -        | -        |
| $x_8(14)$    |       | -           | -        | -           | $33/x_1$ | $17/x_1$ | -           |          | $32/x_8$ | -        | $36/x_8$ |
| $x_6(17)$    |       | -           | -        | -           | $33/x_1$ |          | -           |          | $32/x_8$ | -        | $36/x_8$ |
| $x_9(32)$    |       | -           | -        | -           | $33/x_1$ |          | -           |          |          | $50/x_9$ | $36/x_8$ |
| $x_5(33)$    |       | -           | -        | -           |          |          | -           |          |          | $38/x_5$ | $36/x_8$ |
| $x_{11}(36)$ |       | $57/x_{11}$ | -        | -           |          |          | $56/x_{11}$ |          |          | $38/x_5$ |          |
| $x_{10}(38)$ |       | $57/x_{11}$ | -        | $78/x_{10}$ |          |          | $56/x_{11}$ |          |          |          |          |
| $x_7(56)$    |       | $57/x_{11}$ | $82/x_7$ | $70/x_7$    |          |          |             |          |          |          |          |
| $x_2(57)$    |       |             | $82/x_7$ | $70/x_7$    |          |          |             |          |          |          |          |
| $x_4(70)$    |       |             | $82/x_7$ |             |          |          |             |          |          |          |          |
| $x_3(82)$    |       |             |          |             |          |          |             |          |          |          |          |

Dužina najkraćeg puta od  $x_1$  -  $x_3$  je 82. Put je  $x_1$  -  $x_5$  -  $x_{10}$  -  $x_7$  -  $x_3$ .

d) Iteracija 1

|     | x1 | x2       | x3       | x4       | x5       | x6       | x7       | x8       | x9       | x10      | x11      | $\lambda$        |
|-----|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------|
|     | 0  | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |                  |
| x1  |    |          |          |          | 33       | 17       |          | 14       |          |          |          | 0                |
| x2  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 60$     |
| x3  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$         |
| x4  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 78$     |
| x5  |    |          |          |          |          |          |          |          | 41       | 38       |          | $\infty, 33$     |
| x6  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 17$     |
| x7  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 56$     |
| x8  |    |          |          |          |          |          |          |          | 32       |          | 39       | $\infty, 14$     |
| x9  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 41, 32$ |
| x10 |    |          |          | 78       |          |          | 56       |          |          |          |          | $\infty, 38$     |
| x11 |    | 60       |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty, 39$     |

Iteracija 2

|     | x1 | x2 | x3       | x4 | x5 | x6 | x7 | x8 | x9 | x10 | x11 | $\lambda$        |
|-----|----|----|----------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|------------------|
|     | 0  | 60 | $\infty$ | 78 | 33 | 17 | 56 | 14 | 32 | 38  | 39  |                  |
| x1  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 0                |
| x2  |    |    | 85       |    |    |    |    |    |    |     |     | 60               |
| x3  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | $\infty, 85, 82$ |
| x4  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 78, 70           |
| x5  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 33               |
| x6  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 17               |
| x7  |    |    | 82       | 70 |    |    |    |    |    |     |     | 56               |
| x8  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 14               |
| x9  |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 32               |
| x10 |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 38               |
| x11 |    |    |          |    |    |    |    |    |    |     |     | 39               |

Dužina najkraćeg puta od x1 - x3 je 82. Put je x1 - x5 - x10 - x7 - x3.

e)

Najduži put od x1 - x3.

