Sprawozdanie: laboratorium nr 6+7

Siciński Paweł

Zadanie 1

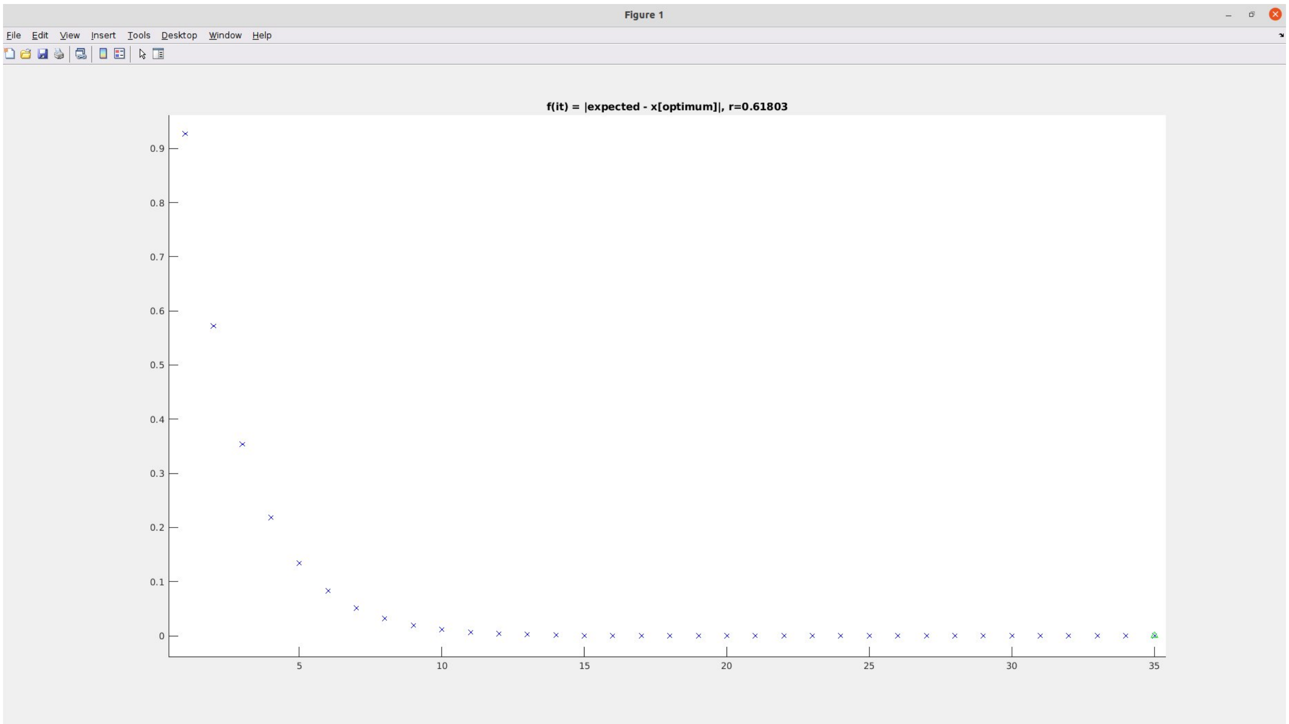
Funkcja: $f(x) = \left(3x^3 + x^2\right) + \sin\left(x^2\right)$

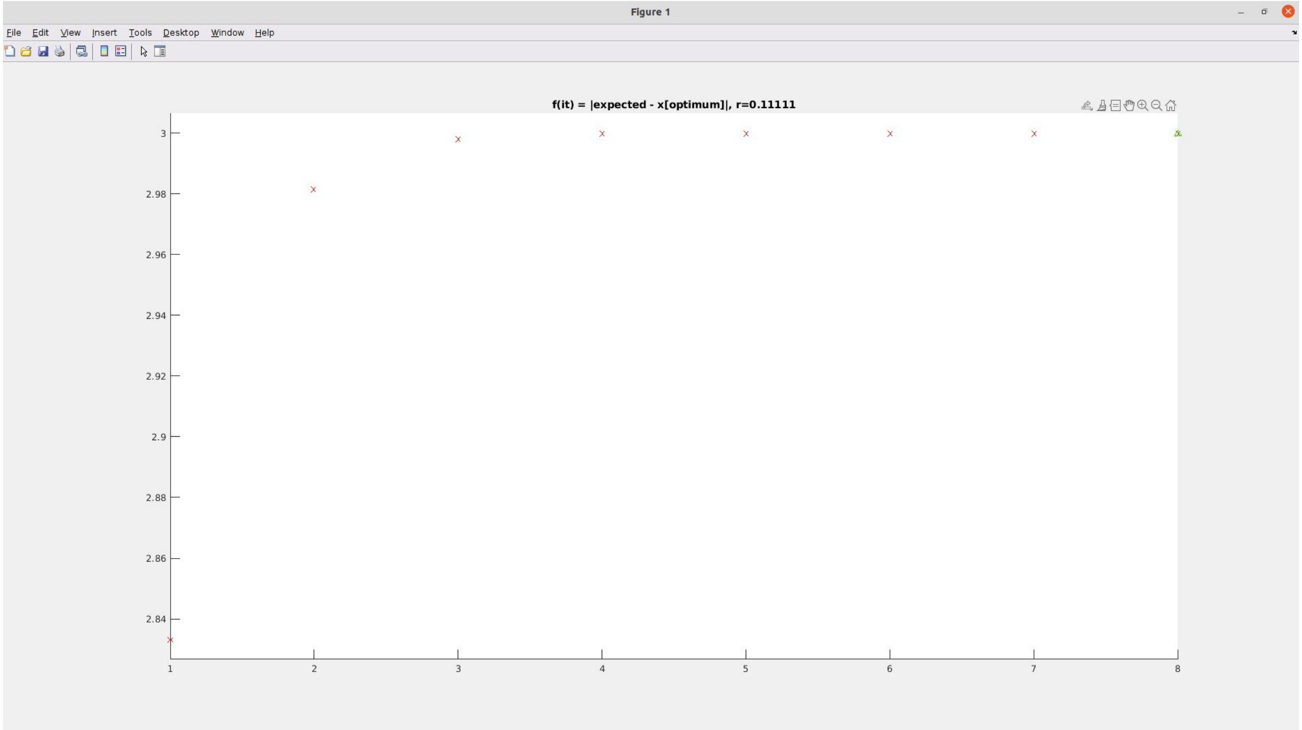
Rozwiązanie analityczne: $\min f(x) \rightarrow \hat{x} = 0$

