

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET UNIVERZITETA  
SARAJEVO

# Diskretna Matematika

## Zadaća 3

*Student*

Vedad Fejzagić

*Broj indeksa*

17336

**Demonstrator**

Šeila Bećirović

*Grupa*

RI2-2

December 22, 2017

## Zadatak 1

### Postavka:

Neki eksperiment može dovesti do tri moguća događaja  $A_1$ ,  $A_2$  ili  $A_3$  iz skupa događaja  $X$ . Ova tri događaja imaju respektivno vjerovatnoće 0.25, 0.5 i 0.25. Rezultati tog eksperimenta nisu dostupni direktno, ali se može izvesti testni eksperiment koji daje događaje  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  ili  $B_5$  iz skupa događaja  $Y$ , koji su u određenoj vezi sa događajima  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ . Vjerovatnoće da testni eksperiment rezultira događajem  $B_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  ukoliko je izvorni eksperiment rezultirao događajem  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  date su u sljedećoj tabeli:

$p(B_j / A_i)$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$A_1$	0.05	0.25	0.1	0.5	0.1
$A_2$	0.15	0.35	0.05	0.35	0.1
$A_3$	0.5	0.05	0.15	0.1	0.2

Odredite entropije skupa izvornih i testnih događaja  $H(X)$  i  $H(Y)$ , uvjetne entropije  $H(X/Y)$  i  $H(Y/X)$ , zajedničku entropiju  $H(X,Y)$  te srednju količinu informacije  $I(X,Y)$  koju testni događaji nose o izvornim događajima.

### Rješenje:

$$H(X) = -\frac{1}{\ln 2} \cdot (0.25 \ln 0.25 + 0.5 \ln 0.5 + 0.25 \ln 0.25) = 1.5$$

Računamo vrijednosti  $p(B_j)$  za  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$p(B_j) = \sum_{i=1}^3 p(A_i) \cdot p(B_j/A_i)$$

Dobijamo:

$$p(B_1) = p(A_1)p(B_1/A_1) + p(A_2)p(B_1/A_2) + p(A_3)p(B_1/A_3) = 0.2125$$

$$p(B_2) = 0.25$$

$$p(B_3) = 0.0875$$

$$p(B_4) = 0.325$$

$$p(B_5) = 0.125$$

$$H(Y) = -\frac{1}{\ln 2} \cdot (0.2125 \ln 0.2125 + 0.25 \ln 0.25 + \\ + 0.0875 \ln 0.0875 + 0.325 \ln 0.325 + 0.125 \ln 0.125) = 2.178432$$

Sada računamo  $p(A_i B_j)$ , za  $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5$  Rezultati prikazani u vidu tabele:

$p(A_i B_j)$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$
$A_1$	0.0125	0.0625	0.025	0.125	0.025
$A_2$	0.075	0.175	0.025	0.175	0.05
$A_3$	0.125	0.0125	0.0375	0.025	0.05

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 p(A_i B_j) \cdot \log_2 p(A_i B_j)$$

$$H(X, Y) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 p(A_i B_j) \cdot \ln p(A_i B_j)$$

$$H(X, Y) = 3.4604$$

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y) = 1.27608$$

$$H(Y/X) = H(X, Y) - H(X) = 1.9604$$

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 0.218$$

## Zadatak 2

### Postavka:

Na nekom fakultetu, troškove studija za 22% studenata plaća država, dok su ostali studenti samofinansirajući. Među studentima koji se školuju o trošku države, 47% studenata stanuje u studentskom domu, dok među samofinansirajućim studentima 32% studenata stanuje u studentskom domu. Svi studenti koji stanuju u studentskom domu ujedno posjeduju i iskaznicu za subvencionirani javni prevoz, dok među studentima koji ne stanuju u studentskom domu istu iskaznicu posjeduju i 32% studenata čiji studij plaća država te 40% samofinansirajućih studenata.

Odredite koliku prosječnu količinu informacije saznanje o tome posjeduje li student iskaznicu za subvencionirani javni prenos ili ne nosi o načinu finansiranja njegovog studija (tj. da li ga finansira država ili troškove snosi sam).

### Rješenje:

## Zadatak 3

### Postavka:

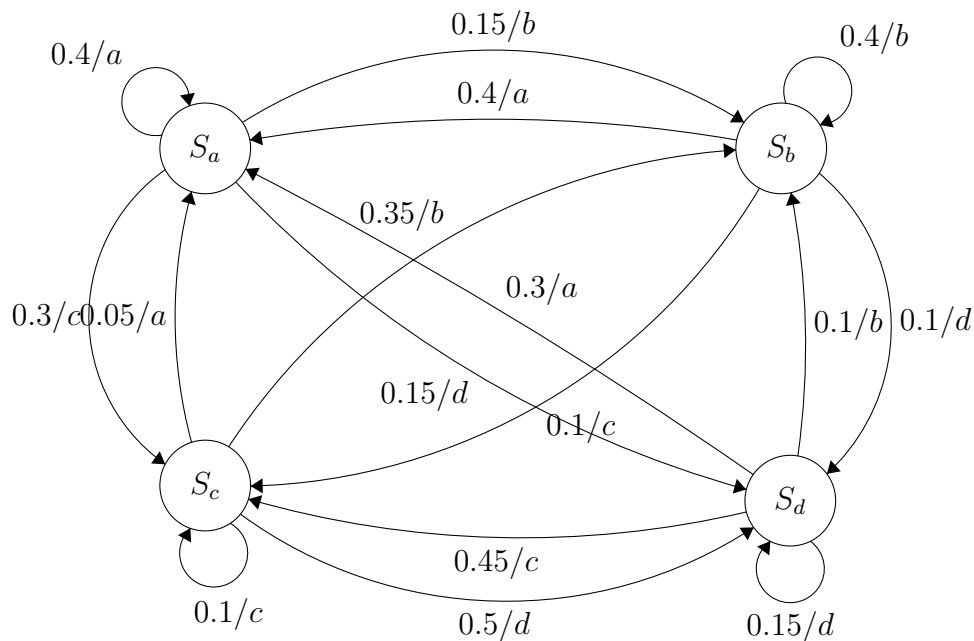
Markovljev izvor informacija prvog reda emitira četiri različite poruke a, b, c i d. Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 4 moguća stanja  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$  i  $S_d$  koja redom odgovaraju emitiranim porukama a, b, c odnosno d. Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 4 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

$p(x_j / S_i)$	a	b	c	d
$S_a$	0.4	0.15	0.3	0.15
$S_b$	0.4	0.4	0.1	0.1
$S_c$	0.05	0.35	0.1	0.5
$S_d$	0.3	0.1	0.45	0.15

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 6 te vjerovatnoću pojave sekvence aaabdb.

