[1]

Dihotomie (a, b, eps, c, k); k - nr. de segmentări; init: $k=0$; c - rad.

cond: $f(a) \cdot f(b) < 0$

calcul (ciclu):

$$c = \begin{cases} a + (b-a)/2, & sign(a) = sign(b) \\ (a+b)/2, & sign(a) \neq sign(b) \end{cases}$$

```
k++;
if (f(c)=0 || |b-a|<2eps) {afiseaza a, b; exit}
if ( sign(f(a))=sign(f(c)) a=c; else b=c;
```

R\s: afișează c, $f(c)$, k [end]

Aproximații succesive (x_0, eps, i, x, k); x - ~~rad~~ sol; i - nr formei φ

cond: $|\varphi'(a)| < 1$ și $|\varphi'(b)| < 1$ - dacă nu satisface alegem alt φ

~~$f(a)<a \,||\, f(a)>b$~~ $\varphi(a) \in [a; b]$ și $\varphi(b) \in [a; b]$ - else forma nu este recomandată în acest interval.

k - nr. de aproximații efectuate; init: $k=0$, $x = x_0 = a$

calc (ciclu):

```
x0=x; x=φ(x0); k++
if |x-x0|<ε exit
```

R\s: afișează x, $f(x)$, k [end]

Newton (x_0, eps, x, k)

cond: $sign(f'(a)) = sign(f'(b))$ și $sign(f''(a)) = sign(f''(b))$

init: $x_0 = \begin{cases} a, & sign(f(a)) = sign(f''(a)) \\ b, & else \end{cases}$ $\quad k=0$; $x = x_0$

calc (ciclu):

```
x0=x;
x=x0-f(x0)/f'(x0); k++;
if |x-x0|<ε exit;
```

R\s: afișează x, $f(x)$, k [end]

Coarde (a, b, eps, x, k) init: $k=0$

cond: $f'(a) f'(b) > 0$ și $f''(a) \cdot f''(b) > 0$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$

calc: if $((f(b)>0$ și $f''(b)>0)$ sau $(f(b)<0$ și $f''(b)<0))$

{ $x = a$;

do{ $x_0 = x$; $x = x_0 - f(x_0) \cdot \dfrac{b - x_0}{f(b) - f(x_0)}$; k++; }

while $|x - x_0| \geq \varepsilon$; }

if $((f(a)>0$ și $f''(a)>0)$ sau $(f(a)<0$ și $f''(a)<0))$

{ $x = b$;

do{ $x_0 = x$; $x = x_0 - f(x_0) \dfrac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)}$; k++ }

while $|x - x_0| \geq \varepsilon$;}

R\s: afișează x, $f(x)$, k [end]

Secante (x_0, x_1, eps, x, k); init: $k=0$; $x = x_1$; $x_1 = x_0$;

calc (ciclu):

$x_0 = x_1$; $x_1 = x$;

$x = x_1 - f(x_1) \cdot \dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$; k++

if $|x - x_1| < \varepsilon$ exit;

R\s: afișează x, $f(x)$, k [end]

[2] Aproximatii succesive: $f(x) = x^3 - 29x + 34 = 0$

$x = \varphi(x) = \sqrt[3]{29x - 34}$ $\quad x = \varphi(x) = (29x - 34)/x^2$

$x = \varphi(x) = x^3 - 28x + 34$ $\quad x = \varphi(x) = -34/(x^2 - 29)$

Gauss(A, B, X) calc:

(ciclu $i = \overline{1,n}$)

pivotarea parțială: dacă $|a_{ii}| \leq 0$ (sau $\neq 0$)

atunci caut $a = \max|a_{ji}|, j > i$. memorez linia ~~j~~

dacă $a = 0$ · exit; ~~else~~

dacă $|a| \leq$ zero posibil erori în calc, dar se calculează

schimbăm liniile i cu j.

calc matricea:

(ciclu) $\mu_j = a_{ji} / a_{ii}$; $a_{ji} = 0$; $j = \overline{i+1, n}$

$a_{jk} = a_{jk} - \mu_j \cdot a_{ik}$; $k = \overline{i+1, n}$

$b_j = b_j - b_i \cdot \mu_j$;

dacă $a_{nn} = 0$ exit;

calc X:

$i = \overline{n,1}$ ~~$s = 0$~~, $s = \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j$;

$x_i = (b_i - s) / a_{ii}$;

R|1: afișează $X = x_i, i = \overline{1,n}$

pozitiv def: 1) $a_{ii} > 0$;

2) simetrică $a_{ij} = a_{ji}$

3) max pe diag. ($\max A = \max|a_{ii}|$)

diag_dom: 1) $a_{ii} \neq 0$

2) $|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, j \neq i, i = \overline{1,n}$

