Sprawozdanie nr 5

Siciński Paweł

$$f(x) \ = \ 2\, e^{\tan\left(-x^2 - 3x + 4\right)}$$

Miejsca zerowe:

funkcja $\tan(z)$ posiada nieskończenie wiele miejsc zerowych, a funkcja wykładnicza utnie zbiór wartości do przedziału dodatniego, w związku z czym zachodzi jedna z dwóch możliwości:

- funkcja podstawowa $f(x)$ posiada nieskończenie wiele miejsc zerowych
- funkcja podstawowa $f(x)$ nie posiada miejsc zerowych

Pochodna:

$$\frac{d}{dx}\, f(x) \ = \ -2\,(2x+3)\ e^{\tan\left(-x^2-3x+4\right)}\ \left(\sec\left(-x^2+3x-4\right)\right)^2 \ = \ -2\,(2x+3)\ \frac{\exp\left(\tan\left(-x^2+3x-4\right)\right)}{\left(\cos\left(-x^2+3x-4\right)\right)^2}$$

- najbardziej wewnętrzna jest funkcja $\tan(z)$, która wprowadza nieskończoną oscylację
- oscylacja ta zostanie zmodyfikowana wykładniczo $\exp(\tan(z))$ do wartości dodatnich
- skalowanie przez $(\cos(z))^2$ wprowadzi oscylację wzdłuż osi odciętych OX, co nieco wypłaszczy krzywą przy miejscach zerowych z jednej strony wykresu
- skalowanie tych dwóch przeciwstawnych oscylacji funkcją liniową $-az+3$ podzieli wykres pochodnej względem tej prostej, gdzie jedna część będzie się znajdowała w II ćwiartce układu współrzędnych, zaś druga część – w IV ćwiartce
- to oznacza, że funkcja podstawowa $f(x)$ podzieli się na dwa zbiory, z których jeden będzie zachowywał charakter rosnący, a drugi – malejący
- ekstremum funkcji podstawowej $f(x)$ należy zatem szukać w otoczeniu tego punktu podziałowego

Punkty stacjonarne:

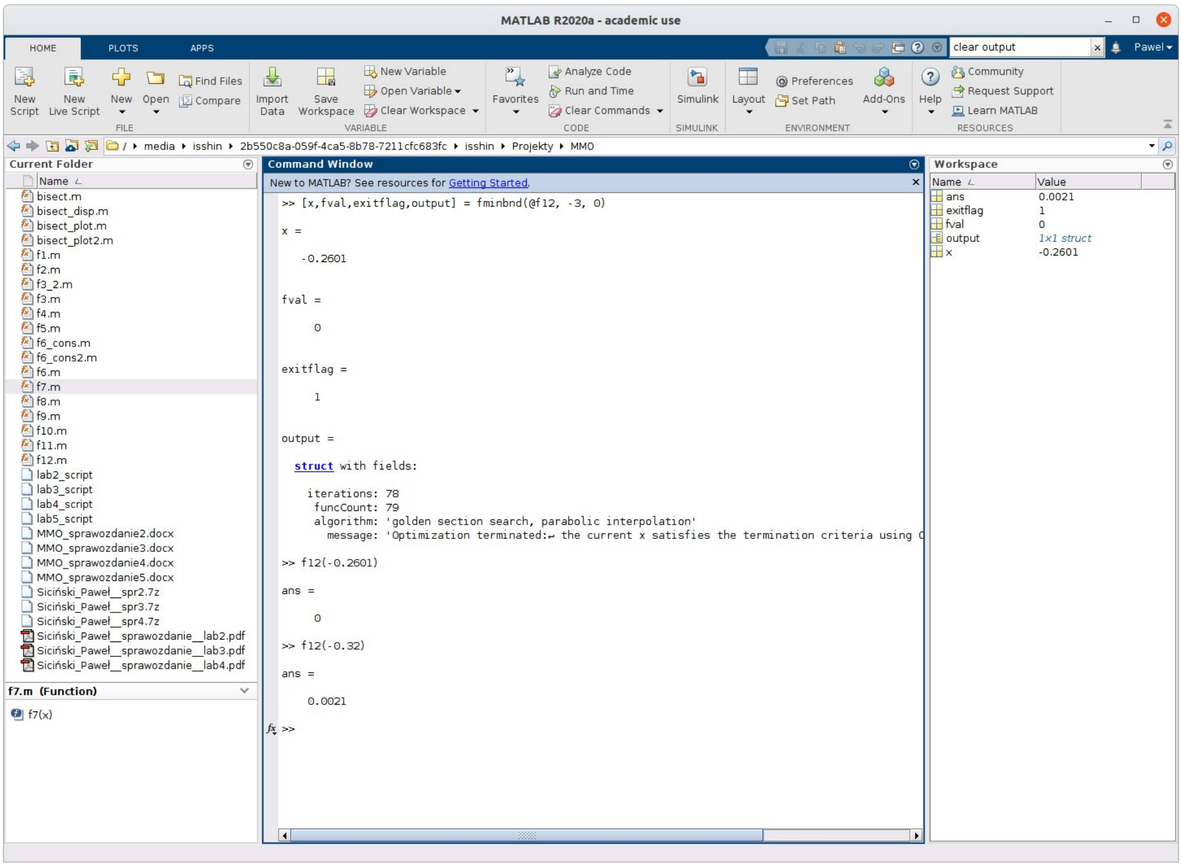
niespodziewanie, tylko jeden: $\bar{x} \ = \ -\frac{3}{2}$

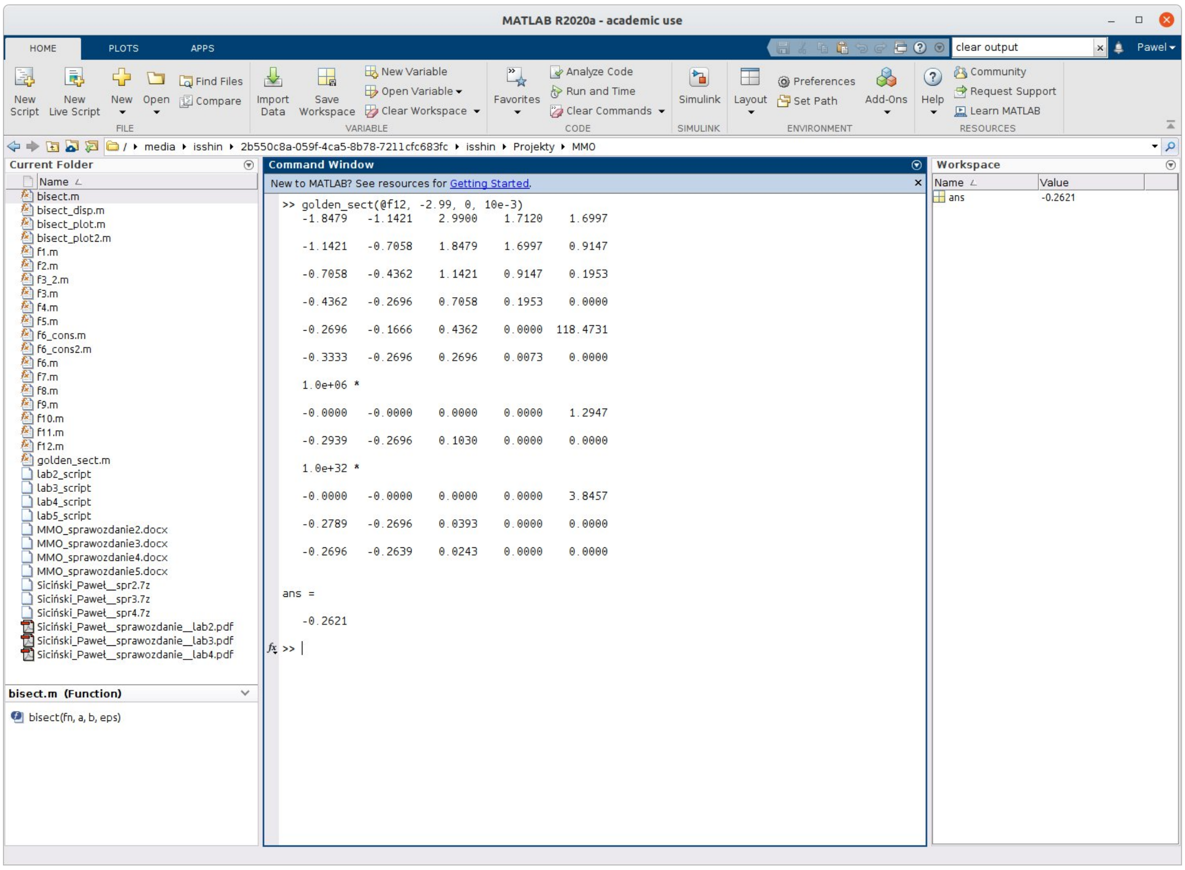
Przedział określoności:

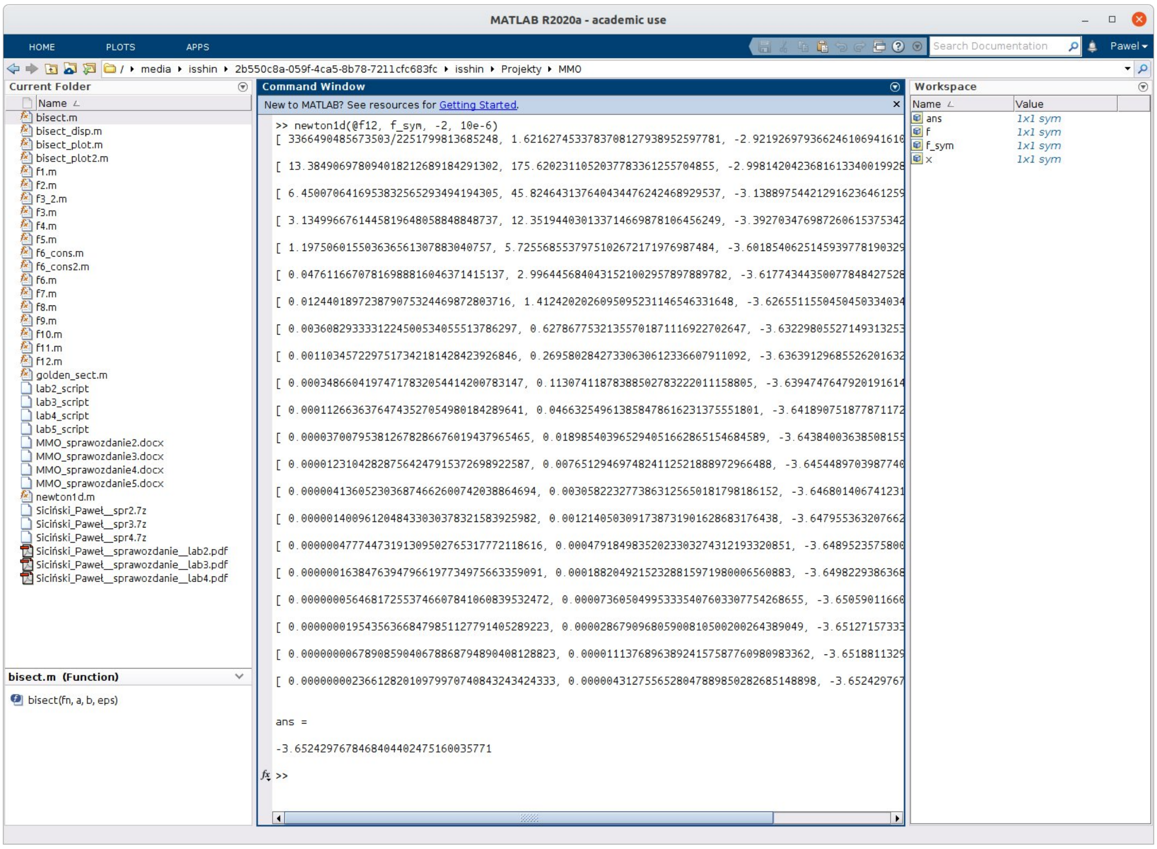
ze względu na to, że okres funkcji podstawowej $f(x)$ jest dynamiczny, tj. wyraża się funkcją, przyjmuje się przedział $(-3; 0)$; jest to przedział dla funkcji pochodnej reprezentujący miejsce podziałowe funkcji podstawowej

Rozwiązanie analityczne:

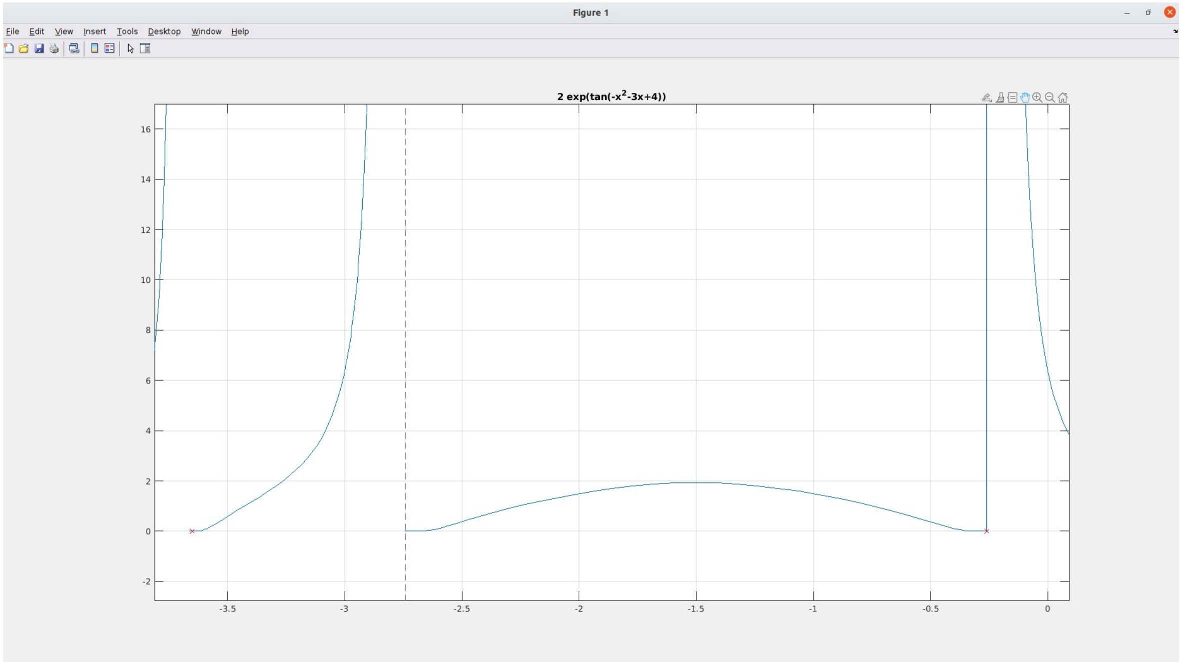
funkcja podstawowa $f(x)$ w punkcie $x = -\frac{3}{2}$ posiada lokalne maksimum, co determinuje brak rozwiązań globalnych



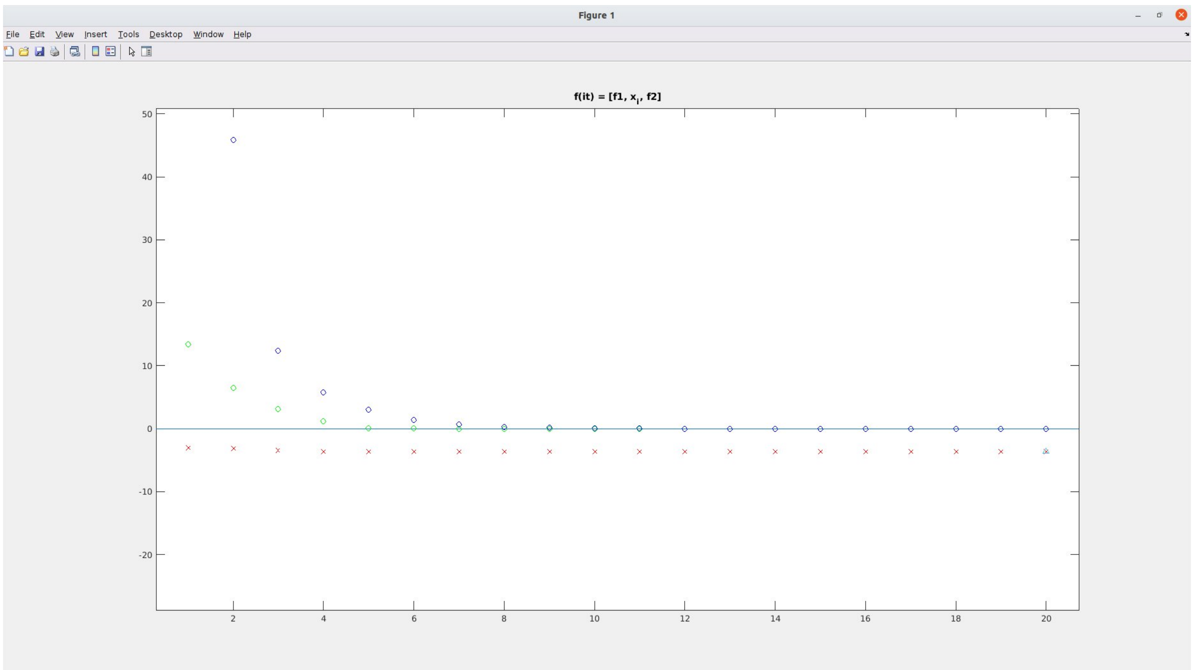

MATLAB R2020a - academic use
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> golden_sect(@f12, -2.99, 0, 10e-3)
-1.8479 -1.1421 2.9900 1.7120 1.6997
-1.1421 -0.7058 1.8479 1.6997 0.9147
-0.7058 -0.4362 1.1421 0.9147 0.1953
-0.4362 -0.2696 0.7058 0.1953 0.0000
-0.2696 -0.1666 0.4362 0.0000 118.4731
-0.3333 -0.2696 0.2696 0.0073 0.0000
1.0e+06 *
-0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 1.2947
-0.2939 -0.2696 0.1030 0.0000 0.0000
1.0e+32 *
-0.0000 -0.0000 0.0000 0.0000 3.8457
-0.2789 -0.2696 0.0393 0.0000 0.0000
-0.2696 -0.2639 0.0243 0.0000 0.0000
ans =
-0.2621
>>
Workspace
ans -0.2621