### Rješenje:

Red izvora je  $r = 1$ , izvor modeliramo pomoću 4 stanja:



Računamo vjerovatnoće za svako od stanja rješavanjem sljedećeg sistema jednačina:

$$p(S_a) = p(S_a)p(a/S_a) + p(S_b)p(a/S_b) + p(S_c)p(a/S_c) + p(S_d)p(a/S_d)$$

$$p(S_b) = p(S_a)p(b/S_a) + p(S_b)p(b/S_b) + p(S_c)p(b/S_c) + p(S_d)p(b/S_d)$$

$$p(S_c) = p(S_a)p(c/S_a) + p(S_b)p(c/S_b) + p(S_c)p(c/S_c) + p(S_d)p(c/S_d)$$

$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) + p(S_d) = 1$$

Nakon uvrštavanja vrijednosti i prebacivanja  $p(S_a), p(S_b), p(S_c)$  na desnu stranu jednakosti, dobijamo sljedeću matricu:

$$M = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.4 & 0.05 & 0.3 & |0 \\ 0.15 & -0.6 & 0.35 & 0.1 & |0 \\ 0.3 & 0.1 & -0.9 & 0.45 & |0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & |1 \end{bmatrix}$$

Koristimo Gausov metod eliminacije da riješimo zadani sistem, svođenjem matrice na desnu trougaonu matricu, dobijamo:

$$M = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.4 & 0.05 & 0.3 & |0 \\ 0 & -0.5 & 0.36 & 0.17 & |0 \\ 0 & 0 & -0.65 & 0.70 & |0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.54 & |1 \end{bmatrix}$$

$$-0.6p(S_a) + 0.4p(S_b) + 0.05p(S_c) + 0.3p(S_d) = 0$$

$$-0.5p(S_b) + 0.36p(S_c) + 0.17p(S_d) = 0$$

$$-0.65p(S_c) + 0.70p(S_d) = 0$$

$$4.54p(S_d) = 1$$

Dakle, rješenja sistema su:

$$p(S_a) = 0.29$$

$$p(S_b) = 0.25$$

$$p(S_c) = 0.23$$

$$p(S_d) = 0.22$$

$$H(S_a) = -\frac{1}{\ln 2}(p(a/S_a) \ln p(a/S_a) + p(b/S_a) \ln p(b/S_a) + p(c/S_a) \ln p(c/S_a) + p(d/S_a) \ln p(d/S_a))$$

Analogno za ostale, dobijamo:

$$H(S_a) \approx 1.871$$

$$H(S_b) \approx 1.722$$

$$H(S_c) \approx 1.578$$

$$H(S_d) \approx 1.782$$

$$H(X/X^\infty) = \sum_{i=1}^4 p(S_i) H(S_i) = 1.73$$

$$H_{max} = \log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

$$R = \frac{H_{max} - H(X/X^\infty)}{H_{max}} \approx 0.135 = 13.5\%$$

$$H(X) = -\frac{1}{\ln 2}(p(a) \ln p(a) + p(b) \ln p(b) + p(c) \ln p(c) + p(d) \ln p(d)) \approx 1.98614$$

$$H(X^6) = H(X) + (6 - 1)H(X/X^\infty) \approx 10.636$$

$$p(aaabdb) = p(a)p(a/a)p(a/a)p(b/a)p(d/b)p(b/d) = 0.0000696 = 0.00696\%$$

## Zadatak 4

### Postavka:

Markovljev izvor informacija drugog reda emitira dvije različite poruke 0 i 1. Ovisno od toga koje su dvije poruke posljednje emitirane, izvor se može naći u jednom od 4 moguća stanja  $S_{00}$ ,  $S_{01}$ ,  $S_{10}$  odnosno  $S_{11}$  (recimo, ukoliko su posljednje dvije emitirane poruke 0 i 1 tim redom, izvor će se nalaziti u stanju  $S_{01}$ ). Vjerovatnoće emitiranja poruke 0 u svakom od tih stanja iznose:

$$p(0/S_{00}) = 0.9$$

$$p(0/S_{01}) = 0.7$$

$$p(0/S_{10}) = 0.1$$

$$p(0/S_{11}) = 0.2$$

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 6 te vjerovatnoću pojave sekvence 00101100.

### Rješenje:

$$p(0/S_{00}) = 0.9, p(1/S_{00}) = 0.1$$

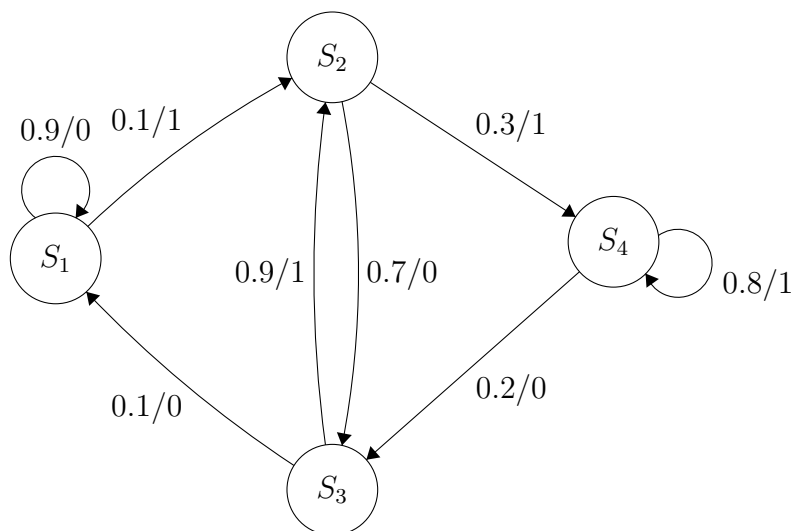
$$p(0/S_{01}) = 0.7, p(1/S_{01}) = 0.3$$

$$p(0/S_{10}) = 0.1, p(1/S_{10}) = 0.9$$

$$p(0/S_{11}) = 0.2, p(1/S_{11}) = 0.8$$

Neka su  $S_{00} = S_1$ ,  $S_{01} = S_2$ ,  $S_{10} = S_3$ ,  $S_{11} = S_4$ .





Potrebne su nam vrijednosti  $p(S_1), p(S_2), p(S_3), p(S_4)$

$$p(S_1) = p(S_1)p(0/S_1) + p(S_3)p(0/S_3)$$

$$0.1p(S_1) = 0.1p(S_3)$$

$$p(S_1) = p(S_3)$$

Analogno za ostale, dobije se:

$$p(S_2) = p(S_3)$$

$$0.3p(S_3) = 0.2p(S_4)$$

Potrebno je riješiti sljedeći sistem:

$$p(S_1) = p(S_3)$$

$$p(S_2) = p(S_3)$$

$$0.3p(S_3) = 0.2p(S_4)$$

$$p(S_1) + p(S_2) + p(S_3) + p(S_4) = 1$$

Rješavanjem sistema, dobiju se sljedeće vrijednosti:

$$p(S_1) = 0.2222$$

$$p(S_2) = 0.2222$$

$$p(S_3) = 0.2222$$

$$p(S_4) = 0.3333$$

$$H(S_1) = -\frac{1}{\ln 2}(p(0/S_1) \ln p(0/S_1) + p(1/S_1) \ln p(1/S_1)) \approx 0.47$$

$$H(S_2) \approx 0.881291$$

$$H(S_3) \approx 0.468996$$

$$H(S_4) \approx 0.721928$$

$$H(X/X^\infty) = \sum_{i=1}^4 p(S_i)H(S_i) = 0.638$$

Redudansa:

$$H_{max} = \log_2 4 = 2$$

$$R = \frac{H_{max} - H(X/X^\infty)}{H_{max}} \approx 0.681 \approx 68.1\%$$

Entropija sekvenci dužine 6:

$$H(X^2) = -\frac{1}{\ln 2}(p(00) \ln p(00) + p(01) \ln p(01) + p(10) \ln p(10) + p(11) \ln p(11)) = 1.96954$$

$$H(X^6) = H(X^2) + 4H(X/X^\infty) \approx 4.52154$$

Vjerovatnoća pojave sekvence 00101100:

$$p(00101100) = p(00)p(1/00)p(0/01)p(1/10)p(1/01)p(0/11)p(0/10) = 0.00008316 = 0.008316\%$$

## Zadatak 5

### Postavka:

Ergodični izvor informacija bez memorije emitira 10 poruka A, B, C, D, E, F, G, H, I i J. Proučavanjem sekvence dužine 645 koju je emitirao ovaj izvor, uočena je sljedeća učestalost pojavljivanja pojedinih poruka:

Poruka:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Učestalost:	18	73	87	49	73	99	98	44	80	24

Za ovaj izvor informacija formirajte:

- a) Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
- b) Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
- c) Ternarni Huffmanov kod sa simbolima 0, 1 i 2.