Pliki wynikowe:

zad1_a.out, gdzie $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\widehat{x_1} = 0.000000072698232206780578223897870815072$

zad1_b.out, gdzie $r = \frac{1}{9}$, $\widehat{x_2} = 2.9999999651541403118718380431346$





Zadanie 2

Funkcja: $g(x) = \left|\tan\left(2x^3 + 4x^2 - 16x\right)\right|$

Rozwiązanie analityczne: $\max g(x) \ \rightarrow \ nie\ istnieje$

Plik wynikowy:

zad2_a.out, gdzie $x_0 = \widehat{x_1}$, $expected = 0$

zad2_b.out, gdzie $x_0 = \widehat{x_2}$, $expected = 3$

zad2_c.out, gdzie $x_0 = 1$, $expected = 0$

$x_{\widehat{lokalne}} = 1.0971675458730475083966077140283$

Pochodne:

$$w_0 = 2x^3 + 4x^2 - 16x$$

$$w_1 = -6x^2 - 8x + 16$$

$$w_2 = -12x - 8$$

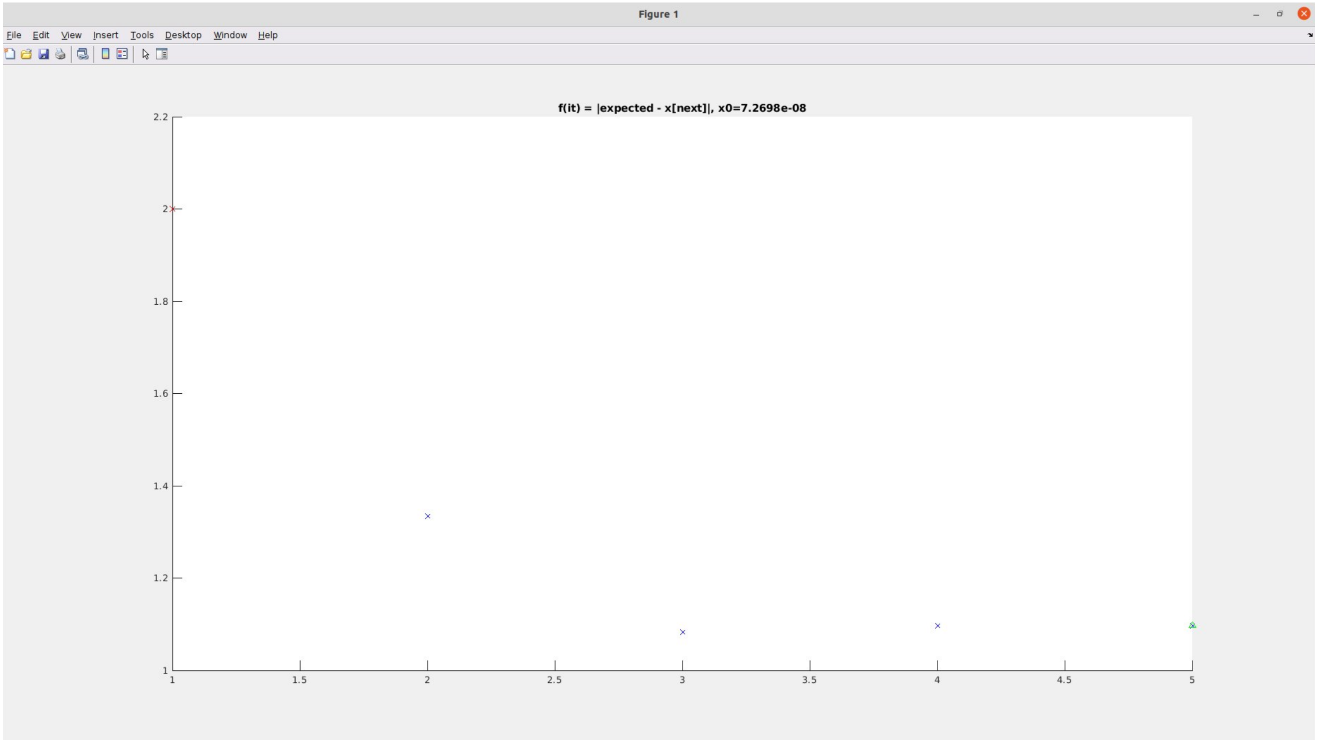
$$\frac{d}{dx}\, g(x) = -\frac{(w_1)\ \tan(w_0)}{|\tan(w_0)|} = -\, w_1 \frac{\sin(w_0)\ \cos(w_0)}{(\cos w_0)^3\ |\sin w_0|} = -\, w_1 \frac{\sin w_0}{(\cos w_0)^3}\ |\cot w_0|$$

