Matematyczne metody optymalizacji

Laboratorium nr 4

Paweł Siciński

$$f(x) = 2\, e^{\sin\left(2x^2 - 3x + 4\right)}$$

Dziedzina: $x \in \boldsymbol{R}$

Miejsca zerowe: brak

Pochodna: $\frac{d}{dx} f(x) = 2\,(4x - 3)\, e^{\sin(2x^2 - 3x + 4)} \cos(2x^2 - 3x + 4)$;
funkcja o charakterze całki Fresnela; liniowe skalowanie przedziału, wykładniczy postęp modulowany oscylacją (innymi słowy: co może pójść nie tak?)

Przedział określoności: $(-1, 2)$; miejsca zerowe pochodnej to

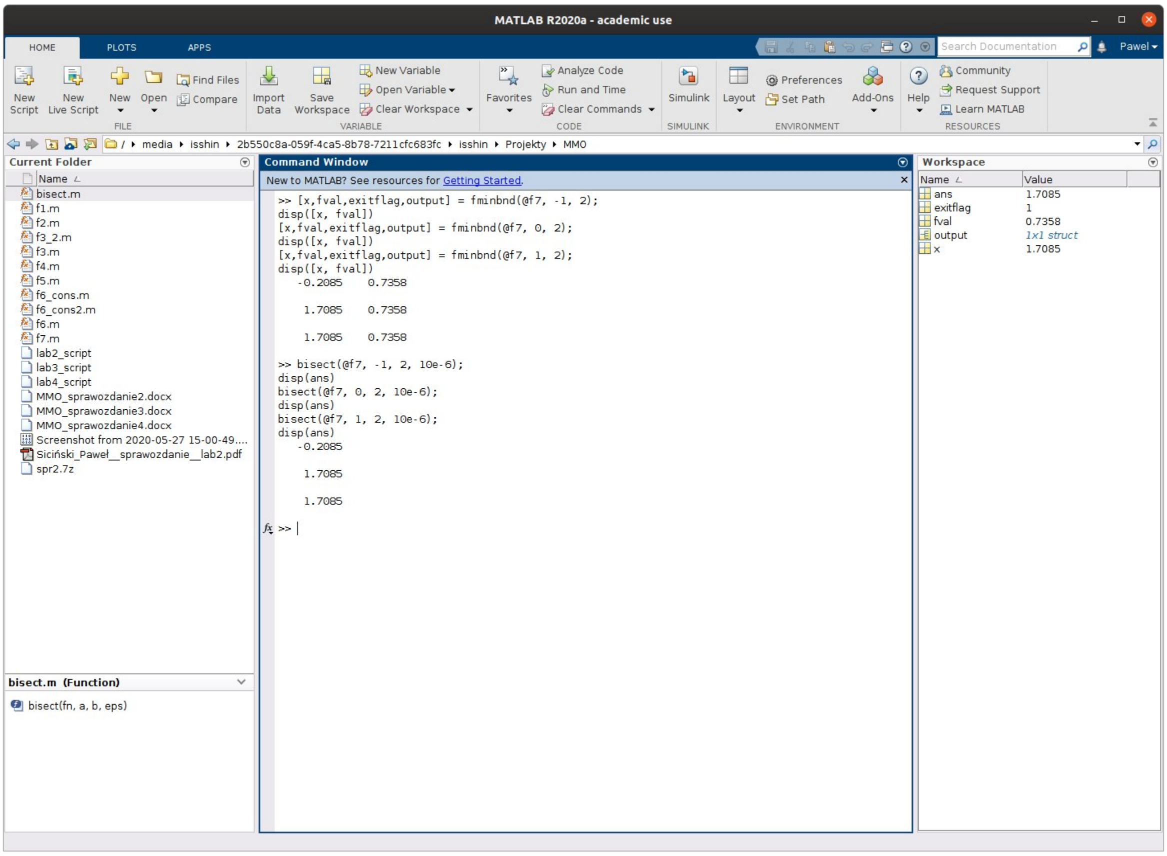
$x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{8\pi n - 4\pi - 23}$, dla $n = 2$ żeby $8\pi n - 4\pi - 23 > 0$: ≈ -0.21

$x = \frac{3}{4} = 0.75$

$x = \frac{1}{4}\sqrt{8\pi n - 4\pi - 23} + \frac{3}{4}$, dla $n = 2$ żeby $8\pi n - 4\pi - 23 > 0$: ≈ 1.71

niech przedział ujmuje te punkty stacjonarne, odpalmy algorytm i sprawdźmy, czy nic nie wybuchnie

Minimum: jak można było się domyślać, występowanie minimów jest cykliczne; przechodzą one przez prostą $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$ dla argumentów $x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{16\pi n - 4\pi - 23}$


MATLAB R2020a - academic use
>> [x,fval,exitflag,output] = fminbnd(@f7, -1, 2);
disp([x, fval])
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(@f7, 0, 2);
disp([x, fval])
[x,fval,exitflag,output] = fminbnd(@f7, 1, 2);
disp([x, fval])
-0.2085 0.7358
1.7085 0.7358
1.7085 0.7358
>> bisect(@f7, -1, 2, 10e-6);
disp(ans)
bisect(@f7, 0, 2, 10e-6);
disp(ans)
bisect(@f7, 1, 2, 10e-6);
disp(ans)
-0.2085
1.7085
1.7085
bisect(fn, a, b, eps)