MATLAB R2020a - academic use
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
>> newton1d(@f12, f_sym, -2, 10e-6)
[3366490485673503/2251799813685248, 1.6216274533783708127938952597781, -2.921926979366246106941610
[13.384906978094018212689184291302, 175.6202311052037783361255704855, -2.9981420423681613340019928
[6.4500706416953832565293494194305, 45.824643137640434476242468929537, -3.138897544212916236461259
[3.1349966761445819648058848848737, 12.351944030133714669878106456249, -3.392703476987260615375342
[1.197506015503636561307883040757, 5.7255685537975102672171976987484, -3.6018540625145939778190329
[0.04761166707816988816046371415137, 2.9964456840431521002957897889782, -3.61774344350077848427528
[0.012440189723879075324469872803716, 1.4124202026095095231146546331648, -3.6265511550450450334034
[0.0036082933331224500534055513786297, 0.62786775321355701871116922702647, -3.63229805527149313253
[0.0011034572297517342181428423926846, 0.26958028427330630612336607911092, -3.63639129685526201632
[0.00034866041974717832054414200783147, 0.11307411878388502783222011158805, -3.6394747647920191614
[0.00011266363764743527054980184289641, 0.046632549613858478616231375551801, -3.641890751877871172
[0.000037007953812678286676019437965465, 0.018985403965294051662865154684589, -3.64384003638508155
[0.000012310428287564247915372698922587, 0.0076512946974824112521888972966488, -3.6454489703987740
[0.0000041360523036874662600742038864694, 0.0030582232773863125650181798186152, -3.646801406741231
[0.0000014009612048433030378321583925982, 0.0012140503091738731901628683176438, -3.647955363207662
[0.00000047774473191309502765317772118616, 0.00047918498352023303274312193320851, -3.6489523575800
[0.00000016384763947966197734975663359091, 0.00018820492152328815971980006560883, -3.6498229386368
[0.000000056468172553746607841060839532472, 0.000073605049953335407603307754268655, -3.65059011660
[0.000000019543563668479851127791405289223, 0.000028679096805900810500200264389049, -3.65127157333
[0.0000000067890859040678868794890408128823, 0.000011137689638924157587760980983362, -3.6518811329
[0.0000000023661282010979970740843243424333, 0.0000043127556528047889850282685148898, -3.652429767
ans =
-3.6524297678468404402475160035771
>>
Workspace
ans 1x1 sym
f 1x1 sym
f_sym 1x1 sym
x 1x1 sym

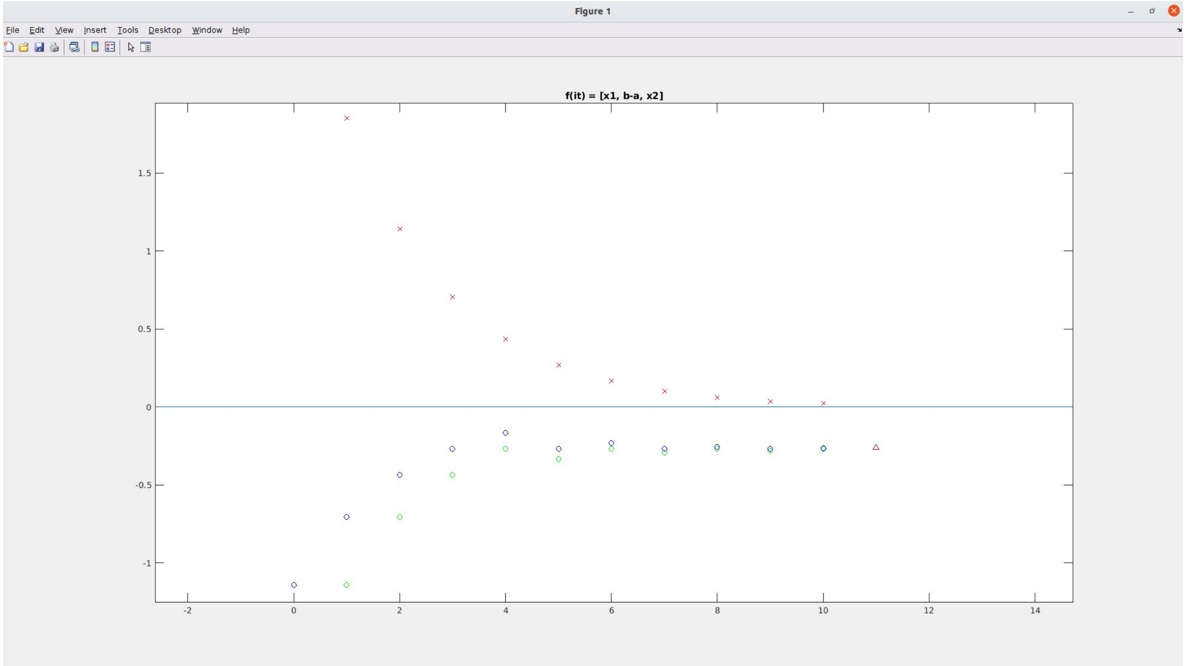
Wyniki dla $f(x) = 2\ \exp\left(\tan\left(-x^2 - 3x + 4\right)\right)$	
fminbnd(@f12, -3, 0)	-0.2601
golden_sect(@f12, -2.99, 0, 10e-3)	-0.2621
newton1d(@f12, f_sym, -2, 10e-6)	-3.6524297678468404402475160035771



Wykres zbieżności metody Newtona w zależności od iteracji:



Wykres zbieżności metody złotego podziału w zależności od iteracji:



$$g(x) = e^{\cos 2x}$$

Miejsca zerowe:
brak, jako że najbardziej zewnętrzną jest funkcja wykładnicza

Pochodna:

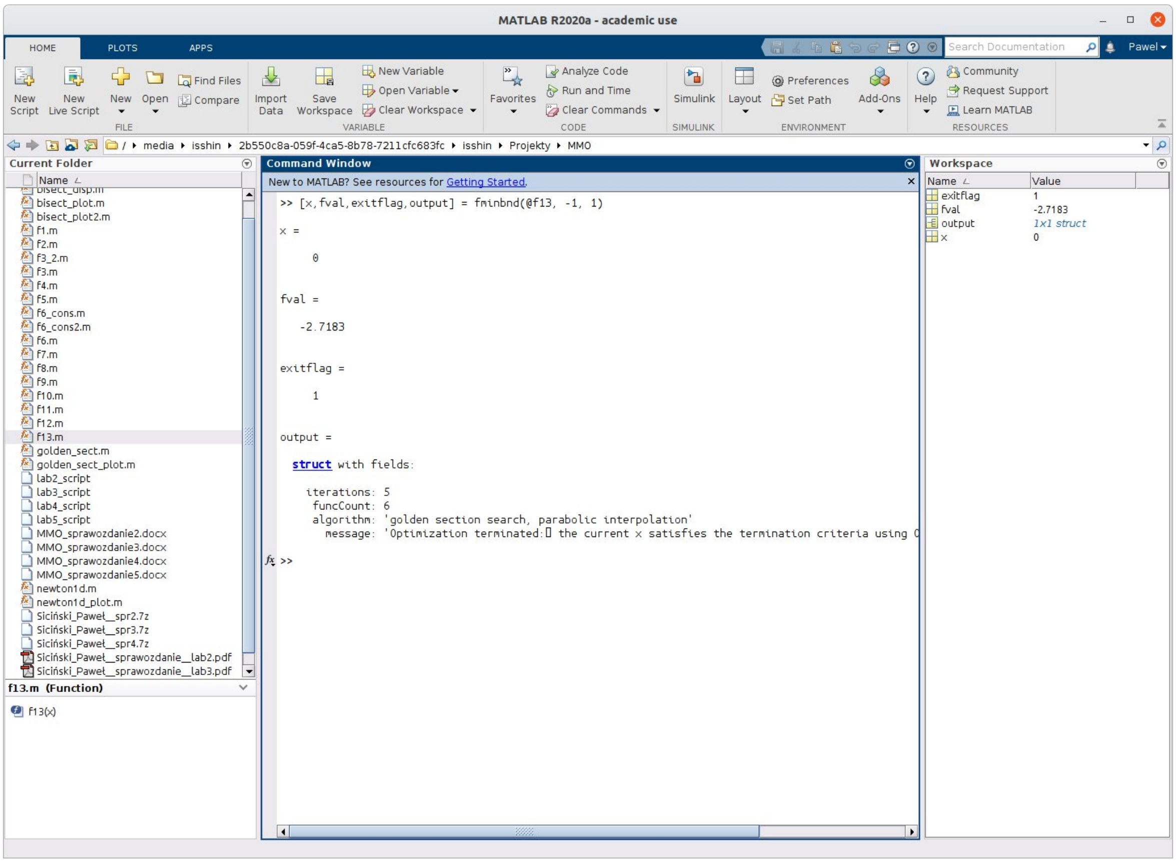
$$\frac{d}{dx} g(x) = -2 \sin 2x \, e^{\cos 2x}$$

