IBM Quantum

第3回 Qiskitハンズオン研修　金融計算編
Introduction to Quantum Finance

IBM東京基礎研究所
量子コンピューティング　量子開発者コミュニティー
小林 有里

IBM

当研修について

- **前回**
- 量子アルゴリズム編
  - ドイチ・ジョザ アルゴリズム
  - バーンスタイン・ヴァジラニアルゴリズム
  - Qiskitをつかった実装

- **本日（最終日）**
- 量子金融計算編
  - ヨーロピアンコールオプションの価格決定
  - 量子振幅推定と量子位相推定のアルゴリズム
  - Qiskitをつかった実装

1. ヨーロピアンコールオプションの価格決定

オプションの価格計算に関する概要

IBM **Quantum**

- オプションの価格決定を行うための偏微分方程式として、ブラックショールズモデルが知られている。
- ヨーロピアンオプションのように、比較的単純な条件式 (i.e. $\mathrm{Max}[S_T\text{-}K, 0]$)でペイオフが推定できる場合に用いられる。
- 逆にアメリカンオプションのように権利行使のタイミングが複数あったり、複雑なポートフォリオの計算には適用できない。
- 複雑なケースについては、現在はモンテカルロ法で近似計算しているが、精度を得るには多くのデータサンプル数と実行回数を要し、収束に時間がかかる。
- 量子コンピュータの量子振幅推定を使うと、古典のモンテカルロ法と比較して、Quadratic （二次の）スピードアップが期待できる。

ブラックショールズモデル

ヨーロピアンオプション価格算出に用いられるのがブラックショールズモデル。

原資産の価格変動は Wiener Process（based on Brownian Motion）に従う。

ブラックショールズ方程式の解

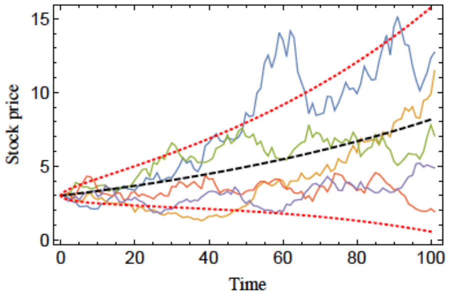
$$C = SN(d_1) - e^{-rt}\,KN(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{t}}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

C	コールオプションの価格
S	原資産の価格
N	標準正規分布の累積分布関数
K	権利行使価格
t	満期時点
r	満期における無リスク金利
e^-rt	割引係数
σ	ボラティリティ (原資産の収益率の標準偏差）

