

Пробный

Осталось сделать

Осталось мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №1

Если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ x + 2y - z = -1 \\ 5x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$, то значение выражения $2x_0 + 3z_0 - y_0$ равно:

2

3

8

–5

4

Задание №2

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, то $2A + 3B$ равно

$$\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -12 & 2 \\ -5 & -11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 5 & -13 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №3

Найти элемент матрицы, обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца.

1	$\frac{16}{77}$	10	$-\frac{1}{88}$	16
---	-----------------	----	-----------------	----

Задание №4

Если $\vec{a} = \{3; 2\}$, $\vec{b} = \{5; -1\}$, $\vec{c} = \{7; -4\}$, то разложение вектора \vec{c} по базису \vec{a}, \vec{b} ($\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$) имеет вид:

$\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ $\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$

Пробный

Осталось сделать

Осталось мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №5

Если $\vec{a} = \{6; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 0; 3\}$, то длина вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ равна:

1

4

$\sqrt{10}$

$\sqrt{11}$

$\sqrt{13}$

Задание №6

Пусть $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
Значение выражения $|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b} + 3\vec{a})|$ составляет:

14

40

0

-4

12

Пробный

Осталось сделать

Осталось мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №7

Проекция вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ на вектор $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ равна:

$\frac{9}{2}$

12

0

$\frac{15}{2}$

1

Задание №8

Объем треугольной пирамиды $ABCD$: $A(0; 1; 1)$, $B(2; -1; 4)$, $C(3; 2; 0)$, $D(-1; 0; 0)$, составляет:

6

3

30

2

1

Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию



ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №9

Сумма собственных значений матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ равна:

12

14

−5

1

3

Результаты

Набранные баллы (max=100)

Неверно выполнены задания

Не выполнены задания

Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Решим систему уравнений тремя способами: методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом.

Метод Крамера

Вычислим главный определитель системы Δ . Для этого заполним коэффициентами перед неизвестными x, y, z , соответственно, первый, второй и третий столбцы определителя:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} = \\ &= 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 6) + 3 \cdot (1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 5) + \\ &\quad + 5 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = \\ &= 2 \cdot (-6 + 6) + 3 \cdot (-3 + 5) + 5 \cdot (6 - 10) = 0 + 6 - 20 = -14.\end{aligned}$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Далее вычислим определитель Δ_1 неизвестной x , который получается из главного определителя Δ путём замены первого столбца столбцом свободных членов:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{vmatrix} 12 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} = \\ &= 12 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 12 \cdot (-6 + 6) + 3 \cdot (3 + 1) + 5 \cdot (-6 - 2) = 0 + 12 - 40 = -28.\end{aligned}$$

Следовательно, по формулам Крамера, неизвестная x равна:
 $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2.$

Затем, вычислим определитель Δ_2 неизвестной y , который получается из главного определителя Δ путём замены второго столбца столбцом свободных членов:



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (3 + 1) - 12 \cdot (-3 + 5) + 5 \cdot (1 + 5) = 8 - 24 + 30 = 14.$$

Следовательно: $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1$.

Аналогично находим неизвестную z :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$= 2 \cdot (2 + 6) + 3 \cdot (1 + 5) + 12 \cdot (6 - 10) = 16 + 18 - 48 = -14.$$

Неизвестная z равна: $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1$.

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Преобразуем полученную матрицу к верхнетреугольному виду: под главной диагональю элементы матрицы равны нулю. Для удобства преобразования элемент a_{11} (стоящий в первой строке и первом столбце) сделаем равным единице. Этого можно добиться, разделив все элементы первой строки на два, тогда $a_{11} = 1$, но при этом в строке появятся дробные числа, что усложняет дальнейшие преобразования. Поэтому воспользуемся другим элементарным преобразованием расширенной матрицы: поменяем местами первую и вторую строки:



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 12 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