Za sva tri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka BAIBBBJIDJCE.

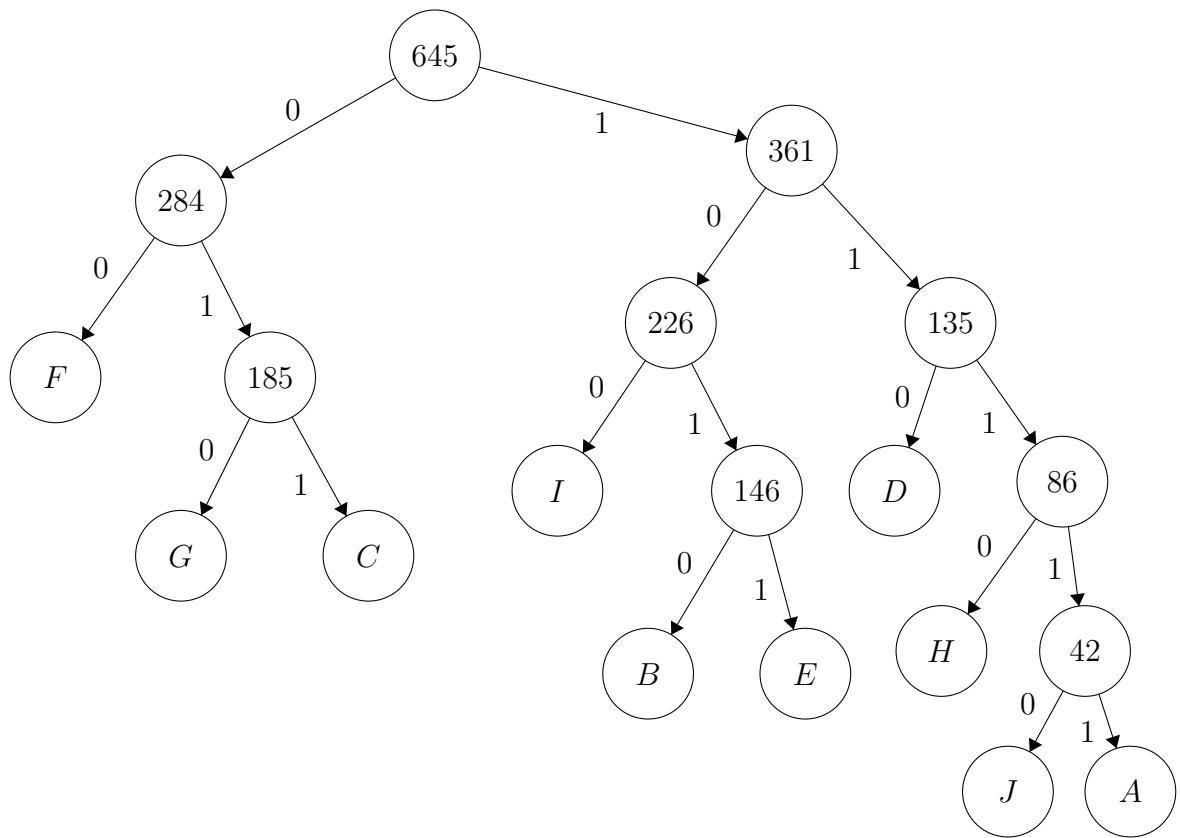
### Rješenje:

a)

Sortiramo:

F	99
G	98
C	87
I	80
B	73
E	73
D	49
H	44
J	24
A	18

Kodiramo pomoću binarnog stabla:



Kodirane poruke su sljedeće:

F	00
G	010
C	011
I	100
B	1010
E	1011
D	110
H	1110
J	11110
A	11111

Kodirana sekvenca poruka: BAIBBBJIDJCE glasi:

1010111111001010101010101011110100110111100111011

Prosječna dužina kodne riječi:

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{10} p_i n_i \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{N_i}{N} n_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} N_i n_i$$
$$n_{sr} = 3.271$$

Entropija izvora:

$$H(X/X^\infty) = H(X) = - \sum_{i=1}^{10} p_i \log_2 p_i = \dots = \frac{1}{\ln 2} (\ln N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} N_i \ln N_i)$$

$$H(X/X^\infty) = 3.1671$$

Protok informacija:

$$\overline{I(H)} = \frac{H(X/X^\infty)}{n_{sr} \tau} \approx \frac{0.968}{\tau}$$

Iskorištenost kanala veze 96.8%

b)

Iz postavke:  $n = 10, m = 2 \rightarrow m^* = 2 + \text{mod}(n - 4, m - 1) = 2$  Prelazimo na formiranje binarnog Huffmanovog koda:

Početak		Iteracija 1		Iteracija 2		Iteracija 3		Iteracija 4		Iteracija 5		Iteracija 6		Iteracija 7	
F	99	F	99	F	99	E/0	122	I/0	153	C/0	173	F/0	197	I/00	275
G	98	G	98	G	98	D/1		B/1		H/10		G/1		B/01	
C	87	C	87	C	87	F	99	E/0	122	J/110		C/0	173	E/10	
I	80	I	80	H/0	86	G	98	D/1		A/111		H/10		D/11	
B	73	B	73	J/10		C	87	F	99	I/0	153	J/110		F/0	197
E	73	E	73	A/11		H/0		G	98	B/1		A/111		G/1	
D	49	D	49	I	80	J/10	86	C	87	E/0	122	I/0	153	C/0	173
H	44	H	44	B	73	A/11		H/0	86	D/1		B/1		H/10	
J	24	J/0	42	E	73	I	80	J/10		F	99	E/0	122	J/110	
A	18	A/1		D	49	B	73	A/11		G	98	D/1		A/111	

Iteracija 8		Iteracija 9	
F/00	370	I/000	645
G/01		G/001	
C/10		C/010	
H/110		H/0110	
J/1110		J/01110	
A/1111		A/01111	
I/00	275	I/100	
B/01		B/101	
E/10		E/110	
D/11		D/111	

*U sljedećim zadacima koji zahtijevaju veći broj iteracija, neće cijav postupak biti prikazan*

$$n_{sr} = \frac{1}{645} \left( \sum_{i=1}^{10} N_i n_i \right) = 3.271$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^\infty)}{n_{sr}\tau} \approx \frac{0.968}{\tau}$$

Iskorištenost kanala veze 96.8%.

