Письмо автору

Содержание

◀◀

◀ ▶

▶▶

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Михеев А. В.

Немного об этой книге ...

Основное предназначение этого электронного учебного пособия — помочь студентам самостоятельно освоить программу раздела «Линейная и векторная алгебра» курса «Математика». Это пособие ни в коем случае не может заменить подробные печатные курсы высшей математики. Главная цель, которую преследовал автор — дать краткое и, в то же время полное, введение в основные понятия и задачи линейной и векторной алгебры. Пособие содержит много иллюстраций, примеров решения типовых задач, сведений из истории математики.

Много интересной, но не очень важной информации вынесено в аннотации, чтобы их увидеть — наведите курсор мыши на слово, отмеченное символом , и «щёлкните» по нему. Слева — панель навигации по документу. Смысл имеющихся там кнопочек не требует пояснений...

Надеюсь, это пособие окажется полезным для Вас.

Содержание

1 Матрицы и действия над ними

Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. При этом m задает число строк в таблице, а n — число столбцов.

Числа, образующие матрицу, называются её элементами. Положение каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i — номер строки, а j — номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Как видим, номера строк в матрице возрастают снизу вверх, а номера столбцов — слева направо.

Пример 1.1

Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 & 9 & 10 \\ 2{,}1 & -5{,}06 & -12 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ имеет размерность 2×5, т.е. она содержит 2 строки и 5 столбцов. $a_{14} = 9$ — элемент, стоящий на пересечении 1–ой строки и 4–го столбца; $a_{22} = -5{,}06$ — элемент, стоящий на пересечении 2–ой строки и 2–го столбца.

Матрица может состоять из одной строки, из одного столбца и даже из одного элемента. Если все элементы матрицы равны нулю, то её называют *нулевой* и обозначают символом O.

Если число столбцов матрицы равно числу строк: $m = n$, то матрица называется квадратной n–го порядка.

Линия, вдоль которой в квадратной матрице стоят элементы с равными номерами строк и столбцов, обычно называют главной диагональю квадратной матрицы.

Квадратная матрица, у которой на главной диагонали находятся единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной.

Т.е. единичная матрица выглядит так:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

В общем случае, квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, называется *диагональной*.

Матрица (*лат.* matrix — «матка», «источник», «начало») — важнейшее понятие в современной математике. Впервые появилось в работах Сильвестра и Кэли.

Важнейшими операциями над матрицами являются:

- сложение (вычитание) матриц,
- умножение матрицы на число,
- умножение одной матрицы на другую,
- транспонирование.

Операции сложения и вычитания матриц выполняются поэлементно и применимы лишь к матрицам одинаковой размерности.

Суммой (разностью) матриц A и B, имеющих одинаковую размерность, является матрица C, той же размерности, элементы которой есть сумма (разность) соответствующих элементов исходных матриц: $C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Операция умножения матрицы на произвольное вещественное число тоже выполняется поэлементно, но применима к любым матрицам.

Произведением произвольной матрицы A на вещественное число λ является матрица C, той же размерности, что и A, элементы которой есть произведение соответствующих элементов исходной матрицы на число λ: $C = \lambda \cdot A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

В приведенных выше определениях использовался символ «$\Leftrightarrow$», называемый символом эквивалентности. Математическое выражение $\alpha \Leftrightarrow \beta$ читается так: «α эквивалентно β» или «α истинно тогда и только тогда, когда истинно β».

Перечислим основные свойства операций сложения матриц и умножения матриц на вещественные числа:

- **Коммутативность:** $A + B = B + A$.
- **Ассоциативность:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Дистрибутивность:** $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$.

Нулевая матрица O относительно операции сложения матриц обладает теми же свойствами, что и число 0 относительно операции сложения вещественных чисел. Это значит, что какова бы ни была матрица A, справедливы следующие равенства: $A + O = O + A = A$. В этих равенствах размерности матриц A и O должны быть равны.

Пример 1.2

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу $4A - 3B$.

Решение.

$$4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 \\ 36 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -27 & 9 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4A - 3B = \begin{pmatrix} 12 & -16 & 4 \\ 36 & 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -27 & 9 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ 42 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц можно вычислить лишь в том случае, когда количество столбцов в первой матрице совпадает с количеством строк во второй.

Произведением матрицы A, имеющей размерность $m \times p$, на матрицу B, имеющей размерность $p \times n$, называется матрица C, размерности $m \times n$: $C = A \cdot B$, если элементы матрицы C могут быть вычислены по следующей формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj}. \qquad (1.3)$$

Символ $\sum_{k=1}^{p}$, использованный в определении, означает сумму по элементам некоторого упорядоченного множества чисел. Что именно нужно суммировать, написано правее знака $\sum$. При этом номера k элементов, включаемых в сумму, принимают значения $1, 2, \ldots, p$.

Свойства операции умножения матриц:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ — произведение матриц не коммутативно;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ — произведение матриц ассоциативно;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ — операция умножения матриц дистрибутивна.

Единичная матрица E относительно операции умножения квадратных матриц обладает теми же свойствами, что и число 1 относительно операции умножения вещественных чисел. Это значит, что какова бы ни была квадратная матрица A, справедливы следующие равенства: $A \cdot E = E \cdot A = A$. Правда нужно помнить, что в этих равенствах размерности матриц A и E должны быть равны.

Операция *транспонирования* может быть применена к любым матрицам. Она состоит в замене строк матрицы на её столбцы, т.е. после транспонирования первый столбец исходной матрицы становится первой строкой новой матрицы, второй столбец становится второй строкой и т.д. Если матрица A — исходная, то транспонированная матрица обозначается символом A^T.

Письмо автору

Содержание

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

Пример 1.3

Найти матрицы A^2, $B \cdot C$ и B^T, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) $$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}.$$

2) $$B \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) $$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Письмо автору

Содержание

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

2 Определители и их свойства

Определителем второго порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число, определяемое по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.1}$$

Термин «определитель» впервые появился в начале XIX века в работах Коши. Однако первым понятие определителя, применительно к системам линейных алгебраических уравнений, стал использовать в 1693 году Лейбниц. Современное обозначение определителя: таблица чисел в вертикальных прямых скобках, ввёл Кэли.