Wiener process

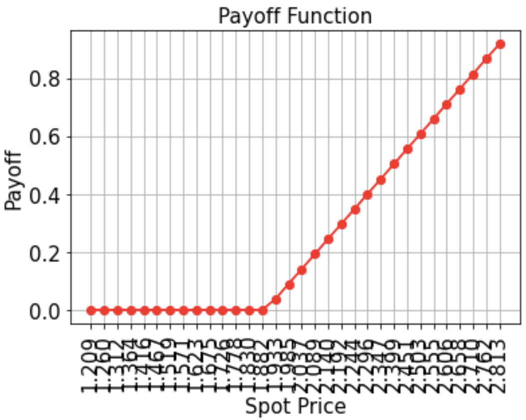


ヨーロピアンコールオプション

IBM **Quantum**

ある将来の満期時点T においてリスク資産を価格K で買うことができる権利のことを言う。

満期時に株価S(T) がK に対して高値であれば、権利を行使して、利益を得る 。低ければ、権利は行使しない。



ヨーロピアンコールオプションのペイオフ

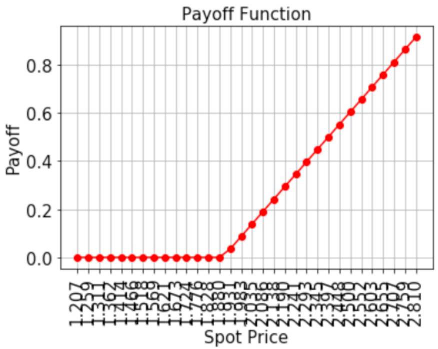
$$f(S_T) = \max\{0, S_T - K\}$$

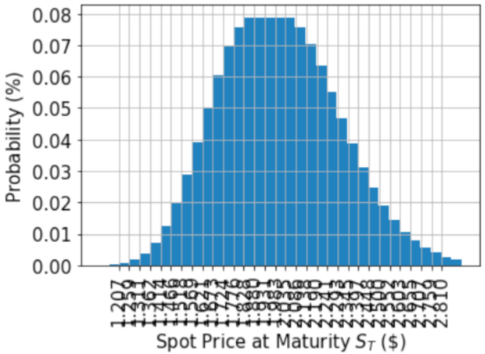
今回は、このペイオフの期待値を求めるのがゴール

$$
\begin{aligned}
C_0 &= e^{-r_f T} E[\tilde{C}_T] \\
&= e^{-r_f T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Max}[\tilde{S}_T - K, 0] f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T) \\
&= e^{-r_f T} \int_{K}^{+\infty} \tilde{S}_T f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T)
\end{aligned}
$$

不確実性モデル

- コールオプションの価格（期待値）はペイオフ関数のラインだけでは決まらない。
- 満期時のスポット価格を、対応する確率分布で重み付けをして積分することで、期待値を求めることができる。





- 量子コンピューターを使えば、各スポット価格｛S_i｝と対応する分布の確率｛p_i｝を、重ね合わせの状態でデータロードすることができる。

$$|\psi\rangle_{\mathrm{n}} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sqrt{p_i}|S_i\rangle_n$$

ペイオフの期待値を求める手続

１．確率分布を量子レジスタにロードする。各スポット価格 ｛S_i｝ for i ∈ {0, ..., 2^n-1}と対応する確率 ｛p_i｝ があったとき、以下の状態で分布がロードされる。

$$|\psi\rangle_{\mathrm{n}} = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sqrt{p_i}|S_i\rangle_n$$

２．量子振幅推定を使ってペイオフの期待値計算を行う。
今回のペイオフ関数（ランダムな変数Xをとる区分線形関数）について、Quantum Amplitude Estimation （量子振幅推定）をつかって期待値計算を行う。

$$\mathcal{A}|\psi\rangle_{\mathrm{n}} = \sqrt{1-a}\,|\psi_0\rangle_n|0\rangle + \sqrt{a}|\psi_1\rangle_n|1\rangle$$