В первом столбце под элементом $a_{11} = 1$ нужно получить ноль. Для этого умножим все элементы первой строки на (-2) (элемент стоящий во второй строке первом столбце, взятый с обратным знаком) и прибавим их к соответствующим элементам второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 + 1 \cdot (-2) & -3 + 2 \cdot (-2) & 5 + (-1) \cdot (-2) & 12 + (-1) \cdot (-2) \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right) =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array} \right).$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Для получения нуля на месте элемента $a_{13} = 5$, умножим все элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5 + 1 \cdot (-5) & 6 + 2 \cdot (-5) & -3 + (-1) \cdot (-5) & 1 + (-1) \cdot (-5) \end{array} \right) =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array} \right).$$

Под главной диагональю остался один элемент, не равный нулю: $a_{32} = -4$. Для того, чтобы получить в этой позиции ноль, вначале создадим единицу на месте элемента $a_{22} = -7$. С этой целью разделим все элементы второй строки на (-7) :

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array} \right).$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Далее умножим все элементы второй строки на 4 (элемент, стоящий под элементом a_{22} на пересечении третьей строки и второго столбца, взятый с обратным знаком) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 + 1 \cdot 4 & 2 + (-1) \cdot 4 & 6 - 2 \cdot 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right).$$

Получили верхнетреугольную матрицу.

Применим обратный ход метода Гаусса для нахождения неизвестных. Последней строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $-2z = -2$.

Все элементы верхнетреугольной матрицы – это коэффициенты при неизвестных: элементы первого столбца – коэффициенты при x , элементы второго столбца – при y , третьего – при z . Таким образом, число $a_{33} = -2$ является коэффициентом при неизвестной z . Вертикальная черта символизирует знак равенства.

Из этого уравнения находим: $z = \frac{-2}{-2} = 1$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Второй строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot y - 1 \cdot z = -2$. Подставим в него найденное значение $z = 1$: $1 \cdot y - 1 \cdot 1 = -2$. Отсюда: $y = -2 + 1 = -1$.

Наконец, первой строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot x + 2 \cdot y - 1 \cdot z = -1$. Подставим в него вместо y и z найденные значения: $1 \cdot x + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1$. Откуда: $x = -1 + 2 + 1 = 2$.

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Матричный метод

Главная матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Её

определитель, как мы выяснили при использовании метода Крамера, не равен нулю: $\det A = \Delta = -14$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Для её нахождения вычислим алгебраические дополнения элементов определителя $\det A$:



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Теперь находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} 0 & 21 & -7 \\ -2 & -31 & 7 \\ -4 & -27 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Поскольку в данном примере $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то, применяя формулу

$X = A^{-1}B$, найдём решение системы уравнений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{12}{7} - \frac{31}{14} - \frac{1}{2} \\ \frac{24}{7} - \frac{27}{14} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Остаётся выполнить само тестовое задание, т.е. найти значение выражения $2x_0 + 3z_0 - y_0$. Так как $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$, то получаем $2x_0 + 3z_0 - y_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - (-1) = 8$.

Ответ: 8.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №2

Умножим все элементы матрицы A на 2, а все элементы матрицы B — на 3.

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -3 & 21 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём сумму матриц $2A$ и $3B$. Для этого прибавим к элементам матрицы $2A$ соответствующие элементы матрицы $3B$:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 + 9 & -2 + 0 & 6 + 6 \\ 8 + (-3) & 10 + 21 & 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №3

Вычислим определитель матрицы A :

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(0 + 12) + 5(1 - 20) + 6(-3 - 0) = 36 - 95 - 18 = -77.\end{aligned}$$

$\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Элемент обратной матрицы, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца, равен: $(A^{-1})_{32} = \frac{A_{23}}{\det A}$, где A_{23} – алгебраическое дополнение элемента a_{23} :

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-9 + 25) = -16.$$

Таким образом, искомый элемент обратной матрицы равен:

$$(A^{-1})_{32} = \frac{-16}{-77} = \frac{16}{77}.$$

Ответ: $\frac{16}{77}$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №4

Разложить вектор \vec{c} по базису \vec{a}, \vec{b} – это значит представить его в виде: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов α и β подставим в эту формулу координаты векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} , а затем выполним действия над векторами в правой части:

$$\{7; -4\} = \alpha\{3; 2\} + \beta\{5; -1\};$$

$$\{7; -4\} = \{3\alpha; 2\alpha\} + \{5\beta; -\beta\};$$

$$\{7; -4\} = \{3\alpha + 5\beta; 2\alpha - \beta\}.$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты. Следовательно, справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 7 \\ 2\alpha - \beta = -4 \end{cases}$$