Определителем третьего порядка, соответствующим квадратной матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, называется число, определяемое по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) вычисления определителя третьего порядка кажется сложной для запоминания. Однако можно предложить правило (так называемое *правило Саррюса*), с помощью которого эту формулу можно воспроизвести без особых усилий. Возьмем определитель третьего порядка и выпишем справа от него еще раз первый и второй столбцы. В полученной таким образом матрице выделим шесть диагоналей: три главных и три побочных.

$$\begin{array}{|ccc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
\end{array}$$

Тройки чисел, образующие главные диагонали и отмеченные на рисунке красными линиями, входят в формулу для определителя третьего порядка со знаком «плюс». Тройки чисел, образующие побочные диагонали (отмечены на рисунке синими линиями), входят в эту формулу со знаком «минус».

Свойства определителей рассмотрим без доказательств (доказательства могут быть найдены в [**?**]).

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если все его строки заменить на соответствующие столбцы. Это значит, что для произвольной квадратной матрицы A: $\det A = \det A^{\top}$.

Свойство 2. При перестановке любых двух строк (или двух столбцов) определителя, его знак меняется на противоположный.

Свойство 3. Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны (в частности, равны), то такой определитель равен нулю.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 5. Общий множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя можно вынести за знак этого определителя.

Свойство 6. Если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на произвольное число, не равное нулю, то величина определителя не изменится.

Разумеется все перечисленные свойства справедливы для определителей любого порядка.

Существует еще одно свойство определителей, но для его формулировки нам потребуются два новых понятия.

Вернемся к формуле (2.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Сформируем в правой части этого равенства три группы из слагаемых, содержащих элементы первой строки определителя: a_{11}, a_{12} и

a_{13}, и вынесем в каждой группе соответствующий элемент за скобку. В результате получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + \\ + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках после элемента a_{11}, называется его *алгебраическим дополнением* и обозначается символом A_{11}, т. е. $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$. Аналогично, $A_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{12}, $A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{13}. С учетом этих новых обозначений формула для вычисления определителя третьего порядка принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) называется разложением определителя по элементам первой строки. Аналогичные разложения можно записать для элементов любой строки и любого столбца определителя.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из данного определителя вычёркиванием i-й строки и j-го столбца, т. е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Письмо автору
Содержание
◀◀
◀ ▶
▶▶
Вернуться
На страницу...
Во весь экран
Закрыть
Выход

Пример 2.1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

— минор элемента a_{11}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}$$

— минор элемента a_{32}

Минор и алгебраическое дополнение элемента определителя связаны друг с другом простым соотношением. Нетрудно убедиться в справедливости следующего правила:

> Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя и минор M_{ij} этого элемента связаны равенством
>
> $$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2.4}$$

Данное равенство можно рассматривать как определение алгебраического дополнения.

Теперь мы готовы сформулировать последнее свойство определителей.

Свойство 7.

- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов этой строки (столбца) равна величине этого определителя.
- Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

3 Системы линейных алгебраических уравнений и их решение методом Крамера

Будем называть системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными совокупность уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, подлежащие определению. Коэффициенты при неизвестных образуют матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

называемую *основной матрицей системы*. Правые части уравнений системы (3.1), а также неизвестные, образуют два вектор-столбца:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

которые называются *вектором-столбцом свободных членов* и *вектором-столбцом неизвестных*, соответственно.

Используя эти обозначения и определение произведения матриц (1.3), можно записать систему уравнений (3.1) в матричной форме:

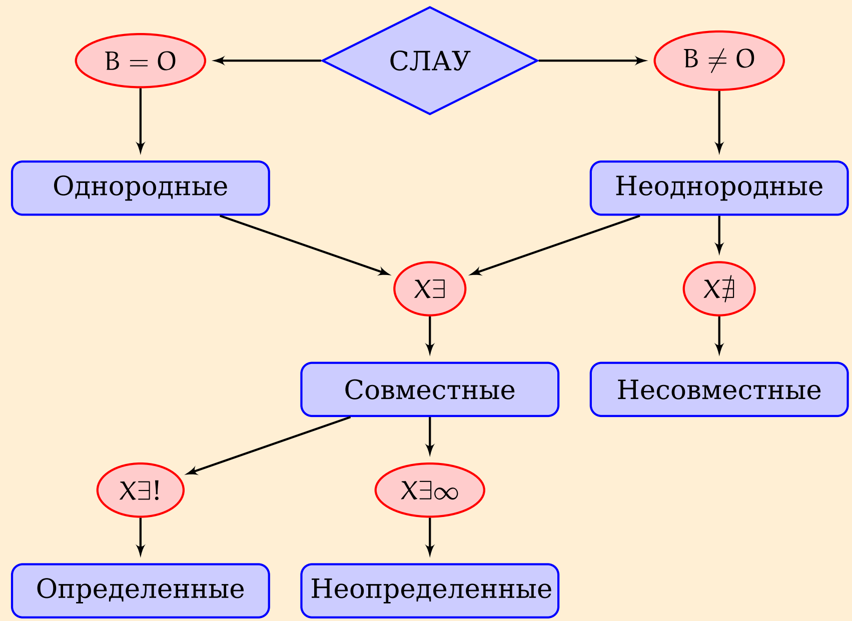
$$A \cdot X = B.$$

Далее приведена диаграмма, демонстрирующая классификацию систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). На этой диаграмме используются следующие обозначения:

- $X\exists$ — «X существует»;
- $X\nexists$ — «X не существует»;
- $X\exists!$ — «X существует и единственен»;

Письмо автору
Содержание
Вернуться
На страницу...
Во весь экран
Закрыть
Выход

- $X\exists\infty$ — «существует бесконечно много X».