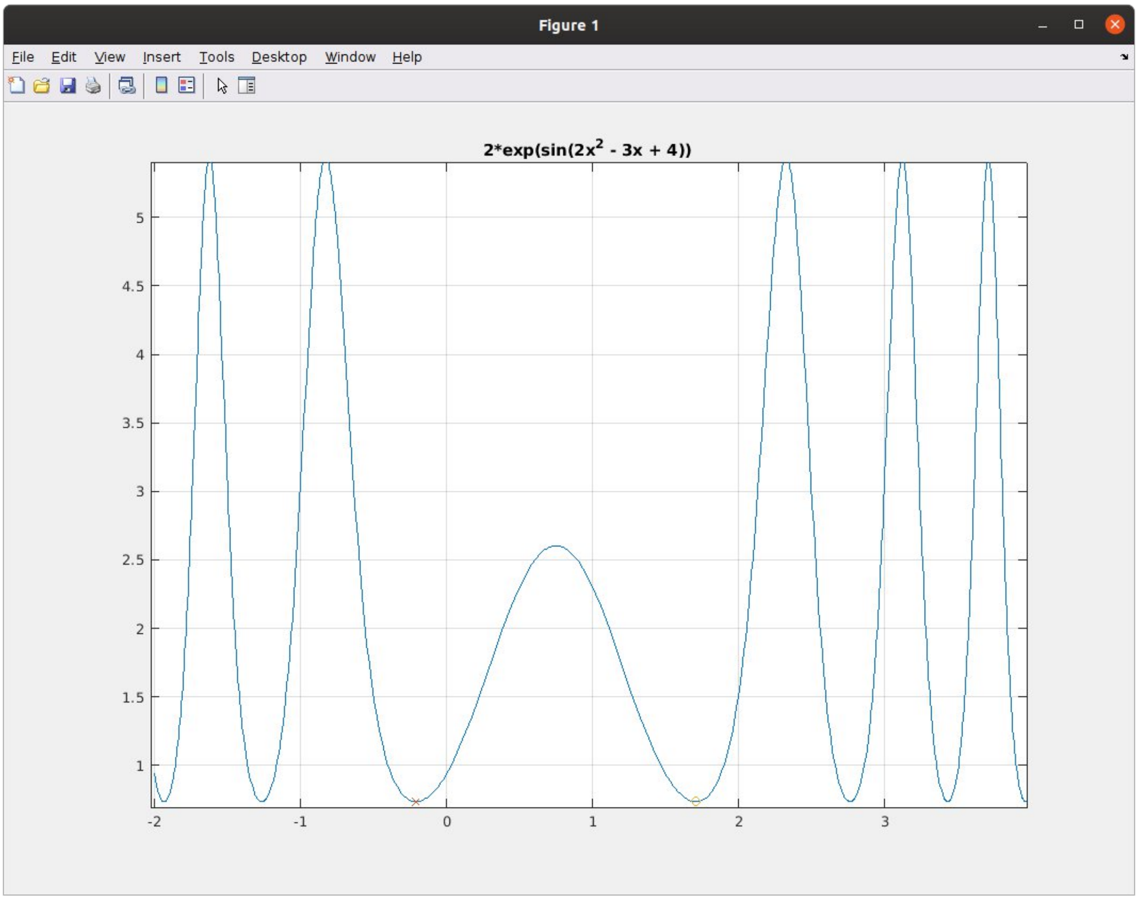
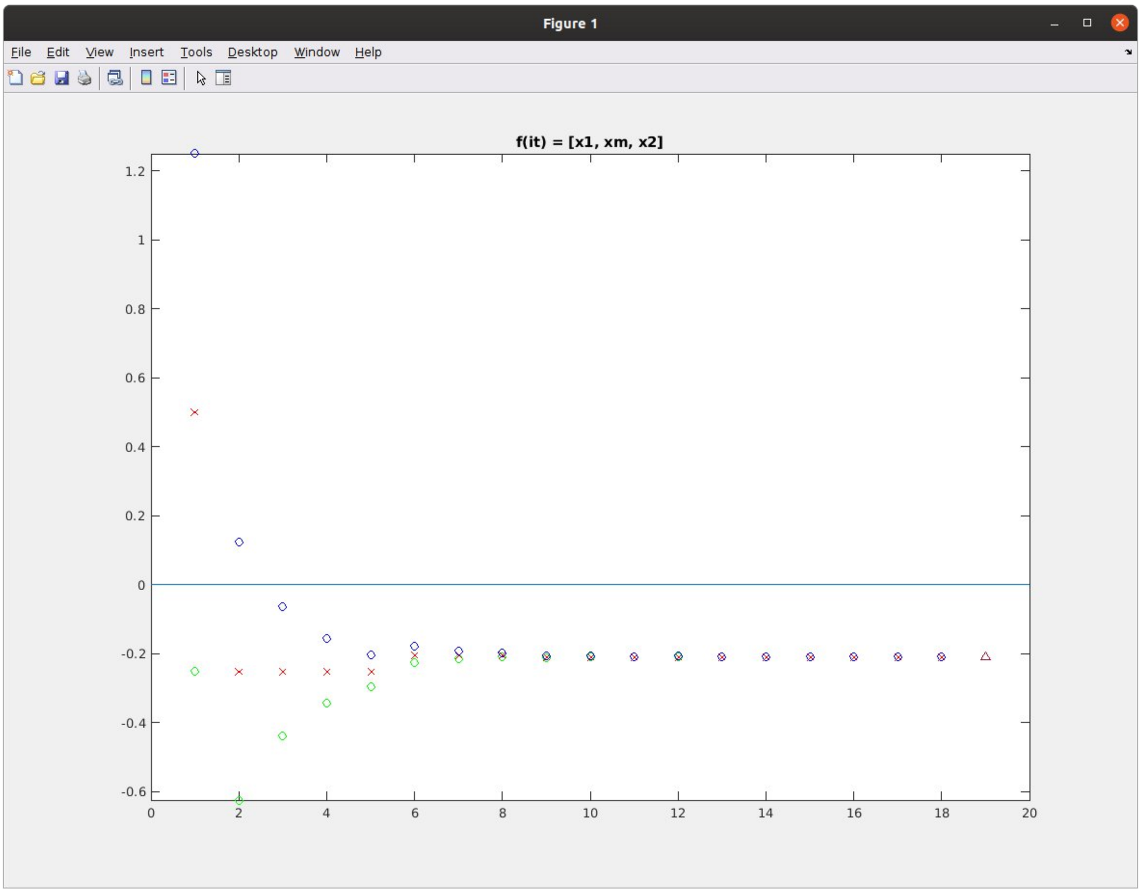


Figure 1
2*exp(sin(2x^2 - 3x + 4))



$$g(x) = \sin(\cos 2x)$$

Dziedzina: $x \epsilon R$

Miejsca zerowe: $x = \pi k \pm \frac{1}{2\cos \pi n} = \pi k \pm \frac{1}{2} \sec \pi n$

występują cyklicznie w miejscach asymptot pionowych dla sekansa; nieskończenie wiele punktów wokół których funkcja zmienia monotoniczność

Pochodna: $\frac{d}{dx} g(x) = -2 \sin(2x) \cos(\cos 2x)$

funkcja jest wybitnie okresowa; kombinacja liniowa sinusów i kosinusów niechybnie prowadzi do nieistnienia jednego ekstremum globalnego

