Elektrotehnički fakultet Univerziteta Sarajevo

Diskretna Matematika
Zadaća 5

Student
Vedad Fejzagić

Broj indeksa
17336

Grupa
RI2-2

Demonstrator
Šeila Bečirović

January 23, 2018

Zadatak 1

Postavka:

Dat je periodični diskretni signal perioda 6, čije vrijednosti u trenucima 0, 1, 2, 3, 4 i 5 respektivno iznose 4, –6, 4, 0, 5 i –8.

Predstavite ovaj diskretni signal formulom u kojoj se javlja cijeli dio broja;

Predstavite ovaj signal diskretnim Fourierovim redom;

Odredite amplitudni i fazni spektar za ovaj signal i predstavite ga u vidu sume harmonika.

Rješenje:

$$N = 6$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x_0 = 4, x_1 = -6, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = -8$$

a)

Predstavljamo diskretni signal formulom u kojoj se javlja cijeli dio broja:

$$x_n = x_{-1} + (x_0 - x_{-1})\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + (x_1 - x_0)\left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor + (x_2 - x_1)\left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor +$$

$$+(x_3 - x_2)\left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + (x_4 - x_3)\left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor + (x_5 - x_4)\left\lfloor \frac{n-5}{6} \right\rfloor$$

Pa je rješenje:

$$x_n = -8 + 12\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - 10\left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor + 10\left\lfloor \frac{n-2}{6} \right\rfloor -$$

$$-4\left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor + 5\left\lfloor \frac{n-4}{6} \right\rfloor - 13\left\lfloor \frac{n-5}{6} \right\rfloor$$

b)
Računamo a_k, b_k te na kraju x_n. $N = 6$ je parno pa $b_3 = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{6}\sum_{n=0}^{5} x_n \cdot cos0 = \frac{2}{6}(4 - 6 + 4 + 5 - 8) = -\frac{1}{3}$$

Na isti način računamo ostale koeficijente, pa se dobije:

$$a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = \frac{13}{6}, a_3 = \frac{27}{6}$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}, b_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Na kraju, razvoj u Furijerov red:

$$x_n = -\frac{1}{6} + (-\frac{5}{2}cos\frac{\pi n}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}sin\frac{\pi n}{3}) + (\frac{13}{6}cos\frac{2\pi n}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\frac{2\pi n}{3}) + (\frac{27}{6}cos\pi n)$$

c)

$$A_0 = -\frac{1}{6}$$
$$\varphi_0 = 0$$

Zadatak 2

Postavka: Ispitajte koji su od sljedećih diskretnih signala periodični a koji nisu. Za one koji jesu, nađite osnovni period N:

$$2sin(7n\pi + \pi/5)$$

$$3 + cos2(12n\pi/5\breve{}1)$$

$$(\breve{}1)ncos(4n\pi/7)$$

$$sin(2n\pi/3)$$

Odgovori moraju biti obrazloženi, inače se neće priznavati!

Rješenje:

Diskretni harmonijski signali su periodični samo ako je moguće naći prirodan broj k takav da je $\frac{2k\pi}{\Omega}$ također prirodan broj. Ovo svojstvo ćemo iskoristiti u podzadacima a) i b). Za c) i d) ćemo primjeniti svojstvo da je diskretni signal periodičan ako postoji cijeli broj $N \neq 0$ takav da za svako $n \in Z$ vrijedi $x_{n+N} = x_n$, pri tome broj N je period diskretnog signala.

a)

Iz postavke odredimo omega, pa uvrstimo u formulu $\frac{2k\pi}{\Omega}$.

$$\Omega = 7\pi \rightarrow \frac{2k\pi}{7\pi} = \frac{2k}{7}$$

Ovaj izraz je najrpije zadovoljen ako je $k = 7$. Uvrštavanjem se dobije: $N = 2$. Dakle ovaj diskretni signal je periodičan sa osnovnim periodom $N = 2$.

b)

$$\Omega = \frac{12\pi}{5} \rightarrow \frac{10k}{12} = \frac{5k}{6}$$

Ovaj izraz je najrpije zadovoljen ako je $k = 6$. Uvrštavanjem se dobije: $N = 5$. Dakle ovaj diskretni signal je periodičan sa osnovnim periodom $N = 5$.

c)

Primjenjujemo pravilo $x_{n+N} = x_n$:

$$(-1)^{n+N} cos\frac{4(n+N)\pi}{7} = (-1)^n(-1)^N(cos\frac{4n\pi}{7}cos\frac{4N\pi}{7} - sin\frac{4n\pi}{7}sin\frac{4N\pi}{7})$$

N mora biti parno i mora vrijediti:

$$cos\frac{4N\pi}{7} = 1 \wedge sin\frac{4N\pi}{7} = 0$$

Ovo je ispunjeno za:

$$\frac{4N\pi}{7} = 2k\pi$$

$$\frac{2N}{7} = k$$

i N parno.

Za N = 14, ova jednakost je zadovoljena. Dakle ovaj diskretni signal je periodičan sa osnovnim periodom $N = 14$.

d)

Primjenjujemo pravilo $x_{n+N} = x_n$:

Dobije se $sin\frac{2^n \cdot 2^N \pi}{3}$

Da bi dobijeni izraz bio jednak x_n, mora vrijediti N = 0. Dakle, ovaj diskretni signal nije periodičan.

Zadatak 3

<u>Postavka:</u>

Odredite i nacrtajte amplitudno-frekventnu i fazno-frekventnu karakteristiku diskretnog sistema opisanog diferentnom jednačinom $y_n + 6y_{n\breve{}1} = \breve{}6x_n + 7x_{n\breve{}1}$, a nakon toga, odredite odziv ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1. Uputa: razmotrite prolazak svakog od harmonika posebno.

<u>Rješenje:</u>

Prvo računamo funkciju sistema $H(z)$. Izjednačavamo, $x_n = z^n$, $y_n = z^n H(z)$. Dobijena diferentna jednačine postaje:

$$z^n H(z) + 6z^{n-1}H(z) = -6z^n + 7z^{n-1}$$

Slijedi:

$$H(z) = \frac{-6z^n + 7z^{n-1}}{z^n + 6z^{n-1}} = \frac{-6 + 7z^{-1}}{1 + 6z^{-1}} = \frac{-6z + 7}{z + 6}$$

Računamo amplitudno-frekventnu karakteristiku:

$$A(\Omega) = |H(e^{i\Omega})| = \left| \frac{-6e^{i\Omega} + 7}{e^{i\Omega} + 6} \right| = \frac{-6cos\Omega + 7 - 6isin\Omega}{cos\Omega + 6 + isin\Omega} = \sqrt{\frac{(-6cos\Omega + 7)^2 + 36sin^2\Omega}{(cos\Omega + 6)^2 - sin^2\Omega}}$$

$$A(\Omega) = \sqrt{\frac{-84cos\Omega + 85}{2cos^2\Omega + 12cos\Omega + 36}}$$

Računamo fazno-frekventnu karakteristiku:

Sličan postupak kao i kod računanja amplitudne-frekventne karakteristike, te odvajanje realnog i kompleksnog koeficijenta u zasebne sabrike za nalaženje arg:

$$A(\varphi) = argH(e^{i\Omega}) = arg\frac{-6cos\Omega + 7 - 6isin\Omega}{cos\Omega + 6 + isin\Omega} \cdot \frac{cos\Omega + 6 - isin\Omega}{cos\Omega + 6 - isin\Omega}$$

$$A(\varphi) = arg\frac{-29cos\Omega + 36 - i \cdot 43sin\Omega}{(cos\Omega + 6 + isin\Omega)(cos\Omega + 6 - isin\Omega)}$$

Realni dio je uvijek $Re(z) > 0$, pa možemo pisati:

$$A(\varphi) = arctg(-\frac{43sin\Omega}{36 - 29cos\Omega})$$

Odziv ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1:

$$y_{n-1} = 0$$

$$y_0 = -6 \cdot 4 + 7 \cdot (-8) - 0 = -80$$

Na isti način računamo ostale:

$$y_1 = 544, y_2 = 3330, y_3 = -19952, y_4 = 119682, y_5 = -718079$$

Zadatak 4

Postavka:

Nađite z-transformaciju sekvence $x_n = (n^2 cos(n\pi/6) + 4^n/(2_n+1)!)u_{n\breve{}3}$. Pri tome se po potrebi možete koristiti tablicama i osobinama z-transformacije.

Rješenje:

Ovo je sekvenca oblika $y_n u_{n-3}$. Potrebno je izvesti pravilo za $Z\{y_n, u_{n-k}\}$. Ako stavimo da je $y_n = w_{n-k}$, tada je $w_n = y_{n+k}$, stoga imamo:

$$Z\{y_n u_{n-k}\} = Z\{w_{n-k} u_{n-k}\} = Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{-i}$$

Korištenjem tablice transformacije imamo:

$$Z\{cos\frac{n\pi}{6}\} = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{z^2 - z + 1}$$

$$Z\{n^2 \cdot cos\frac{n\pi}{6}\} = z^2(\frac{-z(z-\frac{1}{2})}{z^2-z+1})'' = -\frac{z^3 - 6z^2 + 3z + 1}{(z^2-2+1)^3}$$

Računamo drugu z - transformaciju:

Imamo da je $Z\{\frac{1}{n!}\} = e^{\frac{1}{z}}$

Koristimo osobinu: $Z\{y_n\} = y(z) \implies Z\{y_{2n+1}\} = \frac{Y(\sqrt{z}) - Y(-\sqrt{-z})}{2\sqrt{z}}$ Pa je

$$Z\{\frac{1}{(2n+1)!}\} = \frac{e^{\frac{2}{\sqrt{z}}} - 1}{2e^{\frac{2}{\sqrt{z}}}}$$

$$Z\{\frac{4^n}{(2n+1)!}\} = \frac{e^{-\frac{2\sqrt{z}}{z}} - 1}{2e^{\frac{2\sqrt{z}}{z}}}$$

Na kraju:

$$Z\{x_n\} = Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - y_2 z^{-2} = Z\{n^2 \cdot cos\frac{n\pi}{6}\} + Z\{\frac{4^n}{(2n+1)!}\} - y_0 - y_1 z^{-1} - y_2 z^{-2}$$

$$Z\{x_n\} = -\frac{z^3 - 6z^2 + 3z + 1}{(z^2-2+1)^3} + \frac{e^{-\frac{2\sqrt{z}}{z}} - 1}{2e^{\frac{2\sqrt{z}}{z}}} - 1 - \frac{1}{z}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}) - \frac{1}{z^2}(\frac{1}{2} + \frac{16}{120})$$

Zadatak 5

Postavka:

Dat je diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom $2y_{n+1} + 7y_n = 3x_{n+1}\breve{}5x_{n\breve{}2}$. Nađite odziv ovog sistema na pobudu $x_n = ncos(2n\pi/3)u_n$. Rješenje treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi.

Rješenje:

Najprije računamo funkciju sistema:

$$x_n = z^n, y_n = z^n H(z)$$

Dobije se:

$$H(z) = \frac{3z^3 - 5}{z^2(2z + 7)}$$

Dalje, računamo impulsni odziv $h_n = Z^{-1}(H(z))$

$$P(z) = 3z^3 - 5$$
$$Q(z) = z^2(2z + 7)$$

Nule polinama Q(z) su: z = 0 čija je višestrukost 2 i $z = -\frac{7}{2}$