

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET UNIVERZITETA  
SARAJEVO

# Diskretna Matematika

## Zadaća 2

*Student*

Vedad Fejzagić

*Broj indeksa*

17336

**Demonstrator**

Šeila Bećirović

*Grupa*

RI2-2

November 21, 2017

## Zadatak 1

Postavka:

Odredite na koliko je različitih načina moguće razmjestiti 7 studenata i 3 profesora oko okruglog stola ako je poznato da se profesori međusobno ne podnose i ne mogu sjediti jedan do drugog.

Rješenje:

Sedam studenata možemo raspodijeliti oko okruglog stola na  $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$  načina. Profesore raspoređujemo između svaka dva studenta. Prvog profesora možemo na 7 mjesta smjestiti, drugog na 6 i trećeg na 5 mjesta. Dakle  $7 \cdot 6 \cdot 5$  načina.

Na osnovu multiplikativnog principa, ukupan broj načina je:

$$\frac{P_7}{7} \cdot 7^{(3)} = 6! \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{151200}$$

## Zadatak 2

### Postavka:

Potrebno je formirati šestočlanu ekipu za međunarodno softversko-hardversko takmičenje. Uvjeti su da ekipa mora imati barem tri studenta sa smjera RI, dok su studenti drugih smjerova poželjni (zbog većeg hardverskog znanja) ali ne i obavezni. Za takmičenje se prijavilo 5 studenata smjera RI i 6 studenata smjera AiE (dok studenti drugih smjerova nisu bili zainteresirani). Odredite na koliko načina je moguće odabrati traženu ekipu. Koliko će iznositi broj mogućih ekipa ukoliko se postavi dodatno ograničenje da ekipa mora imati i barem dva studenta smjera AiE?

### Rješenje:

Potrebno je izabrati minimalno  $k$  studenata sa smjera RI i  $6-k$  studenata sa smjera AiE, gdje je  $k \geq 3$ . Dakle, problem se svodi na računanje sume  $\sum_{k=3}^5 C_5^k \cdot C_6^{6-k}$ . Dakle:

$$C_5^3 \cdot C_6^3 + C_5^4 \cdot C_6^2 + C_5^5 \cdot C_6^1 = 10 \cdot 20 + 5 \cdot 15 + 6 = \underline{281}$$

Dodatno ograničenje: barem 2 studenta AiE:

$$C_5^3 \cdot C_6^3 + C_5^4 \cdot C_6^2 = 10 \cdot 20 + 5 \cdot 15 = \underline{275}$$

## Zadatak 3

Postavka:

Odredite na koliko načina možemo raspodijeliti 10 jabuka, 9 banana i 11 kajsija među troje djece, pri čemu se pretpostavlja se da se primjerci iste voćke ne mogu međusobno razlikovati (npr. sve jabuke su iste).

Rješenje:

Podijelit ćemo prvo jabuke, pa banane pa kajsije. Pošto su podjele neovisne, koristimo multiplikativni princip:

$$\overline{C}_3^{10} \cdot \overline{C}_3^9 \cdot \overline{C}_3^{11} = C_{12}^{10} \cdot C_{11}^9 \cdot C_{13}^{11} = \binom{12}{10} \binom{11}{9} \binom{13}{11} = \underline{283140}$$

## Zadatak 4

### Postavka:

Na stolu se nalazi određena količina papirića, pri čemu se na svakom od papirića nalazi po jedno slovo. Na 3 papirića se nalazi slovo Z, na 4 papirića se nalazi slovo D, na 5 papirića slovo P i na 4 papirića slovo J. Odredite koliko se različitih šestoslovnih riječi može napisati slažući uzete papiriće jedan do drugog (nebitno je imaju li te riječi smisla ili ne).

