ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ГУМАНИТАРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Михеев А. В.

Немного об этой книге ...

Основное предназначение этого электронного учебного пособия — помочь студентам гуманитарных специальностей самостоятельно освоить программу раздела «Линейная алгебра» курса «Математика». Это пособие ни в коем случае не может заменить подробные печатные курсы высшей математики. Главная цель, которую преследовал автор — дать краткое и, в то же время полное, введение в основные понятия и задачи линейной алгебры. Пособие содержит много иллюстраций, примеров решения типовых задач, сведений из истории математики.

Много интересной, но не очень важной информации вынесено в аннотации, чтобы их увидеть — наведите курсор мыши на слово, отмеченное символом , и «щёлкните» по нему. Слева — панель навигации по документу. Смысл имеющихся там кнопочек не требует пояснений...

Надеюсь, это пособие окажется полезным для Вас.

Содержание

1 Матрицы и действия над ними

Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. При этом m задает число строк в таблице, а n — число столбцов.

Числа, образующие матрицу, называются её элементами. Положение каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Как видим, номера строк в матрице возрастают снизу вверх, а номера столбцов — слева направо.

Пример 1.1

Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 & 9 & 10 \\ 2{,}1 & -5{,}06 & -12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ имеет размерность 2×5, т.е. она содержит 2 строки и 5 столбцов. $a_{14} = 9$ — элемент, стоящий на пересечении 1–ой строки и 4–го столбца; $a_{22} = -5{,}06$ — элемент, стоящий на пересечении 2–ой строки и 2–го столбца.

Матрица может состоять из одной строки, из одного столбца и даже из одного элемента. Если все элементы матрицы равны нулю, то её называют *нулевой* и обозначают символом O.

Если число столбцов матрицы равно числу строк: $m = n$, то матрица называется квадратной n–го порядка.

Линия, вдоль которой в квадратной матрице стоят элементы с равными номерами строк и столбцов, обычно называют главной диагональю квадратной матрицы.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали находятся единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной.

Т.е. единичная матрица выглядит так:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

В общем случае, квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, называется *диагональной*.

Матрица (*лат.* matrix — «матка», «источник», «начало») — важнейшее понятие в современной математике. Впервые появилось в работах Сильвестра и Кэли.

Важнейшими операциями над матрицами являются:

- сложение (вычитание) матриц,
- умножение матрицы на число,
- умножение одной матрицы на другую,
- транспонирование.

Операции сложения и вычитания матриц выполняются поэлементно и применимы лишь к матрицам одинаковой размерности.

> Суммой (разностью) матриц A и B, имеющих одинаковую размерность, является матрица C, той же размерности, элементы которой есть сумма (разность) соответствующих элементов исходных матриц: $C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Операция умножения матрицы на произвольное вещественное число тоже выполняется поэлементно, но применима к любым матрицам.

> Произведением произвольной матрицы A на вещественное число λ является матрица C, той же размерности, что и A, элементы которой есть произведение соответствующих элементов исходной матрицы на число λ: $C = \lambda \cdot A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

В приведенных выше определениях использовался символ «$\Leftrightarrow$», называемый символом эквивалентности. Математическое выражение $\alpha \Leftrightarrow \beta$ читается так: «α эквивалентно β» или «α истинно тогда и только тогда, когда истинно β».

Перечислим основные свойства операций сложения матриц и умножения матриц на вещественные числа:

- **Коммутативность:** $A + B = B + A$.
- **Ассоциативность:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Дистрибутивность:** $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

Нулевая матрица O относительно операции сложения матриц обладает теми же свойствами, что и число 0 относительно операции сложения вещественных чисел. Это значит, что какова бы ни была матрица A, справедливы следующие равенства: $A + O = O + A = A$. В этих равенствах размерности матриц A и O должны быть равны.

Пример 1.2

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $4A - 3B$.

Решение.

$$4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 \\ 36 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 9 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4A - 3B = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 \\ 36 & 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -27 & 9 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ 42 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Письмо автору

Содержание

◀◀

◀ ▶

▶▶

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

Произведение матриц можно вычислить лишь в том случае, когда количество столбцов в первой матрице совпадает с количеством строк во второй.

