

IBM Quantum

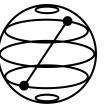
第3回 Qiskitハンズオン研修 金融計算編

Introduction to Quantum Finance

IBM東京基礎研究所
量子コンピューティング 量子開発者コミュニティー
小林 有里



当研修について

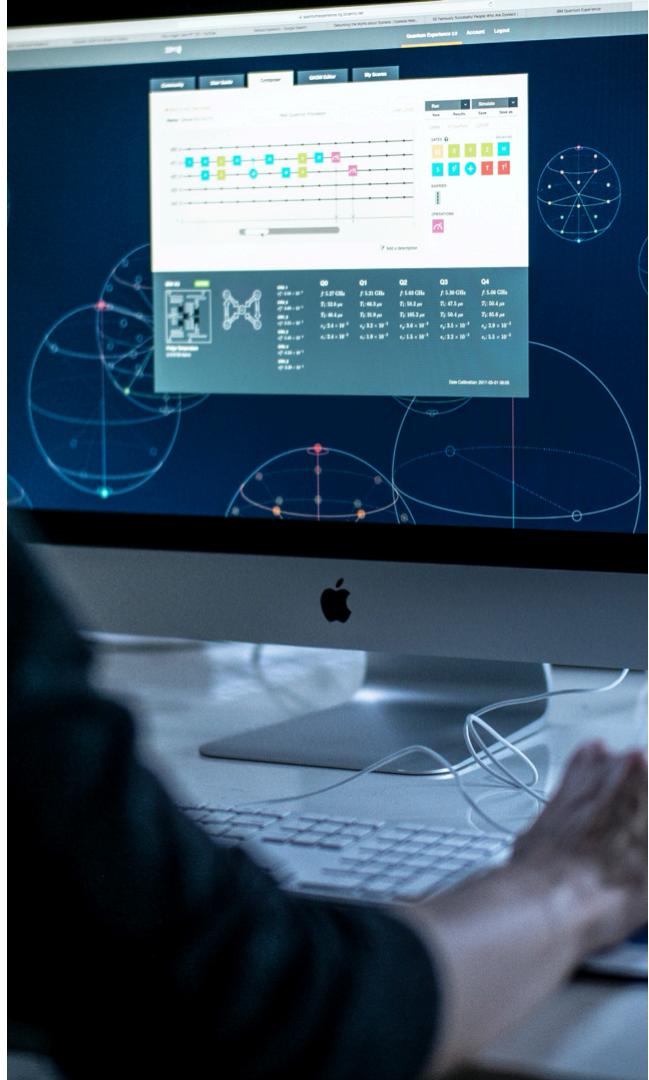


前回

- 量子アルゴリズム編
 - ドイチ・ジョザアルゴリズム
 - バーン斯坦ン・ヴァジラニアルゴリズム
 - Qiskitをつかった実装

本日（最終日）

- 量子金融計算編
 - ヨーロピアンコールオプションの価格決定
 - 量子振幅推定と量子位相推定のアルゴリズム
 - Qiskitをつかった実装



1. ヨーロピアンコールオプションの価格決定

オプションの価格計算に関する概要

ブラックショールズモデルが知られている。

- オプションの価格決定を行うための偏微分方程式
- ヨーロピアンオプションのように、比較的単純な条件式 (i.e. $\text{Max}[S_T - K, 0]$) でペイオフが推定できる場合に用いられる。
- 複雑なケースについては、現在はMonte Carlo 法で近似計算しているが、精度を得るには多くのデータサンプル数と実行回数を要し、収束に時間がかかる。
- 量子コンピュータの量子振幅推定で積分計算をすると Quadratic (二次の) スピードアップが期待できる

ブラックショールズモデル

ヨーロピアンオプション価格算出に用いられるのがブラックショールズモデル。

原資産の価格変動は Wiener 過程 (Brownian Motion) に従う。

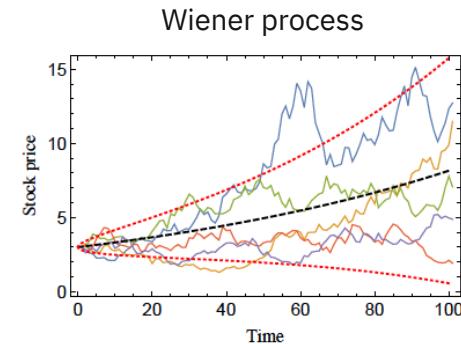
ブラックショールズ方程式の解

$$C = SN(d_1) - e^{-rt} KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

C	コールオプションの価格
S	原資産の価格
N	標準正規分布の累積分布関数
K	権利行使価格
t	満期時点
r	満期における無リスク金利
e^{-rt}	割引係数
σ	ボラティリティ (原資産の収益率の標準偏差)



