Algoritmy – IAL

Ing. Ivana Burgetová, Ph.D.
Ing. Radek Hranický, Ph.D.
prof. Ing. Jan M. Honzík, CSc.
FIT VUT v Brně
2024/25

Obsah

- Organizační informace
- Algoritmy a datové struktury – úvod
- Složitost algoritmů – základní pojmy

- Klíčové pojmy – abstrakce, datové struktury, funkce, rekurze

Personální zajištění předmětu

- Garant:
  - Ing. Ivana Burgetová, Ph.D.
- Přednášející:
  - Ing. Ivana Burgetová, Ph.D. – úterý 12:00
  - Ing. Radek Hranický, Ph.D. – středa 18:00
- Asistenti - konzultace k domácím úlohám a k projektu:
  - Ing. Daniel Dolejška – DÚ1 a náhradní projekt
  - Ing. Jan Zavřel – DÚ2

Informace k předmětu

- IS VUT
  - Všechny termíny – půlsemestrální a semestrální zkoušky
  - Všechna zadání – domácí úkoly a náhradní projekty
- Moodle VUT
  - Studijní materiály – prezentace k přednáškám
  - Soubory potřebné pro řešení domácích úloh
  - Doplňující materiály ke studiu i k projektům
  - Diskuzní fóra

Přednášky

- Úterý 12:00 – 14:50
- Středa 18:00 – 20:50

- **Přednášky jsou základním zdrojem informací – choďte na ně!**
- Záznamy: budou zveřejňovány
  - Prosíme, nechoďte na přednášku, pokud nejste zcela FIT.

Bodové hodnocení

- Rozdělení bodů:
  - 2 domácí úlohy (po 10 bodech)
  - projekt s obhajobou pro tým 3-4 studentů (15 bodů) obhajující bude vybrán losem
  - půlsemestrální zkouška (14 bodů)
  - semestrální zkouška (51 bodů, **minimum 24 bodů**)
- Pro udělení **zápočtu** je nutné získat **minimálně 20 bodů za semestr** (tj. 40,8 %)

Doplňující informace

- Domácí úkoly:
  - 6 bodů za základní testy + 4 body za pokročilé testy
  - Správná funkčnost na serveru *eva.fit.vutbr.cz*
- Projekt:
  - Týmový (3-4 studenti), společný s předmětem IFJ
  - Body za funkčnost, obhajobu a dokumentaci (5+5+5 bodů)
  - Náhradní projekty – téma: grafové algoritmy (7+5+3 bodů)
- Půlsemestrální zkouška:
  - Přihlašuje se student v IS VUT. Bez přihlášení nebude přiděleno místo ani připraveno zadání – nelze se zúčastnit!

Termíny

- *Žádost o uznání DÚ:* *16. 9. – 29. 9. 2024*
- Přihlašování na projekty: 29. 9. – 4. 10. 2024
- 1. domácí úloha: 30. 9. – 20. 10. 2024
- 2. domácí úloha: 21. 10. – 10. 11. 2024
- Přihlašování na půlsemestrální zkoušku: 1. 10. – 11. 10. 2024
- Půlsemestrální zkouška: 15. 10. a 16. 10. 2024 (v době přednášky, pokud to půjde)
- Odevzdání projektu: 4. 12. 2024
- Obhajoby projektů: 5. 12. – 13. 12. 2024