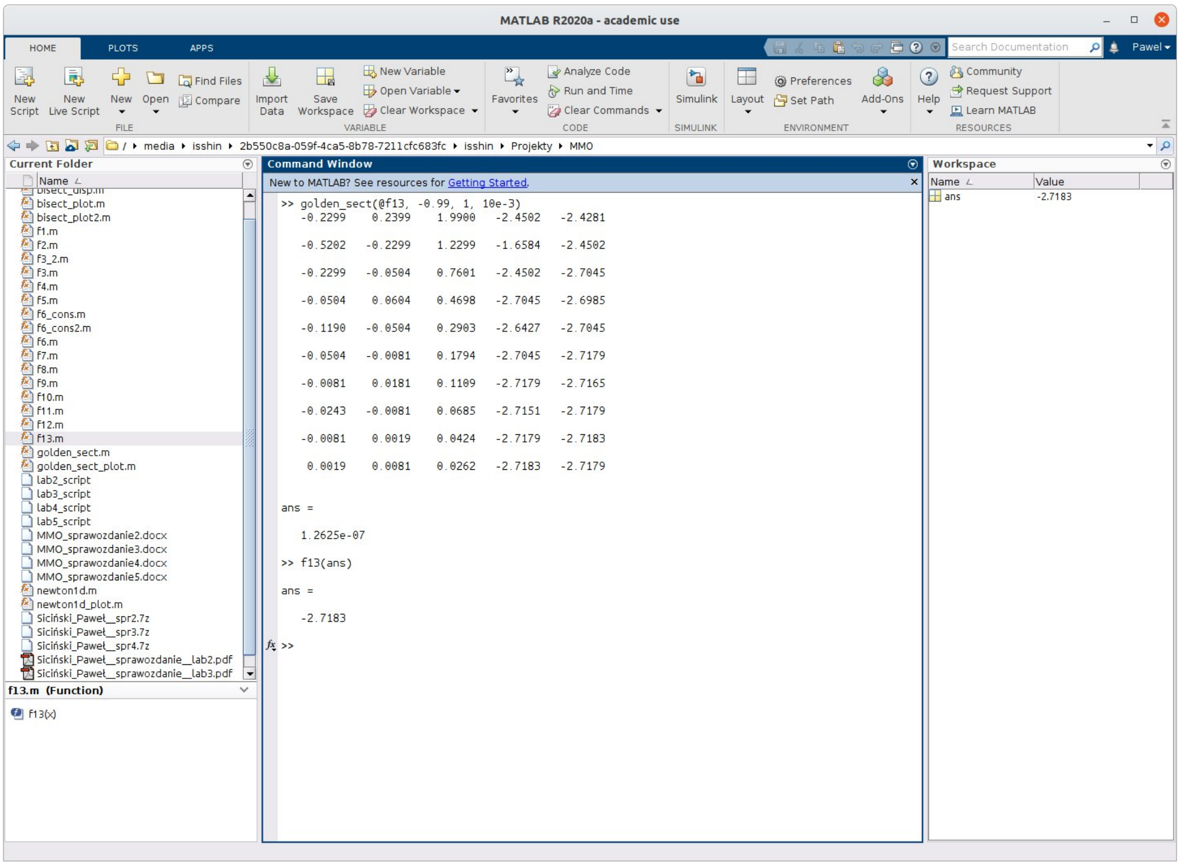
- najbardziej wewnętrzna funkcja $\cos(z)$ wprowadza oscylacje
- funkcja wykładnicza modyfikuje je jak wartość bezwzględna względem osi OX
- skalowanie sinusem przenosi zbiór wartości na przedział $(-2, 2) \pm \varepsilon$

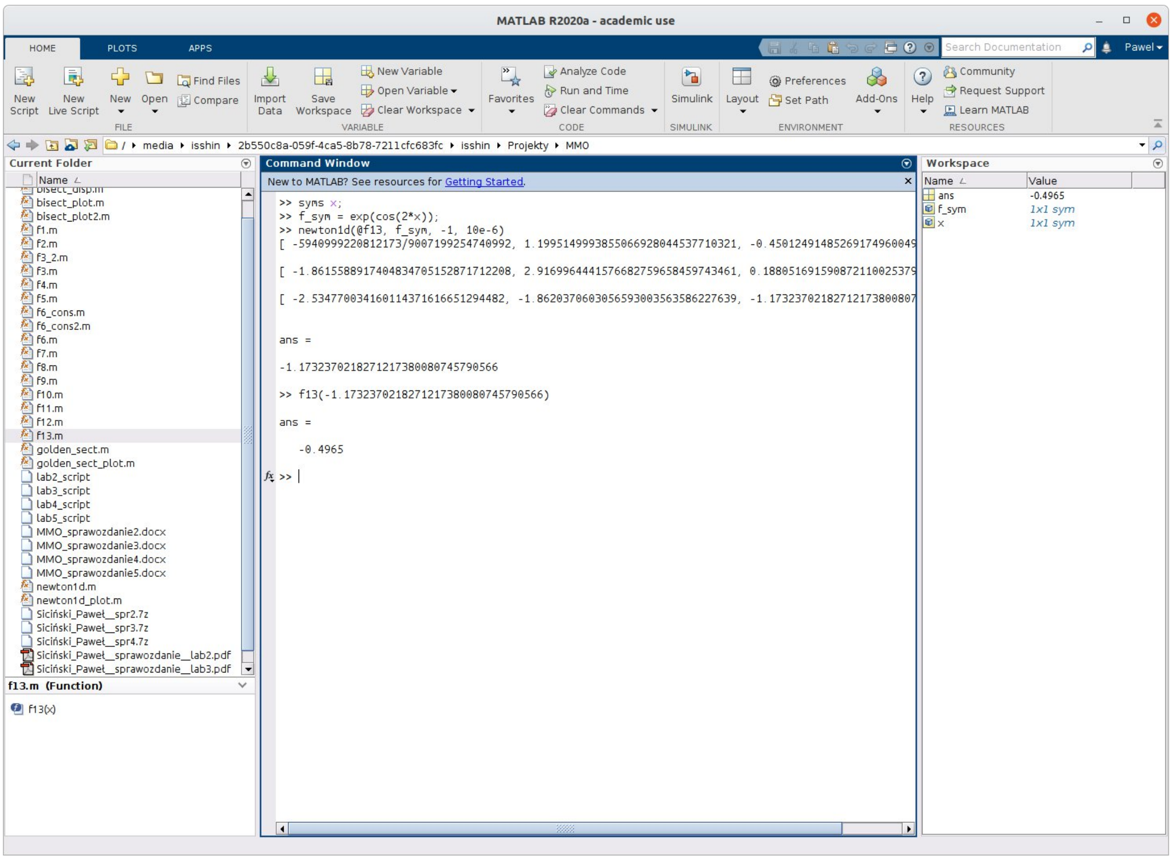
Punkty stacjonarne:
$\bar{x} = \frac{\pi}{2}k, k \in \boldsymbol{Z}$, a zatem jest ich nieskończenie wiele

Przedział określoności:
okres funkcji pochodnej wynosi $T < 2$, w związku z czym wystarczy wybrać dowolny przedział o długości 2; tutaj wybierzmy przedział wokół zera: $(-1, 1)$