$$\frac{dg}{d^2x} = w_1\ (\sec w_0)^4\ |\cot w_0| - \frac{w_1^2 (\csc w_0)^2 (\sec w_0)^2}{|\cot w_0|} + 2w_1^2\ (\tan w_0)^2\ (\sec w_0)^2\ |\cot w_0| +$$

$$-\, w_2\ \tan(w_0)\ (\sec w_0)^2\ |\cot w_0|\ =$$

$$= -\left(|\cos w_0|\ (\cos w_0)^5\right) \left(\frac{w_1\left(1 + 2w_1\ (\sin w_0)^2\right)}{|\sin w_0|\ (\cos w_0)^9} - \frac{w_1^2 \cos w_0 + w_2\ (\sin w_0)^3}{|\sin w_0|\ (\sin w_0)^2\ (\cos w_0)^8} \right)$$

Ilość punktów stacjonarnych i ilość punktów przegięcia jest nieskończona. Punkty przegięcia pokrywają się z punktami stacjonarnymi, co oznacza, że nie ma punktu globalnego. W przypadku obu funkcji występuje nieskończona ilość asymptot pionowych.



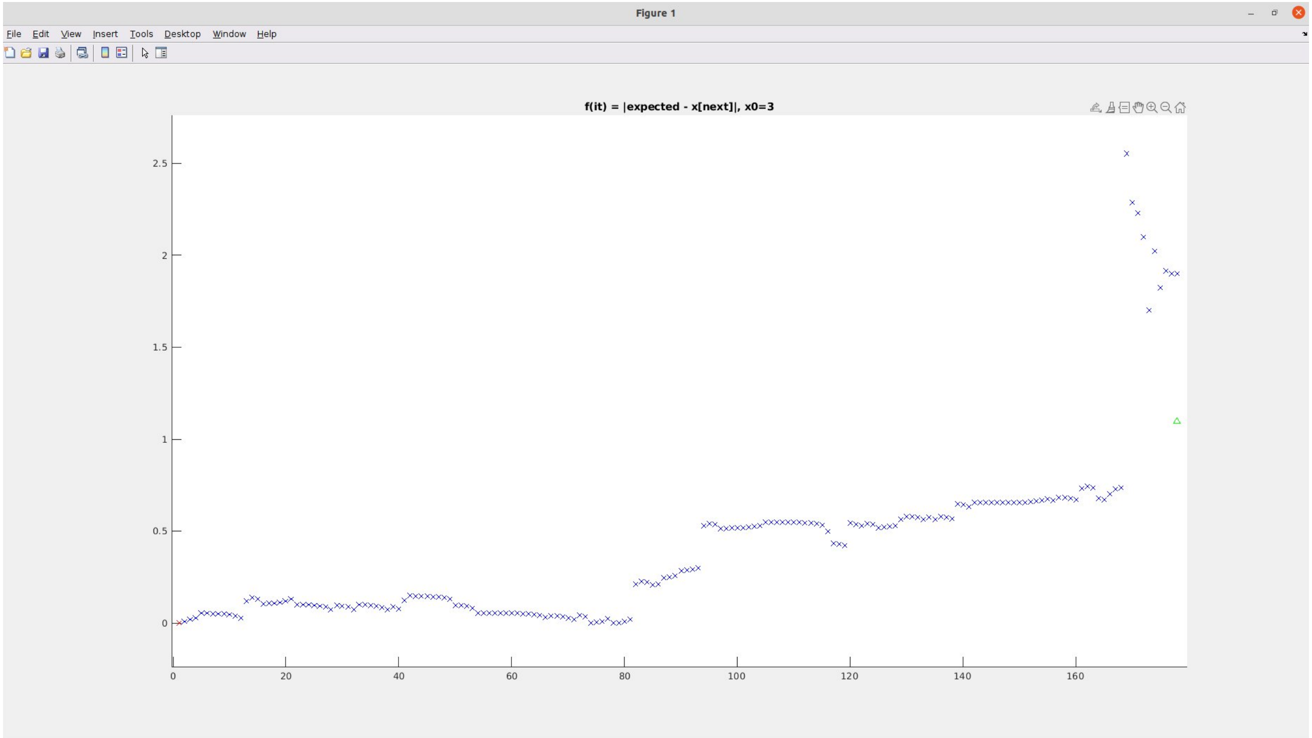


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
f(it) = |expected - x[next]|, x0=3