> Решить систему линейных алгебраических уравнений — это значит найти такие значения неизвестных $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_n = x_n^*$, которые после подстановки в (3.1) обращают каждое уравнение этой системы в тождество.

В случае, если $m = n$, т. е. число уравнений равно числу неизвестных, и $\det A \neq 0$ решение системы линейных алгебраических уравнений (3.1) единственно и может быть найдено методом Крамера. Рассмотрим этот метод на примере системы из трёх уравнений на три неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

В методе Крамера необходимо вычислить несколько определителей:

1. Главный определитель системы: $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

2. Определители неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

После этого решение СЛАУ может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{3.2}$$

Пример 3.1

Решить методом Крамера: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -2 \end{cases}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -32 + 36 + 78 = 82.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 10 & -5 & 1 \\ -2 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -32 + 136 + 60 = 164.$$

Аналогично: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -82, \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$ 82. Отсюда по формулам Крамера (3.2) находим:

$$x_1 = \frac{164}{82} = 2, x_2 = \frac{-82}{82} = -1, x_3 = \frac{82}{82} = 1.$$

Ответ: $(2; -1; 1)$.

4 Векторная алгебра

4.1 Векторы и линейные операции над ними

Вектором называется направленный отрезок прямой.

Для обозначения векторов используются символы $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$, где точка A — начало вектора, а точка B — конец вектора.

Длиной вектора (обозначается $|\vec{a}|$ или $\left|\overrightarrow{AB}\right|$) называется расстояние между его началом и концом. Нулевым называется вектор, длина которого равна нулю, а направление не определено.

Векторы равны, если равны их длины, а направления совпадают.

Коллинеарными называют векторы, расположенные на параллельных прямых (в частности, на одной прямой), а компланарными — векторы, расположенные в параллельных плоскостях (в частности, в одной плоскости).

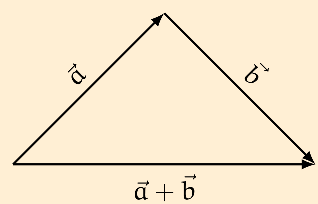


Рис. 1: Определение суммы векторов с помощью правила треугольника

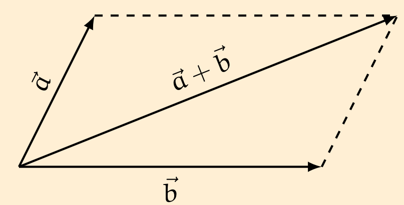


Рис. 2: Определение суммы векторов с помощью правила параллелограмма

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что конец вектора $\vec{a}$ совмещен с началом $\vec{b}$, называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора

$\vec{a}$ с концом $\vec{b}$. Это — так называемое правило треугольника (рис. 1). Кроме него, для вычисления суммы векторов, есть ещё правило параллелограмма, применение которого проиллюстрировано на рисунке (рис. 2).

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, для которого $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ (см. рис. 3).

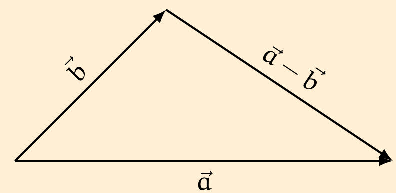


Рис. 3: Определение разности векторов

Произведением $\lambda\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b}$ такой, что:

1. $\left|\vec{b}\right| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;
2. $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$ и направлен в ту же сторону при $\lambda > 0$ $(a \vec{\upuparrows} \vec{b})$ и в противоположную сторону — при $\lambda < 0$ $(\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b})$.

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, называется вектор

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{a}_k, \qquad (4.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные действительные числа.

Письмо автору
Содержание
Вернуться
На страницу...
Во весь экран
Закрыть
Выход

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — линейно зависимы, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, для которых $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2 \neq 0$, а линейная комбинация (4.1) равна нулю. В противном случае эти векторы называются линейно независимыми.

Базисом на плоскости и в пространстве называется максимальная линейно независимая на плоскости или в пространстве система векторов (добавление к системе еще одного вектора делает ее линейно зависимой).

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис в пространстве, тогда любой вектор $\vec{a}$ пространства разлагается единственным образом по базисным векторам:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Коэффициенты этого разложения называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$.

Пусть $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$, $\vec{b} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$. Линейные операции над векторами в координатном представлении имеют вид:

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{\alpha_1 \pm \beta_1; \alpha_2 \pm \beta_2; \alpha_3 \pm \beta_3\}$;

2. $\lambda\vec{a} = \{\lambda\alpha_1; \lambda\alpha_2; \lambda\alpha_3\}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$.

4.2 Проекция вектора на ось

Осью называется направленная прямая.

Предположим, в пространстве заданы вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось l. Пусть A_l — проекция точки A на ось l, т.е. основание перпендикуляра, опущенного из точки A на эту ось, B_l — проекция точки B на ось l. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется модуль вектора $\overrightarrow{A_lB_l}$, взятый со знаком «$+$», если вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ направлен также, как и ось l, и — со знаком «$-$», если вектор $\overrightarrow{A_lB_l}$ направлен противоположно оси l. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается через ${}_l\overrightarrow{AB}$ и вычисляется по формуле:

$$ {}_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi, \tag{4.2}$$

где φ — угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l (см. рис. 4).

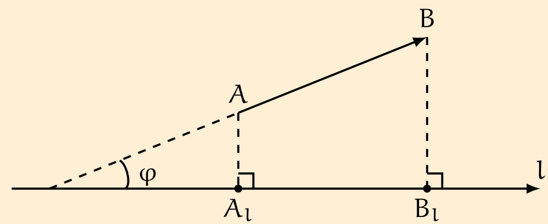


Рис. 4: Проекция вектора на ось

Проекция вектора на ось обладает очевидными свойствами:

1. ${}_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = {}_l\vec{a} + {}_l\vec{b}$;
2. ${}_l\left(k\vec{a}\right) = k\,{}_l\vec{a}$.