Studijní zdroje

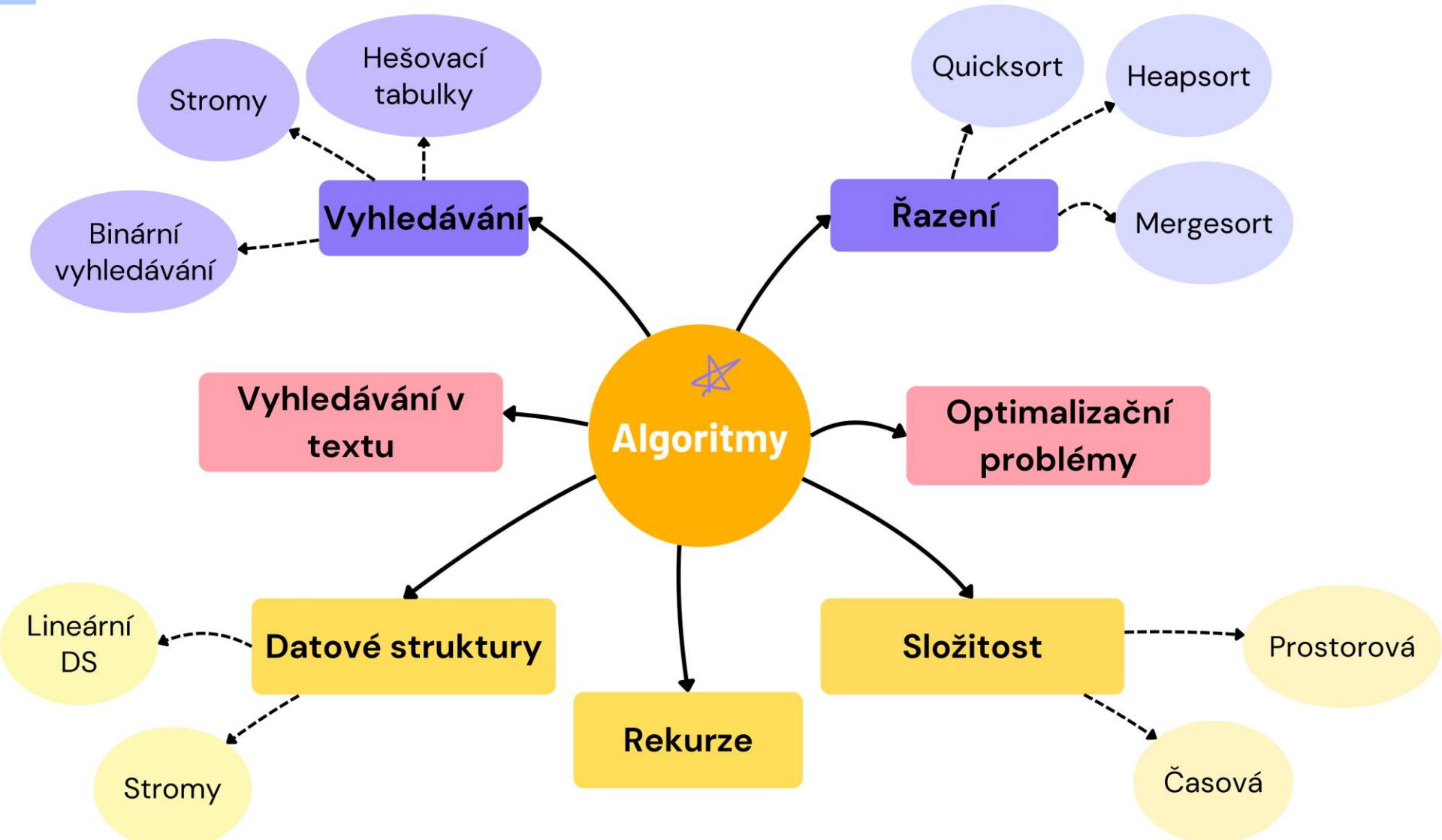
- **Prezentace k přednáškám** – budou postupně dostupné v Moodle VUT
- Mareš, M., Valla, T.: Průvodce labyrintem algoritmů, CZ.NIC, 2017
- Cormen, T.H., Leiserson, Ch.E., Rivest, R.L.: Introduction to Algorithms, Cambridge MIT Press, 2009
- Sedgewick,R.: Algoritmy v C, Addison Wesley 1998. Softpress 2003.

- Honzík, J.M.: Studijní opora IAL – již není aktualizovaná a neobsahuje témata nově zařazená do přednášek (např. grafové algoritmy, dynamické programování). Dostupná v Moodle VUT

Odhad časové náročnosti předmětu

- 1 kredit = 25-30 hodin práce
- 5 kreditům odpovídá 125-150 hod. studijní práce průměrného studenta, z toho:
- Přednášky 39 hod
- 2 domácí úlohy 26 hod
- práce na projektu 35 hod
- průběžné studium 20 hod
- příprava na půlsem. a záv. zkoušku 30 hod

Náplň předmětu



Návaznosti předmětu

- **Schopnost algoritmizace** je klíčová při návrhu a implementaci SW projektů v dalších předmětech i v programátorské praxi.
  Když se občas potkáme s našimi absolventy, často právě předmět Algoritmy zpětně hodnotí jako nejpřínosnější z celého studia.
- V dnešní době již máte řadu algoritmů a datových struktur dostupných v knihovnách. Pro **výběr nejvhodnějšího** algoritmu či datové struktury pro daný účel je však nutné umět jednotlivé alternativy zhodnotit. A pro **správné použití** datové struktury či algoritmu se porozumění principům určitě hodí.
- Probíraná témata se objevují u **státních závěrečných zkoušek**:
  - **27. Datové a řídicí struktury imperativních programovacích jazyků**
  - **28. Vyhledávání a řazení**
  - **30. Hodnocení složitosti algoritmů (paměťová a časová složitost, asymptotická časová složitost, určování časové složitosti)**
  - https://www.fit.vut.cz/fit/info/rd/2020/rd39-201217.pdf

Témata přednášek

1. Organizační informace. Úvod do **algoritmů**. **Asymptotická časová složitost**.
2. **Abstraktní datový typ** a jeho specifikace. Specifikace, implementace a použití **ADT seznam**.
3. Specifikace, implementace a použití ADT **zásobník, fronta**, vyhledávací tabulka, pole, graf, binární strom.
4. ADT **binární strom**, algoritmy nad binárním stromem.
5. **Vyhledávání**, sekvenční, v poli, binární vyhledávání, binární vyhledávací stromy.
6. AVL strom, vyhledávání v tabulkách s rozptýlenými položkami, stromy s více klíči ve vrcholech.
7. **Řazení,** principy, bez přesunu, s vícenásobným klíčem. Metody řazení polí.
8. Metody řazení polí.
9. **Vyhledávání v textu**.
10. Techniky řešení problémů, rekurze, **dynamické programování**.
11. **Grafové algoritmy,** tvorba dokázaných programů.