### Rješenje:

Imamo  $\{3 \cdot Z, 4 \cdot D, 5 \cdot P, 4 \cdot J\}$ . Potrebno je izračunati  $\overline{P}_{4;3,4,5,4}^6$ . To ćemo uraditi preko generatriše:

$$\psi_{n;m_1,m_2,\dots,m_n}(t) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} \frac{t^j}{j!}$$

$$\psi_{4;3,4,5,4}(t) = \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right) \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}\right)^2 \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+\frac{t^5}{120}\right)$$

$$\psi_{4;3,4,5,4}(t) = 1 + 4t + 8t^2 + \frac{32}{3}t^3 + \frac{85}{8}t^4 + \frac{503}{60}t^5 + \frac{1301}{240}t^6 + \dots$$

Koeficijent uz  $t^6$  je  $\frac{1301}{240}$ , dakle rješenje je:

$$\frac{1301}{240} \cdot 6! = \underline{3903}$$

## Zadatak 5

### Postavka:

Odredite koliko se različitih paketa koji sadrže 5 voćki može napraviti ukoliko nam je raspolaganju 6 krušaka, 3 kajsijsje, 3 banane, 3 jabuke i 1 naranča (pri čemu se pretpostavlja da ne pravimo razliku između primjeraka iste voćke).

### Rješenje:

Radi se o 5-kombinacija multiskupa  $\{5 \cdot \textit{kruka}, 3 \cdot \textit{kajsijsja}, 3 \cdot \textit{banana}, 3 \cdot \textit{jabuka}, 1 \cdot \textit{narana}\}$ , takod a je broj traženih paketa zapravo  $\overline{C}_{5;6,3,3,3,1}^5$ . Rješavamo pomoću generatriše za koju vrijedi:

$$\varphi_{n;m_1,m_2,\dots,m_n}(t) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m_i} t^j$$

$$\varphi_{5;6,3,3,3,1}(t) = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)(1 + t + t^2 + t^3)^3(1 + t)$$

$$\varphi_{5;6,3,3,3,1}(t) = 1 + 5t + 14t^2 + 27t^3 + 40t^4 + 49t^5 + \dots$$

Koeficijent uz  $t^5$  je 49 što je zapravo rješenje zadatka.

## Zadatak 6

Postavka:

Odredite na koliko načina se može rasporediti 9 identičnih kuglica u 4 različitih kutija, ali tako da u svakoj kutiji bude najviše 4 kuglica.

Rješenje:

Potrebno je odrediti broj kombinacija sa ponavljanjem klase 9 skupa od 4 elementa u kojoj se svaki element javlja najviše 4 puta. Dakle zanima nas  $\overline{C}_{4;S,S,S,S}^9$ . Koristimo generatrise:

$$\varphi_{4;S,S,S,S}(t) = \prod_{i=1}^4 \sum_{j \in S} t^j = (1 + t + t^2 + t^3 + t^4)^4$$

Izrazimo sumu ovog geometrijskog reda na drugi način:

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 &= s / \cdot t \\ t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 &= st / (+1) \\ 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 &= st + 1 \\ s + t^5 &= st + 1 \\ s &= \frac{1 - t^5}{1 - t} \end{aligned}$$

Pa je:

$$\varphi_{4;S,S,S,S}(t) = \left( \frac{1 - t^5}{1 - t} \right)^4 = (1 - t^5)^4 (1 - t)^{-4} = \left( \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} (-t^5)^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-4}{i} (-t)^i \right)$$

Raspisivanjem ovih suma, zatim množenjem članova čiji produkt daje koeficijent uz  $t^9$ , te izračunavanjem tako dobijenog izraza, dobije se rezultat:

$$\overline{C}_{4;S,S,S,S}^9 = 80$$

Alternativno, mogli smo množiti izraz grubom silom i tako dobiti isto rješenje.

## Zadatak 7

### Postavka:

Odredite na koliko načina se 13 različitih predmeta upakovati u 7 identičnih vreća (koje nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogle razlikovati), pri čemu se dopušta i da neke od vreća ostanu prazne.