4.3 Прямоугольная система координат

Прямоугольной (декартовой) системой координат называется совокупность точки O и ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т.е. такого базиса, в котором векторы имеют длины, равные 1, и взаимно перпендикулярны. Три взаимно перпендикулярные прямые в направлении базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называются осями координат: осью абсцисс, ординат и аппликат, соответственно.

Произвольный вектор $\vec{a}$ пространства разлагается единственным образом по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Длина вектора $\vec{a}$ в прямоугольной системе координат равна:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{4.3}$$

Декартовы координаты вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ совпадают с его проекциями на соответствующие оси координат:

$$a_x = {}_x\vec{a}, \quad a_y = {}_y\vec{a}, \quad a_z = {}_z\vec{a}.$$

Проекции вектора на оси координат могут быть вычислены по формулам:

$${}_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad {}_y\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta, \quad {}_z\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma,$$

где α, β, γ — углы наклона вектора $\vec{a}$ к соответствующим осям координат. Косинусы этих углов: $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, называемые направляющими косинусами, выражаются через декартовы координаты с помощью формул:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{4.4}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 4.1

Найти длину вектора $\vec{a} = \{1; 2; -3\}$ и его направляющие косинусы.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$. Отсюда с помощью формул (4.4) находим:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}.$$

Пусть заданы векторы $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$. Если эти векторы коллинеарны, то, в соответствии с определением произведения вектора на число, они отличаются друг от друга числовым множителем, т.е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Откуда получаем:

$$\{b_x; b_y; b_z\} = \lambda\{a_x; a_y; a_z\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

Пример 4.2

Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = \{2; \alpha; 1\}$ и $\vec{b} = \{3; -6; \beta\}$ коллинеарны.

Решение. Координаты данных векторов пропорциональны: $\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{1}$. Отсюда находим, что $\alpha = -4$, $\beta = \frac{3}{2}$. При этих значениях α и β векторы коллинеарны.

Если заданы точки $A\,(x_1, y_1, z_1)$ и $B\,(x_2, y_2, z_2)$, то декартовы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \tag{4.5}$$

4.4 Цилиндрическая и сферическая системы координат

Часто бывает удобно задавать положение точек в пространстве с помощью не прямоугольных, а криволинейных координат. Наиболее употребительными из этих систем координат являются цилиндрические и сферические координаты.

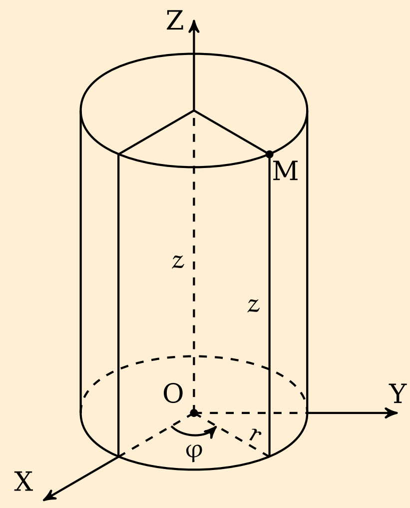


Рис. 5: Цилиндрическая система координат

Цилиндрическими координатами точки M называется тройка чисел $(r;\varphi;z)$ (см. рис. 5), где координата r есть расстояние от точки M до оси OZ; φ — угол, образованный плоскостью, проходящей через ось OZ и точку M, с плоскостью XOZ; z — обычная аппликата точки M. При этом φ может меняться от 0 до 2π, а r — от 0 до $+\infty$. Прямоугольные координаты точки M связаны с цилиндрическими с помощью соотношений:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

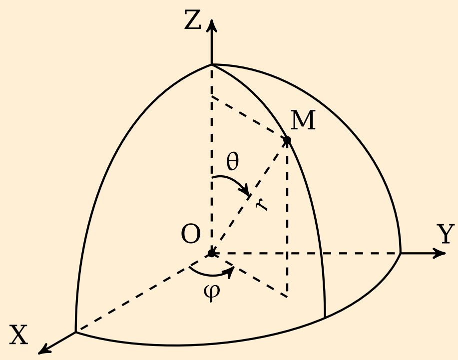


Рис. 6: Сферическая система координат

Сферическими координатами точки M называется тройка чисел $(r;\varphi;\theta)$ (см. рис. 6), где координата r есть расстояние от точки M до начала координат O; φ — угол, который полуплоскость, проходящая через ось OZ и точку M, образует с плоскостью XOZ; θ — угол, который отрезок OM образует с положительным направлением оси OZ. При этом, r может изменяться от 0 до $+\infty$, угол φ отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления оси OX и может меняться от 0 до 2π, угол θ отсчитывается от положительного направления оси OZ и может изменяться 0 до π. Прямоугольные координаты точки M связаны со сферическими с помощью соотношений:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

4.5 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi, \tag{4.6}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ через координаты векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{4.7}$$

Свойства скалярного произведения

1. Переместительный закон: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. Сочетательный закон: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
3. Распределительный закон: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. Скалярный квадрат $\vec{a}^2$ вектора $\vec{a}$ равен квадрату его длины: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

5. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения.

Основные приложения скалярного произведения

1. Вычисление работы E постоянной (по модулю и направлению) силы $\vec{F}$ на пути $\overrightarrow{AB}$: $E = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. Вычисление угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (см. формулу (4.6)).
3. Вычисление проекции одного вектора на другой:

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}. \tag{4.8}$$

Пример 4.3

Даны $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Вычислить $\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$.

Решение.

$$\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 =$$
$$= 3\,|\vec{a}|^2 + 4\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi - 4|\vec{b}|^2 = 27 - 24 - 64 = -61.$$

Пример 4.4

Даны $\vec{a} = \{5; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; 3; 3\}$. Проверить, являются ли эти векторы перпендикулярными.

Решение. Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 3 = -5 + 6 - 3 = -2.$$

Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \neq 0$, то эти векторы не перпендикулярны.

4.6 Векторное произведение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый следующим образом (см. рис. 7):

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку, т.е. кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$, наблюдаемый с конца вектора $\vec{c}$, происходит против часовой стрелки.