ヨーロピアンコールオプション

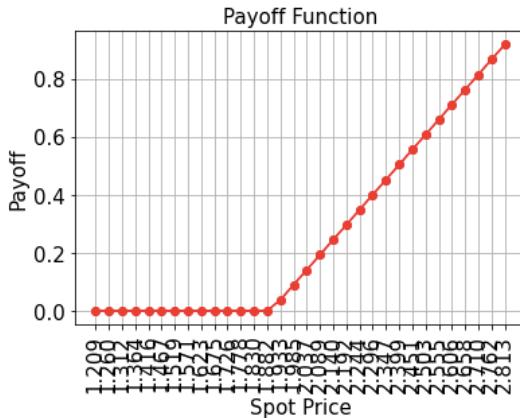
ある将来の満期時点Tにおいてリスク資産を価格Kで買うことができる権利のことを言う。

満期時に株価 $S(T)$ がKに対して高値であれば、権利を行使して、利益を得る。低ければ、権利は行使しない。

ヨーロピアンコールオプションのペイオフ

$$f(S_T) = \max \{0, S_T - K\}$$

今回は、このペイオフの期待値を求めるのがゴール



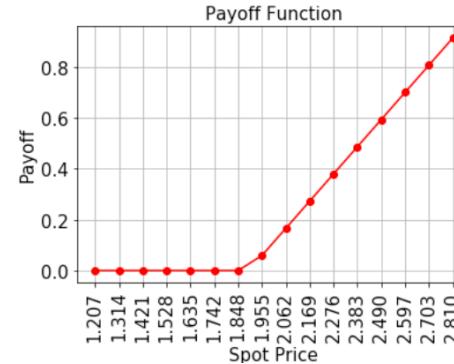
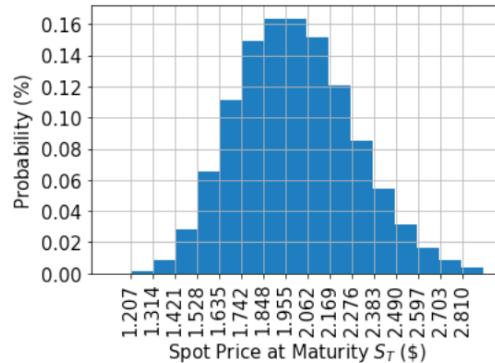
$$C_0 = e^{-r_f T} E[\bar{C}_T]$$

$$= e^{-r_f T} \int_{-\infty}^{+\infty} \max[\tilde{S}_T - K, 0] f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T)$$

$$= e^{-r_f T} \int_K^{+\infty} \tilde{S}_T f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T)$$

不確実性モデル

- ・ コールオプションの価格（期待値）はペイオフ関数のラインだけでは決まらない。
- ・ 満期時のスポット価格を、対応する確率分布で重み付けをして積分することで、期待値を求めることができる。



- ・ 量子コンピューターを使えば、各スポット価格 $\{S_i\}$ と対応する分布の確率 $\{p_i\}$ を、重ね合わせの状態で量子状態にロードすることができる。

$$|\psi\rangle_n = \sum_{i=0}^{2^n - 1} \sqrt{p_i} |S_i\rangle_n$$

ペイオフの期待値を求める手続

- 確率分布を量子レジスタにロードする。各スポット価格 $\{S_i\}$ for $i \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ と対応する確率 $\{p_i\}$ があったとき、以下の状態で分布がロードされる。

$$|\psi\rangle_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sqrt{p_i} |S_i\rangle_n$$

- 量子振幅推定を使ってペイオフの期待値計算を行う。

今回のペイオフ関数（ランダムな変数Xをとる区分線形関数）について、Quantum Amplitude Estimation（量子振幅推定）をつかって期待値計算を行う。