### Rješenje:

Ovdje se radi o Stirlingovim brojevima druge vrste, pri čemu je  $n = 13$  i  $k = 7$ , te ćemo razmatrati više slučajeva:

1. Nijedna vreća nije prazna
2. Jedna vreća prazna
3. Dvije vreće prazne
4. Tri vreće prazne
5. Četiri vreće prazne
6. Pet vreća praznih
7. Šest vreća praznih

I na kraju sabrati sve slučajeve. Primjetimo da se suma svih slučajeva može napisati kao suma Stirlingovih brojeva druge vrste  $\sum_{i=1}^7 S_{13}^i$ . Rješavamo pomoću tabele:



Table 1: Stirlingovi brojevi druge vrste								
n/k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880
11	0	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987
12	0	1	2047	86526	611501	1379400	1323652	627396
13	0	1	4095	261625	2532530	7508501	9321312	5715424

Sada samo saberemo sve brojeve u svim kolonama u zadnjem redu, dakle:

$$\sum_{i=1}^7 S_{13}^i = 5715424+9321312+7508501+2532530+261625+4095+1 = \underline{25343488}$$

## Zadatak 8

### Postavka:

Odredite na koliko se načina može 11 kamenčića razvrstati u 6 gomilica. Pri tome se i kamenčići i gomilice smatraju identičnim (odnosno ni kamenčići ni gomilice nemaju nikakav identitet po kojem bi se mogli razlikovati).

### Rješenje:

Da bi jedna gomilica postojala mora biti barem 1 kamenčić koji predstavlja tu gomilicu. Dakle, svaka od 6 gomilica mora imati barem 1 kamenčić.

Također, pošto se ni kamenčići ni gomilice ne razlikuju međusobno, radi se o particijama  $p_{11}^6$  koje ćemo izračunati pomoću tabele koristeći formulu  $p_n^k = p_{n-1}^{k-1} + p_{n-k}^k$ . Tabela je data ispod.

Table 2: Particije $p_{11}^6$						
n/k	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0
5	1	2	2	1	1	0
6	1	3	3	2	1	1
7	1	3	4	3	2	1
8	1	4	5	5	3	2
9	1	4	7	6	5	3
10	1	5	8	9	7	5
11	1	5	10	11	10	7

Dakle, rješenje je  $p_{11}^6 = 7$

## Zadatak 9

Postavka:

Odredite na koliko načina se broj 13 može rastaviti na sabirke koji su prirodni brojevi, pri čemu njihov poredak nije bitan, ali pod dodatnim uvjetom da se sabirak 1 smije pojaviti najviše 2 puta, dok se sabirak 3 smije pojaviti samo neparan broj puta.

Rješenje:

Dakle, radi se o particijama sa dodatnim ograničenjima koji možemo lahko riješiti koristeći generatrisu. Imamo sljedeći slučaj:

$$n = 13$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 13\}$$

Pošto sabirak 1 najviše 2 puta:

$$S_1 = \{0, 1, 2\}$$

Pošto se sabirak 3 smije pojaviti samo neparan broj puta, ako se pojavi 5 puta onda minimalni broj koji bi sabirci formirali je 15, dakle samo jednom i tri puta se smije pojaviti:

$$S_3 = \{1, 3\}$$

Ostali:

$$S_2 = S_4 = \dots = S_{13} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Generatrisa:

$$\varphi(t) = \prod_{i=S} \sum_{j \in S_i} t^{i \cdot j} = \prod_{i=1}^{13} \sum_{j \in S_i} t^{i \cdot j}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & (1+t+t^2)(1+t^2+t^4+t^6+t^8+t^{10}+t^{12}+\dots)(t^3+t^9)(1+t^4+t^8+t^{12}+\dots)(1+t^5+t^{10}+\dots) \\ & (1+t^6+t^{12}+\dots)(1+t^7+\dots)(1+t^8+\dots)(1+t^9+\dots)(1+t^{10}+\dots)(1+t^{11}+\dots)(1+t^{12}+\dots)(1+t^{13}+\dots) \end{aligned}$$

Dobije se:

$$t^3 + t^4 + 2t^5 + t^6 + 3t^7 + 3t^8 + 7t^9 + 7t^{10} + 12t^{11} + 12t^{12} + 20t^{13} + \dots$$

Koeficijent uz  $t^{13}$ (rješenje) je 20.