Iteracija 1

|     | x1 | x2       | x3       | x4       | x5       | x6       | x7       | x8       | x9       | x10      | x11      | $\lambda$         |
|-----|----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------------------|
|     | 0  | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |                   |
| x1  |    |          |          |          |          | 33       | 17       |          | 14       |          |          | 0                 |
| x2  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$ , 74     |
| x3  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$          |
| x4  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$ , 101    |
| x5  |    |          |          |          |          |          |          |          | 41       | 38       |          | $\infty$ , 33, 49 |
| x6  |    |          |          |          | 49       |          |          | 25       |          |          |          | $\infty$ , 17     |
| x7  |    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$ , 79     |
| x8  |    |          |          |          |          |          |          |          | 43       |          | 50       | $\infty$ , 14, 25 |
| x9  |    |          |          |          |          |          |          |          |          | 61       | 53       | $\infty$ , 41, 43 |
| x10 |    |          |          | 101      |          |          | 79       |          |          |          |          | $\infty$ , 38, 61 |
| x11 |    | 74       |          |          |          |          |          |          |          |          |          | $\infty$ , 50, 53 |

Iteracija 2

|     | x1 | x2 | x3       | x4  | x5 | x6 | x7  | x8 | x9 | x10 | x11 | $\lambda$          |
|-----|----|----|----------|-----|----|----|-----|----|----|-----|-----|--------------------|
|     | 0  | 74 | $\infty$ | 101 | 49 | 17 | 79  | 25 | 43 | 61  | 53  |                    |
| x1  |    |    |          |     |    |    |     |    |    |     |     | 0                  |
| x2  |    |    | 99       |     |    |    | 100 |    |    |     |     | 74, 88             |
| x3  |    |    |          |     |    |    |     |    |    |     |     | $\infty$ , 99, 136 |
| x4  |    |    | 136      |     |    |    |     |    |    |     |     | 101, 114, 115      |
| x5  |    |    |          |     |    |    |     |    | 57 |     |     | 49                 |
| x6  |    |    |          |     |    |    |     |    |    |     |     | 17                 |
| x7  |    |    |          | 114 |    |    |     |    |    |     |     | 79, 100            |
| x8  |    |    |          |     |    |    |     |    |    |     |     | 25                 |
| x9  |    |    |          |     |    |    |     |    |    | 75  | 67  | 43, 57             |
| x10 |    |    |          | 115 |    |    |     |    |    |     |     | 61, 75             |
| x11 |    | 88 |          |     |    |    |     |    |    |     |     | 53, 67             |

### Iteracija 3

|     | x1 | x2 | x3  | x4  | x5 | x6 | x7  | x8 | x9 | x10 | x11 | $\lambda$ |
|-----|----|----|-----|-----|----|----|-----|----|----|-----|-----|-----------|
|     | 0  | 88 | 136 | 115 | 49 | 17 | 100 | 25 | 57 | 75  | 67  |           |
| x1  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 0         |
| x2  |    |    |     |     |    |    | 114 |    |    |     |     | 88        |
| x3  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 136, 150  |
| x4  |    |    | 150 |     |    |    |     |    |    |     |     | 115, 128  |
| x5  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 49        |
| x6  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 17        |
| x7  |    |    |     | 128 |    |    |     |    |    |     |     | 100, 114  |
| x8  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 25        |
| x9  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 57        |
| x10 |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 75        |
| x11 |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 67        |

### Iteracija 4

|     | x1 | x2 | x3  | x4  | x5 | x6 | x7  | x8 | x9 | x10 | x11 | $\lambda$ |
|-----|----|----|-----|-----|----|----|-----|----|----|-----|-----|-----------|
|     | 0  | 88 | 150 | 128 | 49 | 17 | 114 | 25 | 57 | 75  | 67  |           |
| x1  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 0         |
| x2  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 88        |
| x3  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 150, 163  |
| x4  |    |    | 163 |     |    |    |     |    |    |     |     | 128       |
| x5  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 49        |
| x6  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 17        |
| x7  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 114       |
| x8  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 25        |
| x9  |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 57        |
| x10 |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 75        |
| x11 |    |    |     |     |    |    |     |    |    |     |     | 67        |

Najduži put je dužine 163. Put je Put: x1 - x6 - x5 - x9 - x11 - x2 - x7 - x4 - x3.