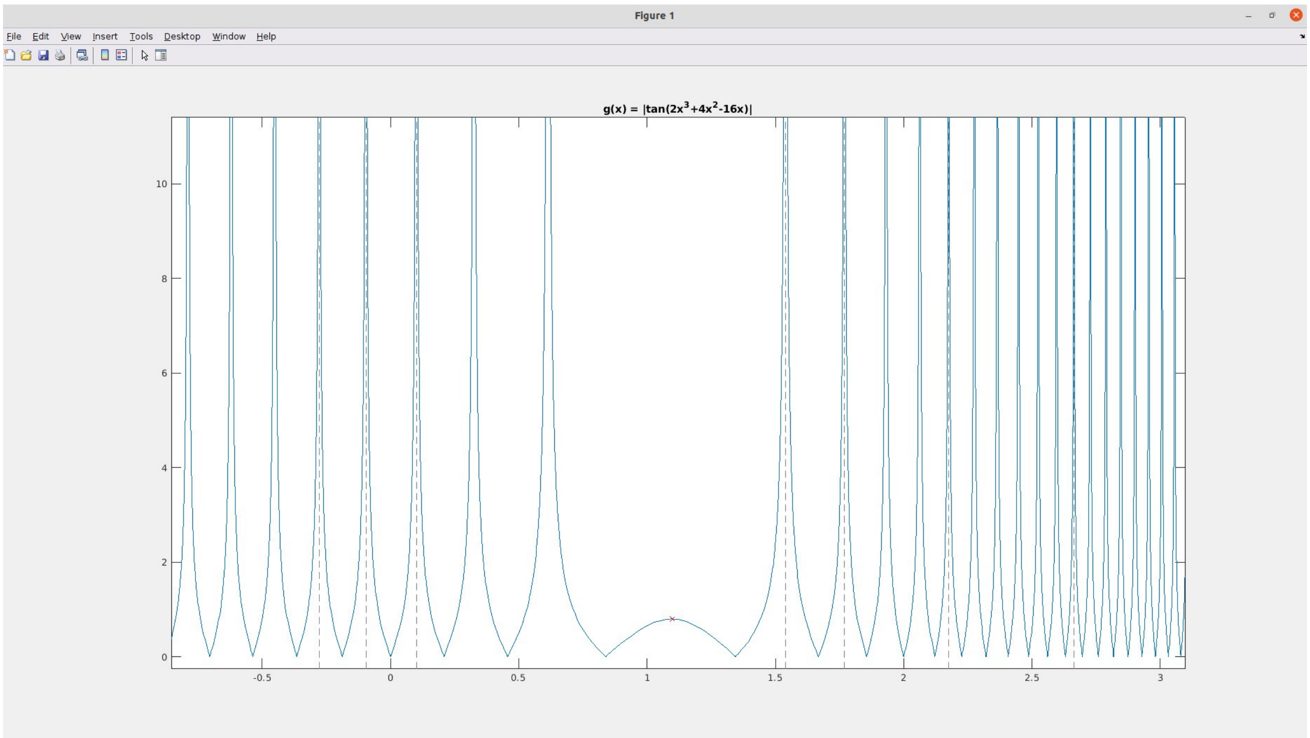


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
g(x) = |tan(2x³+4x²-16x)|

Zadanie 3

Rozwiązanie analityczne

Funkcja celu: $V(h) = h(14-2h)(10-2h) = 4h^3 - 48h^2 + 140h$

Pola powierzchni: $P_{tektury} = (h + (10-2h) + h)(h + (14-2h) + h) = 140$

$$P_{wycinków} = 4h^2$$

$$P_{pudełka} = P_{tektury} - P_{wycinków} = -4h^2 + 140 = 2h(10-2h) + 2h(14-2h) + (14-2h)(10-2h)$$

Ograniczenia: $V(h) > 0 \;\Rightarrow\; h \in (0;5) \;\cup\; (7;\infty) \;\rightarrow\; h \in (0;5)$

Oczekuje się, że objętość będzie nieujemna i jednocześnie nie interesuje nas przedział, gdzie nie znajdziemy liczbowej wartości ekstremum.

Metoda rozwiązania:

- wyznaczyć pochodną
- określić miejsca zerowe pochodnej, żeby ustalić punkty stacjonarne
- wybrać punkt stacjonarny maksymalizujący wysokość pudełka h

Warunek rozwiązania
mając zbiór punktów stacjonarnych $\{h_1, h_2, \ldots\}$ wybieramy $h \;\rightarrow\; \max\{h_i\} \;\wedge\; h > 0 \;\wedge\; h \in (0;5)$

Rozwiązanie:

$$\begin{cases} V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 140x \\ x \in (0;5) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = 12x^2 - 96x + 140$$