## Zadatak 10

### Postavka:

U nekoj kutiji nalazi se 165 kompakt diskova (CD-ova), od kojih je 20 diskova nečitljivo. Ukoliko nasumice izaberemo 9 diskova iz kutije, nadite vjerovatnoću da će

- a. svi izabrani diskovi biti čitljivi;
- b. tačno jedan izabrani disk biti nečitljiv;
- c. barem jedan izabrani disk biti nečitljiv;
- d. tačno dva izabrana diska biti nečitljiva;
- e. barem dva izabrana diska biti nečitljiva;
- f. najviše dva izabrana diska biti nečitljiva;
- g. najviše dva izabrana diska biti čitljiva;
- h. svi izabrani diskovi biti nečitljivi.

### Rješenje:

Od 165 CD-ova, 20 je nečitljivo, dakle 145 je čitljivo. Biramo 9 nasumice. Dakle:

a)

$$p = \frac{C_{145}^9}{C_{165}^9} = \frac{\binom{145}{9}}{\binom{165}{9}} \approx 0.303 \approx 30\%$$

b)

$$p = \frac{C_{20}^1 C_{145}^8}{C_{165}^9} \approx 0.398 \approx 39.8\%$$

c)

$$p = \frac{C_{145}^1 C_{20}^8 + C_{145}^2 C_{20}^7 + C_{145}^3 C_{20}^6 + C_{145}^4 C_{20}^5 + C_{145}^5 C_{20}^4 + C_{145}^6 C_{20}^3 + C_{145}^7 C_{20}^2 + C_{145}^8 C_{20}^1 + C_{20}^9}{C_{165}^9}$$

$$p \approx 0.697 \approx 69.7\%$$

d)

$$p = \frac{C_{20}^2 C_{145}^7}{C_{165}^9} \approx 0.2192 \approx 21.9\%$$

e)

$$p = \frac{C_{145}^2 C_{20}^7 + C_{145}^3 C_{20}^6 + C_{145}^4 C_{20}^5 + C_{145}^5 C_{20}^4 + C_{145}^6 C_{20}^3 + C_{145}^7 C_{20}^2 + C_{20}^8 C_{145}^1 + C_{20}^9}{C_{165}^9}$$

$$p \approx 0.2989 \approx 29.8\%$$

f)

$$p = \frac{C_{20}^0 C_{145}^9 + C_{20}^1 C_{145}^8 + C_{20}^2 C_{145}^7}{C_{165}^9} \approx 0.92 \approx 92\%$$

g)

$$p = \frac{C_{20}^9 C_{145}^0 + C_{20}^8 C_{145}^1 + C_{20}^7 C_{145}^2}{C_{165}^9} \approx 4.13 \cdot 10^{-6} \approx 4.13 \cdot 10^{-4}\%$$

h)

$$p = \frac{C_{20}^9}{C_{165}^9} \approx 8.395 \cdot 10^{-10} \approx 8.395 \cdot 10^{-8}\%$$

## Zadatak 11

### Postavka:

Neka je dat pravičan novčić, tj. novčić kod kojeg je jednaka vjerovatnoća pojave glave ili pisma prilikom bacanja. Ako bacimo takav novčić 48 puta, očekujemo da će otprilike 24 puta pasti glava i isto toliko puta pismo. Međutim, to naravno ne znači da će sigurno biti tačno 24 pojava glave ili pisma (štaviše, vjerovatnoća da se tačno to desi je prilično mala). Odredite:

- a. Vjerovatnoću da će se zaista pojaviti 24 puta glava i 24 puta pismo;
- b. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 20 a manje od 28 puta;
- d. Vjerovatnoću da će se glava pojaviti više od 18 a manje od 30 puta.