Kodirana sekvenca poruka: BAIBBBJIDJCE glasi:

101011111001011011010111010011101110010110

c)

Ternarni Huffmanov kod:  $m = 0, m^* = 2 + \text{mod}(6, 2) = 2$

Početak		Iteracija 1		Iteracija 2		Iteracija 3		Iteracija 4		Iteracija 5	
F	99	F	99	D/0	135	I/0	226	F/0	284	F/00	645
G	98	G	98	H/1		B/1		G/1		G/01	
C	87	C	87	J/20		E/2		C/2		C/02	
I	80	I	80	A/21		D/0	135	I/0	226	I/10	
B	73	B	73	F	99	H/1		B/1		B/11	
E	73	E	73	G	98	J/20		E/2		E/12	
D	49	D	49	C	87	A/21		D/0	135	D/20	
H	44	H	44	I	80	F	99	H/1		H/21	
J	24	J/0	42	B	73	G	98	J/20		J/220	
A	18	A/1		E	73	C	87	A/21		A/221	

$$n_{sr} = \frac{1}{645} \left( \sum_{i=1}^{10} N_i n_i \right) = 2.061$$

$$\overline{I(X)} = \frac{H(X/X^\infty)}{n_{sr}\tau} \approx \frac{1.5367}{\tau}$$

Pošto je kapacitet ternarnog kanala veze  $C_c = \frac{\log_2 3}{\tau} \approx \frac{1.5850}{\tau}$ , iskorištenost je oko  $\frac{1.5367}{1.5850} = 0.9695 = 96.95\%$

Kodirana sekvenca poruka: BAIBBBJIDJCE glasi:

112211011111122010202200212

## Zadatak 6

### Postavka:

Izvor informacija bez memorije emitira 4 poruke A, B, C i D. Vjerovatnoće pojavljivanja ovih poruka iznose:

$$p(A) = 0.05$$

$$p(B) = 0.35$$

$$p(C) = 0.35$$

$$p(D) = 0.25$$

Za ovaj izvor informacija formirajte

- a) Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1;
- b) Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1;
- c) Binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
- d) Binarni Huffmanov kod sa simbolima 0 i 1, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka ADBBAAADDC.

### Rješenje:

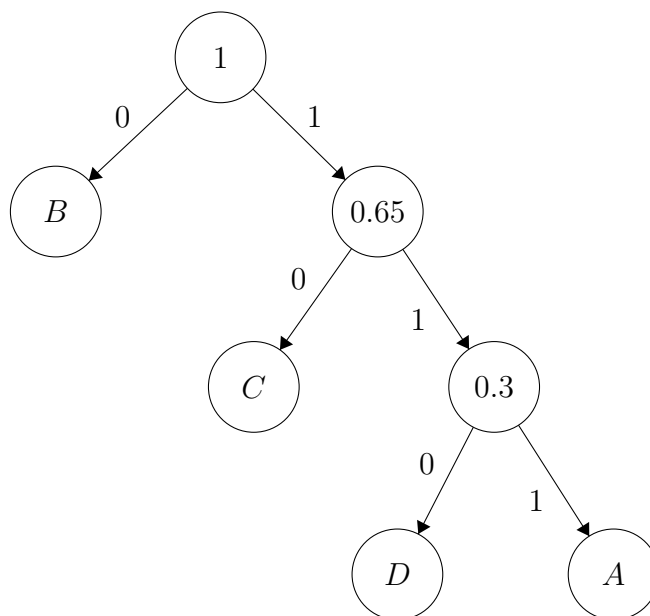
a)

Sortiramo:

B	0.35
C	0.35
D	0.25
A	0.05

Kodiramo pomoću binarnog stabla:





A - 111, B - 0, C - 10, D - 110

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^4 n_i p_i = 1.95$$

$$H(X/X^\infty) \approx 1.7763$$

$$\overline{I(X)} \approx \frac{0.9109}{\tau}$$

Pa je iskorištenost kanala veze 91.09%

Poruka: ADBBAAADDC

1111100011111111111011010

b)

Početak		Iteracija 1		Iteracija 2		Iteracija 3	
B	0.35	B	0.35	C/0	0.65	C/00	1
C	0.35	C	0.35	D/10		D/010	
D	0.25	D/0	0.3	A/11		A/011	
A	0.05	A/1		B	0.35	B/1	

Iskorištenost kanala veze, entropija i prosječna dužina riječi su iste kao i u pod a)

Poruka: ADBBAAADDC

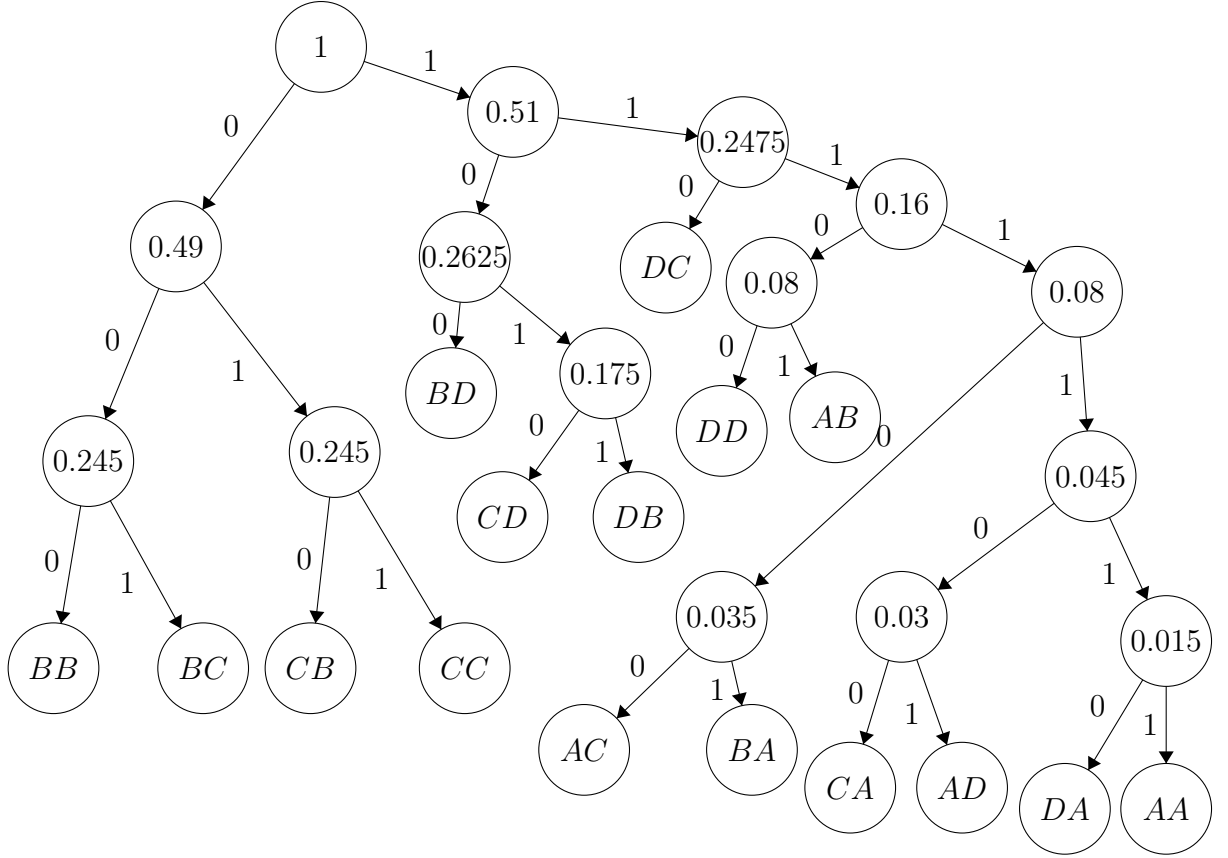
0110101101101101101001000

c)