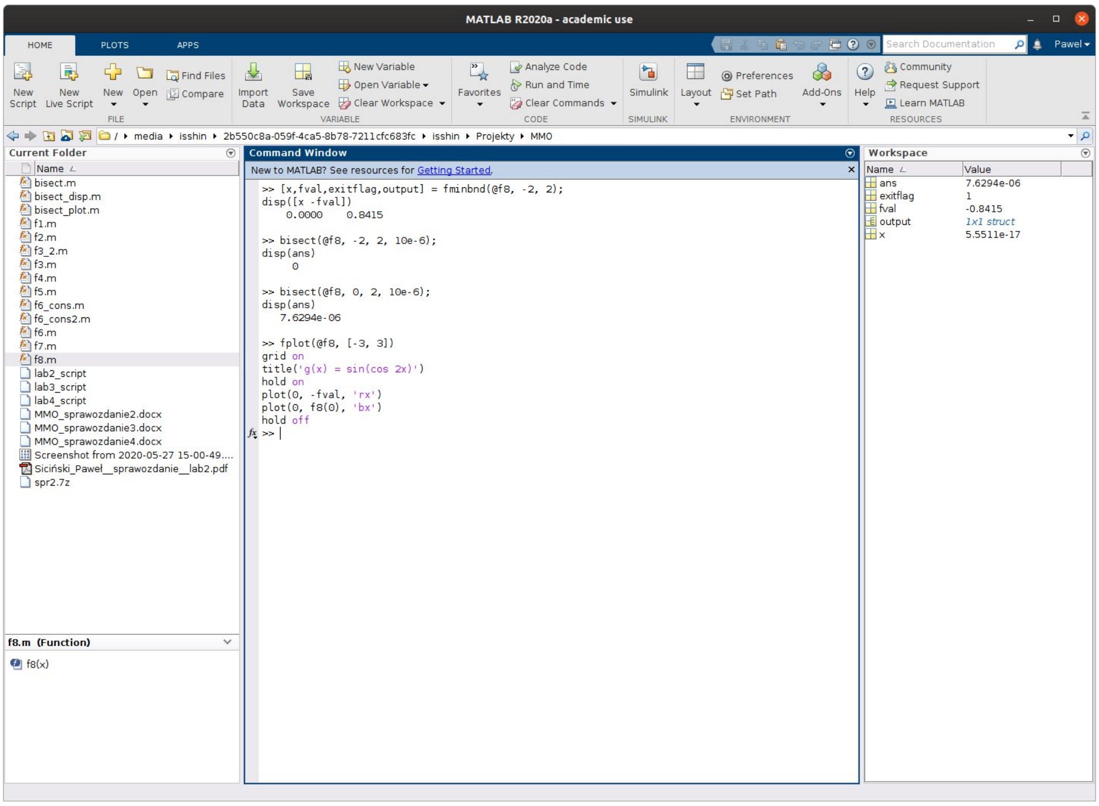
Przedział określoności: $(-2, 2)$;miejsca zerowe pochodnej:

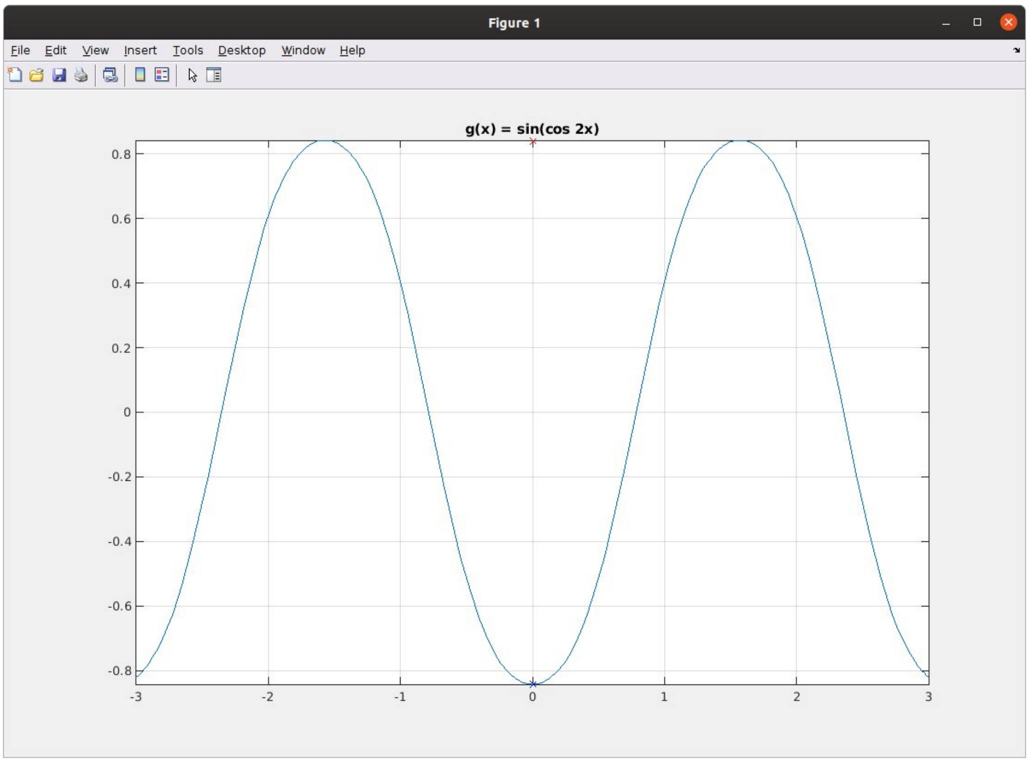
$$x = \frac{\pi}{2} n$$

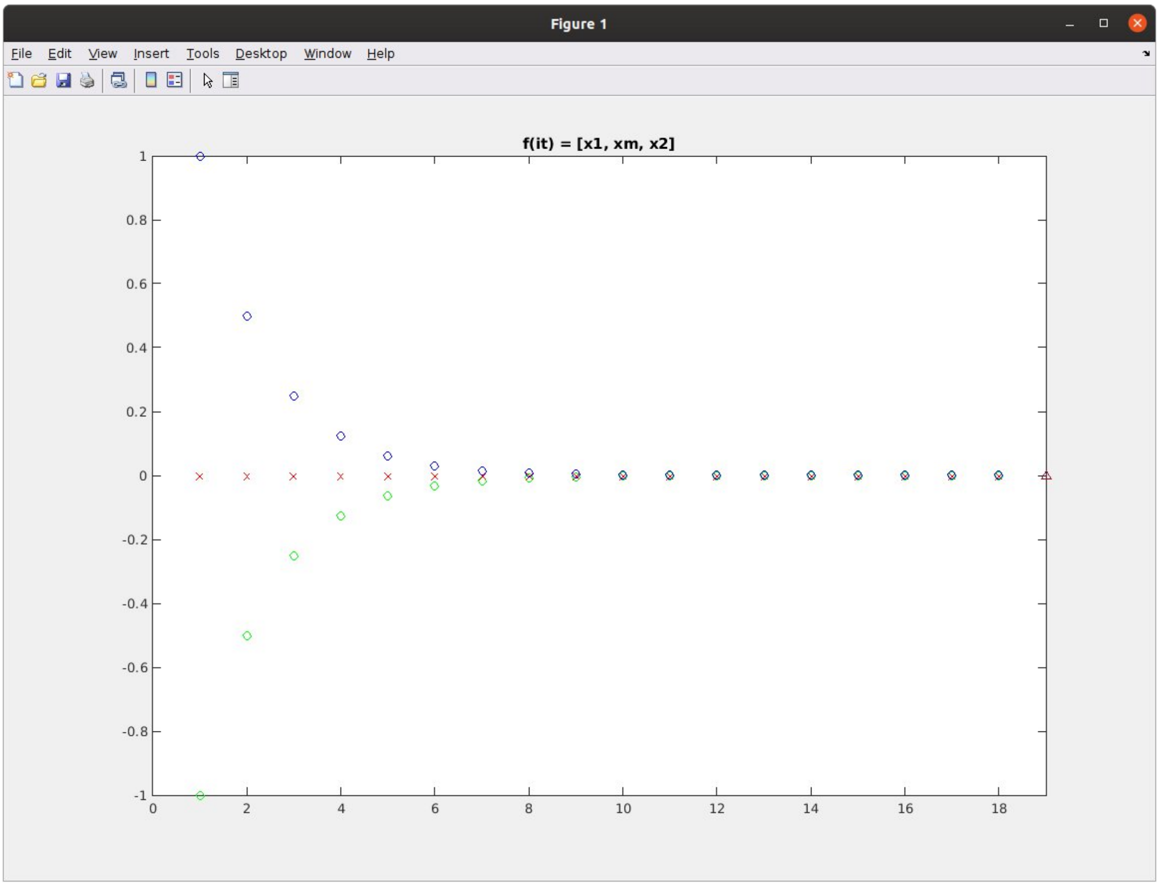
$$x = \pi k \pm \frac{1}{2\cos\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)} = \pi k \pm \frac{1}{2}\sec\left(\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$$

