Diskretna matematika

Zadaća 1

Vedad Fejzagić

Oktobar 22, 2017

Zadatak 1

Ako označimo tablete T1, T2 i T3 kao x, y i z respektivno, problem svodimo na rješavanje sljedeće diofantove jednačine sa 3 nepoznate:

$$15x + 33y + 27z = 162$$

Očigledno je da vrijedi:

$$NZD(15, 33, 27) = 3$$

Dokažimo koristeći Euklidov algoritam:

$$NZD(15, 33, 27) = NZD(NZD(15, 33), 27) =$$
$$= NZD(3, 27) = NZD(27, 3) = 3$$

Dalje, s obzirom da je $NZD(15, 33, 27) = 3, 3 \mid 162$, zadana diofantova jednačina je rješiva.

$$15x + 33y + 27z = 162$$
$$5x + 11y + 9z = 54$$
$$5x + 11y = 54 - 9z$$

Pošto je $NZD(5, 11) = 1$, rješenja za x i y će postojati akko je $1 \mid (54-9z)$ tj. ako postoji $k \in Z$ takav da vrijedi $54 - 9z = k$. Ovo je diofantova jednačina, dakle $NZD(9, 1) = 1, 1 \mid 54$, te je potrebno izraziti $NZD(9, 1) = 1$ kao linearnu kombinaciju 9 i 1:

$$9 = 1 \cdot 8 + 1 \implies 1 = 9 - 1 \cdot 8$$

Jedno rješenje je:

$$z^* = 54$$
$$k^* = -8 \cdot 54 = -432$$

Opće rješenje za z(k nas ne interesuje za konkretan problem):

$$z = 54 + t, t \in Z$$

Vraćamo u početnu jednačinu:

$$5x + 11y = 54 - 9(54 + t)$$
$$5x + 11y = -432 - 9t$$

Dobivena jednačina je diofantova. Očigledno je $NZD(15, 11) = 1$, potrebno je izraziti $NZD(15, 11) = 1$ preko linearne kombinacije 15 i 11:

$$11 = 2 \cdot 5 + 1 \implies 1 = 11 - 2 \cdot 5 = -2 \cdot 5 + 11$$

Pa su opća rješenja:

$$x = 864 + 18t + 11s$$
$$y = -432 - 9t - 5s$$
$$z = 54 + t$$
$$t, s \in Z$$

$$\text{uz ograničenja } x, y, z > 0$$

Pristupamo rješavanju sistema nejednačina:

$$x = 864 + 18t + 11s > 0 \tag{1}$$

$$y = -432 - 9t - 5s \implies y = 432 + 9t - 5s < 0 \tag{2}$$

$$z = 54 + t > 0 \implies t > -54$$

Iz (2):

$$s < \frac{-9t - 432}{5} \tag{A}$$

Iz (1):

$$s > \frac{-864 - 18t}{11} \tag{B}$$

Možemo zaključiti:

$$(1) \wedge (2) \implies \frac{-9t - 432}{5} > s > \frac{-864 - 18t}{11} \implies$$
$$\implies (-9t - 432) \cdot 11 > (-864 - 18t) \cdot 5$$

$$-9t - 432 > 0$$

$$t < \frac{-432}{9}$$

$$t < -48$$

Rješenja za t:

$$(t > -54) \wedge (t < -48) \implies t \in (-48, -54)$$

tj.

$$t \in [-49, -53], t \in Z$$

Dalje, računamo vrijednost s, $\forall t \in [-49, -53] \land t \in Z$ koristeći nejednakosti A i B. Lahko se pokaže da vrijednosti t = - 49, t = - 50 i t = - 53 ne daju vrijednost $s \in Z$, dakle te vrijednosti odbacujemo.

Za t = - 51:

$$(A) \implies s < \frac{27}{5}(= 5.4)$$
$$(B) \implies s > \frac{54}{11}(\sim 4.9)$$
$$s \in (\frac{54}{11}, \frac{27}{5})$$

Pa jedina vrijednost u skupu Z na dobivenom intervalu je $s = 5$. Tu vrijednost i uzimamo.

Za t = - 52:

Na sličan način kao i na prethodnom primjeru dobijamo vrijednost $s = 7$.