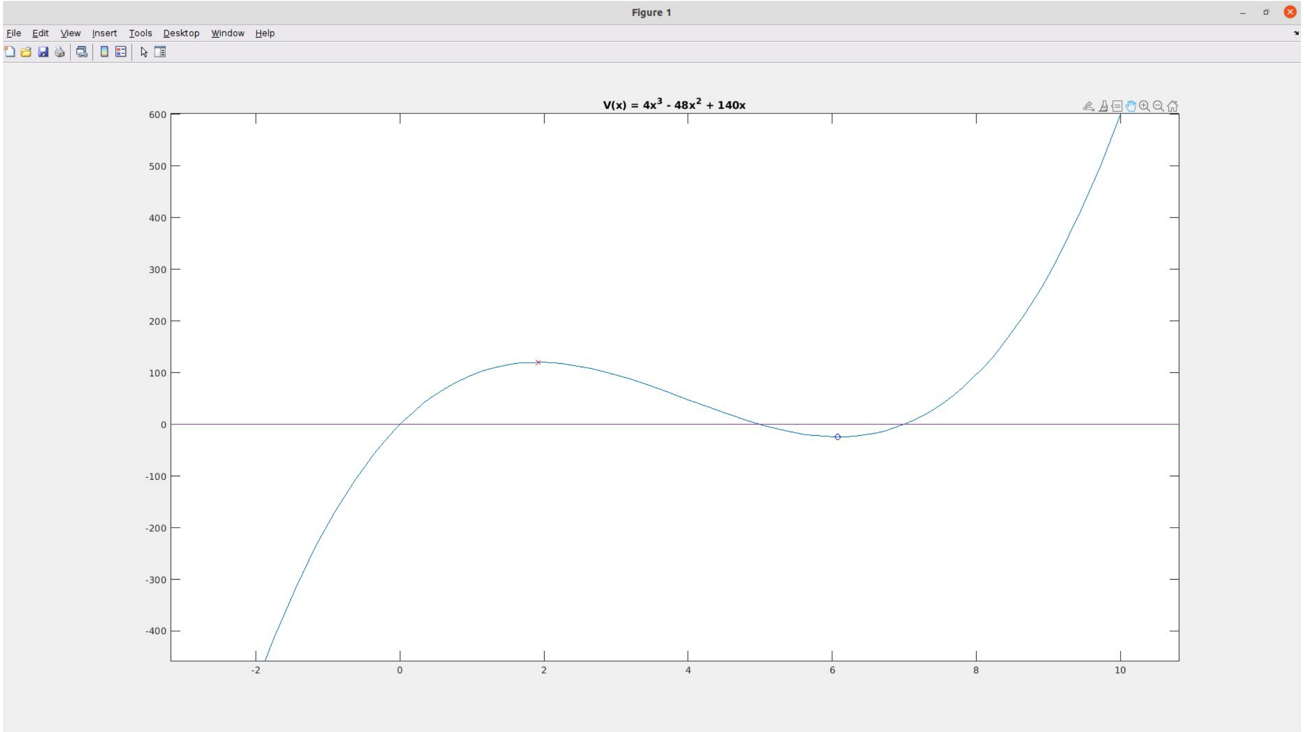
$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; x \in \left\{4 - \sqrt{\frac{13}{3}}; 4 + \sqrt{\frac{13}{3}}\right\} \;:=\; \{2 > x > 0; 6 < x > 0\} \;\approx\; \{1.9183; 6.0817\}$$

$$\max(V'(x) = 0) \;\rightarrow\; \hat{x} = 4 - \sqrt{\frac{13}{3}} \;<\; 2$$

$$V(\hat{x}) = \frac{104\sqrt{39}}{9} + 48 \;>\; 120$$

$\hat{x}$ **jest poszukiwaną wysokością pudełka.**

Interpretacja graficzna:



Nie ma innej dopuszczalnej wartości $\hat{x}$ na przedziale $(0; 5)$.

Rozwiązanie numeryczne

Plik wynikowy:

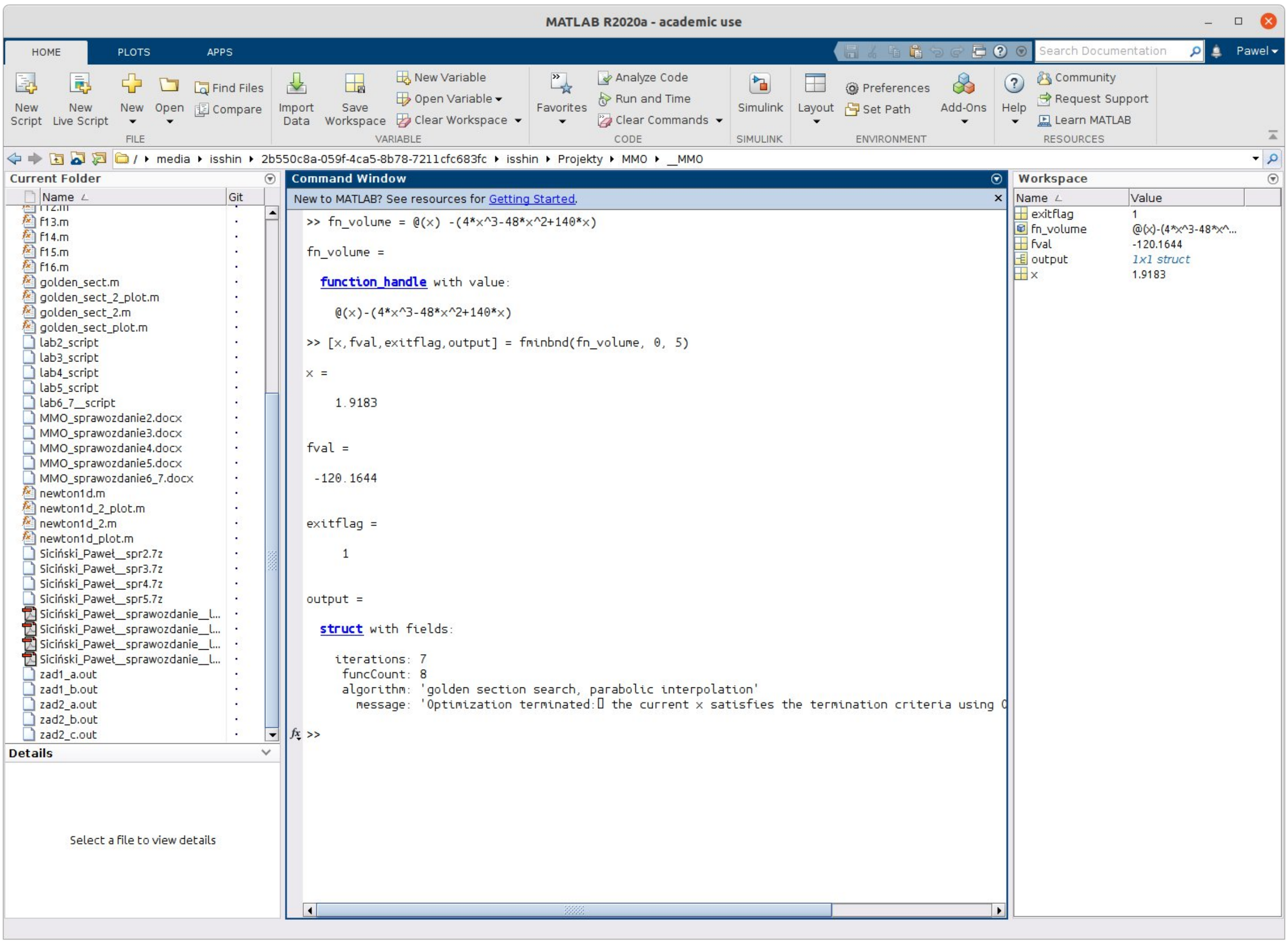
zad3_a.out, gdzie $f \rightarrow V(x)$, $x_0 = 0$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $expected = 4 - \sqrt{\frac{13}{3}}$, $\hat{x} = \widehat{x_0}$