３．最後の量子ビットを測定し $|1\rangle$が出現する確率aを求める

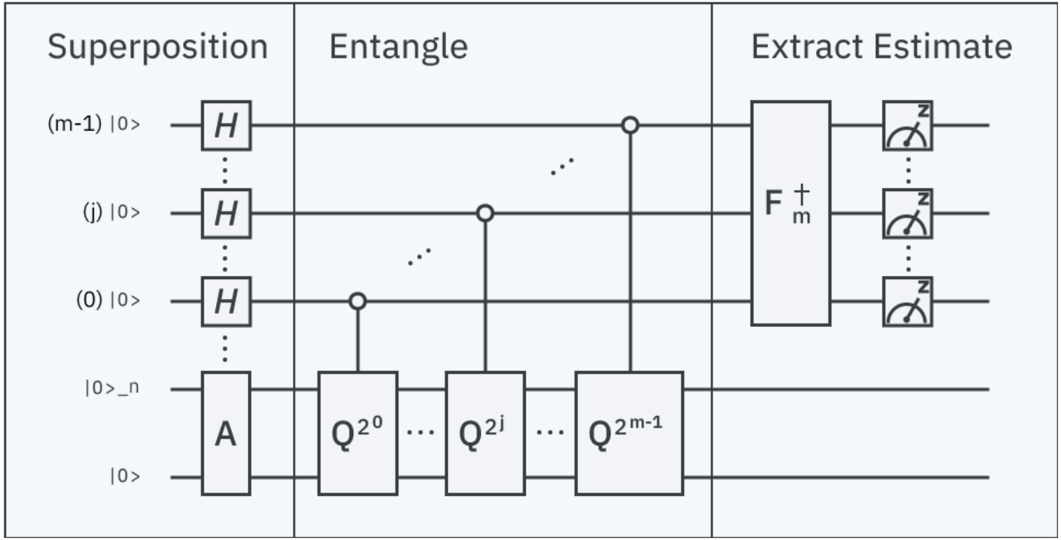
Quantum Amplitude Estimation

目標： $|1\rangle$ を測定する確率振幅 a を量子振幅推定を用いて推定する

手順：　１．サンプリング用にm個の量子ビットを用意し、重ね合わせ状態をつくっておく

２．回転ゲートのQを順番にかけて量子もつれをつくる

３．期待値を求めるために測定する

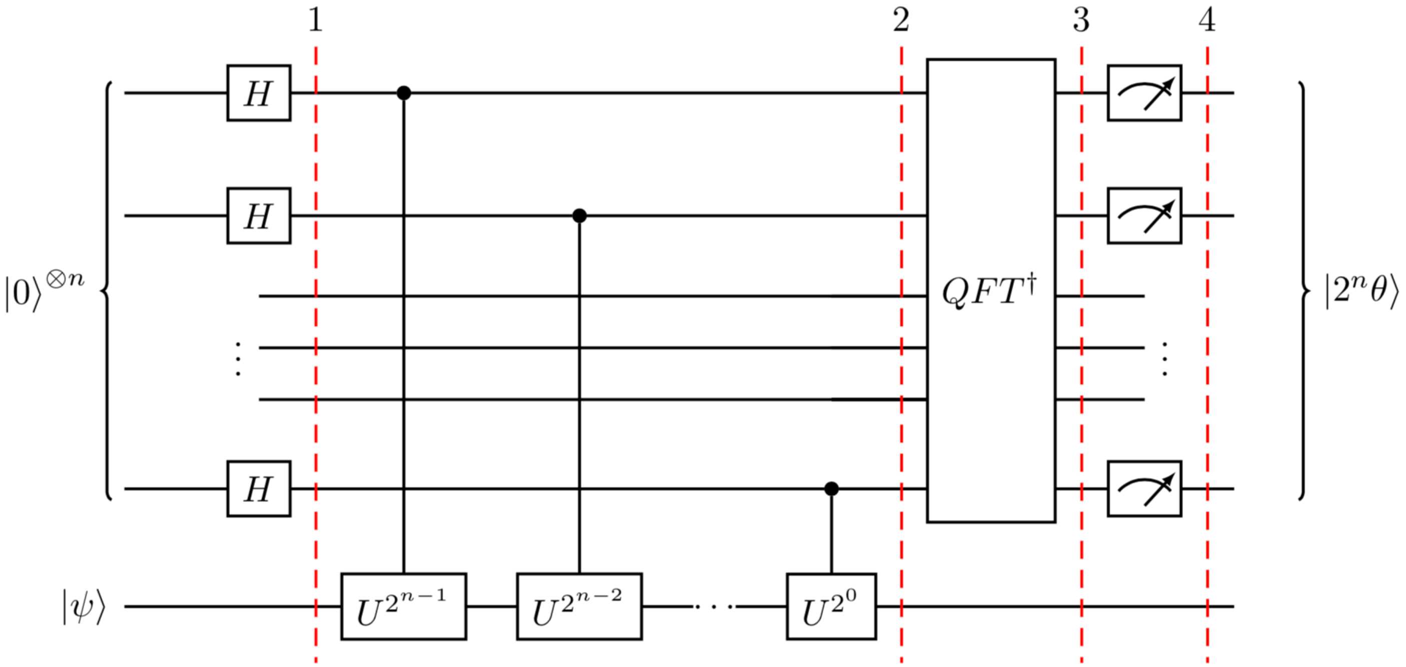


⇒実際はQuantum Phase Estimationをつかって位相から振幅を推定している

2. Quantum Phase Estimation

Quantum Phase Estimation

次ページで、1量子ビットの位相推定の回路をみて、各ステップで何が起きているのかみていく。



1-qubit Quantum Phase Estimation

前提：固有値が $e^{i\theta_\psi}$ で、固有ベクトルが 量子状態 $|\psi\rangle$ で
あるような ユニタリ演算 $\mathcal{U}$ を考える。

$$\mathcal{U}|\psi\rangle = e^{i\theta_\psi}|\psi\rangle$$

Step 0: $|0\rangle|\psi\rangle$