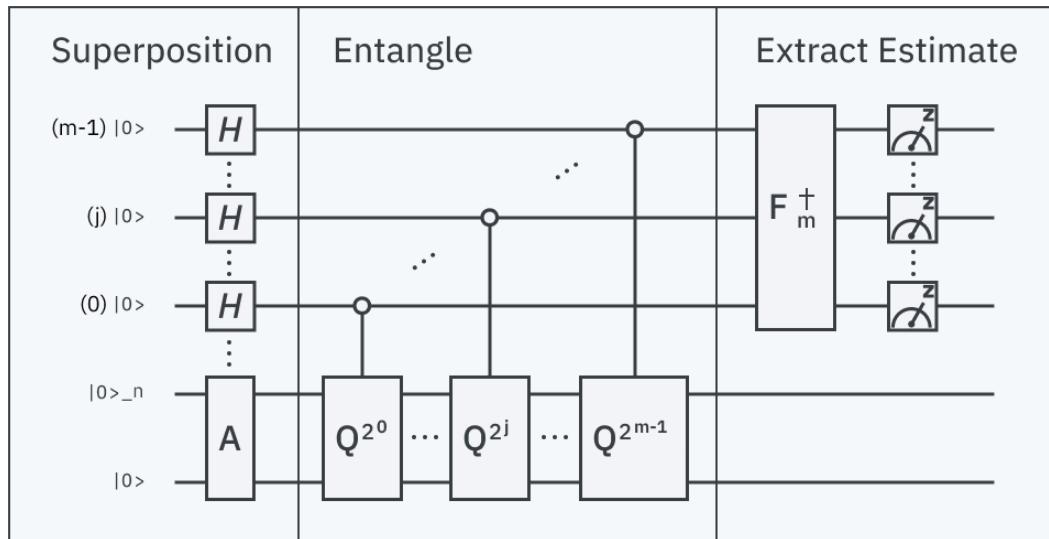
$$\mathcal{A}|\psi\rangle_n = \sqrt{1-\alpha} |\psi_0\rangle_n |0\rangle + \sqrt{\alpha} |\psi_1\rangle_n |1\rangle$$

- 最後の量子ビットを測定し $|1\rangle^{\otimes n}$ が出現する確率 α を求める

Quantum Amplitude Estimation

目標： $|1\rangle$ を測定する確率振幅 α を量子振幅推定を用いて推定する

- 手順：
- サンプリング用に m 個の量子ビットを用意し、重ね合わせ状態をつくる
 - 回転ゲートの Q を順番にかけて量子もつれをつくる
 - 期待値を求めるために測定する