### Rješenje:

a)

$$p = \frac{C_{48}^{24}}{2^{48}} \approx 0.1145 \approx 11.4\%$$

b)

$$p = \frac{C_{48}^{21} + C_{48}^{22} + C_{48}^{23} + C_{48}^{24} + C_{48}^{25} + C_{48}^{26} + C_{48}^{27}}{2^{48}} \approx 0.687 \approx 68.7\%$$

c)

$$p = \frac{2 \cdot C_{48}^{19} + 2 \cdot C_{48}^{20} + 2 \cdot C_{48}^{21} + 2 \cdot C_{48}^{22} + 2 \cdot C_{48}^{23} + \cdot C_{48}^{24}}{2^{48}} \approx 0.885 \approx 88.5\%$$



## Zadatak 12

### Postavka:

Odredite vjerovatnoću da će u skupini od 9 nasumično izvučenih karata iz dobro izmješanog špila od 52 karte dvije karte biti sa slikom i šest karata crvene boje (herc ili karo).

### Rješenje:

Problem se svodi na računanje problema vjerovatnoće pri izboru uzoraka, s tim da klase moraju biti disjunktne. Podijelit ćemo univerzu A od  $n = 52$  karte na 4 disjunktne klase:

$$\begin{aligned}A_1 &= \text{Crvena boja sa slikom } (n_1 = 6) \\A_2 &= \text{Ostale boje sa slikama } (n_2 = 6) \\A_3 &= \text{Crvena boja bez slike } (n_3 = 20) \\A_4 &= \text{Ostale karte } (n_4 = 20)\end{aligned}$$

Fomiramo sljedeće jednačine na osnovu postavke zadatka:

$$m_1 + m_2 = 2 \rightarrow \underline{m_2 = 2 - m_1}$$

$$m_1 + m_3 = 6 \rightarrow \underline{m_3 = 6 - m_1}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 9 \rightarrow m_4 = 9 - m_1 - m_2 - m_3 \rightarrow \underline{m_4 = 1 + m_1}$$

Dalje, raspisujemo sve slučajeve koji nam odgovaraju za dati problem:

$$m_1 = 0, m_2 = 2, m_3 = 6, m_4 = 1$$

$$m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 5, m_4 = 2$$

$$m_1 = 2, m_2 = 0, m_3 = 4, m_4 = 3$$

Tražena vjerovatnoća je rješenje sljedeće sume:

$$\sum_{m_1=0}^2 \frac{P_{52;6,6,20,20}^{m_1,2-m_1,6-m_1,1+m_1}}{C_{52}^9}$$

U prethodnim zadacima nismo detaljno pokazali račun sa binomnim koeficijentima, ovaj put ćemo to učiniti da se pokaže da nije bilo množenje grubom silom već kraćenja:

$$\begin{aligned}
\sum_{m_1=0}^2 \frac{C_6^{m_1} C_6^{2-m_1} C_{20}^{6-m_1} C_{20}^{1+m_1}}{C_{52}^9} &= \sum_{m_1=0}^2 \frac{\binom{6}{m_1} \binom{6}{2-m_1} \binom{20}{6-m_1} \binom{20}{1+m_1}}{\binom{52}{9}} = \\
&= \frac{\binom{6}{0} \binom{6}{2} \binom{20}{6} \binom{20}{1}}{\binom{52}{9}} + \frac{\binom{6}{1} \binom{6}{1} \binom{20}{5} \binom{20}{2}}{\binom{52}{9}} + \frac{\binom{6}{2} \binom{6}{0} \binom{20}{4} \binom{20}{3}}{\binom{52}{9}} = \\
&= \frac{\frac{6!}{4!2!} \frac{20!}{14!6!} \frac{20!}{19!}}{\frac{52!}{43!9!}} + \frac{\frac{6!}{5!} \cdot 6 \cdot \frac{20!}{15!5!} \frac{20!}{18!2!}}{\frac{52!}{43!9!}} + \frac{\frac{6!}{4!2!} \frac{20!}{16!4!} \frac{20!}{17!3!}}{\frac{52!}{43!9!}} = \\
&= \frac{\frac{6 \cdot 5}{2} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!} \cdot 20}{\frac{52!}{43!9!}} + \frac{6 \cdot 6 \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} \frac{20 \cdot 19}{2}}{\frac{52!}{43!9!}} + \frac{\frac{6 \cdot 5}{2} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}}{\frac{52!}{43!9!}} = \\
&= \frac{15 \cdot 38760 \cdot 20}{3679075400} + \frac{36 \cdot 190 \cdot 15504}{3679075400} + \frac{15 \cdot 4845 \cdot 1104}{3679075400} \approx 0.05379 \approx 5.3\%
\end{aligned}$$