Step 1: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + |1\rangle\,|\psi\rangle)$

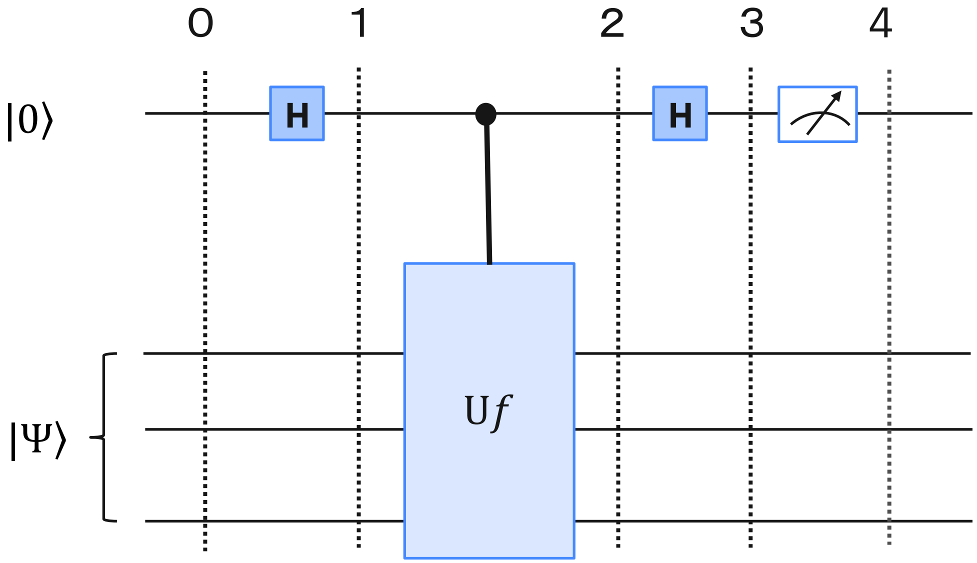
Step2: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\,|\psi\rangle + |1\rangle\, e^{i\theta_\psi}\,|\psi\rangle)$

Step 3: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\,|\psi\rangle + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\, e^{i\theta_\psi}\,|\psi\rangle\right)$

$= \frac{1}{2}\left[|0\rangle(1+ e^{i\theta_\psi}) + |1\rangle(1- e^{i\theta_\psi})\right]|\psi\rangle$

Step 4: Measure

$p|0\rangle : \left|\frac{1}{2}(1+ e^{i\theta_\psi})\right|^2 \qquad p\,|1\rangle : \left|\frac{1}{2}(1- e^{i\theta_\psi})\right|^2$



1量子ビットの量子位相推定回路(アダマールテスト)