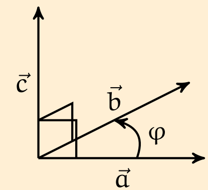


Рис. 7: Определение векторного произведения векторов

Векторное произведение обозначается следующими символами $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ через координаты векторов $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ можно записать в виде определителя:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Свойства и применения векторного произведения

1. Антиперeместительный закон: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. Сочетательный закон: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.
3. Распределительный закон: $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
4. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле: $S_{Pr} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$; площадь треугольника:

$$S_{\blacktriangle} = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \tag{4.10}$$

5. Необходимым и достаточным условием коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их векторного произведения.

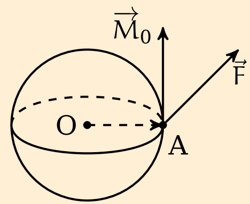


Рис. 8: Момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O

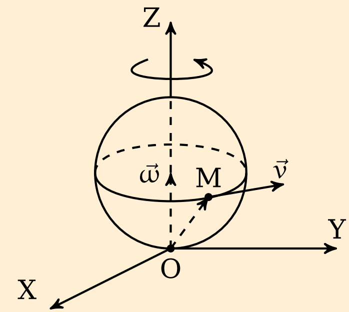


Рис. 9: Линейная скорость $\vec{v}$ точки M твёрдого тела, вращающегося вокруг оси OZ

6. Момент $\overrightarrow{M}_0$ силы $\vec{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O вычисляется по формуле:

$$\overrightarrow{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ (рис. 8).

7. Линейная скорость $\vec{v}$ точки M твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, также может быть вычислена с помощью векторного произведения:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ — радиус-вектор точки M; вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения (рис. 9).

Пример 4.5

Даны $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Найти $\left|\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\right|$.

Решение.

$$\left|\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\right| = \left|3\vec{a} \times \vec{a} + 6\vec{a} \times \vec{b} - 2\vec{b} \times \vec{a} - \right.$$
$$\left. -4\vec{b} \times \vec{b}\right| = \left|6\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{a} \times \vec{b}\right| = 8\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 12\sqrt{3}.$$

Пример 4.6

Сила $\vec{F} = \{1; 1; 1\}$ приложена к точке $A(0; 2; -2)$. Найти момент этой силы относительно точки $O(2; -1; 3)$.

Решение. Так как $\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r} = \overrightarrow{OA} = \{-2; 3; -5\}$. Получаем:

$$\overrightarrow{M_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Письмо автору

Содержание

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

4.7 Смешанное (векторно-скалярное) произведение трех векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Смешанное произведение обозначается символом $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ через координаты векторов, его образующих: $\vec{a}=\{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x; b_y; b_z\}$ и $\vec{c}=\{c_x; c_y; c_z\}$ можно записать в виде определителя:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Свойства смешанного произведения

1. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$.
2. При перестановке в смешанном произведении двух соседних векторов его знак меняется на противоположный: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}$.
3. При круговой перестановке векторов смешанное произведение не меняется: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$.
4. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, может быть вычислен с помощью смешанного произведения: $V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$. Отсюда следует, что объём треугольной пирамиды, построенной на тех же векторах, равен:

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|. \tag{4.12}$$

5. Необходимым и достаточным условием компланарности трех ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$.

Пример 4.7

Даны $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 3\}$ и $\vec{c} = \{1; 1; 5\}$. Проверить, являются ли векторы компланарными.

Решение. Найдем смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (см. формулу (4.11)).

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (0-3) -$$

$$-1 \cdot (-5-3) - 1 \cdot (-1-0) = -9 + 8 + 1 = 0.$$

Так как $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$, то векторы компланарны.

4.8 Линейное (векторное) пространство

Совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданных в определённом порядке, называется n-мерным вектором. Сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора.

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ и $\mathbf{y} = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$ — два n-мерных вектора. Основными операциями над n-мерными векторами являются:

1. Сложение: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n\}$.

Письмо автору
Содержание
◀◀
◀ ▶
▶▶
Вернуться
На страницу...
Во весь экран
Закрыть
Выход

2. Умножение на число: $\lambda\mathbf{x} = \{\lambda x_1; \lambda x_2; \ldots; \lambda x_n\}$.

Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются равными, если равны их соответствующие координаты:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n.$$

Вектор называется нулевым, если все его координаты равны нулю: $\mathbf{0} = \{0; 0; \ldots; 0\}$.

Вектор $-\mathbf{x}$ называется противоположным вектору $\mathbf{x}$, если $-\mathbf{x} = \{-x_1; -x_2; \ldots; -$

Операции сложения n-мерных векторов и умножения этих векторов на числа обладают свойствами:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
4. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;
6. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
7. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;

где λ, μ — произвольные вещественные числа, а $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ — произвольные n-мерные векторы.

Множество всех n-мерных векторов, для которых установлены операции сложения и умножения на число, называется n-мерным векторным (линейным) пространством $\mathbf{R}^n$.

Система n-мерных векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_s$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{x}_s = 0.$$

В противном случае эта система векторов называется линейно независимой.

Пусть Q — произвольное подмножество n-мерных векторов пространства $\mathbf{R}^n$. Система векторов $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_s\}$ называется базисом в Q, если выполняются следующие условия:

1. $\mathbf{e}_k \in Q, \quad k = 1, 2, \ldots, s;$
2. система $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_s\}$ линейно независима;
3. для любого вектора $\mathbf{x} \in Q$ найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, такие, что $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{e}_k$.

При этом формула $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \mathbf{e}_k$ называется разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{B}$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются координатами этого вектора в базисе $\mathbf{B}$.

Если зафиксировать некоторый базис $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, тогда любому вектору $\mathbf{x}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие столбец его координат в этом базисе:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4.9 Линейные операторы. Собственные значения и собственные векторы

Линейным оператором в линейном n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ называется отображение $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ пространства $\mathbf{R}^n$ в себя, обладающее свойствами:

1. $A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A \mathbf{x}$;
2. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.