## Zadatak 13

### Postavka:

Podmornica gađa neprijateljski brod sa četiri torpeda, čije su vjerovatnoće pogađanja 25 %, 25 %, 80 % i 75 % respektivno. Ako brod pogodi jedan torpedo, on će biti potopljen sa vjerovatnoćom 25 %, u slučaju pogotka sa dva torpeda on će biti potopljen sa vjerovatnoćom 80 %, dok u slučaju da ga pogode tri ili četiri torpeda, on se potapa sigurno. Nađite vjerovatnoću da će brod biti potopljen.

### Rješenje:

Uvedimo oznake za vjerovatnoću za svaki od torpeda:

$$T_1 = 25\%$$

$$T_2 = 25\%$$

$$T_3 = 80\%$$

$$T_4 = 75\%$$

Vjerovatnoća da jedan torpedo pogodi brod, dva torpeda pogode brod, tri torpeda pogode brod i četiri torpeda pogode brod su respektivno:

$$P_1 = (T_1T_2'T_3'T_4' + T_1'T_2T_3'T_4' + T_1'T_2'T_3T_4' + T_1'T_2'T_3'T_4) \cdot 0.25$$

$$P_2 = (T_1T_2T_3'T_4' + T_1T_2'T_3T_4' + T_1T_2'T_3'T_4 + T_1'T_2T_3T_4 + T_1'T_2T_3'T_4 + T_1'T_2T_3T_4') \cdot 0.8$$

$$P_3 = (T_1T_2T_3T_4' + T_1T_2T_3'T_4 + T_1T_2'T_3T_4 + T_1'T_2T_3T_4) \cdot 1$$

$$P_4 = (T_1T_2T_3T_4) \cdot 1$$

Tražena vjerovatnoća je zbir navedenih vjerovatnoća:

$$\sum_{i=1}^4 P_i = 0.05390625 + 0.3775 + 0.246875 + 0.0375 \approx 0.71578125 \approx 71.5\%$$

## Zadatak 14

### Postavka:

Za četiri trkača vjerovatnoće da će uspjeti da istrče maraton do kraja procijenjene su na 35 %, 45 %, 25 % i 60 % respektivno. Nakon što je maraton zaista održan, pokazalo se da je samo jedan od njih uspio istrčati maraton do kraja. Nađite vjerovatnoću da je to bio treći trkač.

### Rješenje:

Uvedimo oznake za vjerovatnoće četiri trkača navede u postavci:

$$A_1 = 35\%$$

$$A_2 = 45\%$$

$$A_3 = 25\%$$

$$A_4 = 60\%$$

Označimo sa  $A$  da će tačno jedan istrčati maraton, računamo vjerovatnoću tog događaja:

$$p(A) = p(A_1)p(A'_2)p(A'_3)p(A'_4) + p(A'_1)p(A_2)p(A'_3)p(A'_4) + p(A'_1)p(A'_2)p(A_3)p(A'_4) + p(A_1)p(A'_2)p(A'_3)p(A_4)$$

$$p(A) = 0.368875$$

Potrebno je izračunati vjerovatnoću  $p(A_3/A) = \frac{p(A_3)p(A/A_3)}{p(A)}$ . Dakle, računamo:

$$p(A/A_3) = p(A'_1)p(A'_2)p(A'_4) = 0.169$$

$$\text{Pa je rješenje } p(A_3/A) = \frac{p(A_3)p(A/A_3)}{p(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.169}{0.368875} \approx 0.1145 \approx 11.4\%$$