Učební cíle a kompetence – specifické

- Seznámit se základními principy složitosti algoritmů
- Seznámit se se základními abstraktními datovými typy a strukturami, naučit se je implementovat a používat
- Seznámit se s vyhledávacími metodami, naučit se je implementovat a používat
- Seznámit se s řadicími metodami, naučit se je implementovat a používat
- Naučit se rekurzivní a nerekurzivní zápisy základních algoritmů
- Naučit se porozumět principům a analyzovat algoritmy vyhledávání a řazení.
- Seznámit se s metodami pro vyhledávání v textu
- Seznámit se se základy dynamického programování
- Seznámit se se základními grafovými algoritmy

Učební cíle a kompetence – generické

- Naučit se základům týmové práce při tvorbě malého projektu
- Naučit se základům tvorby dokumentace projektu
- Naučit se základům prezentace projektu a obhajobě dosažených výsledků
- Seznámit se se základy anglické terminologie v oblasti algoritmizace

Obsah

- Organizační informace
- Algoritmy a datové struktury – úvod
- Složitost algoritmů – základní pojmy
- Opakování – abstrakce, datové struktury, funkce, rekurze

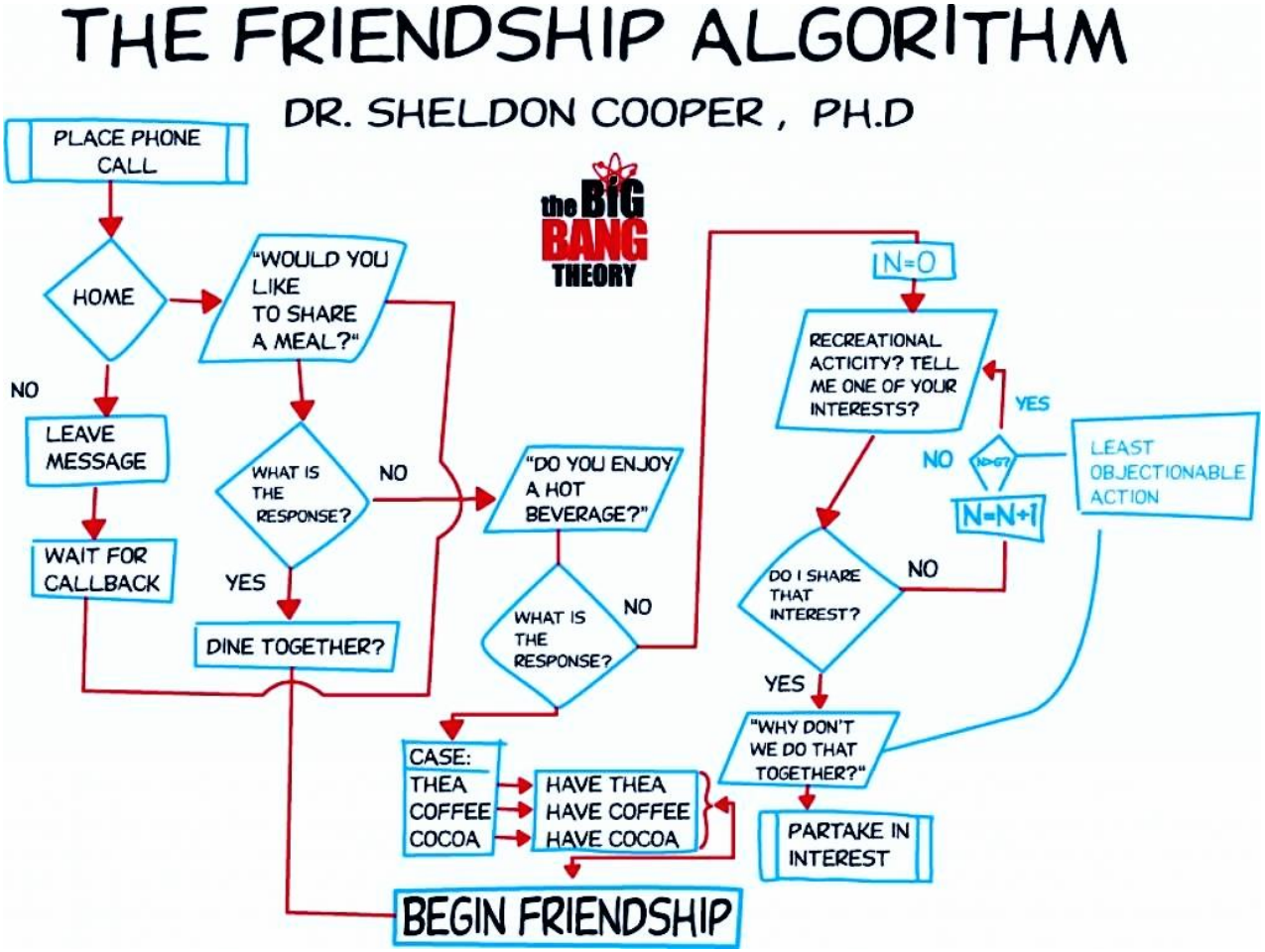
Algoritmy a datové struktury

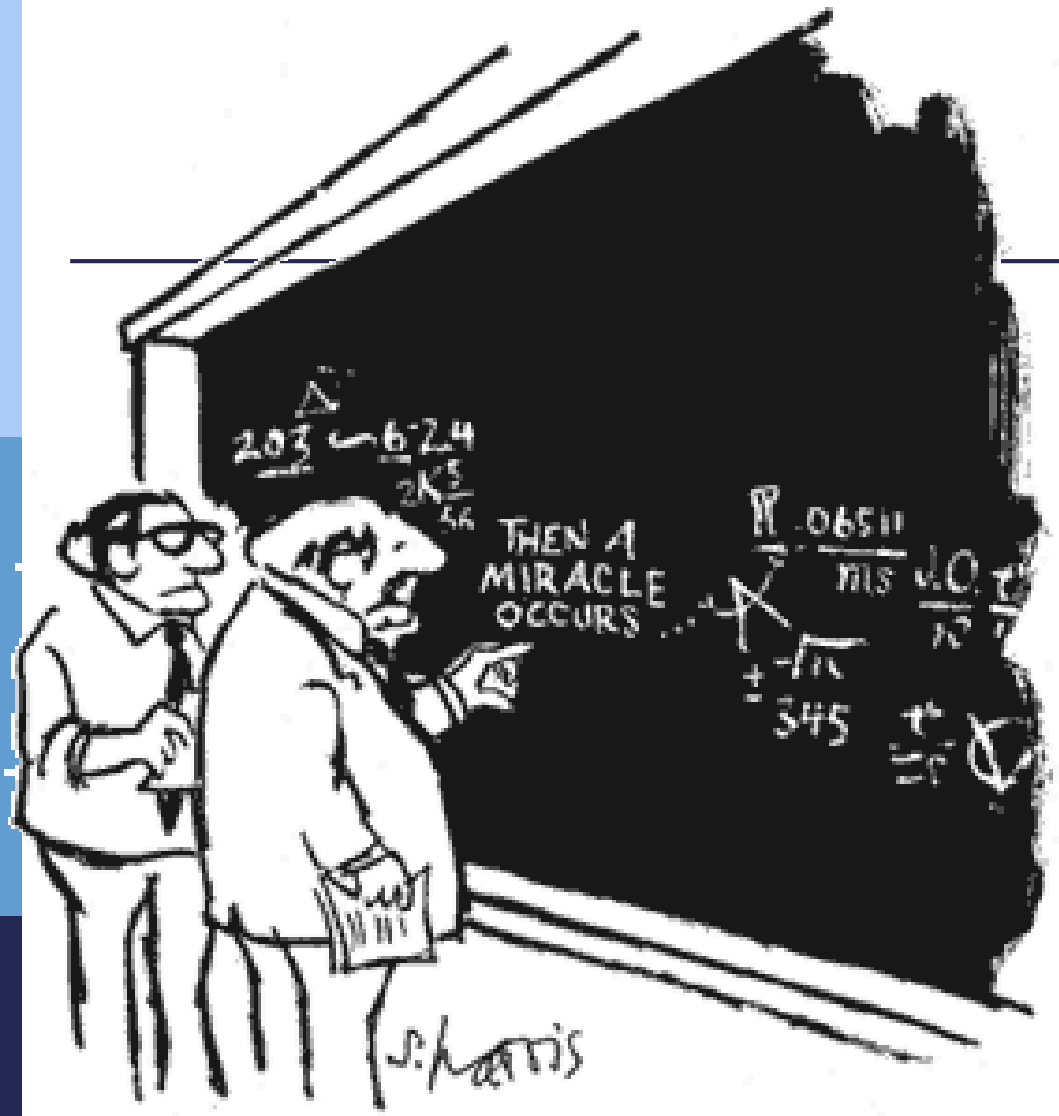
- Počítače používáme pro řešení nejrůznějších problémů:
  - Problém obchodního cestujícího
  - Problém nalezení nejkratší cesty
  - Hledání nejdelšího společného podřetězce
  - Vyhledávání a řazení
- Počítač potřebuje návod, jak daný problém vyřešit: **algoritmus**

Algoritmy a datové struktury

- **Algoritmus:**
  - **konečná**, uspořádaná množina úplně definovaných **pravidel** pro vyřešení nějakého **problému**
  - **posloupnost** výpočetních kroků, které transformují **vstup** na **výstup**
  - nástroj pro řešení dobře specifikovaného výpočetního **problému** (specifikovaného pomocí vztahů mezi vstupy a výstupy)
  - **správnost** algoritmu – pro libovolný vstup skončí s korektním výstupem
  - **vlastnosti**: konečnost, obecnost, determinovanost, resultativnost, elementárnost
- Popis algoritmu vs. implementace algoritmu

Algoritmy a datové struktury





"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

Algoritmy a datové struktury

- Datové struktury:
  - Způsob uložení a organizace dat za účelem umožnění přístupu k datům a jejich modifikaci
  - Usnadňují řešení problémů
- Programovací techniky:
  - Rozděl a panuj (divide and conquer)
  - Dynamické programování
  - Hledání s návratem (backtracking)
- Složitost algoritmů
- Možnosti paralelizace

Proč datové struktury?

- Datové struktury statické x dynamické
  (pole x seznam, binární vyhledávací strom)
- Různé datové struktury mají své výhody i nevýhody:
  - Doba přístupu k jednotlivým položkám se liší
  - Zachování uspořádanosti prvků při vkládání nových dat je různě náročné
  - Rušení prvků nemusí být vždy jednoduché
- Pro různé aplikace jsou vhodné různé datové struktury

Proč algoritmy?

- **Úloha: dvojice prvků se zadaným součtem**
  - **Vstup:** uspořádaná posloupnost prvků a číslo *s*
  - **Výstup:** dvojice prvků (ne nutně různých), jejichž součet je *s*
  - **Příklad:**
    - Posloupnost prvků:

1	3	6	6	8	9	10

    - Číslo *s*: 12
    - Výstup: dvojice 3 a 9, 6 a 6

- **Řešení č. 1 – hrubou silou**
  - Sečteme všechny dvojice $x_i + x_j$
  - Počet dvojic, které musíme sečíst: n^2

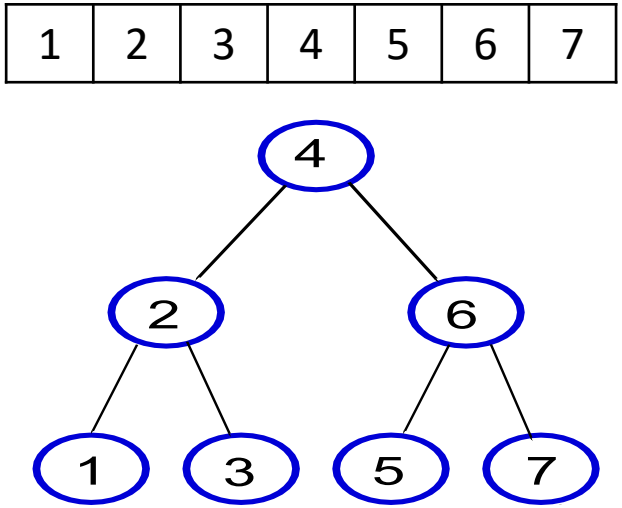
Proč algoritmy?

- **Řešení č. 2 – využití binárního vyhledávání:**
  - **Myšlenka:** pokud zvolíme nějaké x_i, víme, že $x_j = s - x_i$ a můžeme x_j zkusit vyhledat
  - Postupně zkoušíme všechna x_i a vyhledáváme k nim x_j
  - Vyhledávat můžeme metodou binárního vyhledávání (půlení intervalu), nalezne prvek nejpozději po $log_2 n$ krocích
  - Celkově tedy provedeme $n.log_2 n$ kroků

1	3	6	6	8	9	10

Proč algoritmy?

- Pozn: Kolikrát lze rozpůlit interval?
  - Kolikrát mohu dané číslo *n* dělit dvěma?
  - $y \approx log_2\, n$



Proč algoritmy?

- **Řešení č. 3 – metoda dvou jezdců**
  - Použijeme dva indexy – levý (*i* - začíná na 1. pozici a pohybuje se doprava) a pravý (j – pohybuje se doleva).
  - Pravým indexem vyhledáváme dvojici k aktuálnímu prvku x_i.
  - Vyhledávat budeme sekvenčně od konce pole, pokud je součet větší, pohybujeme se doleva, pokud je součet menší, posuneme se k dalšímu prvku (x_{i+1}).
  - Pokud se posuneme k prvku x_{i+1}, pak prvek x_j se může nacházet na pozici, kde jsme skončili předchozí vyhledávání nebo vlevo od ní.
  - Provedeme maximálně ***n*** kroků

1	3	6	6	8	9	10

Proč algoritmy?

- Jeden problém – mnoho různých řešení
- Každé řešení (algoritmus) má své výhody a nevýhody
- Pokud dokážeme zhodnotit **vlastnosti** jednotlivých řešení, můžeme vybrat to, které je v našem případě **nejvhodnější**.

Jak popsat algoritmus?