w istocie wybór przedziału nie ma większego znaczenia, dopóki ujmie okres

Maximum: zbiór maksimów leży na prostej $y = \sin 1$ dla argumentów $x = \pi n$







$$h(x) = -5x^5 + 3x^4 - 3x^2 - 2$$

Dziedzina: $x \in R$

Miejsca zerowe: $x \approx -0.87$

krzywa funkcji jest krzywą S-kształtną w dziedzinie argumentów

Pochodna: $\frac{d}{dx} h(x) = -25x^4 + 12x^3 - 6x$

ogólny charakter przejawia się jak krzywa dzwonowa

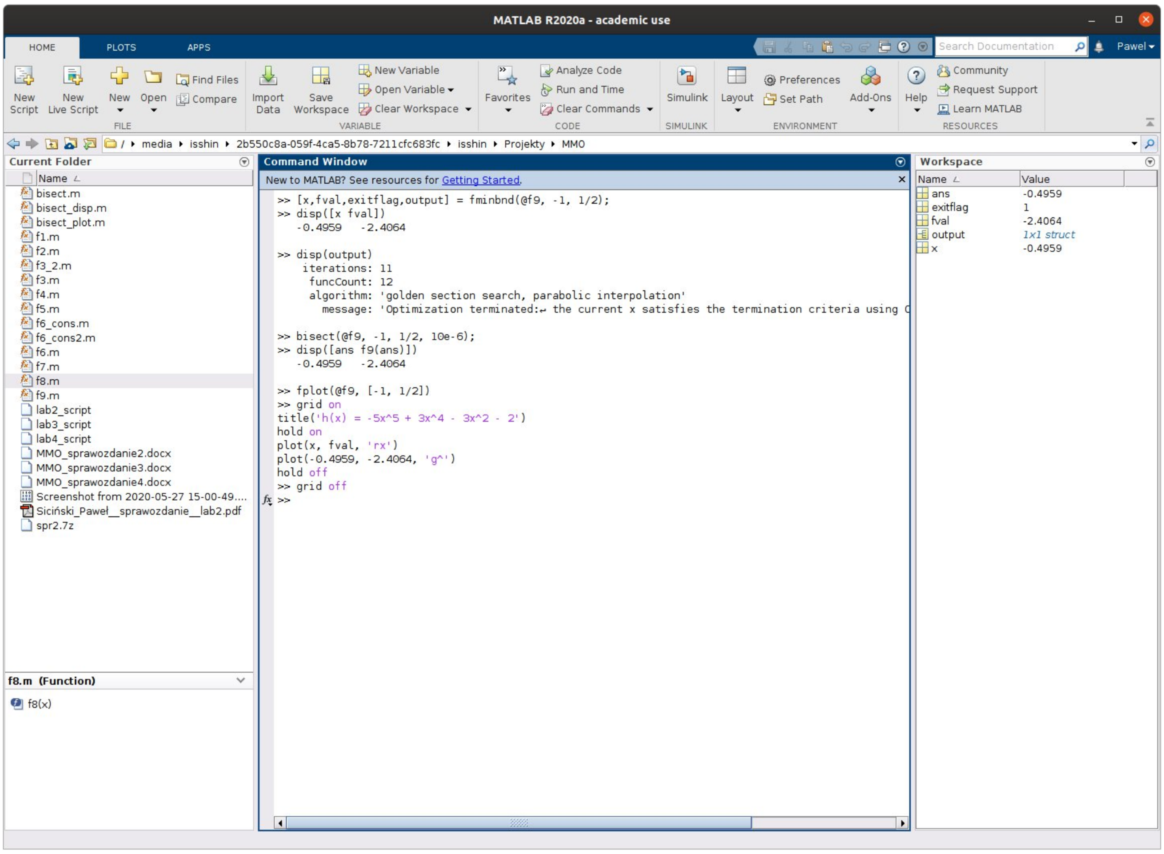
Przedział określoności: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$; miejsca zerowe pochodnej:

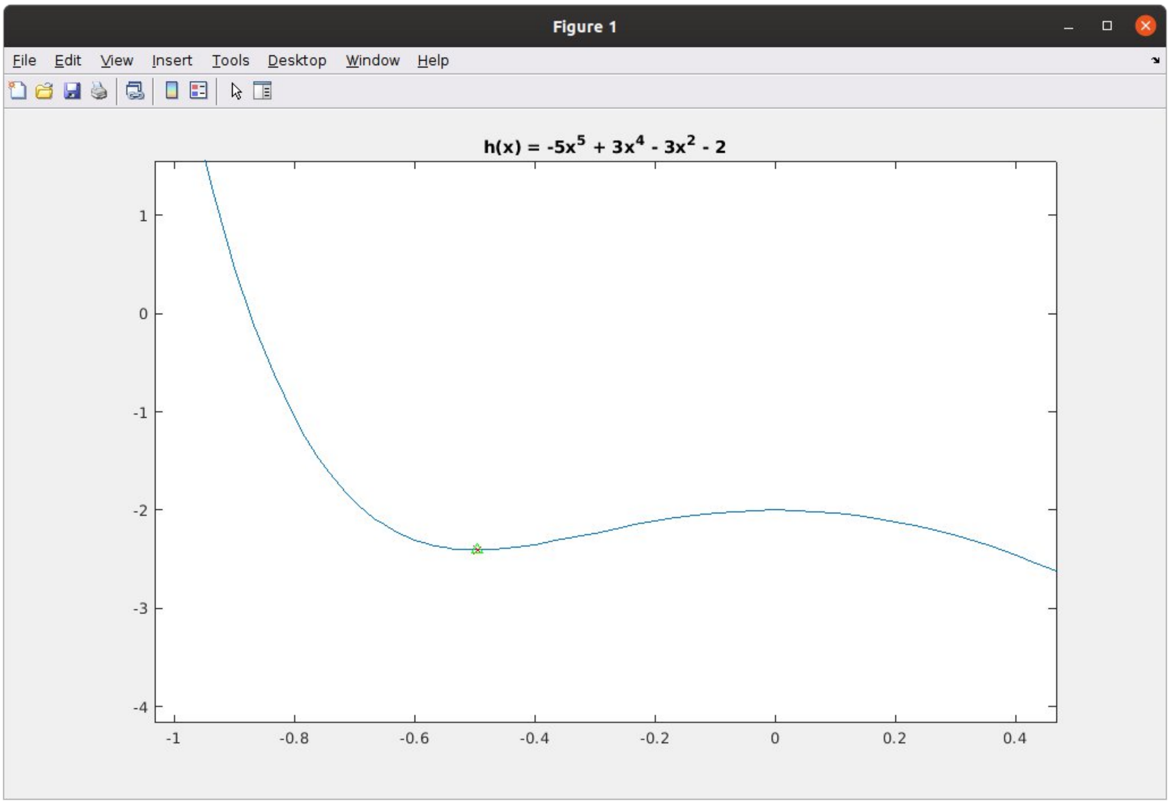
$x = 0$

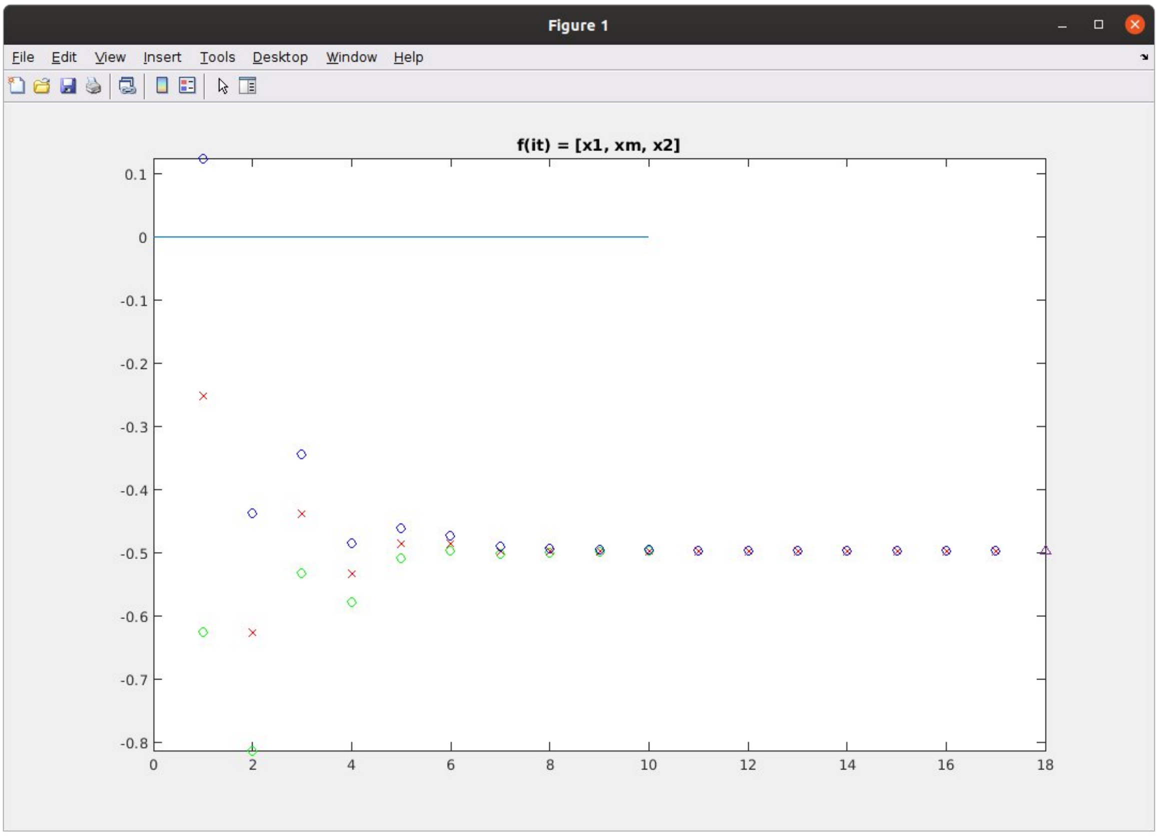
$x \approx -0.5 > -\frac{1}{2}$

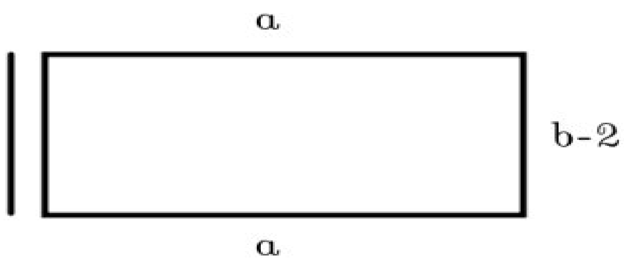
krzywa dzwonowa jako wielomian określa, iż funkcja celu posiada drobne fluktuacje takiego kształtu

Minimum: jedna globalna wartość dla argumentu $x > -\frac{1}{2}$









$$\begin{cases} 2a + b - 2 = 2000 \\ P = ab \end{cases} \rightarrow b = -2a + 2002$$