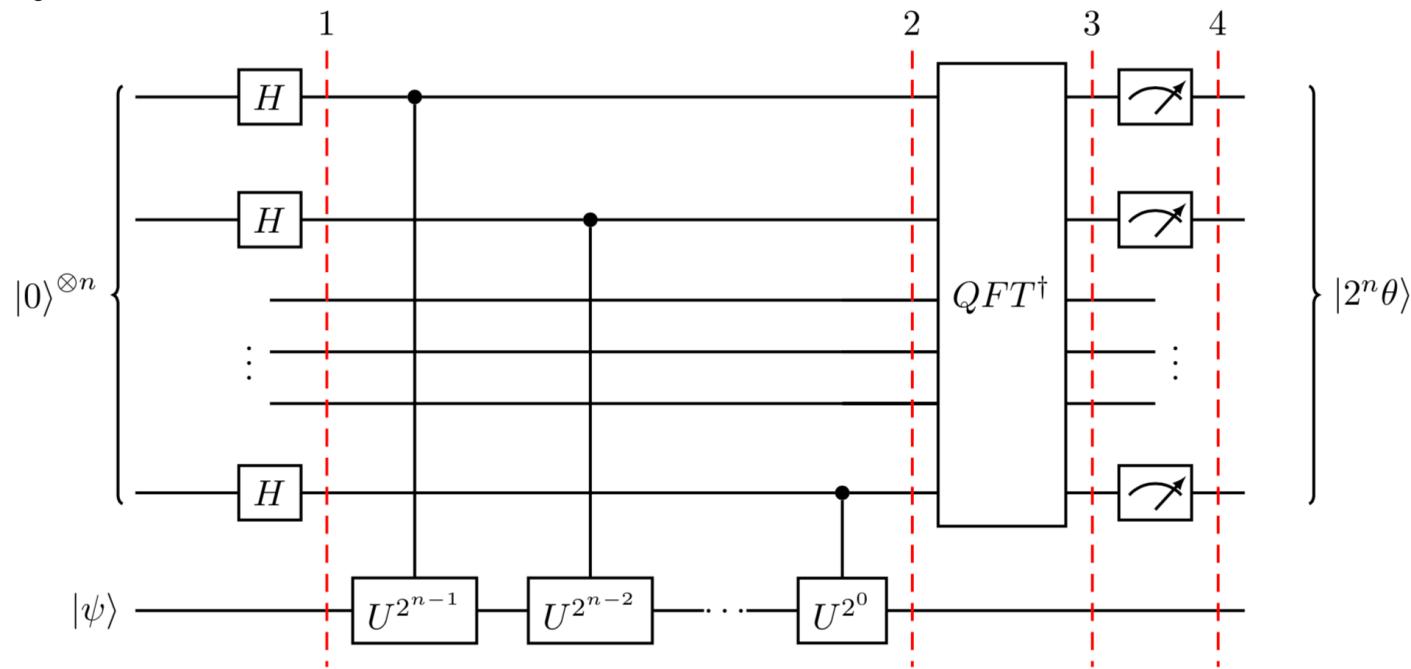


⇒ 実際はQuantum Phase Estimationをつかって位相から振幅を推定している

2. Quantum Phase Estimation

Quantum Phase Estimation

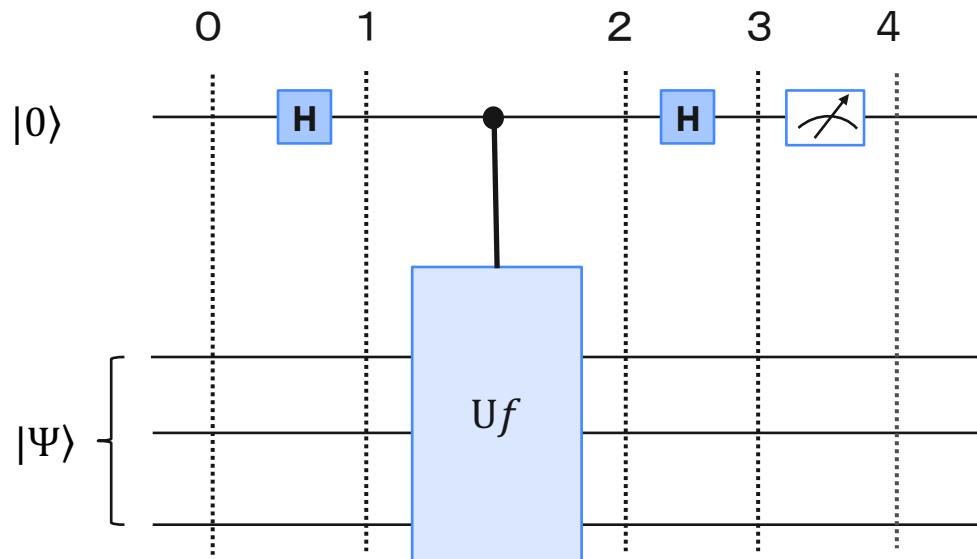
次ページで、1量子ビットの位相推定の回路を見て、各ステップで何が起っているのかみていく。



1-qubit Quantum Phase Estimation

前提：量子状態 $|\psi\rangle$ がユニタリ演算 U の固有値は $e^{i\theta_\psi}$ の固有ベクトルである場合を考える。

$$U|\psi\rangle = e^{i\theta_\psi}|\psi\rangle$$



1量子ビットの量子位相推定回路(アダマールテスト)

Step 0: $|0\rangle|\psi\rangle$

$$\text{Step 1: } \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle|\psi\rangle)$$

$$\text{Step 2: } \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle e^{i\theta_\psi}|\psi\rangle)$$

$$\begin{aligned} \text{Step 3: } & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi\rangle + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}e^{i\theta_\psi}|\psi\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0\rangle(1+e^{i\theta_\psi}) + |1\rangle(1-e^{i\theta_\psi})]|\psi\rangle \end{aligned}$$

Step 4: Measure

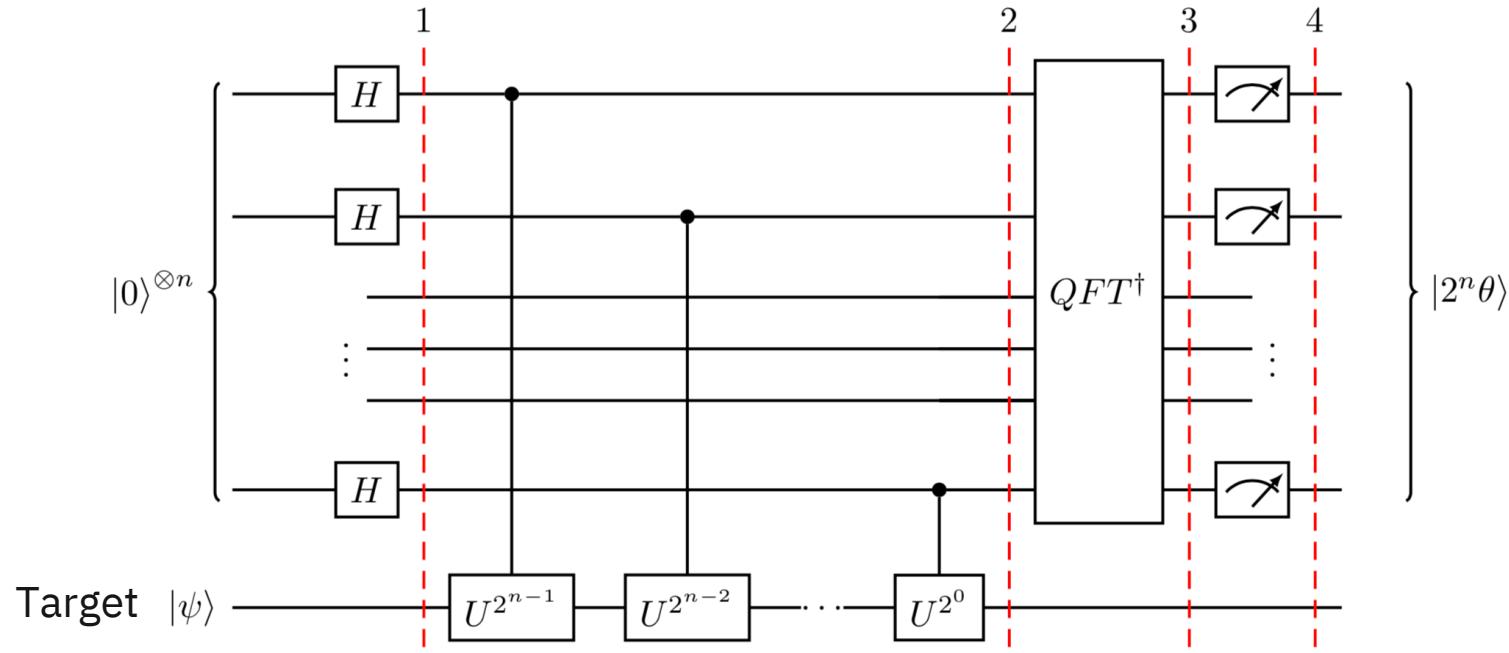
$$p|0\rangle : \left|\frac{1}{2}(1+e^{i\theta_\psi})\right|^2 \quad p|1\rangle : \left|\frac{1}{2}(1-e^{i\theta_\psi})\right|^2$$

上記の検証から分かること：

- 位相 θ から振幅 a を推定することが可能である。
- このアルゴリズムを古典のマシン上で愚直に計算すると、指数的にメモリと演算回数が必要になる。量子コンピューターでは、確率分布 p_i のもとで $e^{i\theta_\psi}$ をある誤差 ε で推定したい場合はその逆数 $1/\varepsilon$ の多項式回数でサンプルすればよい。∴ 二次のスピードアップを実現できる。

n-qubit Quantum Phase Estimation

1量子ビットの位相推定と同じ回路だが、n量子ビットに拡張しただけであり、同じ原理で多量子ビットの重ね合わせ状態から位相を推定し振幅を求めることができる。



2. Quantum Phase Estimation

Qiskit Aqua

Qiskit Aquaには、金融をはじめ、化学計算、最適化問題など、用途に応じて回路の実装を容易にするアルゴリズムやライブラリが用意されています。

本日使うQiskit Aquaのライブラリ:

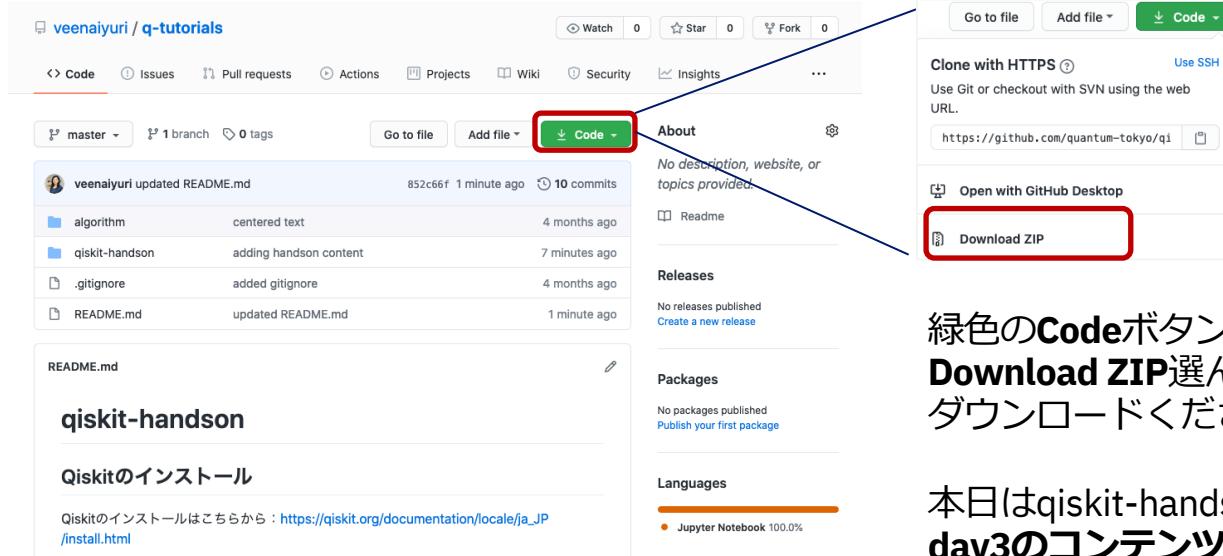
```
from qiskit.aqua.algorithms import AmplitudeEstimation  
  
from qiskit.aqua.components.uncertainty_models import LogNormalDistribution  
  
from qiskit.aqua.components.uncertainty_problems import UnivariateProblem  
  
from qiskit.aqua.components.uncertainty_problems import UnivariatePiecewiseLinearObjective as PwlObjective
```

AmplitudeEstimationのソースコード :

<https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.aqua.algorithms.AmplitudeEstimation.html>

Qiskit Implementation

<https://bit.ly/qiskitho> 本日はday3のコンテンツを使います。



緑色の**Code**ボタンを押して、一番下の
Download ZIP選んでコンテンツを
ダウンロードください。

本日はqiskit-handsonというフォルダの中の
day3のコンテンツを使います。

実行環境はローカルPCか、 IBM Quantum Experience
のどちらかを利用できます。

まとめ

- 金融資産のポートフォリオなどのリスクを推定するために、量子アルゴリズムのAmplitude Estimationが知られている。実際はPhase Estimationで位相から振幅を導出しておる、いずれも基底変換を行うQuantum Fourier Transformが原型である。
- 上記量子アルゴリズムを活用することで、古典的なモンテカルロ法と比較して2次的な高速化を実現できる。
- 一方、現実的なシナリオをモデル化するためには、より多くの量子ビットが必要であり、実機のエラー率を低減する必要がある。
- NISQシステムにおいて、より少ない量子ゲートで、同じ精度を実現する方法が研究実装されている。
 - Amplitude Estimation without Phase Estimation
<https://arxiv.org/abs/1904.10246>

Yohichi Suzuki, Shunpei Uno, Rudy Raymond, Tomoki Tanaka, Tamiya Onodera, Naoki Yamamoto