Zaključujemo da postoje dva rješenja, te ih uvrštavamo u opšta:

Za $t = -51 \land s = 5$

$$x = 1, y = 2, z = 3$$
$$Provjera : 1 \cdot 15 + 2 \cdot 33 + 3 \cdot 27 = 162$$

Za $t = -52 \land s = 7$

$$x = 5, y = 1, z = 2$$
$$Provjera : 5 \cdot 15 + 1 \cdot 33 + 2 \cdot 27 = 162$$

Dakle, postoje dva načina realizacije terapije; prvi način je jedna tableta T1, dvije tablete T2 i 3 tablete T3; drugi način je pet tableta T1, jedna tableta T2 i dvije tablete T3.

Zadatak 2

Zadani problem možemo predstaviti u obliku sistema linearnih kongruencija, gdje je x traženi minimalni broj banana:

$$x \equiv 8 \pmod 9 \rightarrow NZD(1,9) = 1$$
$$x \equiv 2 \pmod{10} \rightarrow NZD(1,10) = 1$$
$$x \equiv 0 \pmod{17} \rightarrow NZD(1,17) = 1$$

Dakle, sistem linearnih kongruencija je rješiv što slijedi upravo iz rješivosti svih kongruencija pojedinačno. Rješavamo koristeći kinesku teoremu o ostacima. Najprije provjeramo da li je možemo primjeniti:

$$NZD(9,10) = 1$$
$$NZD(9,17) = 1$$
$$NZD(10,17) = 1$$

Očigledno je da kinesku teoremu o ostacima možemo primjeniti.

$$n1 \cdot n2 \cdot n3 = 9 \cdot 10 \cdot 17 = 1530$$

$$\lambda 1 = \frac{1530}{9} = 170$$

$$\lambda 2 = \frac{1530}{10} = 153$$

$$\lambda 3 = \frac{1530}{17} = 90$$

Rješenje možemo predstaviti u obliku:

$$x = 170x_1 + 153x_2 + 90x_3 \pmod{1530}$$

Pri čemu su x_1, x_2, x_3 ma koja rješenja sistema linearnih kongruencija:

$$170x_1 \equiv 8 \pmod{9} \tag{A}$$
$$153x_2 \equiv 2 \pmod{10} \tag{B}$$
$$90x_3 \equiv 0 \pmod{17}$$

x_3 je očigledno bilo koji cijeli broj, dakle $x_3 = 0$

Kongruencije (A) i (B) možemo jednostavno skratiti, te ih izraziti kao diofantove jednačine pa naći potrebnu vrijednost za x_1 i x_2:

Prvo skraćujemo kongruencije:

$$(A) \rightarrow 170 > 9 \rightarrow mod(170, 9) = 8 \implies 8x_1 \equiv 8 \pmod{9}$$
$$(B) \rightarrow 153 > 10 \rightarrow mod(153, 10) = 3 \implies 3x_2 \equiv 2 \pmod{10}$$

Odgovarajuće diofantove jednačine:

$$(A) \rightarrow 8x_1 + 9y = 8 \rightarrow NZD(8, 9) = 1, 1 \mid 8$$
$$(B) \rightarrow 3x_2 + 10y = 2 \rightarrow NZD(3, 10) = 1, 1 \mid 2$$

Nalazimo x_1 i x_2 tako da $y \in Z$, pri čemu ne moramo rješavati diofantove jednačine, već pogađamo vrijednosti. Dobijamo:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 4$$
$$\text{Također } x_3 = 0$$

Pa je opće rješenje:

$$x \equiv 170 \cdot 1 + 153 \cdot 4 + 90 \cdot 0 \pmod{1530}$$
$$x \equiv 782 \pmod{1530}$$

Možemo pisati:

$$x = 782 + 1530t, t \in Z$$

Nalazimo tipično rješenje za koje vrijedi $0 \leq x < 1530$

$$0 \leq 782 + 1530t < 1530$$

$$t \geq -\frac{782}{1530} \quad \wedge \quad t < \frac{748}{1530}$$

$$t \geq -0.51 \quad \wedge \quad t < 0.488$$

$$t \in [-0.51, 0.488) \wedge t \in Z \implies \underline{t = 0}$$

Uvrštavanjem u $x = 782 + 1530t$, se dobije:

$$\underline{x = 782}$$

Zaključujemo da ne samo da je 782 minimalan broj banana potreban da se jednako rasporede u odgovarajuće gomile, već je to i jedini broj za koji može to da se uradi. Provjeriti ćemo rezultat vračajući x u početne jednačine sistema:

$$782 \equiv 8 \pmod{9} \implies 782 + 9y = 8 \implies y \in Z$$
$$782 \equiv 2 \pmod{10} \implies 782 + 10y = 2 \implies y \in Z$$
$$782 \equiv 0 \pmod{17} \implies 782 + 17y = 0 \implies y \in Z$$

Minimalan(i jedini) broj banana potrebnih da bi se jednako raspodijelili je 782.

Zadatak 4

a)

$$8x + 10y + 17z \equiv 64 \pmod{93} \quad (1)$$
$$12x + 9y + 19z \equiv 3 \pmod{93} \quad (2)$$
$$7x + 14y + 15z \equiv 68 \pmod{93} \quad (3)$$

Množimo kongruenciju 1 sa 12 i kongruenciju 2 sa -8, te ih sabiramo. To ima smisla uraditi jer je $NZD(93, 12) = 1 \wedge NZD(93, 8) = 1$. Dakle dobijamo:

$$48y + 52z \equiv 744 \pmod{93}$$

Pošto $744 > 93 \implies mod(744, 93) = 0$, kongruencija se svede na:

$$48y + 52z \equiv 0 \pmod{93}$$

Dalje, množimo kongruenciju 2 sa 7 i kongruenciju 3 sa -12, te ih sabiramo. NZD u oba slučaja je 1. Dobijamo:

$$105y + 47z \equiv 795 \pmod{93}$$

Daljim skraćivanjem se dobije:

$$12y + 47z \equiv 51 \pmod{93}$$

Sistem smo sveli na sljedeće tri kongruencije:

$$48y + 52z \equiv 0 \pmod{93}$$
$$12y + 47z \equiv 51 \pmod{93}$$
$$7x + 14y + 15z \equiv 68 \pmod{93}$$

Množimo prvu kongruenciju sa -47 i drugu kongruenciju sa 52, sabiramo ih, skratimo, te dobijemo kongruenciju sa jednom nepoznatom:

$$-51y \equiv 48 \pmod{93}$$

Odgovarajuća diofantova jednačina je $-51y + 93k = 48$ gdje je k parametar, $k \in Z$. Pošto je $NZD(93, 51) = 3 \wedge 3 \mid 48$, diofantova jednačina je rješiva, te očekujemo 3 tipična rješenja. Proširenim euklidovim algoritmom se dobije:

$$1 = 11 \cdot 17 - 6 \cdot 31$$

Interesuje nas rješenje po promjenjivoj y:

$$y = -176 + 31t$$

Za tipična rješenja mora vrijediti: $0 \leq y \leq 92 \rightarrow t \in [6, 8]$. Dakle dobili smo 3 tipična rješenja koja glase:

$$y = 10, y = 41, y = 72$$

Za $y = 10$ kongruencija ima najmanje tipično rješenje, pa opće rješenje možemo pisati u obliku $y \equiv 10 \pmod{31}$. Da ne bi razmatrali svaki od tipičnih rješenja zasebno, možemo na sljedeći način napisati opće rješenje:

$$y = 10 + 31t, t \in Z$$

Dobiveno opće rješenje vraćamo u prvu kongruenciju:

$$48(10 + 31t) + 52z = 0 \pmod{93}$$

Tj. skraćivanjem:

$$52z = -15 \pmod{93}$$

Pa je odgovarajuća diofantova jednačina $52z + 93k = -15, k \in Z$. $NZD(93, 520) = 1 \wedge 1 \mid 15$, dakle diofantova jednačina je rješiva te očekujemo jedinstveno tipično rješenje. Dobije se $z = -510 + 93t, t \in Z$. Pa je tipično rješenje:

$$z = 48 \to z \equiv 48 \pmod{93}$$

Uvrštavamo $z = 48$ i $y = 10 + 31t, t \in Z$ u kongruenciju 3. Dobije se:

$$7x = -48 - 62t \pmod{93}, t \in Z$$

Odgovarajuća diofantova jednačina: $7x + 93k = -48 - 62t, t, k \in Z$. Diofantova jednačina je rješiva, te očekujemo jedno tipično rješenje za svaki cijeli broj t, $NZD(93, 7) = 1 \wedge 1 \mid -48 - 62t$. Dobije se $x = -672 - 868t + 93s, t, s \in Z$. Pa je $s = 8 + \frac{868}{93} \cdot t, t \in Z$. Tipično rješenje je jedinstveno i ono glasi:

$$x = 72 - 868t, t \in Z \to x \equiv 72 - 31t \pmod{93}$$

Dakle, rješenja sistema su:

$$x \equiv 72 - 31t \pmod{93}, t \in Z$$
$$y \equiv 10 \pmod{31}$$
$$z \equiv 48 \pmod{93}$$