Произведением матрицы A, имеющей размерность $m \times p$, на матрицу B, имеющей размерность $p \times n$, называется матрица C, размерности $m \times n$: $C = A \cdot B$, если элементы матрицы C могут быть вычислены по следующей формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}. \qquad (1.3)$$

Символ $\sum_{k=1}^{p}$, использованный в определении, означает сумму по элементам некоторого упорядоченного множества чисел. Что именно нужно суммировать, написано правее знака $\sum$. При этом номера k элементов, включаемых в сумму, принимают значения $1, 2, \ldots, p$.

Свойства операции умножения матриц:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ — произведение матриц не коммутативно;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — произведение матриц ассоциативно;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ — операция умножения матриц дистрибутивна.

Единичная матрица E относительно операции умножения квадратных матриц обладает теми же свойствами, что и число 1 относительно операции умножения вещественных чисел. Это значит, что какова бы ни была квадратная матрица A, справедливы следующие равенства: $A \cdot E = E \cdot A = A$. Правда нужно помнить, что в этих равенствах размерности матриц A и E должны быть равны.

Письмо автору

Содержание

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

Операция *транспонирования* может быть применена к любым матрицам. Она состоит в замене строк матрицы на её столбцы, т.е. после транспонирования первый столбец исходной матрицы становится первой строкой новой матрицы, второй столбец становится второй строкой и т.д. Если матрица A — исходная, то транспонированная матрица обозначается символом A^T.

Пример 1.3

Найти матрицы A^2, $B \cdot C$ и B^T, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}.$$

2) $$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) $$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2 Определители и их свойства

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число, определяемое по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.1}$$

Термин «определитель» впервые появился в начале XIX века в работах Коши. Однако первым понятие определителя, применительно к системам линейных алгебраических уравнений, стал использовать в 1693 году Лейбниц. Современное обозначение определителя: таблица чисел в вертикальных прямых скобках, ввёл Кэли.

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, определяемое по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) вычисления определителя третьего порядка кажется сложной для запоминания. Однако можно предложить правило (так называемое *правило Саррюса*), с помощью которого эту формулу можно воспроизвести без особых усилий. Возьмем определитель третьего порядка и выпишем справа от него еще раз первый и второй столбцы. В полученной таким образом матрице выделим шесть диагоналей: три главных и три побочных.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Тройки чисел, образующие главные диагонали и отмеченные на рисунке красными линиями, входят в формулу для определителя третьего порядка со знаком «плюс». Тройки чисел, образующие побочные диагонали (отмечены на рисунке синими линиями), входят в эту формулу со знаком «минус».

Свойства определителей рассмотрим без доказательств (доказательства могут быть найдены в [**?**]).

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить на соответствующие столбцы. Это значит, что для произвольной квадратной матрицы A: $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$.

Свойство 2. При перестановке любых двух строк (или двух столбцов) определителя, его знак меняется на противоположный.

Свойство 3. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны (в частности, равны), то такой определитель равен нулю.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 5. Общий множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя.

Свойство 6. Если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на произвольное число, не равное нулю, то величина определителя не изменится.

Разумеется все перечисленные свойства справедливы для определителей любого порядка.

Существует еще одно свойство определителей, но для его формулировки нам потребуются два новых понятия.

Вернемся к формуле (2.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Сформируем в правой части этого равенства три группы из слагаемых, содержащих элементы первой строки определителя: a_{11}, a_{12} и a_{13}, и вынесем в каждой группе соответствующий элемент за скобку. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + \\ + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках после элемента a_{11}, называется его *алгебраическим дополнением* и обозначается символом A_{11}, т. е. $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$. Аналогично, $A_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{12}, $A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{13}. С учетом этих новых обозначений формула для вычисления определителя третьего порядка принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) называется разложением определителя по элементам первой строки. Аналогичные разложения можно записать для элементов любой строки и любого столбца определителя.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из данного определителя вычёркиванием i-й строки и j-го столбца, т. е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Пример 2.1

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

— минор элемента a_{11}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

— минор элемента a_{32}

Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя связаны друг с другом простым соотношением. Нетрудно убедиться в справедливости следующего правила:

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя и минор M_{ij} этого элемента связаны равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2.4}$$

Данное равенство можно рассматривать как определение алгебраического дополнения.

Теперь мы готовы сформулировать последнее свойство определителей.

Свойство 7.

- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца) равна величине этого определителя.
- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

3 Системы линейных алгебраических уравнений и их решение методом Крамера

Будем называть системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными совокупность уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, подлежащие определению. Коэффициенты при неизвестных образуют матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемую *основной матрицей системы*. Правые части уравнений системы (3.1), а также неизвестные, образуют два вектор-столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

которые называются *вектором-столбцом свободных членов* и *вектором-столбцом неизвестных*, соответственно.

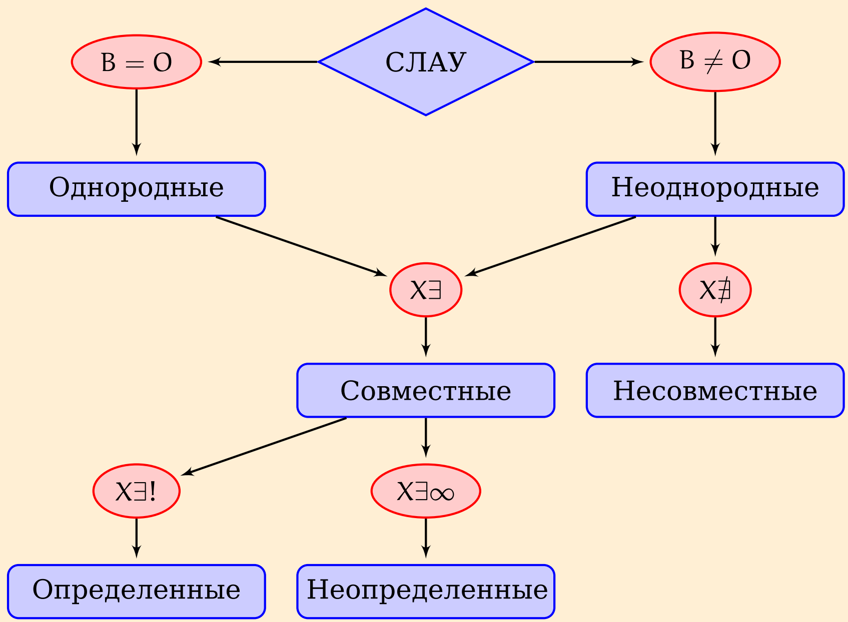
Письмо автору
Содержание
Вернуться
На страницу...
Во весь экран
Закрыть
Выход

Используя эти обозначения и определение произведения матриц (1.3), можно записать систему уравнений (3.1) в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Далее приведена диаграмма, демонстрирующая классификацию систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На этой диаграмме используются следующие обозначения:

- $X\exists$ — «X существует»;
- $X\nexists$ — «X не существует»;
- $X\exists!$ — «X существует и единственен»;
- $X\exists\infty$ — «существует бесконечно много X».



Решить систему линейных алгебраических уравнений — это значит найти такие значения неизвестных $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \ldots, x_n = x_n^*$, которые после подстановки в (3.1) обращают каждое уравнение этой системы в тождество.

В случае, если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, и $\det A \neq 0$ решение системы линейных алгебраических уравнений (3.1) единственно и может быть найдено методом Крамера. Рассмотрим этот метод на примере системы из трёх уравнений на три неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

В методе Крамера необходимо вычислить несколько определителей:

1. Главный определитель системы: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

2. Определители неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

После этого решение СЛАУ может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{3.2}$$

Пример 3.1

Решить методом Крамера: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -2 \end{cases}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -32 + 36 + 78 = 82.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 10 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -32 + 136 + 60 = 164.$$

Аналогично: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -82, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$ 82. Отсюда по формулам Крамера (3.2) находим:

$$x_1 = \frac{164}{82} = 2, x_2 = \frac{-82}{82} = -1, x_3 = \frac{82}{82} = 1.$$

Ответ: $(2; -1; 1)$.