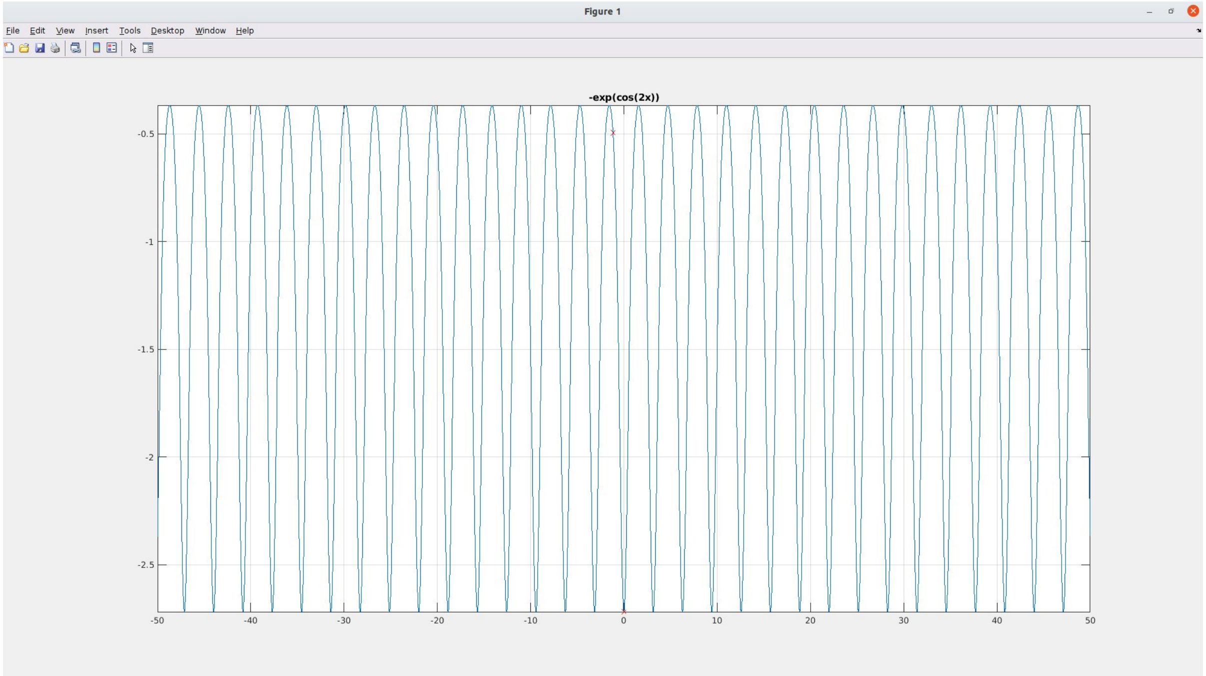
Rozwiązanie analityczne:
brak globalnych maksimów, lecz jednak maksimów jako takich jest nieskończenie wiele i leżą one na prostej $y : y \approx 3$



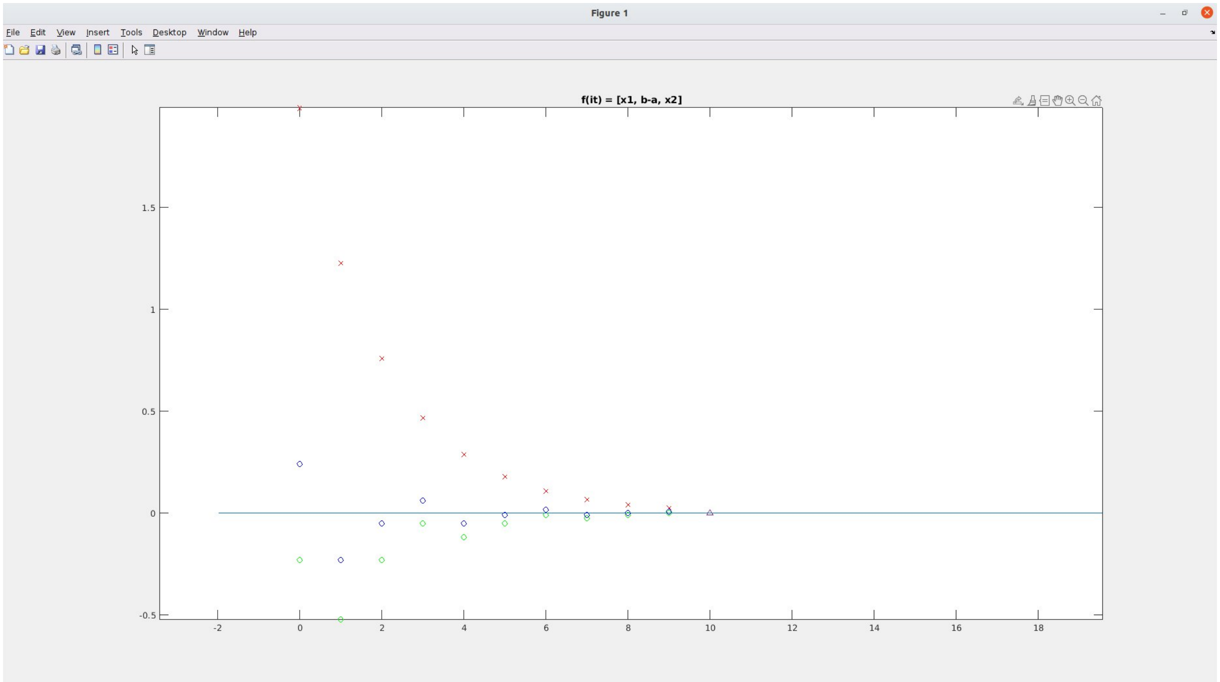

MATLAB R2020a - academic use
Command Window
>> golden_sect(@f13, -0.99, 1, 10e-3)
-0.2299 0.2399 1.9900 -2.4502 -2.4281
-0.5202 -0.2299 1.2299 -1.6584 -2.4502
-0.2299 -0.0504 0.7601 -2.4502 -2.7045
-0.0504 0.0604 0.4698 -2.7045 -2.6985
-0.1190 -0.0504 0.2903 -2.6427 -2.7045
-0.0504 -0.0081 0.1794 -2.7045 -2.7179
-0.0081 0.0181 0.1109 -2.7179 -2.7165
-0.0243 -0.0081 0.0685 -2.7151 -2.7179
-0.0081 0.0019 0.0424 -2.7179 -2.7183
0.0019 0.0081 0.0262 -2.7183 -2.7179
ans =
1.2625e-07
>> f13(ans)
ans =
-2.7183
>>
Workspace
ans -2.7183


MATLAB R2020a - academic use
Command Window
>> syms x;
>> f_sym = exp(cos(2*x));
>> newton1d(@f13, f_sym, -1, 10e-6)
[-5940999220812173/9007199254740992, 1.1995149993855066928044537710321, -0.45012491485269174960049
[-1.8615588917404834705152871712208, 2.9169964441576682759658459743461, 0.18805169159087211002537
[-2.534770034160114371616651294482, -1.8620370603056593003563586227639, -1.17323702182712173800807
ans =
-1.1732370218271217380080745790566
>> f13(-1.1732370218271217380080745790566)
ans =
-0.4965
>>
Workspace
ans -0.4965
f_sym 1x1 sym
x 1x1 sym

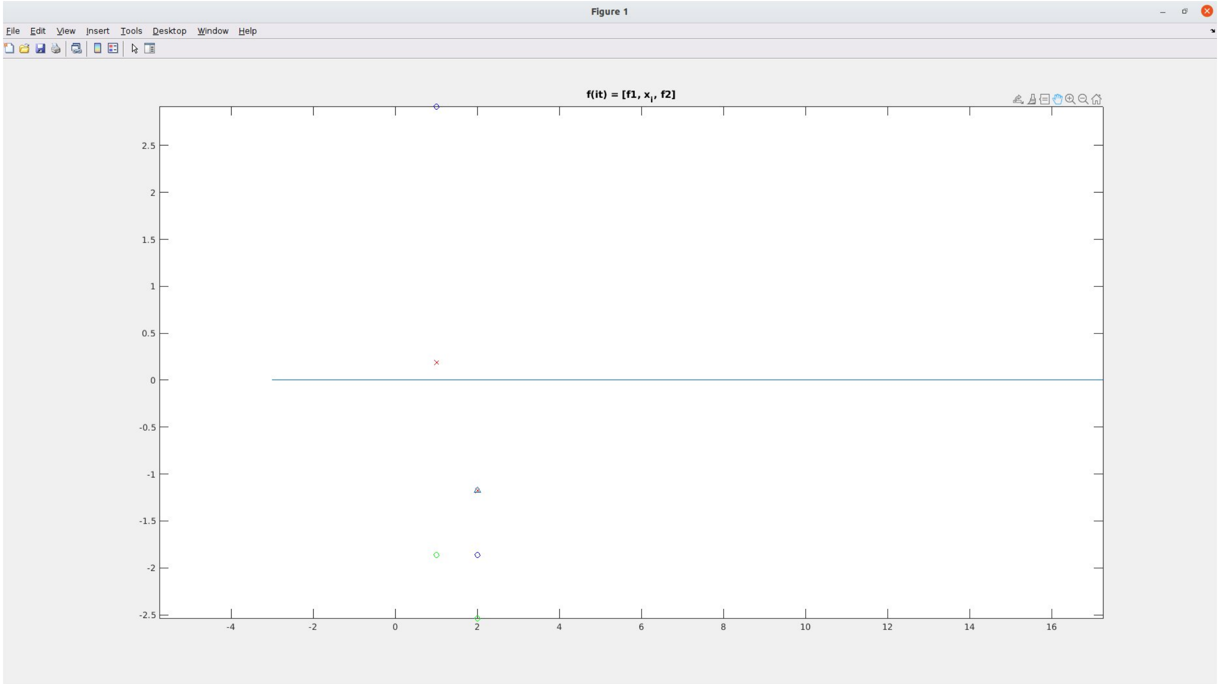
Wyniki dla $g(x) = \exp(\cos(2x))$		
	x	y
fminbnd(@f13, −1, 1)	0	−2.7183
golden_sect(@f13, −0.99, 1, 10e−3)	1.2625e−07	−2.7183
newton1d(@f13, f_sym, −1, 10e−6)	−1.1732370218271217380080745790566	−0.4965