上記の検証から分かること：

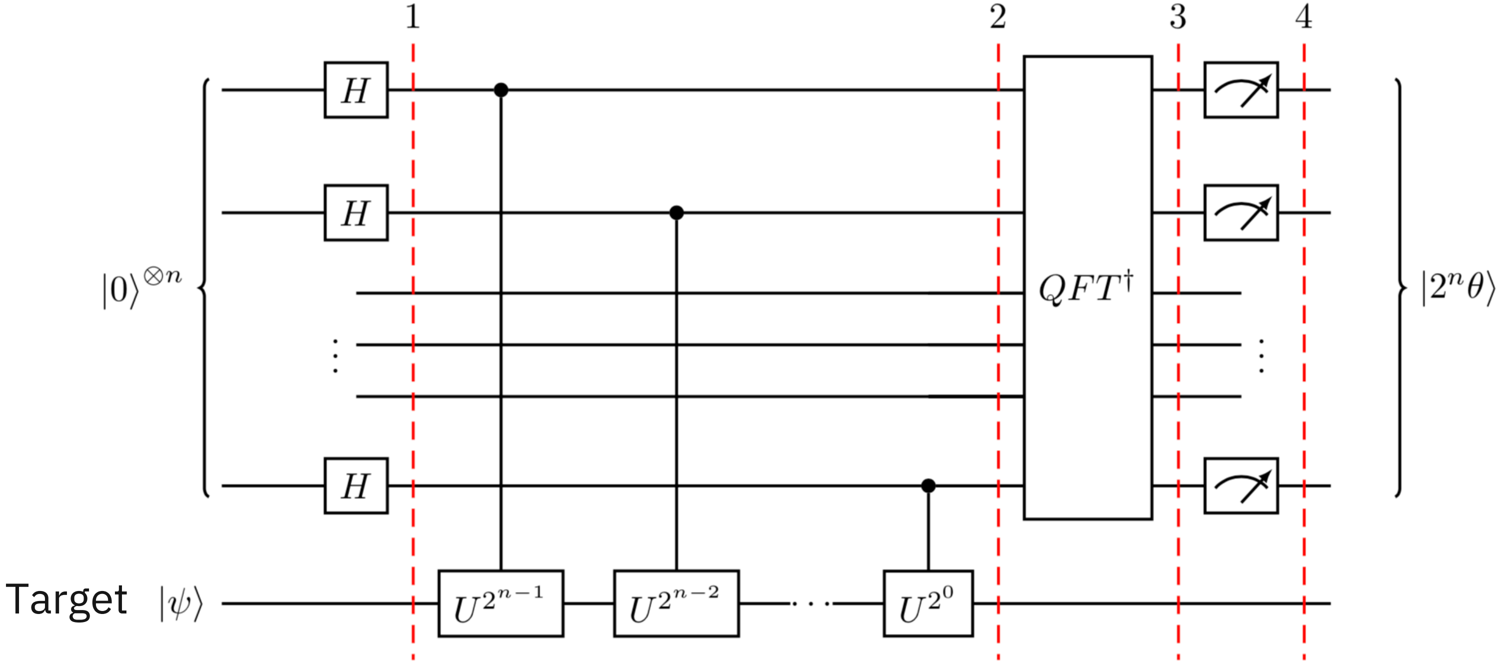
1．位相θから振幅 a を推定することが可能である。

2．このアルゴリズムを古典のマシン上で愚直に計算すると、指数的にメモリと演算回数が必要になる。量子コンピューターでは、確率分布 p_i のもとで $e^{i\theta_\psi}$ をある誤差εで推定したい場合はその逆数1/εの多項式回でサンプルすればよい。つまり、二次のスピードアップを実現できる。

n-qubit Quantum Phase Estimation

IBM **Quantum**

1量子ビットの位相推定と同じ回路だが、n量子ビットに拡張しただけであり、同じ原理で多量子ビットの重ね合わせ状態から位相を推定し振幅を求めることができる。



3. Qiskit Implementation

Qiskit Aqua

Qiskit Aquaには、金融をはじめ、化学計算、最適化問題など、用途に応じて回路の実装を容易にするアルゴリズムやライブラリが用意されています。

本日使うQiskit Aquaのライブラリ:

from qiskit.aqua.algorithms **import** AmplitudeEstimation

from qiskit.aqua.components.uncertainty_models **import** LogNormalDistribution

from qiskit.aqua.components.uncertainty_problems **import** UnivariateProblem

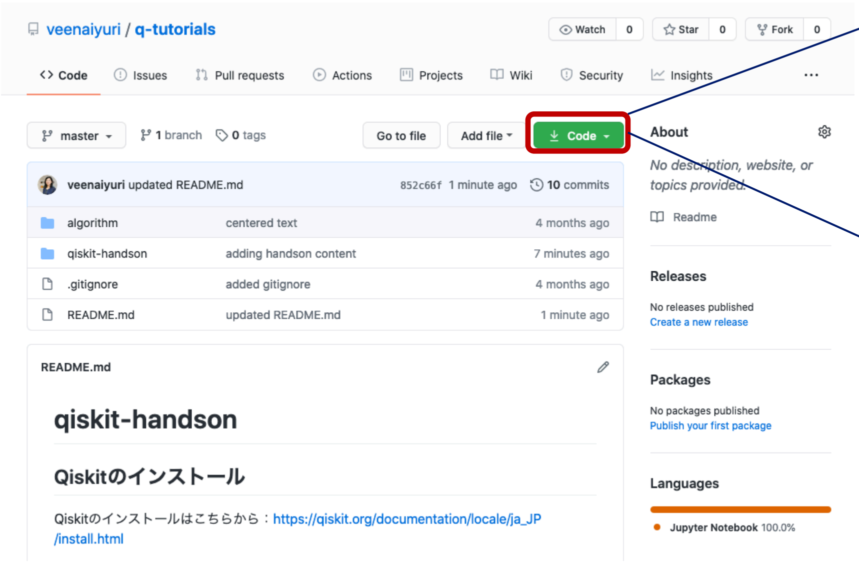
from qiskit.aqua.components.uncertainty_problems **import** UnivariatePiecewiseLinearObjective as PwlObjective

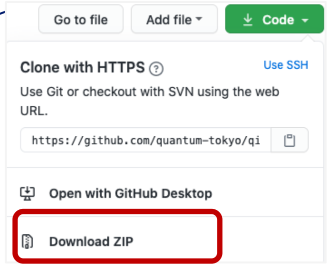
AmplitudeEstimationのソースコード：
https://qiskit.org/documentation/stubs/qiskit.aqua.algorithms.AmplitudeEstimation.html

Qiskit Implementation

IBM **Quantum**

https://bit.ly/qiskitho 本日はday3のコンテンツを使います。





緑色の**Code**ボタンを押して、一番下の**Download ZIP**選んでコンテンツをダウンロードください。

本日はqiskit-handsonというフォルダの中の**day3のコンテンツ**を使います。

実行環境はローカルPCか、IBM Quantum Experienceのどちらかを利用できます。

まとめ

IBM **Quantum**

- 金融資産のポートフォリオなどのリスクを推定するために、量子アルゴリズムのAmplitude Estimationが知られている。実際はPhase Estimationで位相から振幅を導出しており、いずれも基底変換を行うQuantum Fourier Transformが原型である。
- 上記量子アルゴリズムを活用することで、古典的なモンテカルロ法と比較して2次的な高速化を実現できる。
- 一方、現実的なシナリオをモデル化するためには、 より多くの量子ビットが必要であり、実機のエラー率を低減する必要がある。
- NISQシステムにおいて、より少ない量子ゲートで、同じ精度を実現する方法が研究実装されている。
  - Amplitude Estimation without Phase Estimation
    https://arxiv.org/abs/1904.10246
    Yohichi Suzuki, Shumpei Uno, Rudy Raymond, Tomoki Tanaka, Tamiya Onodera, Naoki Yamamoto

参考文献

Qiskit Finance Tutorials
https://qiskit.org/documentation/tutorials/finance/index.html