Wyniki:

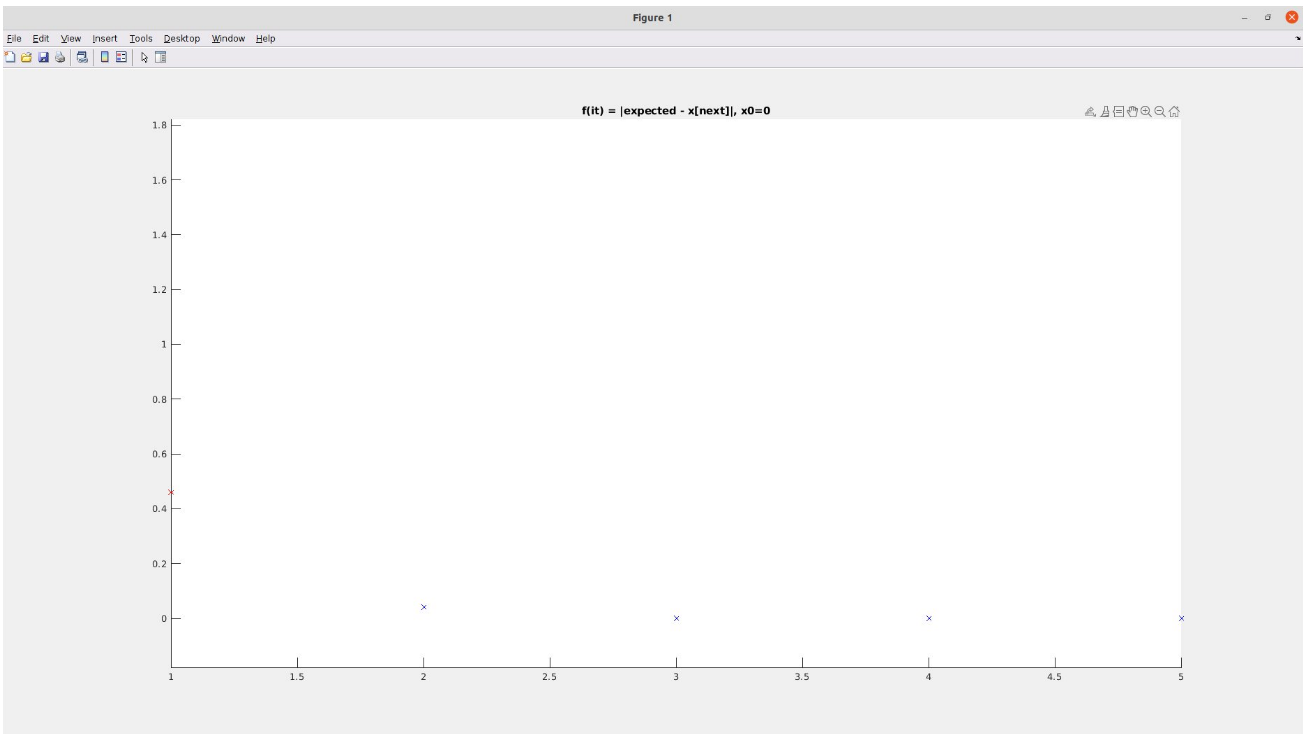
metoda Newtona: $\widehat{x_0} = 1.918334000533866880750498454002$