参考文献

Qiskit Finance Tutorials

<https://qiskit.org/documentation/tutorials/finance/index.html>

Quantum Amplitude Amplification and Estimation

<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055>

Quantum Risk Analysis

<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055>

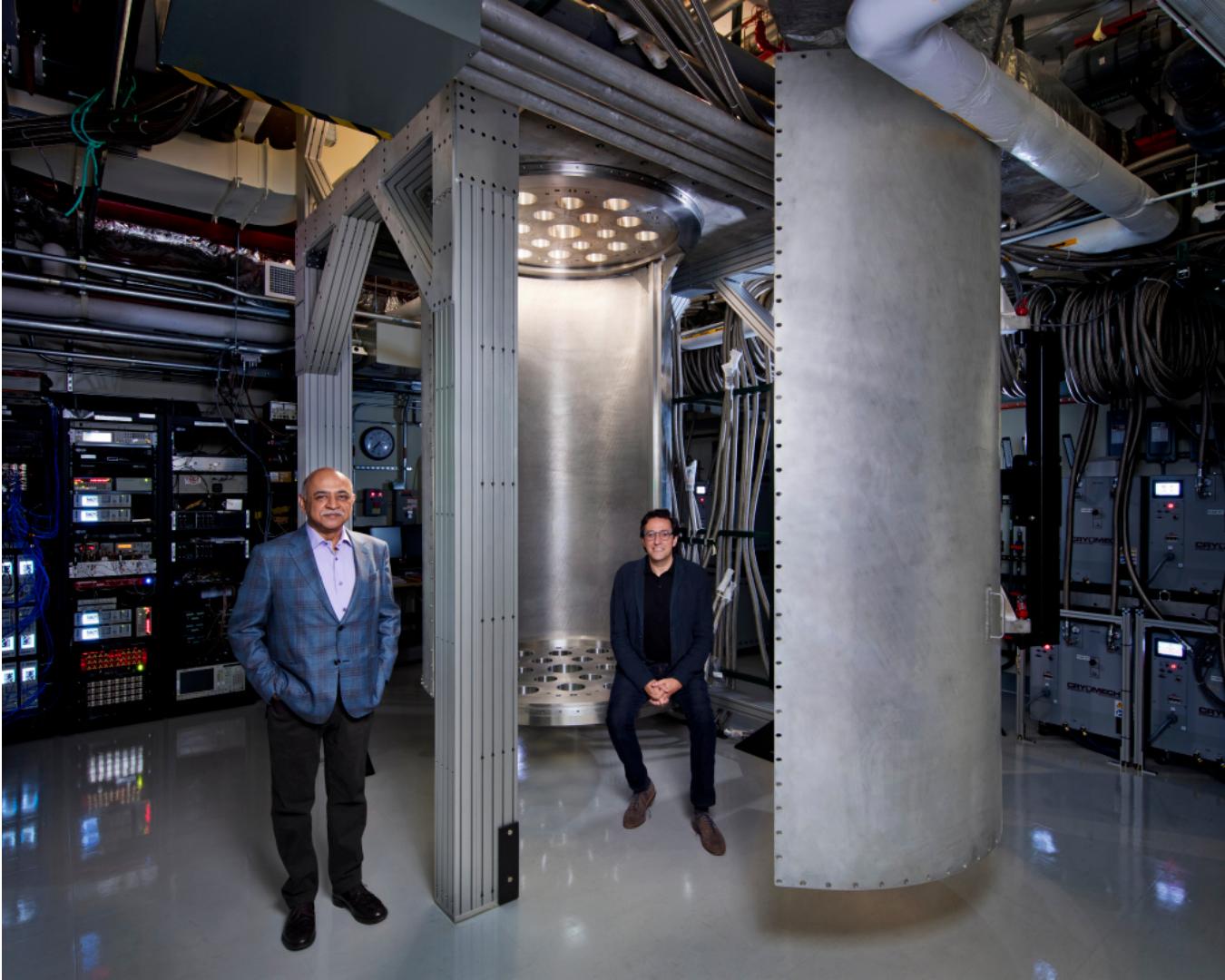
Option Pricing using Quantum Computers

<https://arxiv.org/abs/1905.02666>

Qiskit Tutorial European Call Option Pricing

https://github.com/Qiskit/qiskit-tutorials/blob/master/tutorials/finance/03_european_call_option_pricing.ipynb

IBM Quantum



Thank you