Sortirane vjerovatnoće parova poruka  $p(x_1x_2) = p(x_1)p(x_2)$  su date u sljedećoj tabeli:

BB	0.1225
BC	0.1225
CB	0.1225
CC	0.1225
BD	0.0875
CD	0.0875
DB	0.0875
DC	0.0875
DD	0.0625
AB	0.0175
AC	0.0175
BA	0.0175
CA	0.0175
AD	0.0125
DA	0.0125
AA	0.0025

Kodiramo pomoću binarnog stabla:



Kodiranja su sljedeća:

BB - 000, BC - 001, CB - 010, CC - 011, BD - 100, DC - 110

CD - 1010, DB - 1011, DD - 11100, AB - 11101, AC - 111100, BA - 111101

CA - 1111100, AD - 1111101, DA - 1111110, AA - 1111111

$$H(X/X^\infty) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{16} p_i \ln p_i \approx 3.5526$$

$$n_{sr} = \sum_{i=1}^{16} p_i n_i = 3.62$$

Protok:

$$\overline{I(X)} = \frac{0.9814}{\tau}$$

Tj. 98.14%  
Poruka: ADBBAAADDC

11111010001111111111101110

d)

$$m = 2, m^* = 2$$

Zadatak je urađen u 14 iteracija, ovdje ćemo prikazati njih 5(ostale ćemo preskočiti):

Početak		Iteracija 1		Iteracija 2		Iteracija 3		Iteracija 4		Iteracija 5	
BB	0.1225	BB	0.1225	CD/0	0.175	CB/0	0.245	BB/00	0.43	CD/0000	1
BC	0.1225	BC	0.1225	DB/1		CC/1		BC/01		DB/0001	
CB	0.1225	CB	0.1225	DC/0	0.15	BB/0	0.245	AB/10000		DC/0010	
CC	0.1225	CC	0.1225	DD/1		BC/1		AC/10001		DD/0011	
BD	0.0875	BD	0.0875	BB	0.1225	AB/0000	0.185	DA/100100		CB/010	
CD	0.0875	CD	0.0875	BC	0.1225	AC/0001		AA/100101		CC/011	
DB	0.0875	DB	0.0875	CB	0.1225	DA/00100		AD/10011		BB/100	
DC	0.0875	DC	0.0875	CC	0.1225	AA/00101		BA/1010		BC/101	
DD	0.0625	DD	0.0625	AB/000	0.0975	AD/0011		CA/1011		AB/110000	
AB	0.0175	BA/0	0.035	AC/001		BA/010		BD/11		AC/110001	
AC	0.0175	CA/1		DA/0100		CA/011		CD/00	0.325	DA/1100100	
BA	0.0175	AB/0	0.035	AA/0101		BD/1	0.175	DB/01		AA/1100101	
CA	0.0175	AC/1		AD/011		CD/0		DC/10		AD/110011	
AD	0.0125	DA/00	0.0275	BA/10		DB/1	0.15	DD/11		BA/11010	
DA	0.0125	AA/01		CA/11	0.0875	DC/0		CB/0	0.245	CA/11011	
AA	0.0025	AD/1		BD		DD/1		CC/1		BD/111	

$$H(X/X^\infty) = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{16} p_i \ln p_i \approx 3.5526$$

$$n_{sr} = 3.5975$$

$$\overline{I(X)} = \frac{0.9875}{\tau}$$

Iskoristivost kanala veze 98.75%

Poruka: ADBBAAADDC

11001110011001011100110010

## Zadatak 7

### Postavka:

Markovljev izvor informacija prvog reda emitira tri različite poruke a, b i c. Ovisno od toga koja je poruka posljednja emitirana, izvor se nalazi u jednom od 3 moguća stanja  $S_a$ ,  $S_b$  i  $S_c$  koja redom odgovaraju emitiranim porukama a, b odnosno c. Vjerovatnoće da će izvor emitirati neku od ove 3 poruke ovisno od stanja u kojem se nalazi date su u sljedećoj tablici:

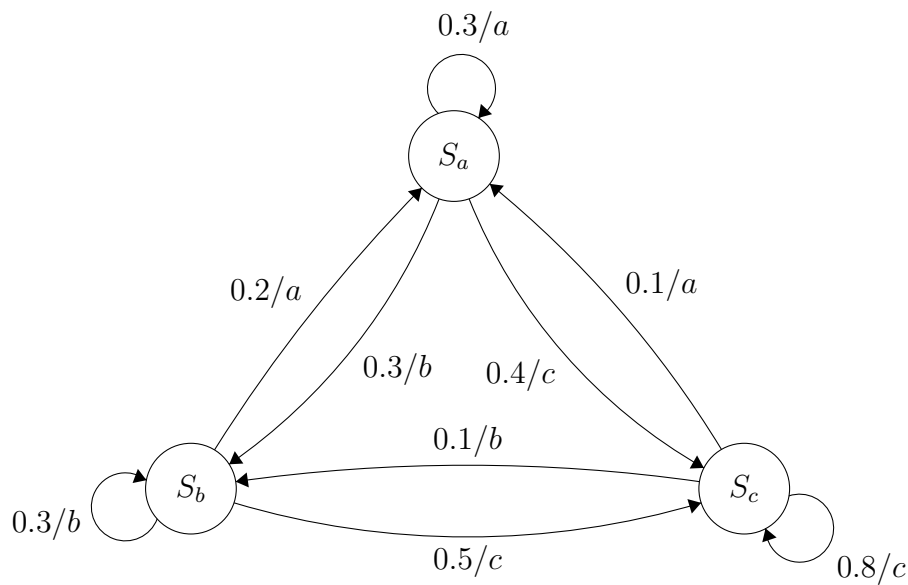
$p(x_j / S_i)$	a	b	c
$S_a$	0.3	0.3	0.4
$S_b$	0.2	0.3	0.5
$S_c$	0.1	0.1	0.8

Za ovaj izvor informacija formirajte binarni Shannon-Fano kod sa simbolima 0 i 1

- a) posmatrajući izvor kao izvor bez memorije;
- b) posmatrajući izvor kao izvor bez memorije, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka;
- c) koristeći posebno kodiranje za svako stanje;
- d) koristeći posebno kodiranje za svako stanje, ali kodirajući parove poruka umjesto individualnih poruka.

Za sva četiri načina kodiranja, izračunajte protok informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze, te kodirajte sekvencu poruka baacbcbbbbbbaaab. U posljednja dva slučaja, pretpostavite da izvor započinje rad u stanju  $S_a$ .

### Rješenje:



Potrebno je riješiti sljedeći sistem jednačina:

$$-0.7p(S_a) + 0.2p(S_b) + 0.1p(S_c) = 0$$

$$0.3p(S_a) - 0.7p(S_b) + 0.1p(S_c) = 0$$

$$p(S_a) + p(S_b) + p(S_c) = 1$$

Rješavamo svodenjem matrice na desnu trougaonu matricu, te dobijemo:

$$p(S_a) = 0.145$$

$$p(S_b) = 0.161$$

$$p(S_c) = 0.693$$

Pa je:

$$H(S_a) = -\frac{1}{\ln 2}(p(a/S_a) \ln p(a/S_a) + p(b/S_a) \ln p(b/S_a) + p(c/S_a) \ln p(c/S_a)) = 1.57095$$

$$H(S_b) = 1.48548$$

$$H(S_c) = 0.921928$$

$$H(X/X^\infty) = \sum_{i=1}^3 p(S_i) H(S_i) = 1.10585$$

Prelazimo na rješavanje ostatka zadatka:



a)

c	0.693	0.693/0	
b	0.161	0.306/1	0.161/10
a	0.145		0.145/11

$$n_{sr} = 1.305$$

$$\overline{I(X)} = \frac{0.8474}{\tau}$$

Iskorištenost kanala veze 84.74%

Poruka: baacbcbbbbaaab

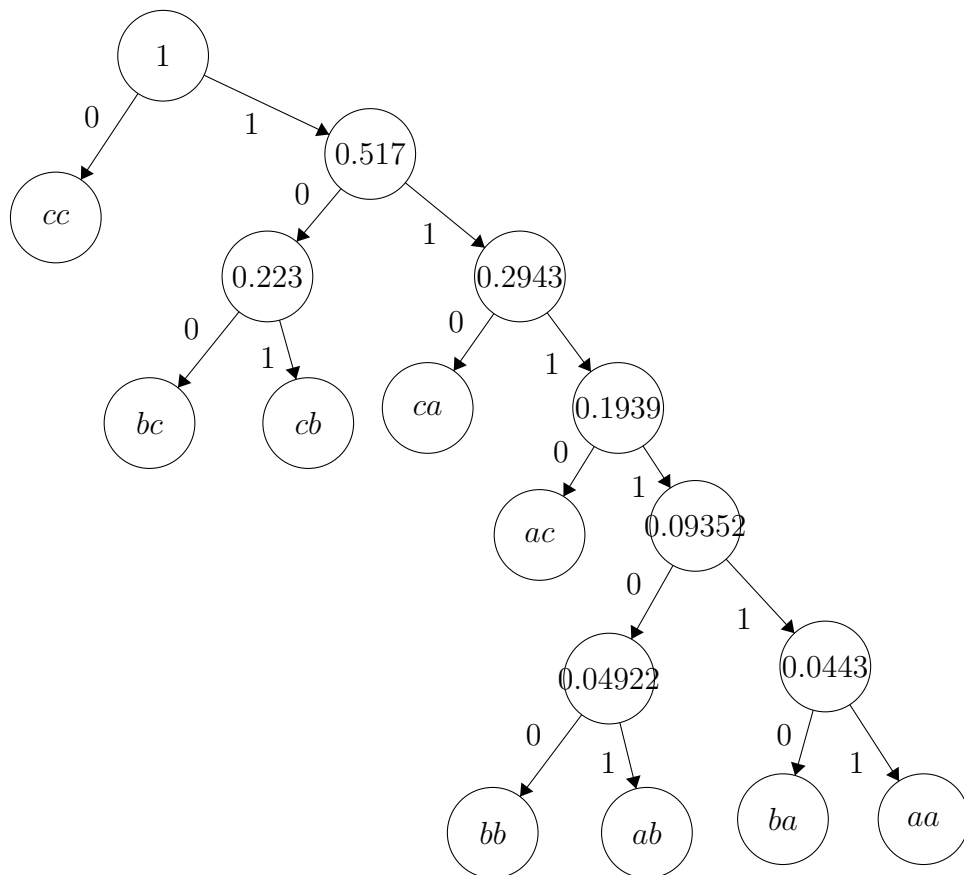
10111101001010101011111110

b)

Sortirane vjerovatnoće pojavljivanja parova poruka:

cc	0.480
bc	0.1115
cb	0.1115
ca	0.1004
ac	0.1004
bb	0.02592
ab	0.0233
ba	0.0233
aa	0.0210

Kodiramo pomoću binarnog stabla:



Rezultat kodiranja:

cc - 0, bc - 100, cb - 101, ca - 110, ac - 1110, bb - 111100, ab - 111101,  
ba - 111110, aa - 111111

$$n_{sr} = 2.41292$$

$$\overline{I(X)} = \frac{0.9166}{\tau}$$

Iskorištenost kanala veze: 91.66%

Poruka: baacbcbbbbaaab

1111101110100111100111100111111111101

c)

Za  $S_a$

c	0.4	0.4/0	
b	0.3	0.6/1	0.3/10
a	0.3		0.3/11

c - 0, b - 10, a - 11

$$n_{sr} = 1.6$$

Za  $S_b$

c	0.5	0.5/0	
b	0.3	0.5/1	0.3/10
a	0.2		0.2/11

c - 0, b - 10, a - 11

$$n_{sr} = 1.5$$

Za  $S_c$

c	0.8	0.8/0	
b	0.1	0.2/1	0.1/10
a	0.1		0.1/11

c - 0, b - 10, a - 11

$$n_{sr} = 1.2$$

Po svim stanjima:

$$n_{sr} = 0.145 \cdot 1.6 + 0.161 \cdot 1.5 + 0.693 \cdot 1.2 = 1.3051$$

$$\overline{I(X)} = \frac{0.8473}{\tau}$$

Iskorištenost: 84.73%

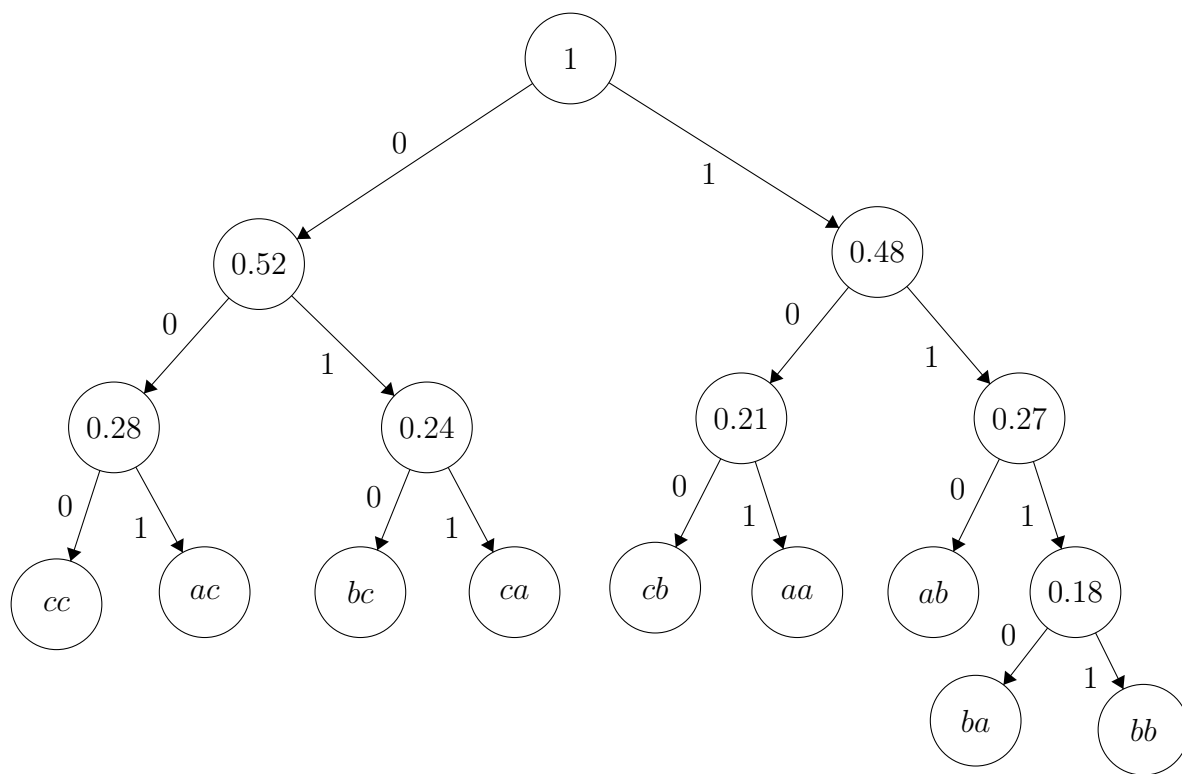
Poruka za  $S_a = S_b = S_c$  jer im je isto kodiranje:

10111101001010101011111110

d)

Za sva stanja kodiramo pomoću stabla:

Za  $S_a$

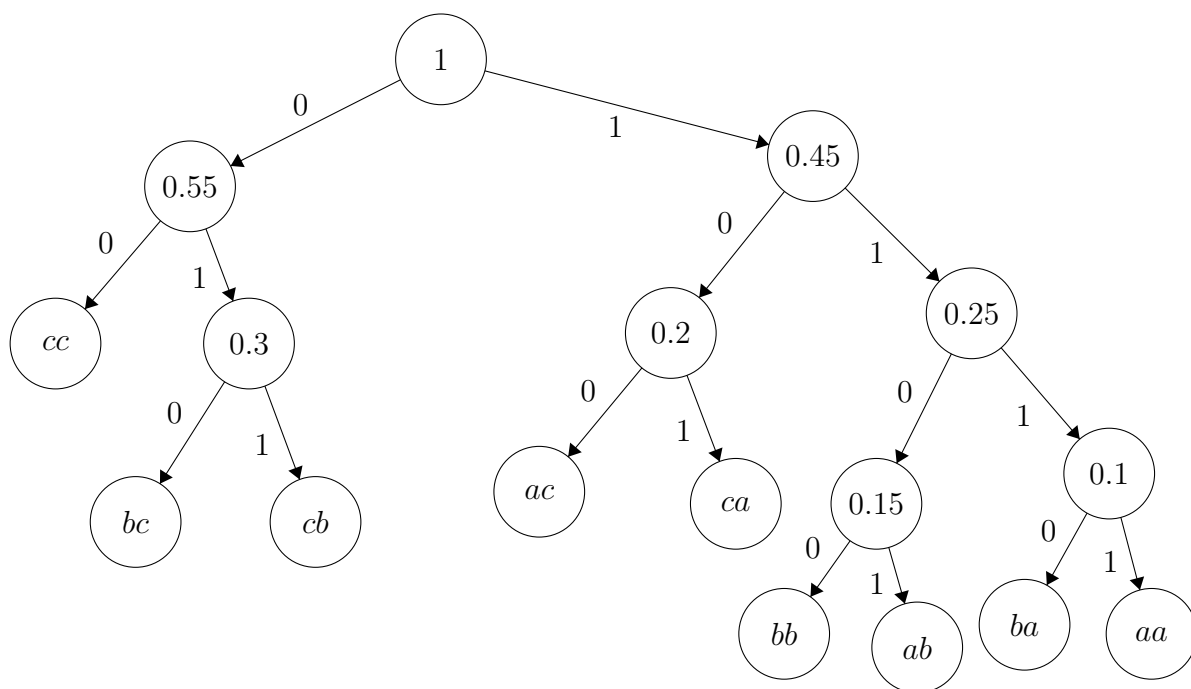


$$n_{sr} = 3.18$$

Poruka: baacbcbbbbbbaaab

111000101011111111101110

Za  $S_b$

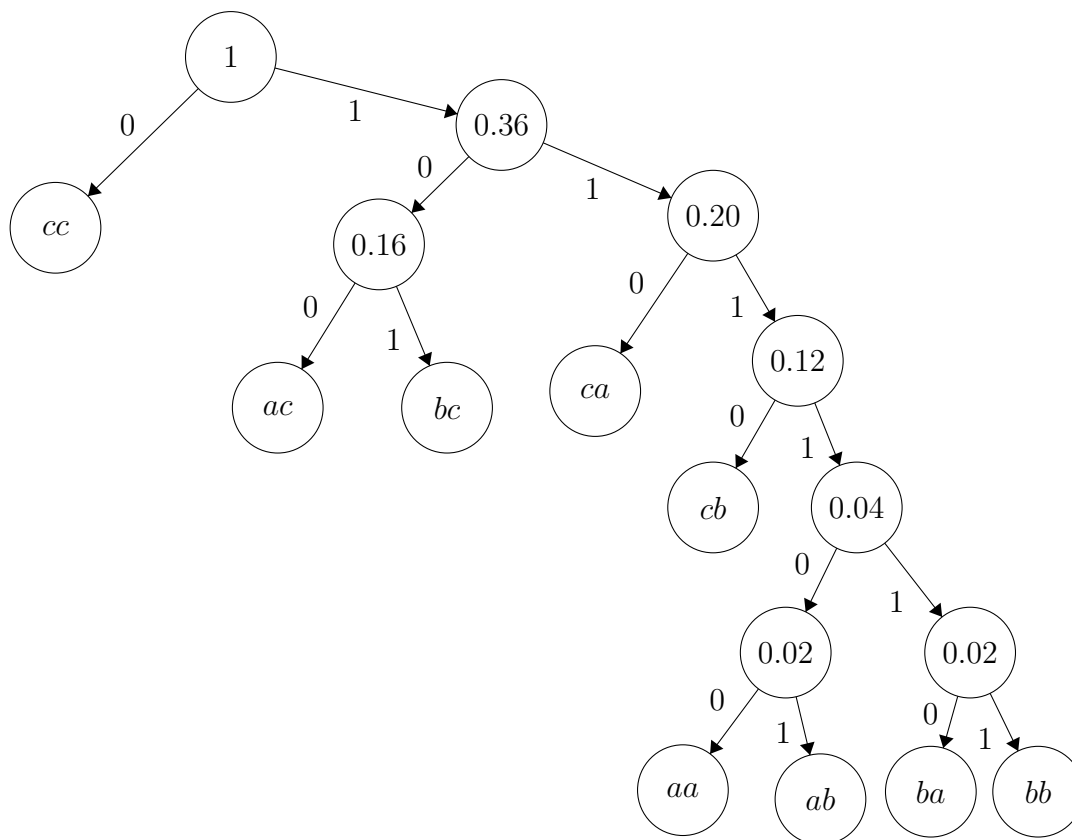


$$n_{sr} = 3$$

Poruka:

11101000101100110011111101

Za  $S_c$



$$n_{sr} = 2.16$$

Poruka:

11111010010111111111111111111100111101

Po svim stanjima:  $n_{sr} = 0.145 \cdot 3.18 + 0.161 \cdot 3 + 0.693 \cdot 2.16 = 2.44098$

$$\overline{I(X)} = \frac{0.90667}{\tau}$$

Iskorištenost: 90.60%

## Zadatak 8

### Postavka:

Neki binarni kanal veze sa šumom prenosi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.2 i 0.2 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz ovaj kanal ukoliko vjerovatnoća pojave nule na ulazu u kanal iznosi 0.8, te odredite njegov kapacitet.