$$p(a) = ab = a(-2a + 2002) = -2a^2 + 2002a$$

Dziedzina: $x \in R$

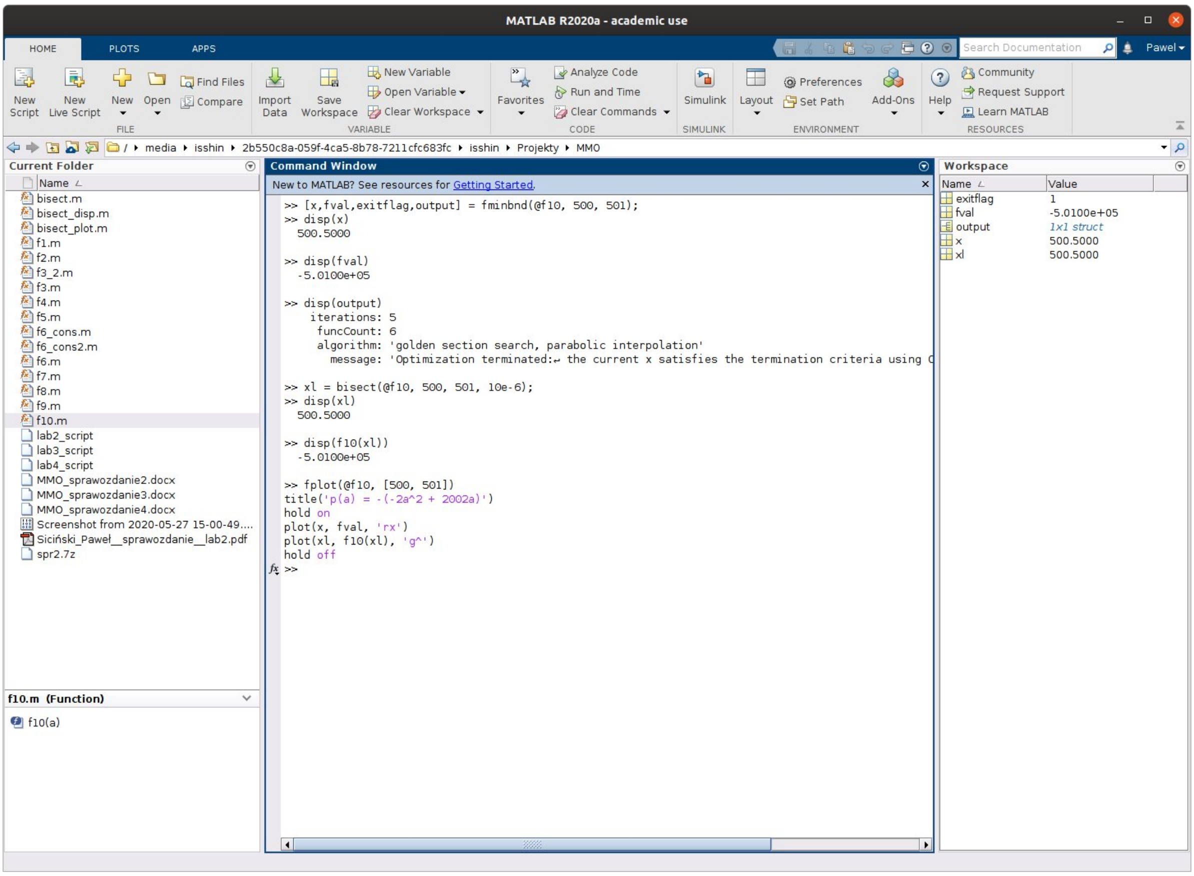
Miejsca zerowe $a = 0$, $a = 1001$

Pochodna: $\frac{d}{da} p(a) = 2002 - 4a$

Przedział określoności: $(500, 501)$; miejsca zerowe pochodnej:

$$a = \frac{1001}{2} = 500\ \frac{1}{2}$$

Minimum: $x = \frac{1001}{2} = 500\ \frac{1}{2}$



$$P(a, b) = P\left(500\frac{1}{2}, 1001\right) = 501\ 000\ \frac{1}{2}\ [m^2]$$

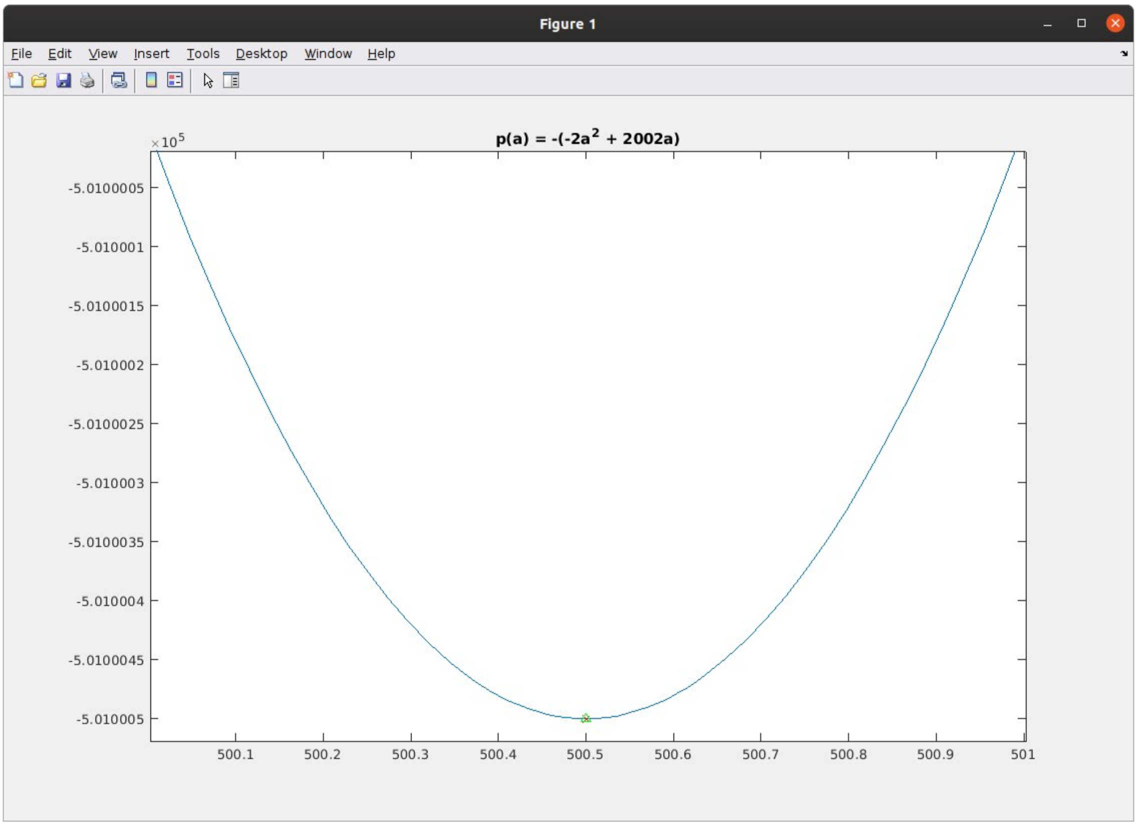


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
p(a) = -(-2a^2 + 2002a)
×10^5
-5.0100005
-5.010001
-5.0100015
-5.010002
-5.0100025
-5.010003
-5.0100035
-5.010004
-5.0100045
-5.010005
500.1 500.2 500.3 500.4 500.5 500.6 500.7 500.8 500.9 501

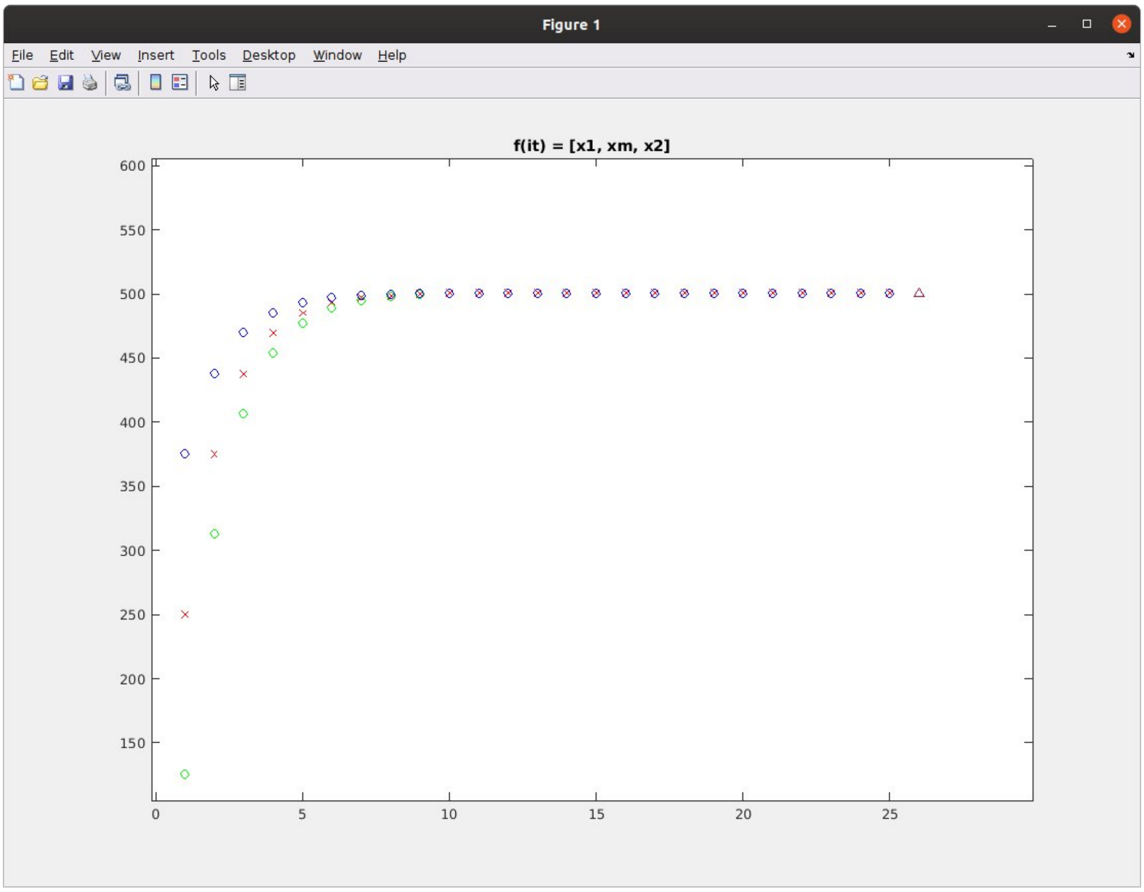
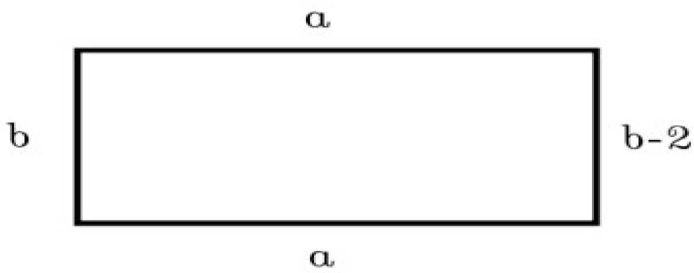