Jacobi: cond: diag_dom A $\quad$ Jacobi(A, B, X, eps, m)

calc: $Q = \begin{cases} 0, & i = j \\ -a_{ij}/a_{ii}, & i \neq j \end{cases}$ $\quad d = b_i / a_{ii}$ $\quad$ m - nr de vect calc

cond: $\|Q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1} |q_{ij}| < 1$ $\quad$ init x_0 $x^{(0)} = d$

calc: (ciclu)

$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_j^{(k)} + d_i$;

$\max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|\}, i = \overline{1,n}$

$m{+}{+}$; $X^{(k)} = X^{(k+1)}$;

if $\max < \varepsilon$ exit;

R|1: afișează $X = x_i, i = \overline{1,n}$

Gauss-Seidel (A, B, X, eps, m)

cond: diag_dom A și pos_def A

calc: $Q = \begin{cases} 0, & i = j \\ -a_{ij}/a_{ii}, & i \neq j \end{cases}$ $\quad d = b_i / a_{ii}$ $\quad$ init $x^{(0)} = d$

cond: $\|Q\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |q_{ij}| < 1$

calc: ciclu

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} q_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} q_{ij} x_j^{(k)} + d_i$$

$\max\{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|\}$, $i = \overline{1,n}$

$m{+}{+}$; $x_i^{(k)} = x_i^{(k+1)}$;

if $\max < \varepsilon$ exit

: R/s: afișează $x = x_i$

Cholesky (A, B, X) $\quad$ cond: pos_def A

calc L: $k = \overline{1,n}$

(ciclu) $i = \overline{1,n}$ {

if $i < k$ $\; l_{ik} = 0$;

else if $i = k$ { $s = \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2$; $l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - s}$ }

else { $s = \sum\limits_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}$; $l_{ik} = (a_{ik} - s)/l_{kk}$; }}

calc y: $y = L^T x$; $Ly = b$; $\quad i = \overline{1,n}$

$$y_i = \Big(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k\Big) / l_{ii};$$

calc X: $\quad x_i = \Big(y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} l_{ki} x_k\Big) / l_{ii} \quad i = \overline{n,1}$

R/s: afișează $X = x_i$

~~Jordan-Gauss (A, Ainv) scriem A | Ainv = J~~

Lagrange (X, Y, L)

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i(x)$$

$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$; $\quad |R_n(x)| \le M_{n+1} \cdot |\omega_n(x)| / (n+1)!$; $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$

$\omega_n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n} (x - x_i)$

Aitken (x, y, eta, eps, fx) ~~fx~~ $fx = \mathcal{L}_n(x)$ d/ai Aitken

$x = eta$

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$			
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$		
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$	
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$

$$L_{ij}(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_j & x_j - x \end{vmatrix}}{x_j - x_i}$$

$$L_{012\ldots n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01\ldots n-1} & x_0 - x \\ L_{12\ldots n} & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}$$

$\varepsilon_m = |L_{012\ldots m}(x) - L_{01\ldots m-1}(x)|$ if $\varepsilon_m < \varepsilon$ {exit; return ultimul elem cale $L_{01\ldots m}(x)$ }

dacă nu $\varepsilon_m = \min_{1 \le i \le n-1} \{\varepsilon_i\}$

R/s: afișăm ε_m, $fx = L_{012\ldots m}(x)$

$x_0 = a$

$y_0 = y(x_0)$

$i = \overline{0, n-1}$

Euler (a, b, h, y_0, n); n - nr de ~~subin~~ noduri a intervalului

$n = (b-a)/h + 1$; - partea întreagă doar

$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$ sau $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$. $x_0 = a$, $x += h$

$i = \overline{0, n-1}$

Euler modif (a, b, h, y_0, n) $n = (b-a)/h + 1$;

$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i)$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}))$ $x_0 = a$, $x += h$

Runge-Kutta (a, b, h, y_0, n) $n = (b-a)/h + 1$ $x_0 = a$, $x += h$

$i = \overline{0, n-1}$

$K_1^{(i)} = hf(x_i, y_i)$; $K_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2)$;

$K_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2)$; $K_4^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + K_3^{(i)})$;

$\Delta y_i = (K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)})/6$;

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$;

Norme de vectori:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

Prop: 1) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Norme de vectori:

$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

Vale și vect proprii:

$|A - \lambda \mathcal{I}| = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^{n-i} = 0$ - ec. caracteristică

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ - spectru matr. $\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ - rază spectrală

$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda^{n-i}$ - polinom caracteristic

$Q_n(\lambda) = (-1)^n P_n(\lambda) = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \ldots + q_n$ - polinom propriu $q_i = (-1)^n p_i$

$\left(A^n + \sum_{i=1}^{n} q_i A^{n-i}\right) x = 0$ $\sum_{i=1}^{n} q_i A^{n-i} x = -A^n x$

$v_i = A^{n-i} x$ $v_y = -A^n x$ $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$