Если A — линейный оператор в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — фиксированный базис, то векторы $A\mathbf{e}_k$ могут быть разложены по базису $\mathbf{B}$:

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Матрица коэффициентов этого разложения

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

называется матрицей линейного оператора A в базисе $\mathbf{B}$. Столбцы этой матрицы в точности равны вектор-столбцам (4.13).

Если число λ и вектор $\mathbf{x}$ являются решениями уравнения

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \tag{4.15}$$

то число λ называется собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$, а вектор $\mathbf{x}$ — собственным вектором линейного оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ. Поскольку при фиксированном базисе в $\mathbf{R}^n$ линейный оператор полностью определяется своей матрицей (4.14), то допустимо говорить, что число λ и вектор $\mathbf{x}$ являются собственным значением и собственным вектором матрицы линейного оператора. Более того, в линейном (векторном) пространстве $\mathbf{R}^n$ равенство (4.15) эквивалентно матричному уравнению

$$(A - \lambda E)\,\mathbf{x} = 0. \tag{4.16}$$

Это уравнение, как следует из (**??**), имеет ненулевое решение только если

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{4.17}$$

т.е. если не существует обратная матрица $(A - \lambda E)^{-1}$.

Уравнение (4.17) представляет собой алгебраическое уравнение n-ой степени относительно λ. Его решениями являются все собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Для отыскания собственных векторов $\mathbf{x}$, соответствующих найденным из (4.17) собственным значениям λ, необходимо при этих λ, найти ненулевые решения системы линейных однородных алгебраических уравнений (4.16).

Пример нахождения собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы 2-го порядка приведён на стр. 54.

5 Примеры решения типовых задач

Задание № 1

Найти решение $(x_0; y_0; z_0)$ системы $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 12 \\ x + 2y - z = -1 \\ 5x + 6y - 3z = 1 \end{cases}$ и вычислить $2x_0 + 3z_0 - y_0$.

Решение

Решим систему уравнений тремя способами: методом Крамера, методом Гаусса и матричным методом.

Метод Крамера

Вычислим главный определитель системы Δ. Для этого, используя формулу (**??**), заполним коэффициентами перед неизвестными x, y, z, соответственно, первый, второй и третий столбцы определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{определители 2-го порядка вычислим}$$
$$\text{с помощью формулы } (\mathbf{??})\} =$$

$$= 2\cdot(2\cdot(-3)-(-1)\cdot 6)+3\cdot(1\cdot(-3)-(-1)\cdot 5)+$$
$$+5\cdot(1\cdot 6-2\cdot 5)=$$
$$=2\cdot(-6+6)+3\cdot(-3+5)+5\cdot(6-10)=0+6-20=-14.$$

Далее вычислим определитель Δ_1 неизвестной x, который получается из главного определителя Δ путём замены первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \{\text{раскладываем по первой строке}\} =$$
$$= 12\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$
$$=12\cdot(-6+6)+3\cdot(3+1)+5\cdot(-6-2)=0+12-40=-28.$$

Следовательно, по формулам Крамера (**??**), неизвестная x равна: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2$.

Затем, вычислим определитель Δ_2 неизвестной y, который получается из главного определителя Δ путём замены второго столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 12 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$=2\cdot(3+1)-12\cdot(-3+5)+5\cdot(1+5)=8-24+30=14.$$

Следовательно, по формулам Крамера (**??**), неизвестная y равна: $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1$.

Аналогично находим неизвестную z:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 12\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2+6) + 3 \cdot (1+5) + 12 \cdot (6-10) = 16 + 18 - 48 = -14.$$

Неизвестная z равна: $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1$.

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы, используя формулу (**??**):

$$(A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Преобразуем полученную матрицу к верхнетреугольному виду: под главной диагональю элементы матрицы равны нулю. Для удобства преобразования элемент a_{11} (стоящий в первой строке и первом столбце) сделаем равным единице. Этого можно добиться, разделив все элементы первой строки на два, тогда $a_{11} = 1$, но при этом в строке появятся дробные числа, что усложняет дальнейшие преобразования. Поэтому воспользуемся другим элементарным преобразованием расширенной матрицы: поменяем местами первую и вторую строки:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 12 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

В первом столбце под элементом $a_{11} = 1$ нужно получить ноль. Для этого умножим все элементы первой строки на (-2) (элемент стоящий во второй строке первом столбце, взятый с обратным знаком) и прибавим их к соответствующим элементам второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2+1\cdot(-2) & -3+2\cdot(-2) & 5+(-1)\cdot(-2) & 12+(-1)\cdot(-2) \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Для получения нуля на месте элемента $a_{13} = 5$, умножим все элементы первой строки на (-5) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 5+1\cdot(-5) & 6+2\cdot(-5) & -3+(-1)\cdot(-5) & 1+(-1)\cdot(-5) \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 7 & 14 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Под главной диагональю остался один элемент, не равный нулю: $a_{32} = -4$. Для того, чтобы получить в этой позиции ноль, вначале создадим единицу на месте элемента $a_{22} = -7$. С этой целью разделим все элементы второй строки на (-7):

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Далее умножим все элементы второй строки на 4 (элемент, стоящий под элементом a_{22} на пересечении третьей строки и второго столбца, взятый с обратным знаком) и прибавим к соответствующим элементам третьей строки:

$$(A/B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -4+1\cdot 4 & 2+(-1)\cdot 4 & 6-2\cdot 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Получили верхнетреугольную матрицу.

Применим обратный ход метода Гаусса для нахождения неизвестных. Последней строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $-2z = -2$.

Все элементы верхнетреугольной матрицы — это коэффициенты при неизвестных: элементы первого столбца — коэффициенты при x, элементы второго столбца — при y, третьего — при z. Таким образом, число $a_{33} = -2$ является коэффициентом при неизвестной z. Вертикальная черта символизирует знак равенства.

Из этого уравнения находим: $z = \frac{-2}{-2} = 1$.

Второй строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot y - 1 \cdot z = -2$. Подставим в него найденное значение $z = 1$: $1 \cdot y - 1 \cdot 1 = -2$. Отсюда: $y = -2 + 1 = -1$.

Наконец, первой строке верхнетреугольной матрицы соответствует уравнение: $1 \cdot x + 2 \cdot y - 1 \cdot z = -1$. Подставим в него вместо y и z найденные значения: $1 \cdot x + 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -1$. Откуда: $x = -1 + 2 + 1 = 2$.

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Матричный метод

Главная матрица системы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Её определитель, как мы выяснили при использовании метода Крамера, не равен нулю: $\det A = \Delta = -14$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} существует. Для её нахождения вычислим алгебраические дополнения элементов определителя $\det A$:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Теперь по формуле (**??**) находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{pmatrix} 0 & 21 & -7 \\ -2 & -31 & 7 \\ -4 & -27 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном примере $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, то, применяя формулы (**??**) и (**??**), найдём решение системы уравнений:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{7} & \frac{31}{14} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{27}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{12}{7} - \frac{31}{14} - \frac{1}{2} \\ \frac{24}{7} - \frac{27}{14} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение системы имеет вид: $(2; -1; 1)$.

Остаётся выполнить само тестовое задание, т.е. найти значение выражения $2x_0 + 3z_0 - y_0$. Так как $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, $z_0 = 1$, то получаем $2x_0 + 3z_0 - y_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - (-1) = 8$.

Ответ: 8.

Задание № 2

Вариант № 1

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. Найти $2A + 3B$.

Решение

Умножим все элементы матрицы A на 2, а все элементы матрицы B — на 3.

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -3 & 21 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдём сумму матриц $2A$ и $3B$. Для этого прибавим к элементам матрицы $2A$ соответствующие элементы матрицы $3B$:

$$2A+3B=\begin{pmatrix} 4+9 & -2+0 & 6+6 \\ 8+(-3) & 10+21 & 2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 13 & -2 & 12 \\ 5 & 31 & 5 \end{pmatrix}$.

Вариант № 2

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $A\cdot B$.

Решение

Новая матрица AB будет иметь столько же строк сколько и матрица A и столько же столбцов сколько имеет матрица B. Таким образом, в нашем случае, матрица $A\cdot B$ состоит из 2-х строк и 2-х столбцов.

Для получения элемента, стоящего на пересечении первой строки и первого столбца матрицы $A\cdot B$, найдём сумму произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы первого столбца матрицы B.

Для получения элемента, стоящего на пересечении первой строки и второго столбца матрицы $A\cdot B$, найдём сумму произведений элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы второго столбца матрицы B.

Аналогично находим оставшиеся элементы (см. формулу (**??**)):

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + 6\cdot(-1) & 3\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 6\cdot 3 \\ 5\cdot 5 + 4\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 5\cdot 1 + 4\cdot 0 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 31 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 31 & 11 \end{pmatrix}$.

Задание № 3

Найти элемент матрицы, обратной к $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца.

Решение

Обратную матрицу можно найти только для невырожденных квадратных матриц, т.е. для таких квадратных матриц, определитель которых не равен нулю:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-5)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(0+12) + 5(1-20) + 6(-3-0) = 36 - 95 - 18 = -77.$$

Так как $\det A \neq 0$, следовательно, обратная матрица A^{-1} существует.

Найдём элемент обратной матрицы, расположенный на пересечении третьей строки и второго столбца. Для этого воспользуемся формулой (см. (**??**)):

$$\left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{A_{23}}{\det A},$$

где A_{23} — алгебраическое дополнение элемента a_{23} матрицы A:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(-9+25) = -16.$$

Таким образом, искомый элемент обратной матрицы равен:

$$\left(A^{-1}\right)_{32} = \frac{-16}{-77} = \frac{16}{77}.$$

Ответ: $\frac{16}{77}$.

Задание № 4

Найти разложение вектора $\vec{c} = \{7; -4\}$ по базису векторов $\vec{a} = \{3; 2\}$ и $\vec{b} = \{5; -1\}$.

Решение

Разложить вектор $\vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ — это значит представить его в виде: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов α и β подставим в эту формулу координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а затем выполним действия над векторами в правой части:

$$\{7; -4\} = \alpha\{3; 2\} + \beta\{5; -1\};$$

$$\{7; -4\} = \{3\alpha; 2\alpha\} + \{5\beta; -\beta\};$$

$$\{7; -4\} = \{3\alpha + 5\beta; 2\alpha - \beta\}.$$

Два вектора равны, если равны их соответствующие координаты. Следовательно, справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 7 \\ 2\alpha - \beta = -4 \end{cases}.$$

Решим её методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 = -13;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 13; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -26.$$

Отсюда: $\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1;\quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$. Остаётся подставить найденные коэффициенты α и β в разложение вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = -\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Ответ: $\vec{c} = -\vec{a} + 2\vec{b}$.

Задание № 5

Найти координаты и длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, где $\vec{a} = \{6; -1; 3\}$, $\vec{b} = \{4; 0; 3\}$.

Решение

Для того, чтобы найти координаты вектора $\vec{c}$, вначале определим координаты векторов $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$: $2\vec{a} = \{12; -2; 6\}$, $3\vec{b} = \{12; 0; 9\}$, а затем вычтем из координат вектора $2\vec{a}$ соответствующие координаты вектора $3\vec{b}$:

$$\vec{c} = \{12; -2; 6\} - \{12; 0; 9\} = \{12 - 12; -2 - 0; 6 - 9\} = \{0; -2; -3\}.$$

Теперь, с помощью формулы (4.3), найдём длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}\,| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\vec{c} = \{0; -2; -3\}$, $|\vec{c}\,| = \sqrt{13}$.

Задание № 6

Вариант № 1

Найти проекцию вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ на вектор $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение

Для решения используем формулу (4.8): $_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$, используя формулу (4.7): $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3 + (-4)\cdot 1 + 1\cdot(-2) = 0$. Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны и, следовательно, $_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

Ответ: $_{\vec{b}}\vec{a} = 0$.