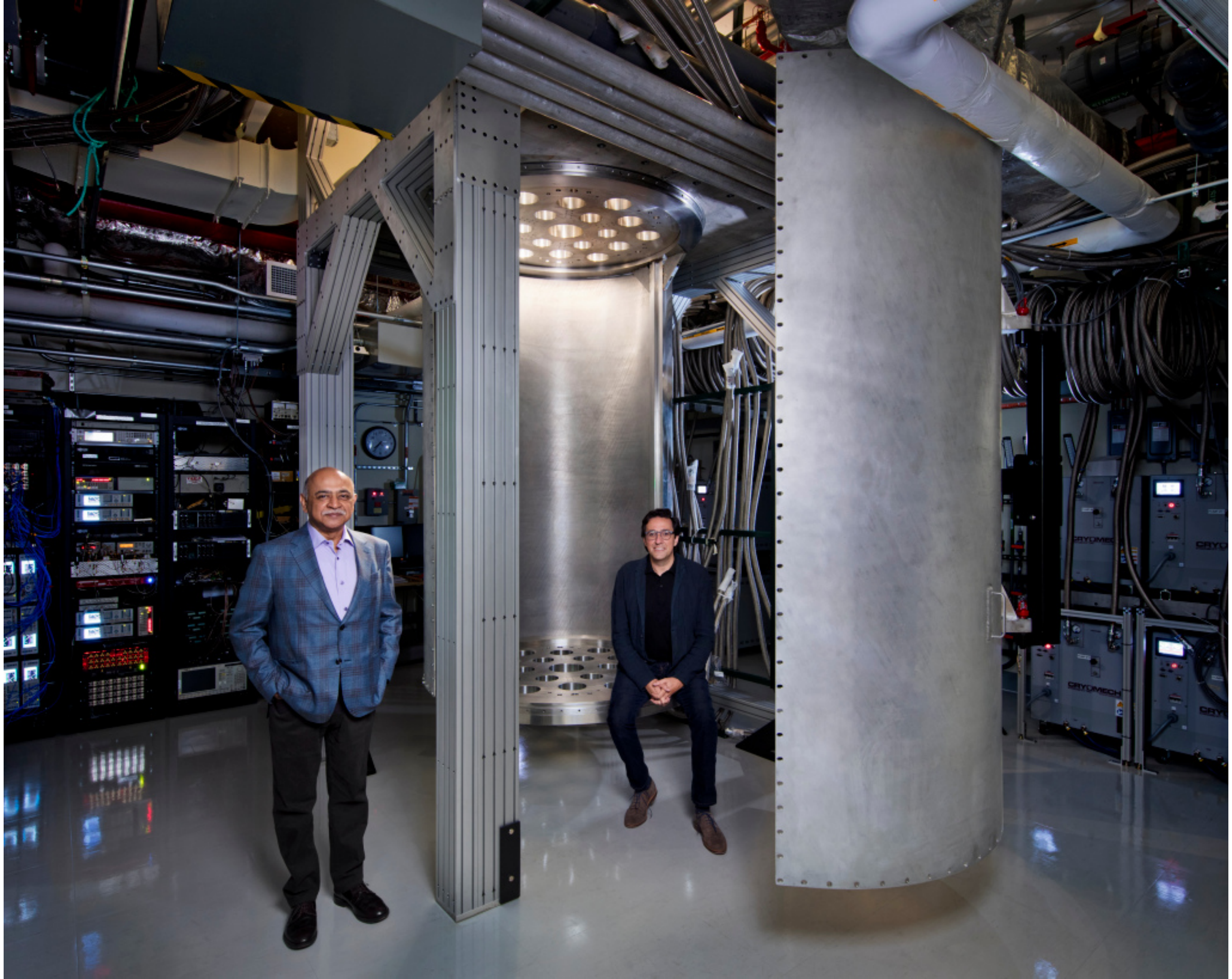
Quantum Amplitude Amplification and Estimation
https://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055