Wykres zbieżności metody złotego podziału w zależności od iteracji:



Wykres zbieżności metody Newtona w zależności od iteracji:



$$h(x) = -5x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 2$$

Miejsca zerowe:
jedno rozwiązanie rzeczywiste $x \approx -0.87$

- dla wielomianu 5–go stopnia możemy mieć co najwyżej 5 pierwiastków
- jako że wartości współczynników maleją bezwzględnie krzywa będzie miała charakter krzywej $y = x^5 \cong x^3 + \Delta$
- w związku z powyższym miejsc zerowych oczekuje się w otoczeniu zera

Pochodna:

$$\frac{d}{dx} h(x) = -25x^4 + 12x^3 - 6x$$

- krzywa $y = x^4$ to krzywa dzwonowa określona dodatnio
- mogą istnieć co najwyżej cztery punkty stacjonarne

Punkty stacjonarne:

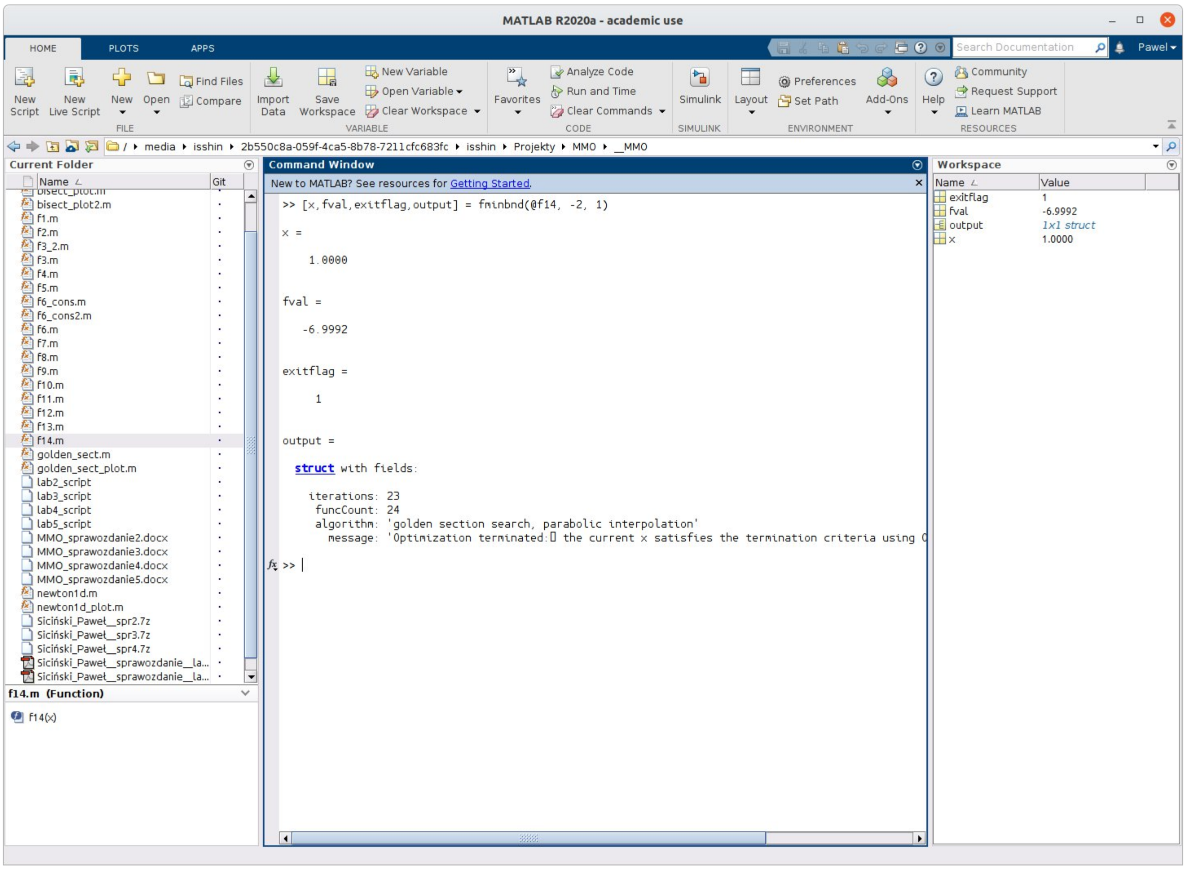
dwa rozwiązania rzeczywiste $x_1 = 0$, $x_2 \approx -0.5$

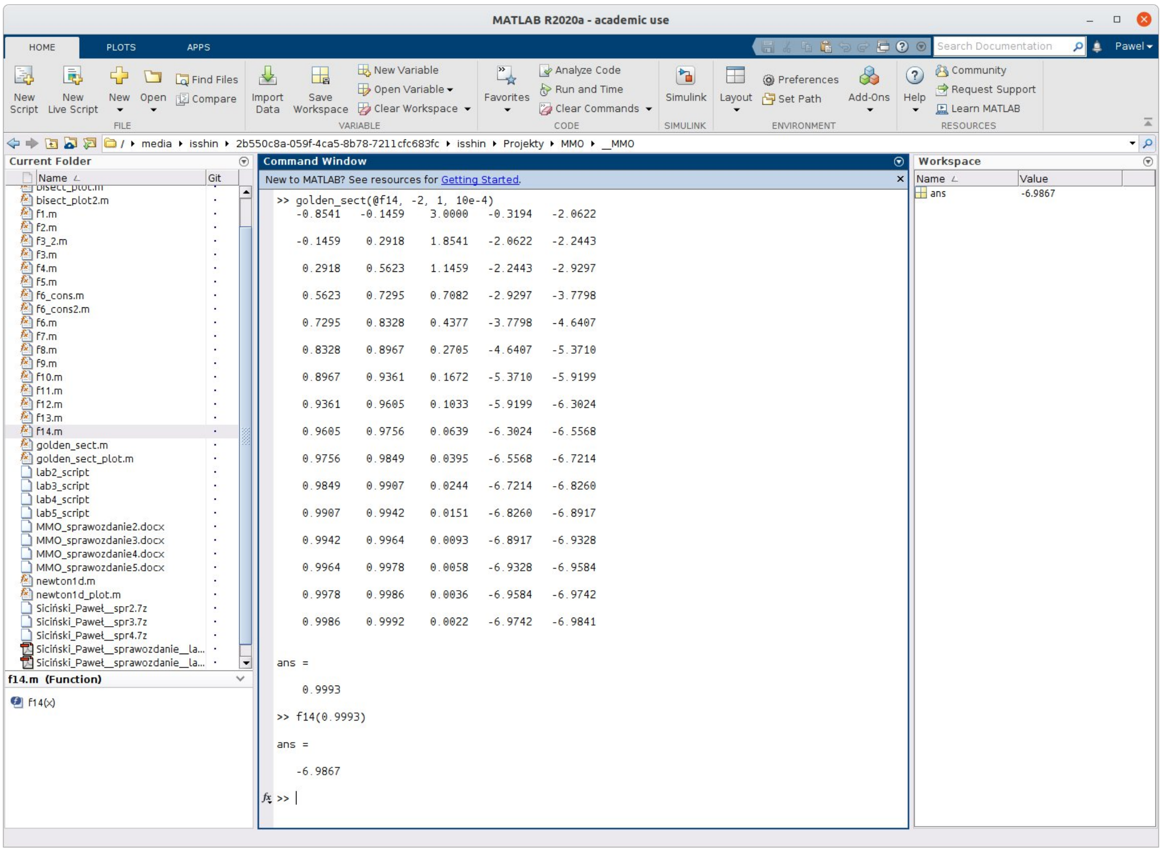
Przedział określoności:

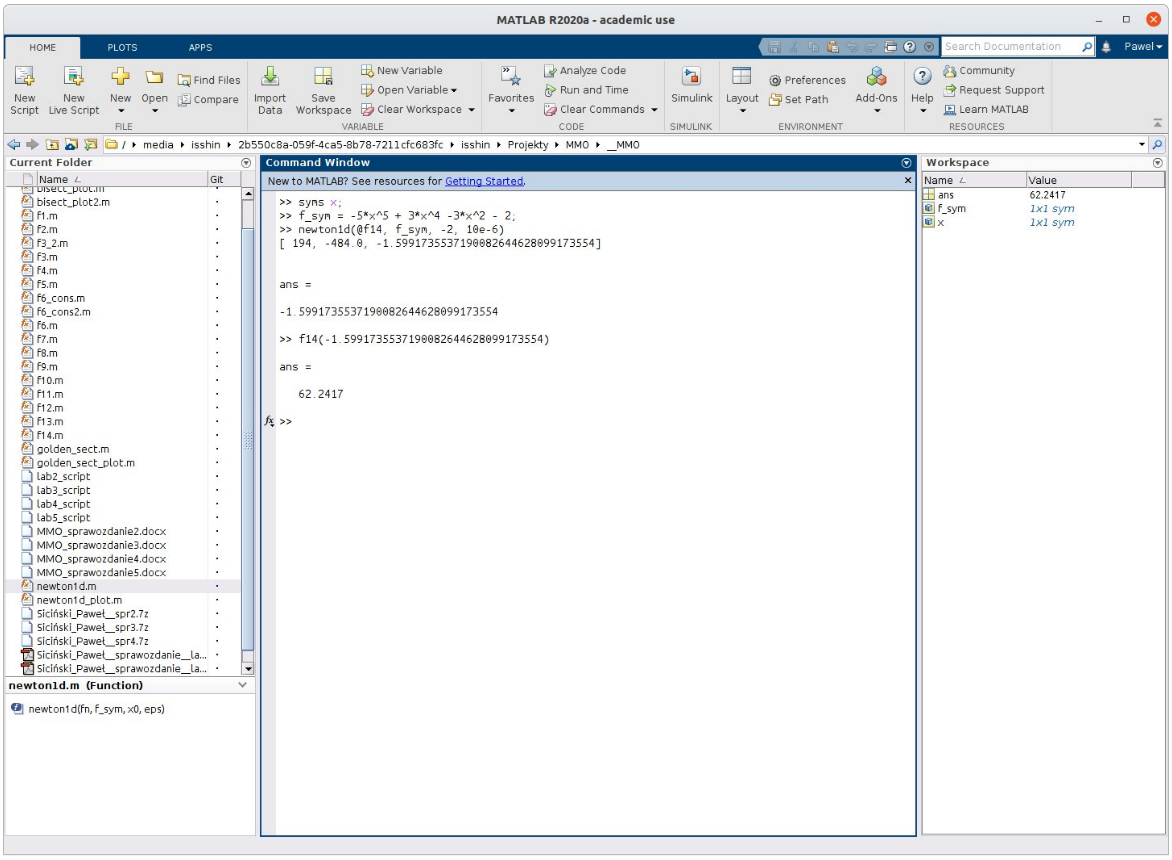
przedział $(-2, 1)$ obejmuje punkty stacjonarne x_1 i x_2

Rozwiązanie analityczne:

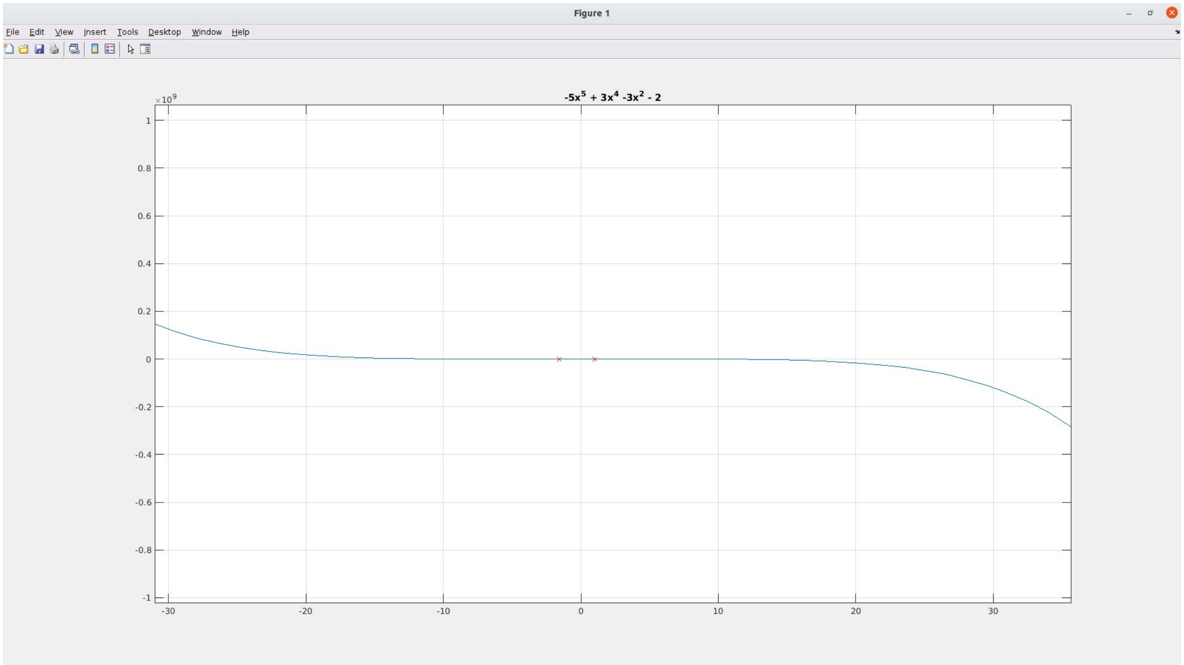
brak; funkcja podstawowa $h(x)$ to po prostu przeskalowana niemalejąca krzywa $y = x^3$, przy czym w punkcie $x \approx -0.5$ znajduje się minimum lokalne



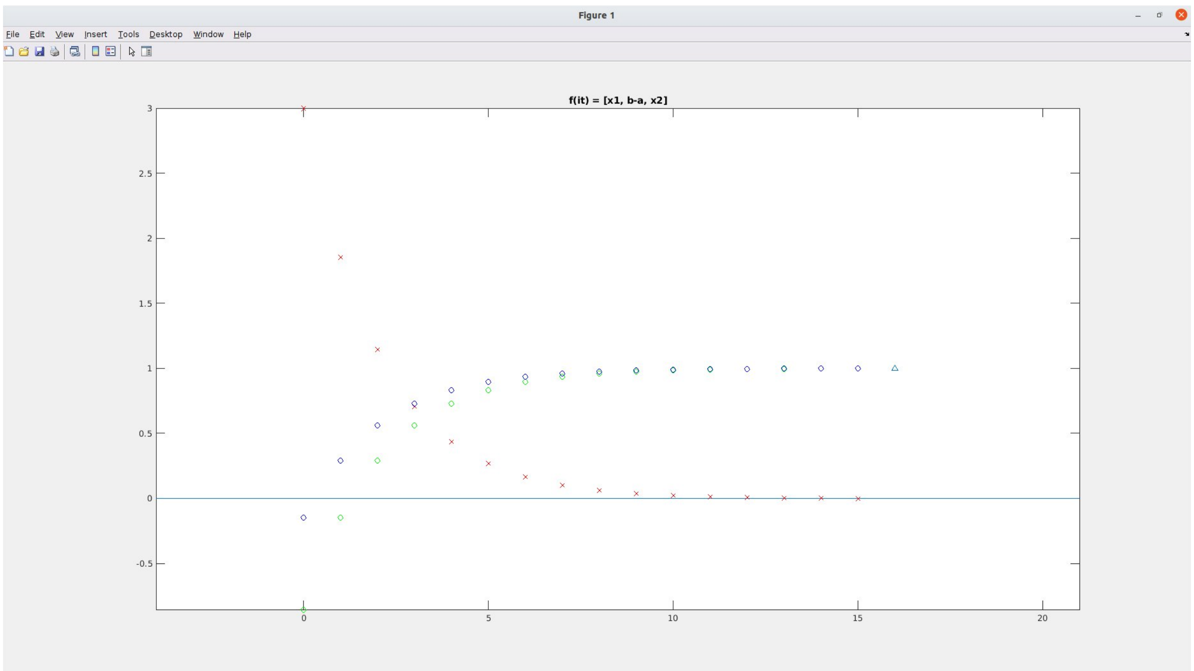

MATLAB R2020a - academic use
Command Window
>> golden_sect(@f14, -2, 1, 10e-4)
-0.8541 -0.1459 3.0000 -0.3194 -2.0622
-0.1459 0.2918 1.8541 -2.0622 -2.2443
0.2918 0.5623 1.1459 -2.2443 -2.9297
0.5623 0.7295 0.7082 -2.9297 -3.7798
0.7295 0.8328 0.4377 -3.7798 -4.6407
0.8328 0.8967 0.2705 -4.6407 -5.3710
0.8967 0.9361 0.1672 -5.3710 -5.9199
0.9361 0.9605 0.1033 -5.9199 -6.3024
0.9605 0.9756 0.0639 -6.3024 -6.5568
0.9756 0.9849 0.0395 -6.5568 -6.7214
0.9849 0.9907 0.0244 -6.7214 -6.8260
0.9907 0.9942 0.0151 -6.8260 -6.8917
0.9942 0.9964 0.0093 -6.8917 -6.9328
0.9964 0.9978 0.0058 -6.9328 -6.9584
0.9978 0.9986 0.0036 -6.9584 -6.9742
0.9986 0.9992 0.0022 -6.9742 -6.9841
ans =
0.9993
>> f14(0.9993)
ans =
-6.9867
Workspace
ans -6.9867


MATLAB R2020a - academic use
Command Window
>> syms x;
>> f_sym = -5*x^5 + 3*x^4 -3*x^2 - 2;
>> newton1d(@f14, f_sym, -2, 10e-6)
[194, -484.0, -1.5991735537190082644628099173554]
ans =
-1.5991735537190082644628099173554
>> f14(-1.5991735537190082644628099173554)
ans =
62.2417
Workspace
ans 62.2417
f_sym 1x1 sym
x 1x1 sym

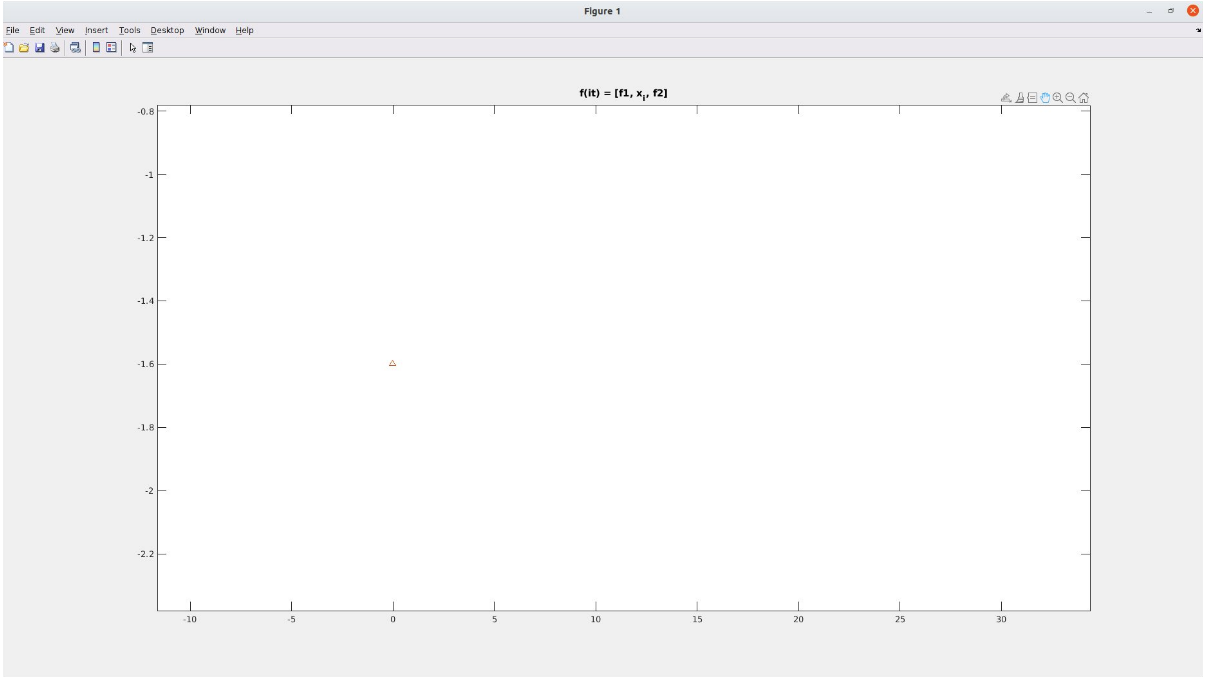
Wyniki dla $h(x) = -5x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 2$		
	x	**y**
fminbnd(@f14, −2, 1)	1.0000	−6.9992
golden_sect(@f14, −2, 1, 10e−4)	0.9993	−6.9867
newton1d(@f14, f_sym, −2, 10e−6)	−1.5991735537190082644628099173554	62.2417



Wykres zbieżności metody złotego podziału w zależności od iteracji:



Wykres zbieżności metody Newtona w zależności od iteracji:



Powierzchnia okna

Ograniczenia (biorąc pod uwagę długość łuku i pole wycinka kołowego):

$$\begin{cases} x + 2y + \left(\dfrac{180^{o}}{360^{o}}\, 2\pi\, \dfrac{x}{2}\right) \\ P \;=\; xy + \left(\dfrac{180^{o}}{360^{o}}\, \pi \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2}\right) \end{cases} = \begin{cases} x\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 5 \\ f(x,y) \;=\; xy + \dfrac{\pi}{2}\, x^{2} \end{cases} = \begin{cases} \textit{obwód} \\ \textit{pole powierzchni} \end{cases}$$

Pole prostokąta zawierającego okno: $x\left(y+\frac{x}{2}\right)$.

ELIMINACJA ZMIENNYCH

Ograniczenia:

$$\begin{cases} x\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right) + 2y = 5 \\ xy + \dfrac{\pi}{2}x^{2} = x\left(y+\dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$$

Funkcja celu:

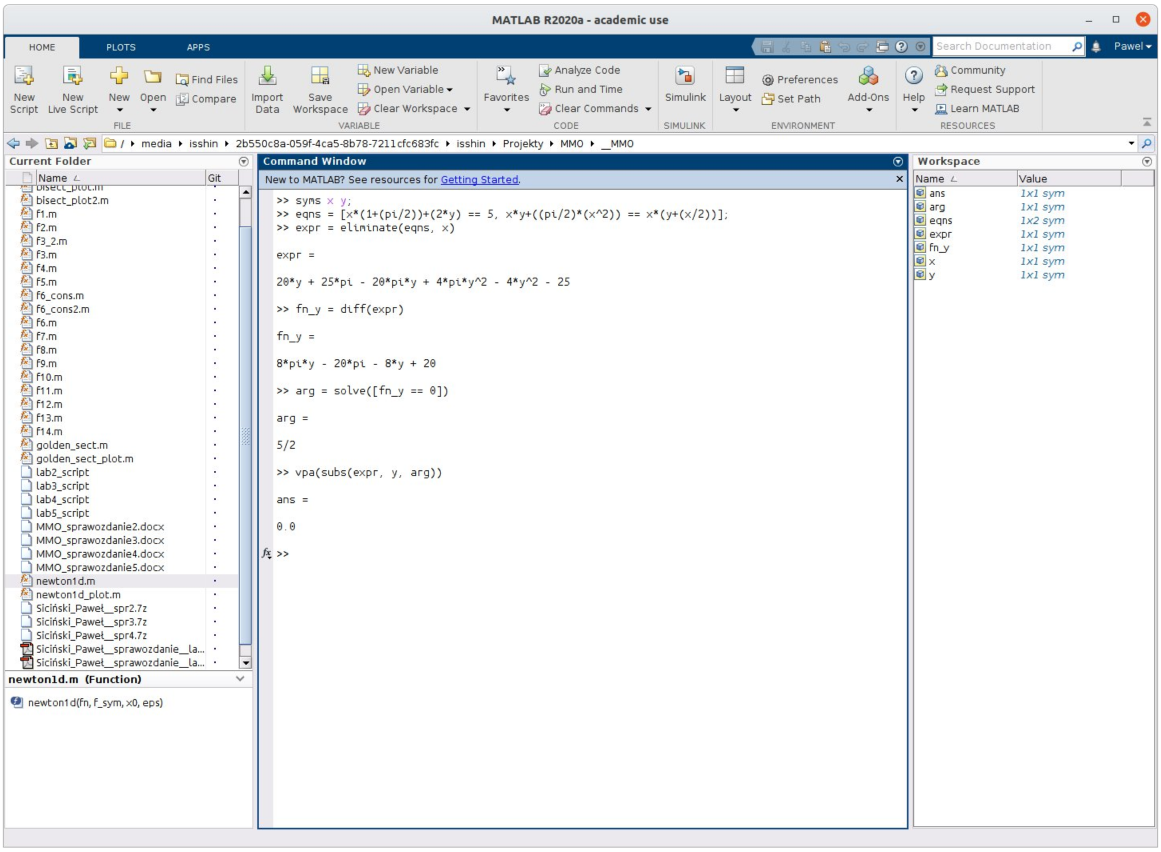
$$f(y) = 4y^2(\pi - 1) + 20y(1 - \pi) + 25(\pi - 1)$$

$$\frac{d}{dy} f(y) = 8y(\pi - 1) + 20(1 - \pi)$$

Punkt stacjonarny: $y = \frac{5}{2}$

$$\min f(y) = \left\{ y = \frac{5}{2}, x = 0 \right\}$$

maksimum globalne nie istnieje



Metoda podstawienia

Ograniczenia:

$$\begin{cases} x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)+2y=5 \\ f(x,y) \ = \ xy+\frac{\pi}{2}x^2 \end{cases}$$

$$y=\left(\frac{\pi-2}{4}\right)x+\frac{5}{2}$$

Funkcja celu:

$$y \ \rightarrow \ f(x,y) \ \coloneqq \ f(x)=\left(\frac{3\pi-2}{4}\right)x^2+\frac{5}{2}x$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\left(\frac{3}{2}\pi-1\right)x+\frac{5}{2}$$

$$\hat{x} \ = \ \frac{5}{2-3\pi} \ < \ 0$$

$$f(\hat{x}) \ = \ \frac{25}{8-12\pi} \ < \ 0$$

Wynika z tego, że $\hat{x}$ dotyczy minimum lokalnego, zaś maksimum globalne nie istnieje.