Pri čemu svako tipično rješenje koje smo dobili za y odgovara da bude rješenje sistema. Dakle, ovaj sistem ima 3 tipična rješenja:

$$x = 310, y = 10, z = 48$$
$$x = 1271, y = 41, z = 48$$
$$x = 2232, y = 72, z = 48$$

b)

$$24x + 27y \equiv 9 \pmod{78} \tag{1}$$
$$10x + 12y \equiv 16 \pmod{78} \tag{2}$$

Ne možemo množiti kongruencije odgovarajućim brojevima jer njihovi odgovarajući $NZD \neq 1$. Dakle, moramo postepeno smanjivati koeficijent uz neku nepoznatu u nekoj kongruenciji, dok ne nestane potpuno. Uradit ćemo sljedeće korake, kako bi nepoznatu x izbacili iz druge kongruencije:

1.) Množimo kongruenciju 2 sa -1 i dodajemo kongruenciji 1. Ovaj korak uradimo 2 puta uzastopno.
2.) Množimo kongruenciju 1 sa -1 i dodajemo kongruenciji 2. Ovaj korak uradimo 2 puta uzastopno također.
3.) Uradimo 1. ponovno, ali ovaj put samo jednom.
4.) Uradimo 2. ponovno, ali ovaj put samo jednom.

Dobili smo sistem:

$$2x - 3y \equiv -85 \pmod{78}$$
$$9y \equiv 147 \pmod{78}$$

Sistem sa jednom nepoznatom svodimo na diofantovu jednačinu $9y + 78k = 147$, gdje je k parametar. $NZD(78, 9) = 3 \wedge 3 \mid 69$. Zaključujemo da je diofantova jednačina rješiva, i očekujemo 3 tipična rješenja. Podijelimo diofantovu jednačinu sa 3, dobijamo $3y + 26k = 23$. Proširenim euklidovim algoritmom dobijemo $1 = 9 \cdot 3 - 1 \cdot 26$. Pa je $y = 207 + 26t, t \in Z$. Za $t = -7, t = -6, t = -5$ dobijamo tipična rješenja ove kongruencije:

$$y = 25, y = 51, y = 77$$

Najmanje tipično rješenje je y = 25, pa možemo također pisati:

$$y \equiv 25 \pmod{26}$$

Da ne bi morali za svako tipično rješenje računati sistem, pišemo općenito $y = 25 + 26t, t \in Z$. Isti izraz vraćamo u prvu kongruenciju tj.

$$2x - 3y \equiv -85 \pmod{78} \rightarrow 2x \equiv -10 + 78t \pmod{78}$$
$$2x \equiv -10 \pmod{78}$$

Odgovarajuća diofantova jednačina je $2x + 78k = -10$, gdje je k parametar. $NZD(78, 2) = 2 \wedge 2 \mid 10$, dakle diofantova jednačina je rješiva i očekujemo 2 tipična rješenja. Rješenje diofantove jednačine je $x = -5 + 39t, t \in Z$. Iz rješenja slijedi da za $t = 1 \wedge t = 2$ imamo tipična rješenja:

$$x = 34, x = 73$$

Najmanje tipično rješenje je $x = 34$, pa možemo također pisati:

$$x \equiv 34 \pmod{39}$$

Zaključujemo da je rješenje sistema:

$$x \equiv 34 \pmod{39}$$
$$y \equiv 25 \pmod{26}$$

Ili zapisano u vidu tipičnih rješenja; ovaj sistem ima 6 tipičnih rješenja:

$$x = 34, y = 25; x = 34, y = 51; x = 34, y = 77$$
$$x = 73, y = 25; x = 73, y = 51; x = 73, y = 77$$