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
f(it) = [x1, xm, x2]
600
550
500
450
400
350
300
250
200
150
0 5 10 15 20 25



$$\begin{cases} 2a + b + (b-2) = 2000 \\ P = ab \end{cases} \rightarrow a = 1001 - b$$

$$p(b) = ab = (1001-b)b = -b^2 + 1001b$$

Dziedzina: $x \in \boldsymbol{R}$

Miejsca zerowe: $b = 0$, $b = 1001$

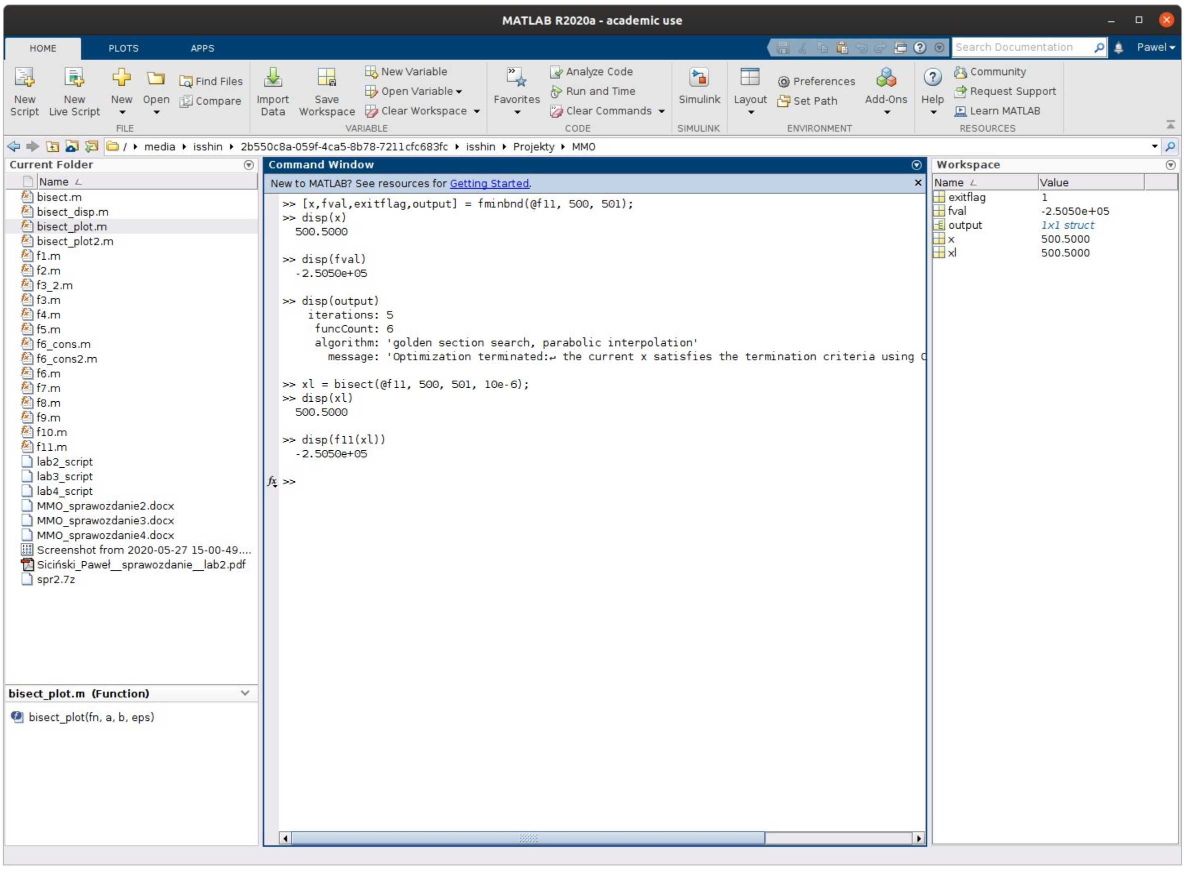
Pochodna: $\frac{d}{db}\,p(b) = 1001 - 2b$

Przedział określoności: $(500, 501)$; miejsca zerowe pochodnej:

$b = \dfrac{1001}{2} = 500\,\dfrac{1}{2}$

Minimum: $x = \frac{1001}{2} = 500\,\frac{1}{2}$

$$P(a,b) = P\left(500\,\frac{1}{2}, 500\,\frac{1}{2}\right) = 250\,500\,\frac{1}{4}\;[m^2]$$


MATLAB R2020a - academic use
>> [x,fval,exitflag,output] = fminbnd(@f11, 500, 501);
>> disp(x)
500.5000
>> disp(fval)
-2.5050e+05
>> disp(output)
iterations: 5
funcCount: 6
algorithm: 'golden section search, parabolic interpolation'
message: 'Optimization terminated: the current x satisfies the termination criteria using
>> xl = bisect(@f11, 500, 501, 10e-6);
>> disp(xl)
500.5000
>> disp(f11(xl))
-2.5050e+05