## Zadatak 15

### Postavka:

Igrač igra nagradnu igru u kojoj se iz kutije nasumično izvlače kuglice, koje mogu biti zlatne, srebrene i brončane. Ukupno ima 7 zlatnih, 18 srebrnih i 85 brončanih kuglica. Za osvajanje nagrade potrebno je izvući ili jednu zlatnu kuglicu (neovisno od toga kakve su ostale), ili dvije srebrene kuglice, ili tri brončane kuglice. Odredite vjerovatnoću osvajanja nagrade ako igrač ima pravo izvući

- a. jednu kuglicu;
- b. dvije kuglice;
- c. tri kuglice.

### Rješenje:

a)

$$p = \frac{C_7^1}{C_{110}^1} \approx 0.06363 \approx 6.36\%$$

Za sljedeća dva primjera ćemo uzeti obrnuto, tj. u kojim slučajevima će izgubiti ako izvuče dvije kuglice i u kojim slučajevima će izgubiti ako izvuče 3 kuglice pa ćemo te slučajeve oduzeti od broja 1.

b) Izgubiti će ako izvuče 2 brončane ili 1 brončanu, 1 srebrnu, dakle:

$$p = 1 - p' = 1 - \frac{C_{85}^2}{C_{110}^2} - \frac{C_{85}^1 C_{18}^1}{C_{110}^2} \approx 0.1492 \approx 14.9\%$$

c) Izgubiti će ako izvuče 2 brončane i 1 srebrnu:

$$p = 1 - p' = 1 - \frac{C_{85}^2 C_{18}^1}{C_{110}^3} \approx 0.702 \approx 70.2\%$$

## Zadatak 16

### Postavka:

Računar A je generirao neki binarni podatak (odnosno podatak koji može biti samo 0 ili 1. Taj podatak je proslijeđen putem lokalne mreže računar B, koja je zatim proslijeđena računar C, i najzad računar D (sve putem lokalne mreže). Međutim, uslijed smetnji u prenosu, vjerovatnoća da podatak poslan sa jednog računara na drugi putem mreže stigne neizmijenjen iznosi svega 47 %. Greška može uzrokovati da se 0 pretvori u 1 ili 1 pretvori u 0. Ukoliko je poznato da je na krajnje odredište (računar D) stigao ispravan podatak, kolika je vjerovatnoća da je na računar B stigao ispravan podatak?

### Rješenje:

Označimo sa  $p(B) = 0.47$  vjerovatnoću da će na računar B stići tačna informacija. Traži se vjerovatnoća  $p(B/D) = \frac{p(D/B) \cdot p(B)}{p(D)}$  tj vjerovatnoća da će na računar B stići tačna informacija ako znamo da je na računar D stigla tačna informacija. Potrebna nam je vjerovatnoća da će na računar D stići tačna informacija što možemo dobiti preko vjerovatnoće za C, dakle:

$$p(C) = p(B) \cdot 0.47 + p(B)' \cdot 0.53 = 0.47 \cdot 0.47 + 0.53 \cdot 0.53 = 0.5018$$

$$p(D) = p(C) \cdot 0.47 + p(C)' \cdot 0.53 = 0.5018 \cdot 0.47 + (1 - 0.5018) \cdot 0.53 = 0.499$$

$$p(D/B) = p(C) = 0.5018$$

Imamo sve potrebne informacije, pa je rješenje:  $p(B/D) = \frac{0.5018 \cdot 0.47}{0.4998} \approx 0.4718 \approx 47.18\%$