Quantum Risk Anaylsis
https://arxiv.org/abs/quant-ph/0005055

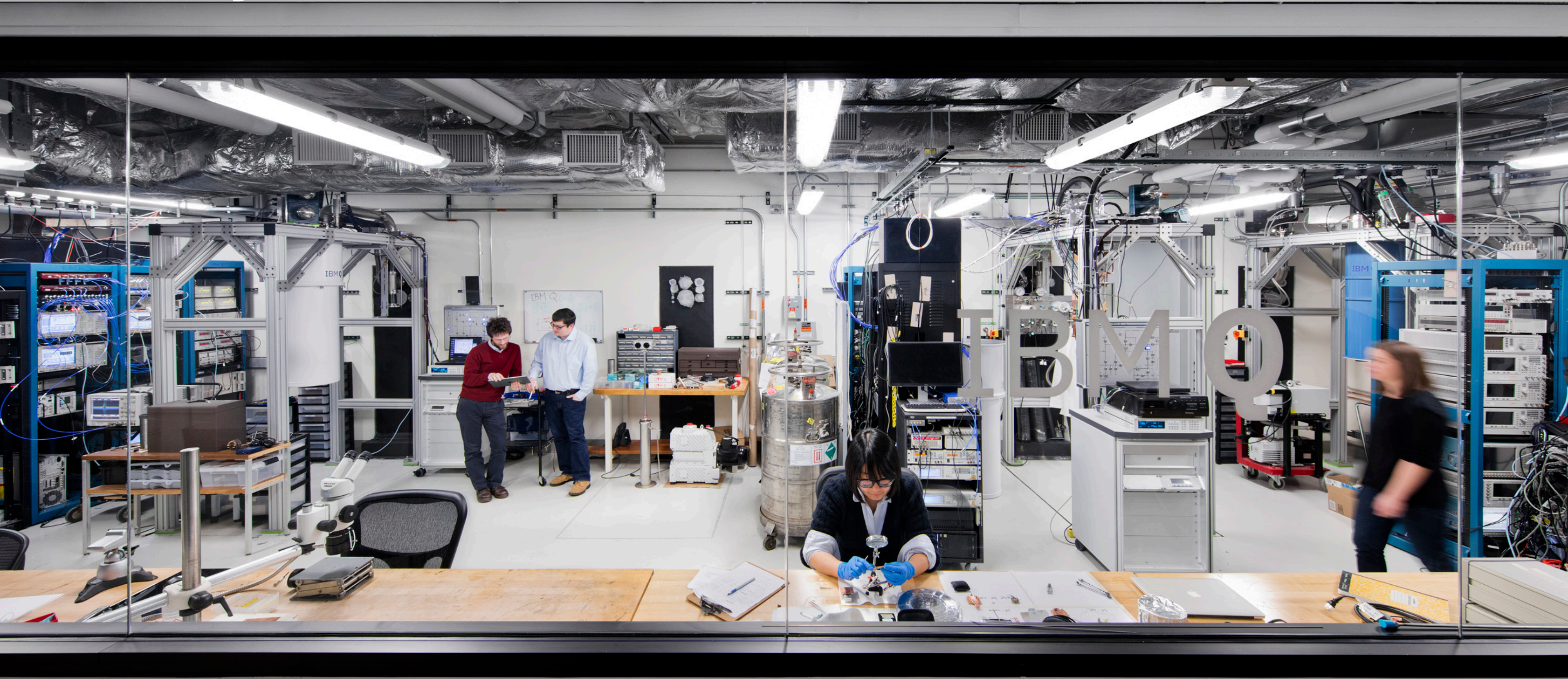
Option Pricing using Quantum Computers
https://arxiv.org/abs/1905.02666

Qiskit Tutorial European Call Option Pricing
https://github.com/Qiskit/qiskit-tutorials/blob/master/tutorials/finance/03_european_call_option_pricing.ipynb

IBM **Quantum**



Thank you



Yuri Kobayashi yurik@jp.ibm.com