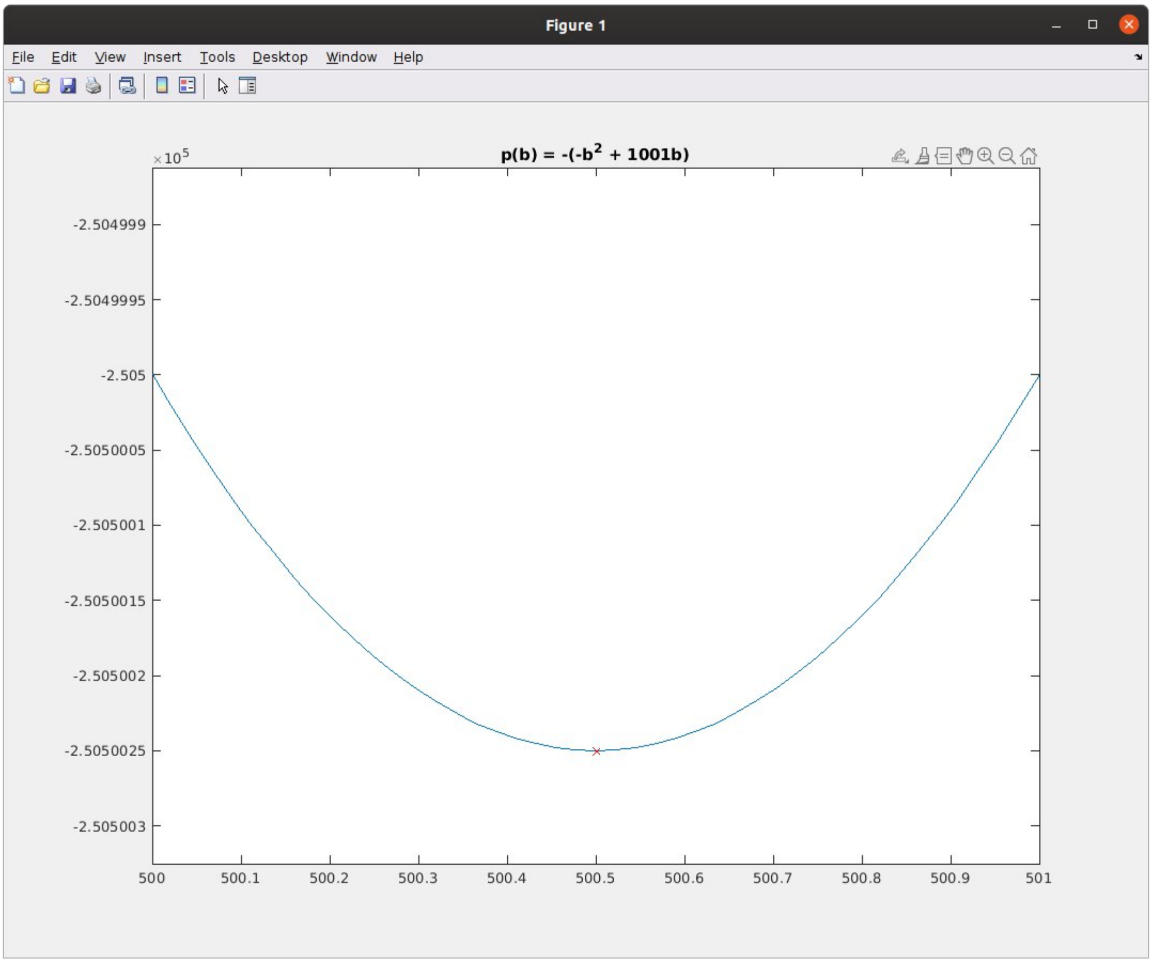


Figure 1
p(b) = -(-b² + 1001b)
×10⁵
-2.504999
-2.5049995
-2.505
-2.5050005
-2.505001
-2.5050015
-2.505002
-2.5050025
-2.505003
500
500.1
500.2
500.3
500.4
500.5
500.6
500.7
500.8
500.9
501

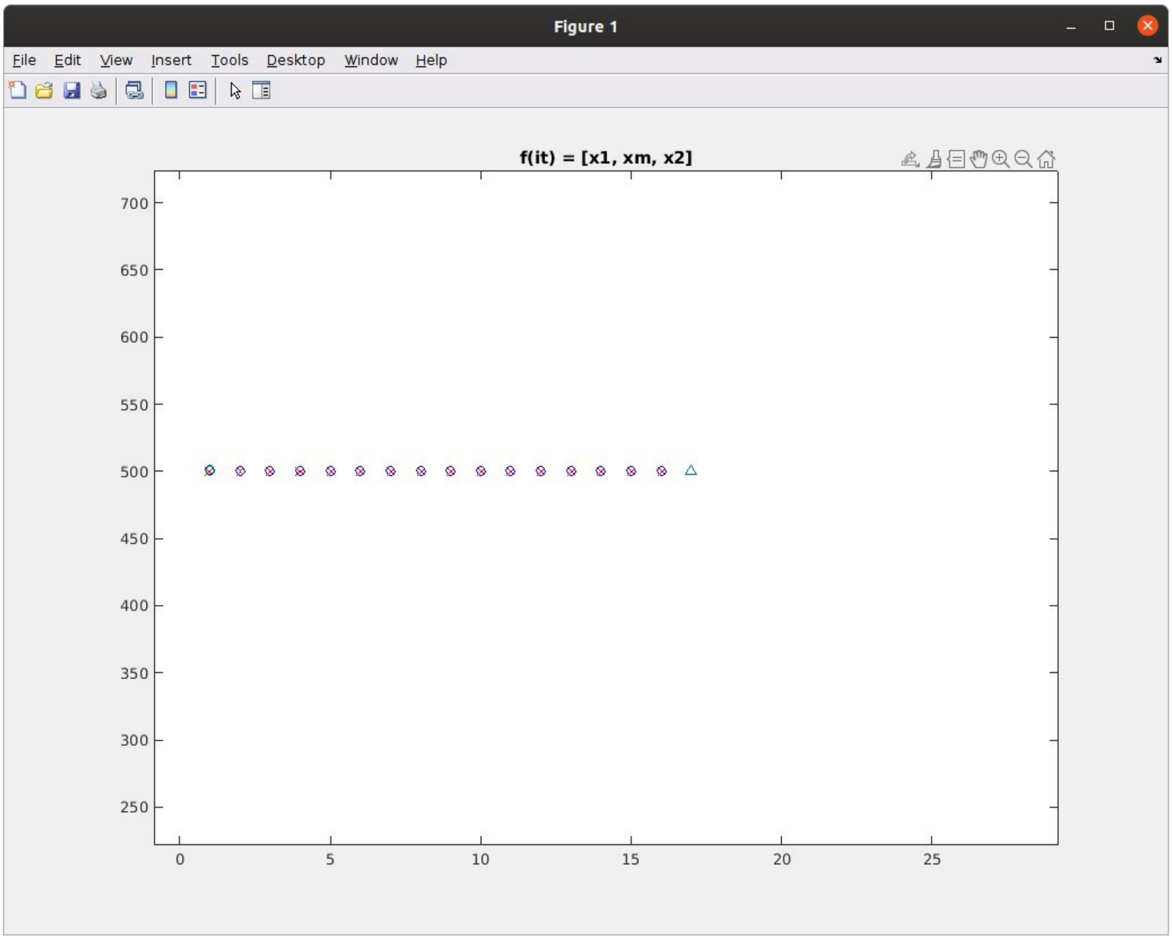


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
f(it) = [x1, xm, x2]
700
650
600
550
500
450
400
350
300
250
0
5
10
15
20
25