Решим её методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13;$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №4

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -26.$$

Отсюда: $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1$; $\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$. Остаётся подставить найденные коэффициенты α и β в разложение вектора \vec{c} :

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Ответ: $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №5

Для того, чтобы найти координаты вектора \vec{c} , вначале определим координаты векторов $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$: $2\vec{a} = \{12; -2; 6\}$, $3\vec{b} = \{12; 0; 9\}$, а затем вычтем из координат вектора $2\vec{a}$ соответствующие координаты вектора $3\vec{b}$:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \{12; -2; 6\} - \{12; 0; 9\} = \\ &= \{12 - 12; -2 - 0; 6 - 9\} = \{0; -2; -3\}.\end{aligned}$$

Теперь найдём длину вектора \vec{c} :

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\vec{c} = \{0; -2; -3\}$, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №6

Раскроем скобки и воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \vec{a} \times \vec{a} = 0, |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} |(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b} + 3\vec{a})| &= |2\vec{a} \times 2\vec{b} + 2\vec{a} \times 3\vec{a} - \vec{b} \times 2\vec{b} - \vec{b} \times 3\vec{a}| = \\ &= |4\vec{a} \times \vec{b} + 0 - 0 + 3\vec{a} \times \vec{b}| = |7\vec{a} \times \vec{b}| = \\ &= 7 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 14. \end{aligned}$$

Ответ: 14.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №7

Для решения используем формулу: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Найдём скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0$. Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны и, следовательно, $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

Ответ: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №8

Найдём координаты векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} . Воспользуемся формулой:

$$\overrightarrow{AB} = \{2 - 0; -1 - 1; 4 - 1\} = \{2; -2; 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{3 - 0; 2 - 1; 0 - 1\} = \{3; 1; -1\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-1 - 0; 0 - 1; 0 - 1\} = \{-1; -1; -1\}.$$

Объём треугольной пирамиды $ABCD$ вычисляется по формуле:
 $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|$. Находим смешанное произведение:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \\ &- (-2) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 8 - 6 = -18. \end{aligned}$$

Отсюда, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |-18| = 3$ (куб. ед.).

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3$ (куб. ед.).



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №9

Уравнение на собственные значения имеет вид:

$$\det\left(\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-3-\lambda)(6-\lambda)-10=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-28=0 \Rightarrow \lambda_1=-4, \lambda_2=7.$$

Собственные значения матрицы A : $\lambda_1=-4, \lambda_2=7$.

Вычислим координаты собственных векторов, отвечающих найденным собственным значениям.

1) При $\lambda = -4$:

$$\left(\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данное матричное уравнение эквивалентно системе двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}.$$



Пробный

Осталось сделать

Осталось

мин.

Перейти к заданию

1

2

3

4

5

6

7

8

9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №9

Таким образом, $x_1 = -5x_2$. Положим $x_2 = c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Тогда $x_1 = -5c_1$ и, следовательно, собственный вектор \mathbf{x}_1 , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -4$, имеет вид: $\mathbf{x}_1 = \{-5c_1; c_1\} = c_1\{-5; 1\}$ или $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) При $\lambda = 7$ действуем аналогично:

$$\left(\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10x_1 + 5x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, $x_2 = 2x_1$. Положим $x_1 = c_2$, где c_2 — произвольная постоянная. Тогда $x_2 = 2c_2$ и, следовательно, собственный вектор \mathbf{x}_2 , отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 7$, имеет вид: $\mathbf{x}_2 = \{c_2; 2c_2\} = c_2\{1; 2\}$ или $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = -4$, $\mathbf{x}_1 = c_1 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{x}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
 $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$.

