IAL – 4. přednáška

Stromové datové struktury

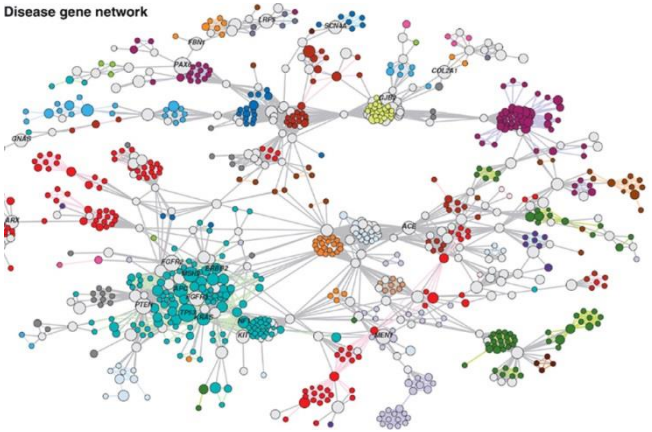
8. a 9. října 2024

Obsah přednášky

- Stromové datové struktury
  - Kořenový strom
  - Binární strom
    - Průchody binárním stromem
    - Algoritmy nad binárním stromem

Nelineární datové typy

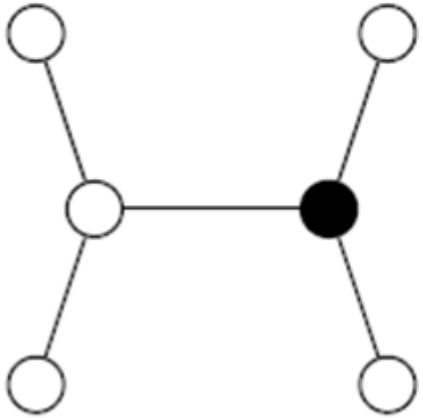
- Data nejsou uspořádána postupně – obecně jeden prvek může být připojen k libovolnému počtu prvků.
- Tyto struktury umožňují modelovat složitější vztahy mezi daty.
- Typické nelineární struktury:
  - Graf
  - Kořenový strom (speciální případ grafu)
  - Binární strom
    (speciální případ kořenového stromu)
  - Halda (speciální případ kořenového stromu)

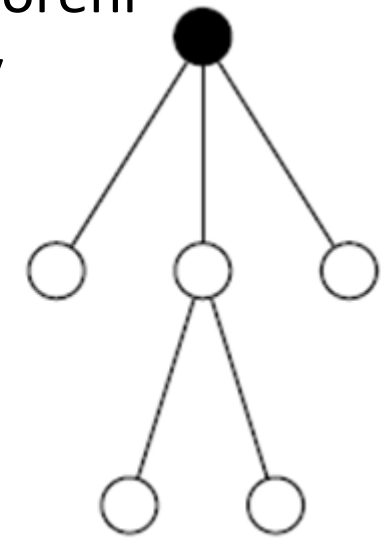


- *Pozn.:* Grafům bude věnována samostatná přednáška v závěru semestru.

Kořenový strom

- **Kořenový strom** je souvislý acyklický graf, který má jeden zvláštní uzel, který se nazývá **kořen** (angl. ***root*****).**
- **Kořen** je takový uzel, že platí, že z každého uzlu stromu vede jen jedna cesta do kořene.
- Z každého uzlu vede jen jedna hrana směrem ke kořeni do uzlu, kterému se říká *otcovský* uzel, a libovolný počet hran k uzlům, kterým se říká *synovské*.
- Uzly bez potomků označujeme jako *listy* (listové uzly), uzly s potomky jako *vnitřní uzly*.





Vlastnosti stromů

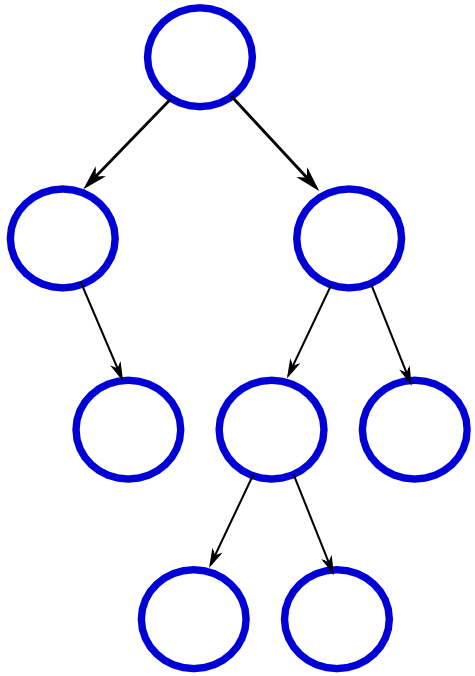
- **Stupeň uzlu *u*** – počet potomků uzlu *u*.

  Často definujeme maximální možný počet potomků – speciální typy stromů:

  - Binární stromy
  - 2-3 stromy
  - B-stromy
- **Seřazený strom** – je kořenový strom, ve kterém jsou potomci každého uzlu mezi sebou seřazeni
- **Cesta k uzlu *u*** – posloupnost všech uzlů od kořene k uzlu *u*
- **Délka cesty** – počet hran, které cesta obsahuje (počet uzlů-1)
- **Výška stromu:**
  - výška prázdného stromu je 0,
  - výška stromu s jediným uzlem (kořenem) je 1,
  - výška jiného stromu je počet hran od kořene k nejvzdálenějšímu uzlu + 1.
- **Průchod stromem** – posloupnost všech uzlů stromu, v níž se žádný uzel nevyskytuje dvakrát

Binární strom (BS)

- **Rekurzivní definice binárního stromu:**
  Binární strom je buď prázdný, nebo sestává z jednoho uzlu zvaného kořen a dvou binárních podstromů – levého a pravého.



Vlastnosti binárních stromů

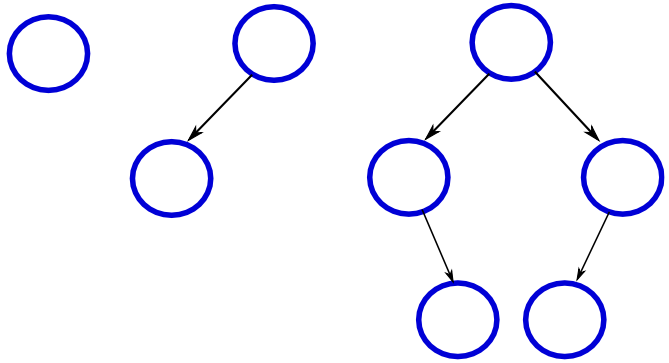
- Binární strom sestává z:
  - kořene,
  - neterminálních (vnitřních) uzlů, které mají ukazatel na jednoho nebo dva uzly synovské a
  - terminálních uzlů (listů), které nemají žádné *potomky*.

Vlastnosti binárních stromů

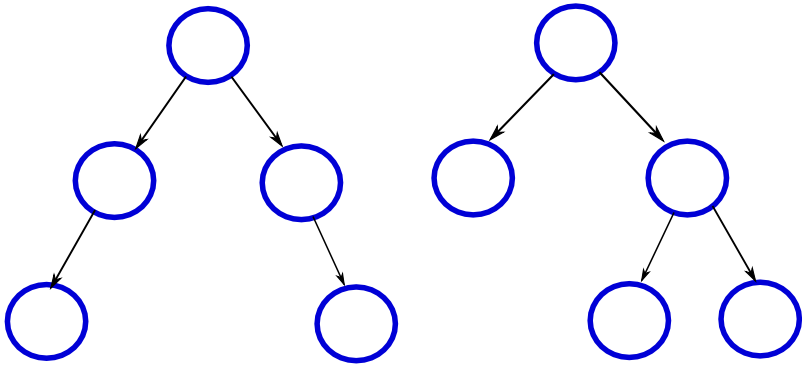
- **Vyváženost** stromu:
  - Binární strom je váhově vyvážený, když pro každý jeho uzel platí, že **počty uzlů** jeho levého a pravého podstromu se rovnají a nebo se liší právě o 1.
  - Binární strom je výškově vyvážený, když pro každý jeho uzel platí, že **výška** levého podstromu se rovná výšce pravého podstromu a nebo se liší právě o 1.
  - Maximální výška vyvážených stromů: ***c.log(n)***
  - Při zajištění vyváženosti nemůže dojít k degradaci stromu na seznam.

Příklad: (ne)vyvážené stromy

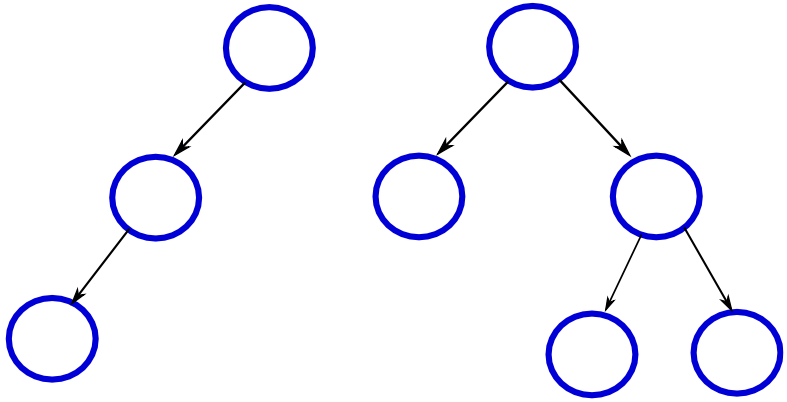
- Váhově vyvážené stromy



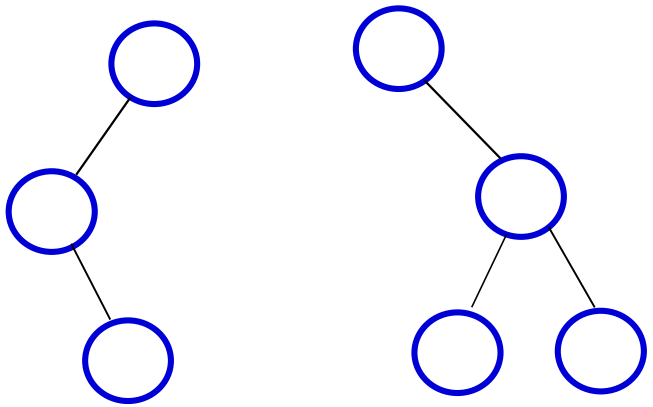
- Výškově vyvážené stromy



- Váhově **ne**vyvážené stromy



- Výškově **ne**vyvážené stromy



Operace nad binárním stromem

- Má smysl zavádět obecný ADT binární strom?
  - Museli bychom zavést mnoho operací, které by umožňovaly manipulaci s daty v libovolném uzlu stromu (mnoho možností, příliš složité řešení).
  - ADT (operace) zavedeme až pro konkrétní typ stromu (např. binární vyhledávací strom), kdy způsob použití tohoto stromu omezí počet operací, které budeme potřebovat.

Operace nad binárním stromem

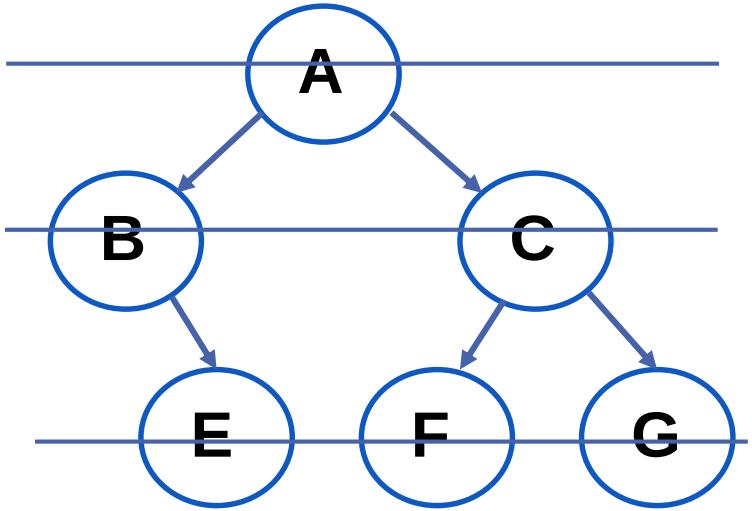
- Vkládání
  - Vložený uzel je třeba navázat na jeho otce a případně na vkládaný uzel správně navázat jeho syny.
- Rušení
  - Rušení listu (jednoduché, korekce ukazatele v otci).
  - Rušení uzlu s jedním synem (také jednoduché, korekce ukazatele v otci).
  - Rušení uzlu s dvěma syny (obtížnější).
- Vkládání/rušení
  - Může porušit uspořádanost nebo vyváženost stromu.
  - Konkrétní způsoby implementace těchto operací probereme u jednotlivých typů stromů.

Operace nad binárním stromem

- Průchody stromem (základ mnoha dalších algoritmů):
  - Do šířky (level-order)
  - Do hloubky (pre-order, in-order, post-order)
- Další operace dle typu a určení stromu:
  - Binární vyhledávací strom jako vyhledávací tabulka
  - operace **InitTable**, **Insert**, **Search**, **GetData**, **Delete**
- Další možné operace nad BS:
  - výška BS
  - ekvivalence (struktur) dvou BS
  - kopie BS
  - zrušení BS
  - váhová/výšková vyváženost stromu

Procházení BS do šířky

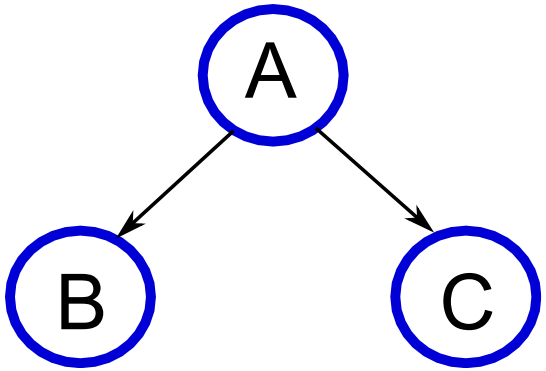
- *Level-order, Breadth First Search, BFS*
- Průchod stromem po hladinách (od kořene):
  - A, B, C, E, F, H



- Reverzní průchod do šířky – průchod po hladinách od nejnižší hladiny směrem ke kořeni:
  - E, F, H, B, C, A

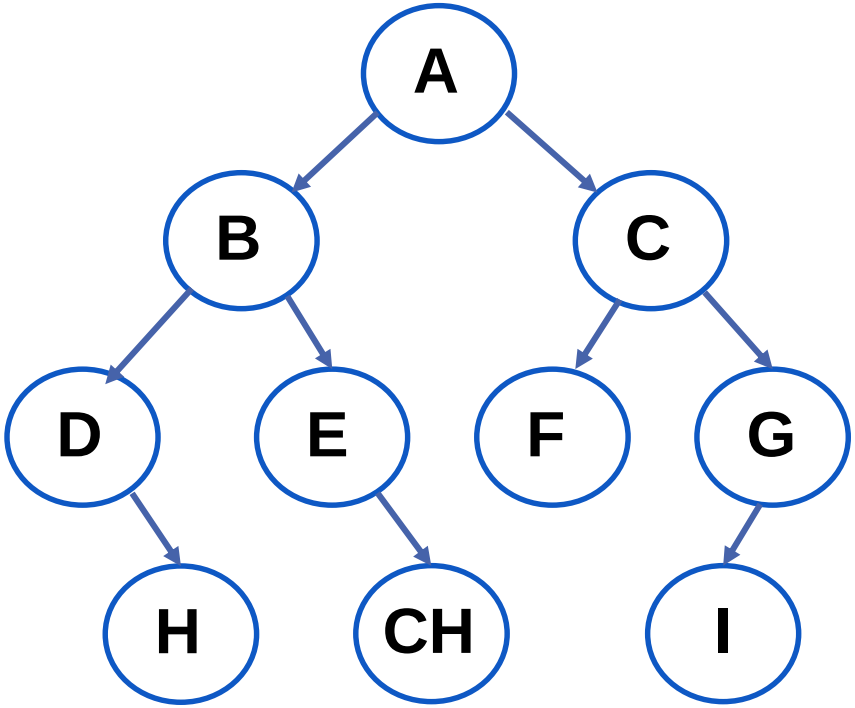
Procházení BS do hloubky

- Mějme následující binární strom:
- Jednotlivé průchody zpracují uzly v následujícím pořadí:
  - PreOrder: A, B, C
  - InOrder: B, A, C
  - PostOrder: B, C, A



- Inverzní průchody (obrácené pořadí synovských uzlů):
  - InvPreOrder: A, C, B
  - InvInOrder: C, A, B
  - InvPostOrder: C, B, A
- *Pozn.:* PreOrder je reverzí InvPostOrder , PostOrder je reverzí InvPreOrder.

Příklad: Průchody stromem



Rekurzivní průchody BS

```
typedef struct tnode
{
  TData data;
  struct tnode *left;
  struct tnode *right;
}TNode;

void PreOrder (TDLList *l, TNode *root)
              // Seznam l byl inicializován před voláním
{
  if (root != NULL){
    DLL_InsertLast(l,root->data);
    PreOrder(l,root->left);
    PreOrder(l,root->right);
  }
}
```

Rekurzivní průchody BS

- Záměnou pořadí rekurzivního volání a zpracování prvku v podmíněném příkazu **`if`** získáme další průchody:

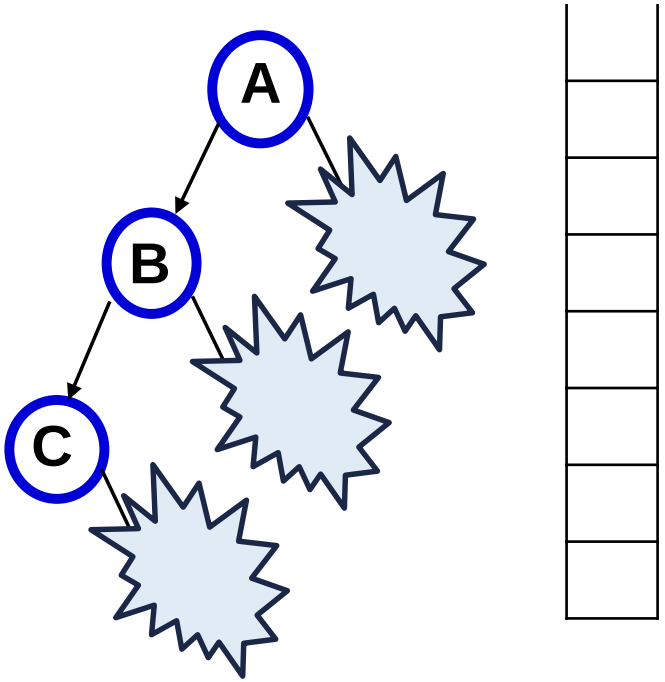
```
// InOrder
      InOrder(l,root->left);
      DLL_InsertLast(l,root->data);
      InOrder(l,root->right);

// PostOrder
      PostOrder(l,root->left);
      PostOrder(l,root->right);
      DLL_InsertLast(l,root->data);
```

- *K procvičení:* Po záměně pořadí rekurzivního zpracování levého a pravého syna pak dostaneme odpovídající inverzní průchody.

Nerekurzivní PreOrder 1/2

```
void LeftMostPre (TNode *ptr, TDLList *l)
/* s1 - globální zásobník ukazatelů */
{
  while (ptr != NULL){
    Push(&s1,ptr);
    DLL_InsertLast(l,ptr->data);
    ptr = ptr->left;
  }
}
```



Nerekurzivní PreOrder 2/2

```
void NRPreOrder (TDLList *l, TNode *ptr)
{
    DLL_InitList(l);
    InitStack(&s1);
    LeftMostPre(ptr,l);
    while (!IsEmpty(&s1)){
      ptr = Top(&s1);
      Pop(&s1);
      LeftMostPre(ptr->right,l);
    }
}
```

Nerekurzivní InOrder 1/2

```
void LeftMostIn (TNode *ptr)
/* s1 - globální zásobník ukazatelů */
{
  while (ptr != NULL){
    Push(&s1,ptr);
    ptr = ptr->left;
  }
}
```

Nerekurzivní InOrder 2/2

```
void NRInOrder (TDLList *l, TNode *ptr)
{
  DLL_InitList(l);
  InitStack(&s1);
  LeftMostIn(ptr);
  while (!IsEmpty(&s1)){
     ptr = Top(&s1);
     Pop(&s1);
     DLL_InsertLast(l,ptr->data);  // změna od PreOrder
     LeftMostIn(ptr->right);
  }
}
```

Nerekurzivní PostOrder

- PostOrder se vrací k *otci* dvakrát:
  - poprvé zleva, aby šel doprava,
  - podruhé zprava, aby zpracoval otcovský uzel.
  - Pro rozlišení obou návratů použijeme zásobník booleovských hodnot.

```
void LeftMostPost(TNode *ptr)
/* s1 - globální zásobník ukazatelů
   sb1 - globální zásobník booleovských hodnot */
{
   while (ptr != NULL){
      Push(&s1,ptr);
      B_Push(&sb1,true);
      ptr = ptr->left;
   }
}
```

```
void NRPostOrder (TDLList *l, TNode *ptr)
{
  bool fromLeft;
  DLL_InitList(l);
  InitStack(&s1);
  B_InitStack(&sb1);
  LeftMostPost(ptr);
  while (!IsEmpty(&s1)) {
    ptr = Top(&s1);
    fromLeft = B_Top(&sb1);
    B_Pop(&sb1);
    if (fromLeft){    // přichází zleva, půjde doprava
      B_Push(&sb1,false);
      LeftMostPost(ptr->right);
    } else {      // zprava, odstraní a zpracuje uzel
      Pop(&s1);
      DLL_InsertLast(l, ptr->data);
    } //if
  }   //while
}
```

Level-order průchod

```
void LevelOrder (TDLList *l, TNode *ptr)
{  /* globální fronta ukazatelů */
    InitQueue(&q1);
    Add(&q1,ptr);
    while (!IsEmpty(&q1)){
      TNode *aux = Front(&q1);
      Remove(&q1);
      if (aux != NULL){
        DLL_InsertLast(l,aux->data);
        Add(&q1,aux->left);
        Add(&q1,aux->right);
      }
    }//while
}
```

Výška stromu – rekurzivně (v1)

```
void HeightBT (TNode *ptr, int *max)
{
  int hl,hr;
  if (ptr != NULL){
     HeightBT(ptr->left,&hl);
     HeightBT(ptr->right,&hr);
     if (hl > hr) {
       *max = hl+1;
     } else {
       *max = hr+1;
     }
  } // if ptr != NULL
  else {*max = 0;}
}
```

Výška stromu – rekurzivně (v2)

```
int max (int n1, int n2)
{  // funkce vrátí hodnotu většího ze dvou parametrů
  if (n1 > n2) {
    return n1;
  } else {
    return n2;
  }
}

int Height (TNode *ptr)
{
  if (ptr != NULL){
    return max(Height(ptr->left),Height(ptr->right))+1;
  } else {
    return 0;
  }
}
```

Ekvivalence (struktur) dvou BS

```
bool EQTS (TNode *ptr1, TNode *ptr2)
{
   if ((ptr1 == NULL)||(ptr2 == NULL)){
     return ptr1 == ptr2;
   }
   else{
     return (EQTS(ptr1->left,ptr2->left)&&
                      EQTS(ptr1->right,ptr2->right));
   // && (ptr1->data == ptr2->data) pro ekvivalenci BS
   }
}
```

Kopie BS – rekurzivně

```
TNode * CopyR (TNode *orig)
{
  TNode *copy;
  if (orig != NULL){
    copy = (TNode *) malloc(sizeof(TNode));
            // zkontrolovat úspěšnost operace malloc
    copy->data = orig->data;
    copy->left = CopyR(orig->left);
    copy->right = CopyR(orig->right);
    return copy;
  } else {
    return NULL;
  }
}
```

Kopie BS – nerekurzivně 1/3

```
TNode * LeftMostCopy (TNode *orig)
{
  if (orig == NULL)
  {
    return NULL;                              // není co kopírovat
  }
  else
  {
    TNode *new = (TNode *) malloc(sizeof(TNode));
                    // zkontrolovat úspěšnost alokace paměti
    new->data = orig->data;
    Push(&s1,orig);
    Push(&s2,new);
    orig = orig->left;      // posun po diagonále orig.
    TNode * tmp = new;      // new se bude vracet
```

Kopie BS – nerekurzivně 2/3

```
    while (orig != NULL){
        tmp->left = (TNode *) malloc(sizeof(TNode));
                    // zkontrolovat úspěšnost alokace paměti
        tmp = tmp->left;        // po diagonále kopie
        tmp->data = orig->data;
        Push(&s1,orig);
        Push(&s2,tmp);
        orig = orig->left;      // po diagonále originálu
    }   // while
    tmp->left = NULL;
    return new;
  } // else
}   // LeftMostCopy
```

Kopie BS – nerekurzivně 3/3

```
TNode * CopyNR (TNode *orig)
{// s1 a s2 - inicializované globální zásobníky ukazatelů
  TNode *copy;
  TNode *copyAux;
  TNode *origAux;

  copy = LeftMostCopy(orig);
  while (!IsEmpty(&s1)){
                                  // LeftMostCopy pro pravé syny
     origAux = Top(&s1);
     Pop(&s1);
     copyAux = Top(&s2);
     Pop(&s2);
     copyAux->right = LeftMostCopy(origAux->right);
  }
  return copyPtr;
}
```

Zrušení BS – rekurzivně

```
void DestroyR (TNode *ptr)
{
  if(ptr != NULL)
  {
    DestroyR(ptr->left);
    DestroyR(ptr->right);
    free(ptr);
  }
}
```

Zrušení BS – nerekurzivně (v1)

```
void DestroyNR (TNode *ptr)
{
   InitStack(&s1);                    // s1 - zásobník ukazatelů
   do {
     if (ptr == NULL){                // vezmu uzel ze zásobníku
       if (!IsEmpty(&s1)) {
         ptr = Top(&s1);
         Pop(&s1);
       }
     } else {
       if (ptr->right != NULL){  // pravého dám do zásobníku
         Push(&s1,ptr->right);
       }
       TNode *aux = ptr;
       ptr = ptr->left;                        // jdu doleva
       free(aux);                         // zruším aktuální uzel
     }  //else
   } while((ptr != NULL)||(!IsEmpty(&s1)));
}
```

Zrušení BS – nerekurzivně (v2) 1/2

```
void LeftMostDestroy (TNode *ptr)
{
  while (ptr != NULL){
    Push(&s1, ptr);
    ptr = ptr->left;
  }
}
```

Zrušení BS – nerekurzivně (v2) 2/2

```
void DestroyWithLeftMost (TNode *ptr)
{
  InitStack(&s1);
  LeftMostDestroy(ptr);
  while(!IsEmpty(&s1)) {
    ptr = Top(&s1);          // nejlevější na diagonále
    Pop(&s1);
    if (ptr->right != NULL){              // pravá větev
      LeftMostDestroy(ptr->right);
    }
    free(ptr);
  }
}
```

Test váhové vyváženosti BS

```
bool TestWBT (TNode *ptr, int *count)
{
  bool left_balanced, right_balanced;
  int  left_count,    right_count;
  if (ptr != NULL){
    left_balanced  = TestWBT(ptr->left,&left_count);
    right_balanced = TestWBT(ptr->right,&right_count);
    *count = left_count+right_count+1;
    return (left_balanced && right_balanced &&
            (abs(left_count-right_count)<=1));
  }
  else{
    *count = 0;
    return true;
  }
}
```

Vytvoření BS z prvků pole

- Vytvoření váhově vyváženého binárního stromu ze seřazeného pole (rekurzivně)

```
void TreeFromArray(TNode **ptr, int leftIndex, int rightIndex,
                   int array[])
{
   if (leftIndex <= rightIndex){
     int middle = (leftIndex+rightIndex)/2;
     *ptr = (TNode *) malloc(sizeof(TNode));
            //zkontrolovat úspěšnost operace malloc
     (*ptr)->data = array[middle];
     TreeFromArray(&(*ptr)->left,leftIndex,middle-1,array);
     TreeFromArray(&(*ptr)->right,middle+1,rightIndex,array);
     }
   else {
     (*ptr) = NULL;
   }
 }
```

K procvičení

- Vytvořte nerekurzivní funkci, která vhodným parametrem určí, zda se zadaný průchod binárním stromem do zadaného seznamu uloží v podobě PreOrder, InOrder nebo PostOrder.
- Napište nerekurzivní funkci PostOrder pomocí inverzního PreOrderu s jedním zásobníkem.
- Implementujte funkci pro výšku stromu nerekurzivně.
- Implementujte funkci pro ekvivalenci (struktur) dvou stromů nerekurzivně.
- Implementujte funkci pro test výškové vyváženosti stromu.

K procvičení

- Vytvořte funkci, která zjistí počet listů BS.
- Vytvořte funkci, která spočítá průměrnou vzdálenost a rozptyl vzdáleností listů od kořene BS.
- Vytvořte funkci, která nalezne a do výstupního seznamu uloží nejdelší cestu od kořene k listu.