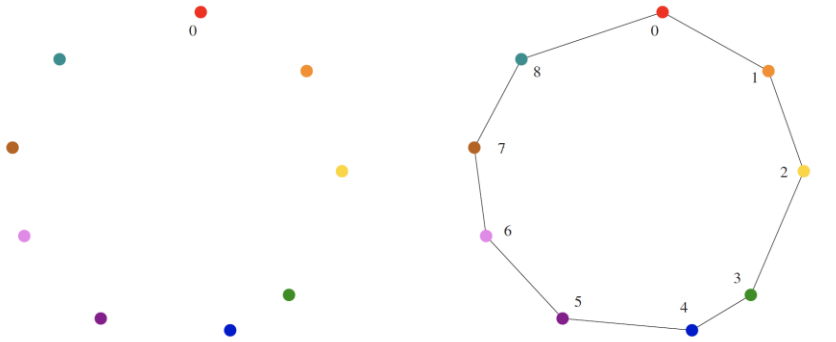
- Přirozeným jazykem:
  - nejpřirozenější, ale nejméně přesný způsob.
- Pseudokódem:
  - zlatý střed
  - *„Programovací jazyk, který si nikdy nestěžuje na syntaktické chyby.“*
- Programovacím jazykem:
  - přesné, ale obtížné na zápis a pochopení.

Algoritmus vs. heuristika

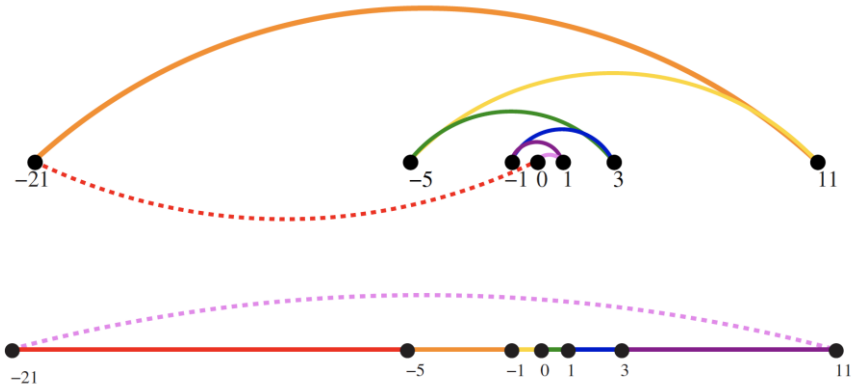
- Správnost algoritmu:
  - algoritmus musí vést ke správnému výsledku pro libovolný vstup
  - někdy je nalezení takového postupu problematické.
- Problém obchodního cestujícího (TSP - zjednodušeně):
  - Vstup: množina měst spojených silnicemi o daných délkách
  - Výstup: Nejkratší cesta procházející všemi městy a vracející se do výchozího města

Algoritmus vs. Heuristika - TSP

- Řešení č. 1: Použití nejbližšího souseda:
  - Vstup č. 1:



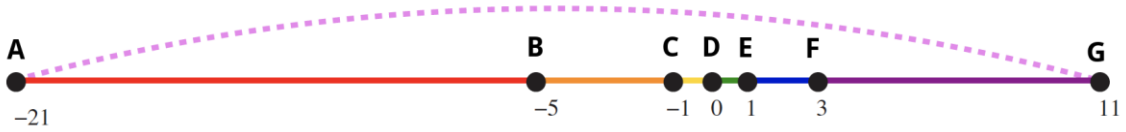
  - Vstup č. 2:



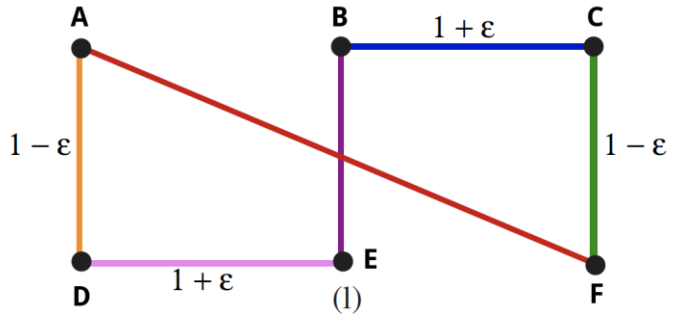
https://books.dwf.dev/docs/algorithm-design-manual/book-notes/introduction-to-algorithm-design

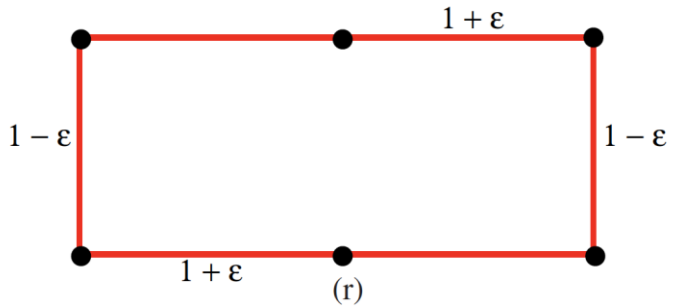
Algoritmus vs. Heuristika - TSP

- Řešené č. 2: Spojování nejbližších párů:
  - Udržujeme řetězce vrcholů a v každé iteraci spojíme 2 nejbližší řetězce.
  - Vstup č. 1:



  - Vstup č. 2





Algoritmus vs. heuristika

- TSP – příklad problému pro jehož korektní vyřešení potřebujeme prověřit všechny možnosti – řešení hrubou silou – neúnosně zdlouhavé!
- **Heuristika:**
  - Postup, který nedává vždy přesné řešení problému.
  - Ve většině případů dává dostatečně přesné řešení v rozumném čase.
  - Nezaručuje nalezení přesného řešení.
  - Použijeme tehdy, pokud pro daný problém neexistuje přesný algoritmus, nebo jeho použití je neekonomické.