metoda Powella: $\widehat{x_1} = 6.0817$

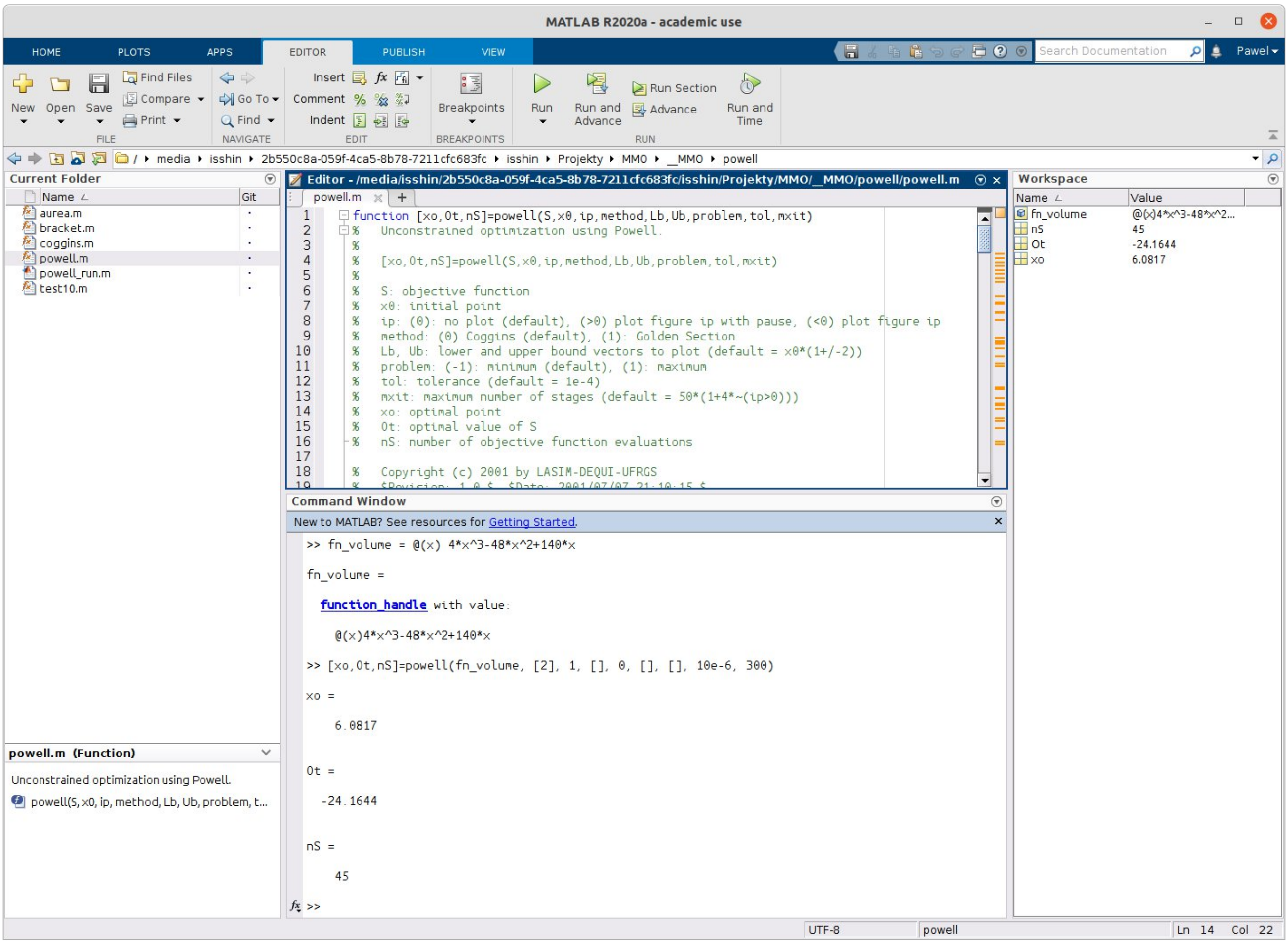
W przypadku metody Newtona rozwiązaniem jest pierwszy punkt stacjonarny, zaś w przypadku metody Powella – drugi punkt stacjonarny $V(x)$. Jednocześnie metoda Powella ma problem z dotarciem do celu mając punkt początkowy $x_0 = 0$.



Zbieżność metody Newtona:



Użycie metody Powella z $x_0 = 2$:



Zadanie 4

Funkcja celu: $f(x) = \sum_{k,s=1}^{4} |P_{klienta} - P_{składu}| \rightarrow min$, $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$f(\mathbf{X}) = (A - \mathbf{X}) + (B - \mathbf{X}) + (C - \mathbf{X}) + (D - \mathbf{X})$$

$$f(x, y) = \sqrt{(2-x)^2 + (7-y)^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(9-x)^2 + (3-y)^2} + \sqrt{(2-x)^2 + (6-y)^2}$$

Ograniczenia: $x > 0, y > 0$

Funkcja $f(x, y)$ jest metryczna ze swej natury, a zatem warunek dodatniej określoności jest spełniony dla dowolnego punktu $[x, y]$.