Вариант № 2

Пусть $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}\,| = 1$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти значение выражения $\left|(2\vec{a} - \vec{b}\,) \times (2\vec{b} + 3\vec{a}\,)\right|$.

Решение

Раскроем скобки и воспользуемся следующими свойствами векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = 0,\ \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi.$$

$$\left|(2\vec{a} - \vec{b}\,) \times (2\vec{b} + 3\vec{a}\,)\right| = \left|2\vec{a} \times 2\vec{b} + 2\vec{a} \times 3\vec{a} - \vec{b} \times 2\vec{b} - \vec{b} \times 3\vec{a}\right| =$$

$$= \left|4\vec{a} \times \vec{b} + 0 - 0 + 3\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|7\vec{a} \times \vec{b}\right| =$$

$$= 7\,|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} = 14.$$

Ответ: 14.

Задание № 7

Вариант № 1

Найти площадь треугольника ABC, если $A(2;0;4)$, $B(-3;-1;2)$, $C(5;-3;0)$.

Решение

С помощью (4.5) найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{-3-2; -1-0; 2-4\} = \{-5; -1; -2\};$$

$$\overrightarrow{AC} = \{5-2; -3-0; 0-4\} = \{3; -3; -4\}.$$

Площадь треугольника ABC вычисляется по формуле (см. (4.10)): $S_\blacktriangle = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле (см. (4.9)):

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - $$
$$- \vec{j}\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 26\vec{j} + 18\vec{k}.$$

Теперь вычислим длину вектора $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-26)^2 + 18^2} =$$
$$= \sqrt{4 + 676 + 324} = \sqrt{1004} = 2\sqrt{251}.$$

Отсюда: $S_\blacktriangle = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{251} = \sqrt{251}$ (кв. ед.).

Ответ: $S_\blacktriangle = \sqrt{251}$ (кв. ед.).

Письмо автору

Содержание

Вернуться

На страницу...

Во весь экран

Закрыть

Выход

Вариант № 2

Найти координаты вектора $(\vec{a}+\vec{b}\,)\times(2\vec{a}-3\vec{b}\,)$, если $\vec{a}=\{1;0;-1\}$, $\vec{b}=\{3;-2;4\}$.

Решение

Найдём координаты векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $2\vec{a}-3\vec{b}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\{1;0;-1\}+\{3;-2;4\}=\{4;-2;3\};$$

$$2\vec{a}-3\vec{b}=2\{1;0;-1\}-3\{3;-2;4\}=$$
$$=\{2;0;-2\}-\{9;-6;12\}=\{-7;6;-14\}.$$

Вновь воспользуемся формулой (4.9):

$$(\vec{a}+\vec{b}\,)\times(2\vec{a}-3\vec{b}\,)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 3\\ -7 & 6 & -14\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 6 & -14\end{vmatrix}-$$
$$-\vec{j}\begin{vmatrix}4 & 3\\ -7 & -14\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}4 & -2\\ -7 & 6\end{vmatrix}=10\vec{i}+35\vec{j}+10\vec{k}.$$

Таким образом, $(\vec{a}+\vec{b}\,)\times(2\vec{a}-3\vec{b}\,)=\{10;35;10\}$.

Ответ: $\{10;35;10\}$.

Задание № 8

Найти объём треугольной пирамиды $ABCD$, если $A(0;1;1)$, $B(2;-1;4)$, $C(3;2;0)$, $D(-1;0;0)$.

Решение

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Воспользуемся формулой (4.5):

$$\overrightarrow{AB} = \{2-0; -1-1; 4-1\} = \{2; -2; 3\};$$
$$\overrightarrow{AC} = \{3-0; 2-1; 0-1\} = \{3; 1; -1\};$$
$$\overrightarrow{AD} = \{-1-0; 0-1; 0-1\} = \{-1; -1; -1\}.$$

Объём треугольной пирамиды $ABCD$ вычисляется по формуле (см. (4.12)): $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right|$. Находим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (см. (4.11)):

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} -$$
$$-(-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4-8-6 = -18.$$

Отсюда, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|-18| = 3 \quad (\text{куб. ед.})$.

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3 \quad (\text{куб. ед.})$.

Задание №9

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение

Уравнение на собственные значения имеет вид (см. (4.17)):

$$\det\left(\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(-3-\lambda)(6-\lambda)-10=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda-28=0 \Rightarrow \lambda_1=-4, \lambda_2=7.$$

Собственные значения матрицы A: $\lambda_1=-4, \lambda_2=7$.

Вычислим координаты собственных векторов, отвечающих найденным собственным значениям.

1) При $\lambda=-4$ (см. (4.16)):

$$\left(\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Данное матричное уравнение эквивалентно системе двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}x_1+5x_2=0\\ 2x_1+10x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+5x_2=0\\ x_1+5x_2=0\end{cases}.$$

Таким образом, $x_1=-5x_2$. Положим $x_2=c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. Тогда $x_1=-5_1$ и, следовательно, собственный вектор $\mathbf{x_1}$, отвечающий собственному значению $\lambda_1=-4$, имеет вид: $\mathbf{x_1}=\{-5c_1;c_1\}=c_1\{-5;1\}$ или $\mathbf{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-5\\ 1\end{pmatrix}$. **2)** При $\lambda=7$ действуем аналогично:

$$\left(\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 2 & 6\end{pmatrix}-7\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-10x_1+5x_2=0\\ 2x_1-x_2=0\end{cases}.$$

Таким образом, $x_2=2x_1$. Положим $x_1=c_2$, где c_2 — произвольная постоянная. Тогда $x_2=2_2$ и, следовательно, собственный вектор $\mathbf{x_2}$, отвечающий собственному значению $\lambda_2=7$, имеет вид: $\mathbf{x_2}=\{c_2;2c_2\}=c_2\{1;2\}$ или $\mathbf{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.

Ответ: $\lambda_1=-4$, $\mathbf{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-5\\ 1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=7$, $\mathbf{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$.