Obsah

- Organizační informace
- Algoritmy a datové struktury – úvod
- Složitost algoritmů – základní pojmy
- Opakování – abstrakce, datové struktury, funkce, rekurze

Hodnocení algoritmů

- Potřebujeme zvolit kritéria, podle nichž budeme hodnotit jednotlivé algoritmy nezávisle na použitém programovacím jazyce nebo stroji.
- Nejčastější kritéria – časové a paměťové nároky
- Reálná doba běhu programu se může lišit pro různé stroje, různé sady vstupních dat atd.
- Využití tzv. časové a prostorové složitosti algoritmů:
  - způsob vyjádření vlastností algoritmu nezávisle na technických podrobnostech.
  - popis chování algoritmu pomocí jednoduchých matematických funkcí.

Časová složitost algoritmů

- Odvozena od počtu tzv. elementárních operací
- Elementární operace: sčítání, násobení, porovnání, skoky, atd.
- Časová složitost – řádový počet provedených operací v závislosti na velikosti vstupu (nejhorší případ)
- Velikost vstupu – příklady:
  - Počet prvků pole, které řadíme.
  - Větší z čísel, jejichž největšího společného dělitele počítáme.
- Určení elementárních operací – využití teoretických modelů strojů (např. Random Access Machine – RAM)

Časová složitost – příklad

- Algoritmy pro součty různých číselných řad
- Vstup algoritmů: číslo *n*

Algoritmus *Součet1*:

```
1.  for i ← (1, n):
2.    for j ← (1, n):
3.      s ← s + j
4.  return s
```

Počet elementárních kroků: $c_1.n^2 + c_2$
Zjednodušeně: n^2

Algoritmus *Součet2*:

```
1.  while n ≥ 1:
2.    s ← s + n
3.    n ← n / 2
4.  return s
```

Počet elementárních kroků: $c_3.log_2\, n + c_2$
Zjednodušeně: $log_2\, n$

- Zásadní vliv má počet provedených součtů, příp. dělení.

Časová složitost

- Určení časové složitosti:
  1. Zhodnotíme, jak měřit velikost vstupu.
  2. Určíme maximální možný počet elementárních kroků algoritmu provedených pro vstup o velikosti *n*.
  3. Ve výsledné formuli ponecháme pouze nejrychleji rostoucí člen, ostatní zanedbáme.
  4. Seškrtáme multiplikativní konstanty.
- Průměrná časová složitost:
  - Použijeme, pokud pro různé vstupy stejné velikosti vykoná algoritmus různý počet kroků.
  - Aritmetický průměr časových nároků přes všechny vstupy dané velikosti.

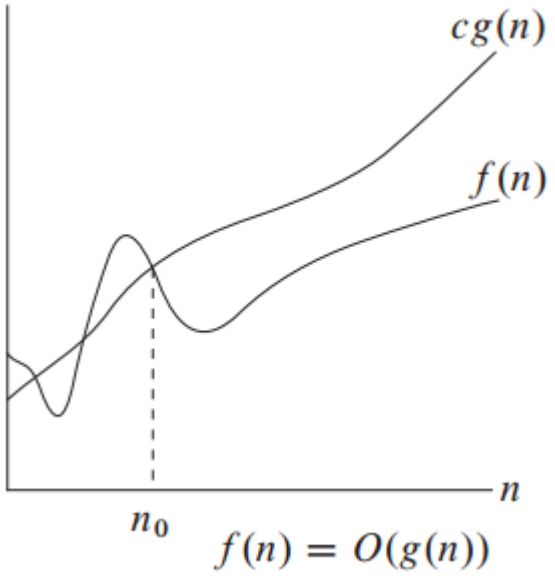
Asymptotická časová složitost

- Nejčastěji používané hodnotící kritérium
- Chování algoritmu popíšeme porovnáním s jistou funkcí
- Pro *n* jdoucí k nekonečnu se chování algoritmu blíží této funkci
- Používají se tři různé složitosti:
  - O – Omikron (velké O, Ó, *big O*) – horní hranice chování
  - Ω – Omega – dolní hranice chování
  - Θ – Théta – třída chování

Složitost Omikron

- Složitost Omikron (nebo také Big O, Ó) vyjadřuje horní hranici časového chování algoritmu.
- ***Omikron (g(n))*** označuje množinu funkcí *f(n)*, pro které platí:
  {f(n): ∃(c > 0, n_0 > 0) takové, že ∀ n ≥ n_0 platí [0 ≤ f(n) ≤ c.g(n)]}
  kde *c* a n_0 jsou určité vhodné kladné konstanty.