### Rješenje:

Vjerovatnoća pojave jedinice na ulazu je dakle 0.2.

Ulazni simboli:  $y_1 = 0$  i  $y_2 = 1$

Izlazni simboli:  $z_1 = 0$  i  $z_2 = 1$

Iz postavke zadatka zaključujemo sljedeće:

$$p(z_1/y_1) = 0.8$$

$$p(z_2/y_1) = 0.2$$

$$p(z_1/y_2) = 0.2$$

$$p(z_2/y_2) = 0.8$$

$$p(y_1) = 0.8$$

$$p(y_2) = 0.2$$

Prema teoremi o totalnoj vjerovatnoći, vjerovatnoće simbola na izlazu su:

$$p(z_1) = p(y_1)p(z_1/y_1) + p(y_2)p(z_1/y_2) = 0.68$$

$$p(z_2) = 1 - p(z_1) = 0.32$$

Entropije ulaznih i izlaznih simbola:

$$H(Y) = -\frac{1}{\ln 2}(p(y_1) \ln p(y_1) + p(y_2) \ln p(y_2)) \approx 0.721$$

$$H(Z) \approx 0.904$$

Potrebne su nam "djelimično" uvjetne entropije:

$$H(Z/y_1) = -\frac{1}{\ln 2}(p(z_1/y_1) \ln p(z_1/y_1) + p(z_2/y_1) \ln p(z_2/y_1)) \approx 0.721$$



$$H(Z/y_2) \approx 0.721$$

Dakle

$$H(Z/y_1) = H(Z/y_2)$$

Pa je uvjetna entropija:

$$H(Z/Y) = p(y_1)H(Z/y_1) + p(y_2)H(Z/y_2) \approx 0.721$$

Prosječna prenesena količina informacije kroz kanal:

$$I(Y, Z) = H(Z) - H(Z/Y) \approx 0.183$$

Kapacitet kanala veze:

$$C_c = \max \overline{I(\eta, \zeta)} \approx \frac{0.2796}{\tau}$$

Kapacitet ovog kanala je 27.96% kapaciteta koji bi imao odgovarajući kanal bez šuma.

## Zadatak 9

### Postavka:

Izvor informacija bez memorije emitira dvije poruke a i b, pri čemu vjerovatnoća emitiranja poruke a iznosi  $p(a) = 0.8$ . Ove poruke se zatim kodiraju, i prenose kroz binarni kanal veze sa šumom koji koristi dva simbola 0 i 1, pri čemu su vjerovatnoće greške nule i jedinice 0.25 i 0.05 respektivno. Odredite količinu prenesene informacije kroz komunikacioni kanal, brzinu prenosa informacija kroz komunikacioni kanal, procenat iskorištenja kanala veze i vjerovatnoću greške u prenosu ukoliko se koristi

a) Prosto kodiranje  $a \rightarrow 0$  i  $b \rightarrow 1$  uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji  $S_a = 0$  i  $S_b = 1$ ;

b) Zaštitno kodiranje  $a \rightarrow 000$  i  $b \rightarrow 111$  uz dekodiranje zasnovano na klasifikaciji  $S_a = 000, 001, 010, 100$  i  $S_b = 011, 101, 110, 111$ .

### Rješenje:

a)

$$x_1 = a; p(a) = p(x_1) = 0.8$$

$$x_2 = b; p(b) = p(x_2) = 0.2$$

Ulazni simboli:  $y_1 = 0$  i  $y_2 = 1$

Izlazni simboli:  $z_1 = 0$  i  $z_2 = 1$

Iz postavke zadatka zaključujemo sljedeće:

$$p(0/x_1) = p(z_1/y_1) = 0.75$$

$$p(1/x_1) = p(z_2/y_1) = 0.25$$

$$p(0/x_2) = p(z_1/y_2) = 0.05$$

$$p(1/x_2) = p(z_2/y_2) = 0.95$$

$$p(w_1) = p(x_1)p(0/x_1) + p(x_2)p(0/x_2) = 0.61 = p(0)$$

$$p(w_2) = 0.39 = p(1)$$

Entropija i uslovna entropija:

$$H(W) = -\frac{1}{\ln 2}(p(w_1)\ln p(w_1) + p(w_2)\ln p(w_2)) = 0.9648$$

$$H(W/x_1) = 0.811$$

$$H(W/x_2) = 0.286$$

$$H(W/X) = p(x_1)H(W/x_1) + p(x_2)H(W/x_2) = 0.8 \cdot 0.811 + 0.2 \cdot 0.286 = 0.706$$

$$I(X, W) = H(W) - H(W/X) = 0.9648 - 0.706 = 0.2588$$

$$\text{Vjerovatnoća greške je } p_e = 1 - p(a) \cdot p(0/x_1) - p(b) \cdot p(1/x_2) = 0.21$$

$$\text{Brzina prenosa je: } \overline{I(X, W)} = \frac{I(X, W)}{T_{sr}} = \frac{0.3328}{T_{sr}}$$

b)

$$w_1 = S_a$$

$$w_2 = S_b$$

Ulazni simboli:  $y_1 = 0$  i  $y_2 = 1$

Izlazni simboli:  $z_1 = 0$  i  $z_2 = 1$

$$x_1 = a; p(a) = p(x_1) = 0.8 \dots x_1 \rightarrow y_1 y_1 y_1$$

$$x_2 = b; p(b) = p(x_2) = 0.2 \dots x_2 \rightarrow y_2 y_2 y_2$$

$$S_a = z_1 z_1 z_1, z_1 z_1 z_2, z_1 z_2 z_1, z_2 z_1 z_1$$

$$S_b = z_1 z_2 z_2, z_2 z_1 z_2, z_2 z_2 z_1, z_2 z_2 z_2$$

$$p(w_1/x_1) = p(z_1 z_1 z_1/y_1 y_1 y_1) + p(z_1 z_1 z_2/y_1 y_1 y_1) + p(z_1 z_2 z_1/y_1 y_1 y_1) + p(z_2 z_1 z_1/y_1 y_1 y_1)$$

$$p(w_1/x_1) = p(z_1/y_1)^3 + 3p(z_1/y_1)^2 p(z_2/y_1) = 0.84375$$

$$p(w_2/x_1) = 1 - 0.84375 = 0.15625$$

$$p(w_1/x_2) = 0.00725$$

$$p(w_2/x_2) = 0.99275$$

$$p(w_1) = p(x_1)p(w_1/x_1) + p(x_2)p(w_1/x_2) = 0.67645$$

$$p(w_2) = 0.32355$$

$$H(W) = -\frac{1}{\ln 2} (p(w_1) \ln p(w_1) + p(w_2) \ln p(w_2)) = 0.9082$$

$$H(W/x_1) = 0.625262$$

$$H(W/x_2) = 0.06195$$

$$H(W/X) = p(x_1)H(W/x_1) + p(x_2)H(W/x_2) = 0.5125$$

$$I(X, W) = H(W) - H(W/X) = 0.3956$$

Vjerovatnoća greške:

$$p_e = 1 - 0.8 \cdot 0.84375 - 0.2 \cdot 0.99275 = 0.126$$

Brzina prenosa:

$$\overline{I(X, W)} = \frac{0.1318}{\tau}$$