Metoda rozwiązania:

- obliczamy pochodne cząstkowe I rzędu
- rozwiązujemy układ równań poszukujący miejsc zerowych pierwszych pochodnych, żeby ustalić punkty stacjonarne
- obliczamy pochodne II rzędu z pochodnych cząstkowych I rzędu
- obliczamy wyznacznik hesjanu, żeby ustalić w których punktach stacjonarnych występuje ekstremum
- analizujemy rodzaj ekstremów

Warunki rozwiązania: $\max(\{P_1, P_2, \ldots\}) = P_{wybrane} \;:=\; f\left(P_{wybrane} > 0\right) > 0$

Ze względu na złośliwość funkcji sumy pierwiastków założymy następującą własność:

$$\min f^2(x, y) \;\equiv\; \min f(x, y)$$

co jest prawdą w otoczeniu wartości funkcji, gdzie występuje tylko jedno ekstremum.
W związku z tym mamy:

$$f^2(x, y) = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

$$f^2(x, y) = (2 - x)^2 + (7 - y)^2 + x^2 + (1 - y)^2 + (9 - x)^2 + (3 - y)^2 + (2 - x)^2 + (6 - y)^2$$

$$f^2(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 26x - 34y + 184$$

Rozwiązanie:

$$\frac{\partial}{\partial x} f^2(x, y) = 8x - 26, \quad \frac{\partial}{\partial x} f^2(x, y) = 8y - 34$$

$$\begin{cases} 8x - 26 = 0 \\ 8y - 34 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{13}{4} \\ y = \dfrac{17}{4} \end{cases} \rightarrow \; P_0 = (x, y)$$

Jest to jedyne możliwe rozwiązanie wynikające z układu równań, a zatem mamy tylko jeden punkt stacjonarny.

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

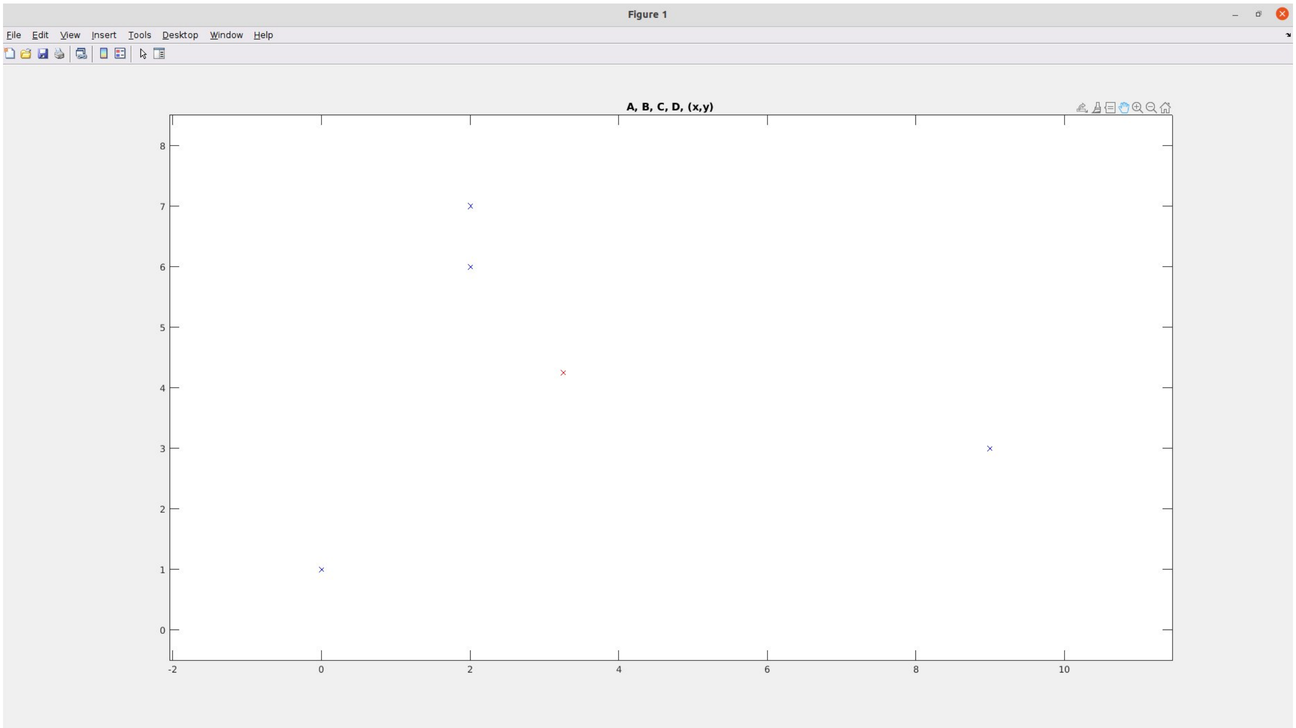
$$\det(H) = 8 \cdot 8 - 0 \cdot 0 = 8^2 = 64 > 0$$

Z $\det(H) > 0$ wynika, że mamy do czynienia z ekstremum. Jednocześnie z $f''_{xx}(P_0) = 8 > 0$ wnioskujemy, iż to ekstremum jest minimum. Skoro P_0 to minimum i jedyny punkt stacjonarny, to:

$$P_0 = (\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right) = (3.25; 4.25)$$

$$f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{13\sqrt{2}}{2} + \left(\sqrt{\frac{37}{2}} + \sqrt{\frac{73}{2}} + \sqrt{\frac{277}{2}}\right) \approx 15.6518 > 15$$

Interpretacja graficzna:



Wydaje się dość możliwym, że rozwiązanie P_0 jest środkiem ciężkości trójkąta wyznaczanego przez wypukłą otoczkę czterech punktów–lokacji.

Użycie metody Powella z $x_0 = [0, 0]$ dla $f^2(x, y)$: