17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №1

Если $(x_0; y_0; z_0)$ – решение системы $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ x + 2y - z = -1 \\ 5x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$, то значение выражения $2x_0 + 3z_0 - y_0$ равно:

2 ☐ 3 ☐ 8 ☑ -5 ☐ 4 ☐

Решение

Задание №2

Если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, то $2A + 3B$ равно

$\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 10 & -12 & 2 \\ -5 & -11 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 5 & -13 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ☐

Решение

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Задание №3

Найти элемент матрицы, обратной к матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца.

1 ☐ $\frac{16}{77}$ ☐ 10 ☐ $-\frac{1}{88}$ ☐ 16 ☐

Решение

Задание №4

Если $\vec{a} = \{3;2\}$, $\vec{b} = \{5;-1\}$, $\vec{c} = \{7;-4\}$, то разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$) имеет вид:

$\vec{c} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$ ☐ $\vec{c} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ ☐ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ☐ $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ ☐

Решение

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №5

Если $\vec{a} = \{6; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 0; 3\}$, то длина вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ равна:

1 ☐ 4 ☐ $\sqrt{10}$ ☐ $\sqrt{11}$ ☐ $\sqrt{13}$ ☐

Решение

Задание №6

Пусть $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Значение выражения $\left|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{b} + 3\vec{a})\right|$ составляет:

14 ☐ 40 ☐ 0 ☐ -4 ☐ 12 ☐

Решение

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №7

Проекция вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ на вектор $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ равна:

$\frac{9}{2}$ ☐ 12 ☐ 0 ☐ $\frac{15}{2}$ ☐ 1 ☐

Решение

Задание №8

Объем треугольной пирамиды $ABCD$: $A(0;1;1)$, $B(2;-1;4)$, $C(3;2;0)$, $D(-1;0;0)$, составляет:

6 ☐ 3 ☐ 30 ☐ 2 ☐ 1 ☐

Решение

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3
4 5 6
7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Задание №9

Сумма собственных значений матрицы $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ равна:

12 ☐ 14 ☐ -5 ☐ 1 ☐ 3 ☐

Решение

Результаты

Набранные баллы (max=100)	11
Неверно выполнены задания	Ошибочно решённых заданий нет!
Не выполнены задания	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Решение задания №1

Решим систему уравнений тремя способами: методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом.

Метод Крамера

Вычислим главный определитель системы Δ. Для этого заполним коэффициентами перед неизвестными *x*, *y*, *z*, соответственно, первый, второй и третий столбцы определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} =$$

$$= 2\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(2\cdot(-3)-(-1)\cdot 6) + 3\cdot(1\cdot(-3)-(-1)\cdot 5) +$$

$$+ 5\cdot(1\cdot 6 - 2\cdot 5) =$$

$$= 2\cdot(-6+6) + 3\cdot(-3+5) + 5\cdot(6-10) = 0 + 6 - 20 = -14.$$

☞ ☞

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Далее вычислим определитель Δ_1 неизвестной x, который получается из главного определителя Δ путём замены первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} =$$

$$= 12 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 12 \cdot (-6+6) + 3 \cdot (3+1) + 5 \cdot (-6-2) = 0 + 12 - 40 = -28.$$

Следовательно, по формулам Крамера, неизвестная x равна: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$.

Затем, вычислим определитель Δ_2 неизвестной y, который получается из главного определителя Δ путём замены второго столбца столбцом свободных членов:

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(3+1) - 12\cdot(-3+5) + 5\cdot(1+5) = 8 - 24 + 30 = 14.$$

Следовательно: $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1.$

Аналогично находим неизвестную z:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(2+6) + 3\cdot(1+5) + 12\cdot(6-10) = 16 + 18 - 48 = -14.$$

Неизвестная z равна: $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1.$

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Преобразуем полученную матрицу к верхнетреугольному виду: под главной диагональю элементы матрицы равны нулю. Для удобства преобразования элемент a_{11} (стоящий в первой строке и первом столбце) сделаем равным единице. Этого можно добиться, разделив все элементы первой строки на два, тогда $a_{11} = 1$, но при этом в строке появятся дробные числа, что усложняет дальнейшие преобразования. Поэтому воспользуемся другим элементарным преобразованием расширенной матрицы: поменяем местами первую и вторую строки:

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 12 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

В первом столбце под элементом $a_{11} = 1$ нужно получить ноль. Для этого умножим все элементы первой строки на (-2) (элемент стоящий во второй строке первом столбце, взятый с обратным знаком) и прибавим их к соответствующим элементам второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2+1\cdot(-2) & -3+2\cdot(-2) & 5+(-1)\cdot(-2) & 12+(-1)\cdot(-2) \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Пробный

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Для получения нуля на месте элемента $a_{13} = 5$, умножим все элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5+1\cdot(-5) & 6+2\cdot(-5) & -3+(-1)\cdot(-5) & 1+(-1)\cdot(-5) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Под главной диагональю остался один элемент, не равный нулю: $a_{32} = -4$. Для того, чтобы получить в этой позиции ноль, вначале создадим единицу на месте элемента $a_{22} = -7$. С этой целью разделим все элементы второй строки на (-7):

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Далее умножим все элементы второй строки на 4 (элемент, стоящий под элементом a_{22} на пересечении третьей строки и второго столбца, взятый с обратным знаком) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4+1\cdot 4 & 2+(-1)\cdot 4 & 6-2\cdot 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Получили верхнетреугольную матрицу.

Применим обратный ход метода Гаусса для нахождения неизвестных. Последней строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $-2z = -2$.

Все элементы верхнетреугольной матрицы — это коэффициенты при неизвестных: элементы первого столбца — коэффициенты при x, элементы второго столбца — при y, третьего — при z. Таким образом, число $a_{33} = -2$ является коэффициентом при неизвестной z. Вертикальная черта символизирует знак равенства.

Из этого уравнения находим: $z = \frac{-2}{-2} = 1$.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Второй строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot y - 1 \cdot z = -2$. Подставим в него найденное значение $z = 1$: $1 \cdot y - 1 \cdot 1 = -2$. Отсюда: $y = -2 + 1 = -1$.
Наконец, первой строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot x + 2 \cdot y - 1 \cdot z = -1$. Подставим в него вместо y и z найденные значения: $1 \cdot x + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1$. Откуда: $x = -1 + 2 + 1 = 2$.
Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Матричный метод

Главная матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Её определитель, как мы выяснили при использовании метода Крамера, не равен нулю: $\det A = \Delta = -14$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Для её нахождения вычислим алгебраические дополнения элементов определителя $\det A$:

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 6 & -3\end{vmatrix}=0;\quad A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-4;\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 6 & -3\end{vmatrix}=21;$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-3;\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-27;$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7;\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7.$$

Теперь находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix}0 & 21 & -7\\ -2 & -31 & 7\\ -4 & -27 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2}\\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3
4 5 6
7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №1

Поскольку в данном примере $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то, применяя формулу $X = A^{-1}B$, найдём решение системы уравнений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{12}{7} - \frac{31}{14} - \frac{1}{2} \\ \frac{24}{7} - \frac{27}{14} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$. Остаётся выполнить само тестовое задание, т.е. найти значение выражения $2x_0 + 3z_0 - y_0$. Так как $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$, то получаем $2x_0 + 3z_0 - y_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - (-1) = 8$.

Ответ: 8.

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №2

Умножим все элементы матрицы A на 2, а все элементы матрицы B — на 3.

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -3 & 21 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём сумму матриц $2A$ и $3B$. Для этого прибавим к элементам матрицы $2A$ соответствующие элементы матрицы $3B$:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 4+9 & -2+0 & 6+6 \\ 8+(-3) & 10+21 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №3

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0+12) + 5(1-20) + 6(-3-0) = 36 - 95 - 18 = -77.$$

$\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Элемент обратной матрицы, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца, равен: $\left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{A_{23}}{\det A}$, где A_{23} – алгебраическое дополнение элемента a_{23}:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-9+25) = -16.$$

Таким образом, искомый элемент обратной матрицы равен:

$$\left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{-16}{-77} = \frac{16}{77}.$$

Ответ: $\frac{16}{77}$.

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №4

Разложить вектор $\vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ – это значит представить его в виде: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов α и β подставим в эту формулу координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а затем выполним действия над векторами в правой части:

$$\{7;-4\} = \alpha\{3;2\} + \beta\{5;-1\};$$

$$\{7;-4\} = \{3\alpha;2\alpha\} + \{5\beta;-\beta\};$$

$$\{7;-4\} = \{3\alpha+5\beta;2\alpha-\beta\}.$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты. Следовательно, справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha+5\beta=7 \\ 2\alpha-\beta=-4 \end{cases}.$$

Решим её методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)-2\cdot5=-13;$$

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №4

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -26.$$

Отсюда: $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1;\quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2.$ Остаётся подставить найденные коэффициенты α и β в разложение вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Ответ: $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Решение задания №5

Для того, чтобы найти координаты вектора $\vec{c}$, вначале определим координаты векторов $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$: $2\vec{a} = \{12; -2; 6\}$, $3\vec{b} = \{12; 0; 9\}$, а затем вычтем из координат вектора $2\vec{a}$ соответствующие координаты вектора $3\vec{b}$:

$$\vec{c} = \{12; -2; 6\} - \{12; 0; 9\} = \\ = \{12 - 12; -2 - 0; 6 - 9\} = \{0; -2; -3\}.$$

Теперь найдём длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\vec{c} = \{0; -2; -3\}$, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$.

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №6

Раскроем скобки и воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a} = 0,\ \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi.$$

$$\left|(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{b}+3\vec{a})\right| = \left|2\vec{a}\times 2\vec{b}+2\vec{a}\times 3\vec{a}-\vec{b}\times 2\vec{b}-\vec{b}\times 3\vec{a}\right| =$$

$$= \left|4\vec{a}\times\vec{b}+0-0+3\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|7\vec{a}\times\vec{b}\right| =$$

$$= 7\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi = 7\cdot 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 14.$$

Ответ: 14.

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №7

Для решения используем формулу: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Найдём скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0.$ Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны и, следовательно, $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

Ответ: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

Пробный

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №8

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Воспользуемся формулой:

$$\overrightarrow{AB} = \{2-0; -1-1; 4-1\} = \{2; -2; 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{3-0; 2-1; 0-1\} = \{3; 1; -1\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{-1-0; 0-1; 0-1\} = \{-1; -1; -1\}.$$

Объём треугольной пирамиды $ABCD$ вычисляется по формуле: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Находим смешанное произведение:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} -$$

$$-(-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-8-6 = -18.$$

Отсюда, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|-18| = 3$ (куб. ед.).

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3$ (куб. ед.).

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3 4 5 6 7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №9

Уравнение на собственные значения имеет вид:

$$\det\left(\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}-3-\lambda & 5\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix} = 0;$$

$$(-3-\lambda)(6-\lambda) - 10 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 7.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 7$.
Вычислим координаты собственных векторов, отвечающих найденным собственным значениям.
1) При $\lambda = -4$:

$$\left(\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Данное матричное уравнение эквивалентно системе двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0\\ 2x_1 + 10x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0\\ x_1 + 5x_2 = 0\end{cases}.$$

Пробный

Осталось сделать

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

17-е октября 2016 года

Осталось 90 мин.

Перейти к заданию

1 2 3

4 5 6

7 8 9

ЗАВЕРШИТЬ

СОХРАНИТЬ

ЗАКРЫТЬ

Решение задания №9

Таким образом, $x_1 = -5x_2$. Положим $x_2 = c_1$, где c_1 – произвольная постоянная. Тогда $x_1 = -5c_1$ и, следовательно, собственный вектор $\mathbf{x_1}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = -4$, имеет вид: $\mathbf{x_1} = \{-5c_1; c_1\} = c_1\{-5; 1\}$ или $\mathbf{x_1} = c_1\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$.

2) При $\lambda = 7$ действуем аналогично:

$$\left(\begin{pmatrix}-3 & 5\\2 & 6\end{pmatrix} - 7\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-10x_1 + 5x_2 = 0\\2x_1 - x_2 = 0\end{cases}.$$

Таким образом, $x_2 = 2x_1$. Положим $x_1 = c_2$, где c_2 – произвольная постоянная. Тогда $x_2 = 2_2$ и, следовательно, собственный вектор $\mathbf{x_2}$, отвечающий собственному значению $\lambda_2 = 7$, имеет вид: $\mathbf{x_2} = \{c_2; 2c_2\} = c_2\{1; 2\}$ или $\mathbf{x_2} = c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1 = -4$, $\mathbf{x_1} = c_1\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 7$, $\mathbf{x_2} = c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;
$\lambda_1 + \lambda_2 = 3$.