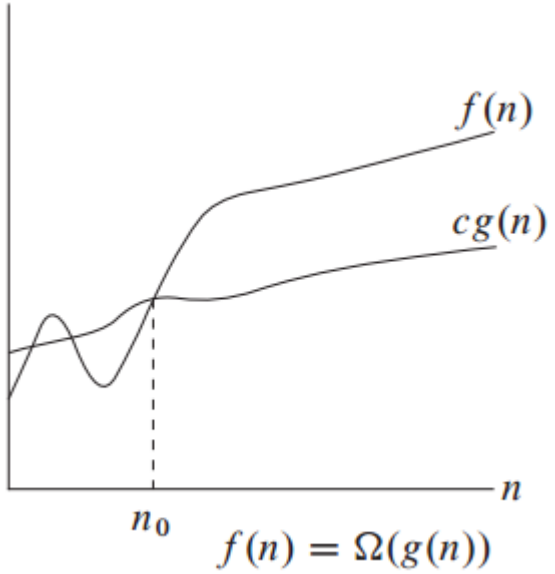
- Zápis *f(n) ∈ Omikron(g(n))*, nebo *Ó(g(n))*, označuje, že funkce *f(n)* je rostoucí maximálně tak rychle jako funkce *g(n)*.
- Dostatečně velký násobek funkce *g(n)* shora omezuje funkci *f(n)* pro dostatečně velké *n*.



Složitost Omega

- Složitost Omega (g(n)) (nebo také Ω) vyjadřuje dolní hranici časového chování algoritmu.
- ***Omega (g(n))*** označuje množinu funkcí *f(n)*, pro které platí:
  {f(n): ∃(c > 0, n_0 > 0) takové, že ∀ n ≥ n_0 platí [0 ≤ c.g(n) ≤ f(n)]}
  kde *c* a n_0 jsou určité vhodné kladné konstanty.

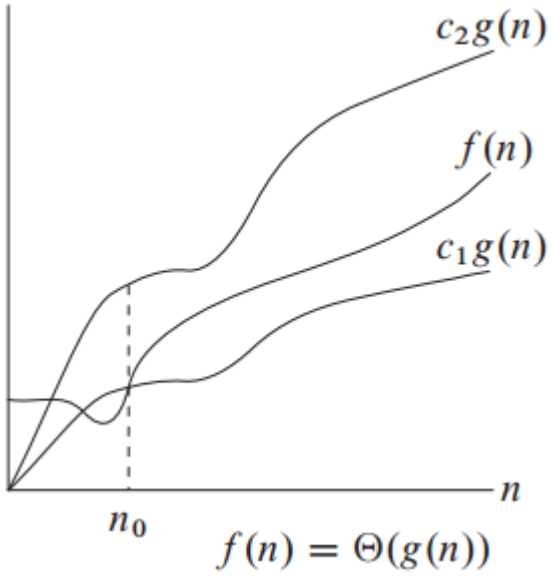
- Zápis *f(n) ∈ Omega(g(n))*, nebo *Ω(g(n)),* označuje, že funkce *f(n)* je rostoucí minimálně tak rychle jako funkce *g(n)*.
- Funkce *g(n)* je dolní hranicí množiny všech funkcí, určených zápisem *Omega(g(n))* nebo *Ω(g(n))*.



Složitost Théta

- Složitost Theta (g(n)) (nebo Θ(g(n))) vyjadřuje třídu chování algoritmu – ohraničuje funkci f(n) z obou stran (časové chování shodné jako funkce g(n).)
- ***Theta (g(n))*** označuje množinu funkcí *f(n)*, pro které platí:
  {f(n): ∃(c₁ > 0, c₂ > 0, n₀ > 0) takové, že ∀ n ≥ n₀ platí
  [0 ≤ c₁.g(n) ≤ f(n) ≤ c₂.g(n)]}, kde c_1, c_2 a n_0
  jsou určité vhodné kladné konstanty.

- Zápis *f(n) ∈ Theta(g(n))*, nebo *Θ(g(n))* označuje, že funkce *f(n)* roste tak rychle jako funkce *g(n)*.
- Nejpřesnější popis chování algoritmu – není možné ji vždy přesně stanovit



Vliv řádu algoritmu a kardinality úlohy

Počet prvků	33 n	46 n log n	13 n^2	3.4 n^3	2^n
10	0,000 33 s	0,015 s	0,001 3 s	0,003 4 s	0,001 s
100	0,003 3 s	0,03 s	0,13 s	3,4 s	4.10^{14} stol.
1 000	0,033 s	0,45 s	13 s	94 hod	
10 000	0,33 s	6,1 s	22 min	39 dní	
100 000	3,3 s	1,3 min	1,5 dne	108 roků	
Maximální velikost n pro čas					
1 s	30 000	2 000	280	67	20
1 min	1 800 000	82 000	2 200	260	26

Vliv řádu a konstanty

	CRAY – 1 Fortran	**TRS-80 Basic**
Počet prvků	**3 n^3**	**19 500 000 n**
10	3 $x10^{-6}$ s	200 $x10^{-3}$ s
100	3 $x10^{-3}$ s	2 s
1 000	3 s	20 s
2 500	50 s	50 s
10 000	49 min	3,2 min
1 000 000	95 let	5,4 hod

Typické časové složitosti

- **Θ(1)** – označení algoritmů s konstantní časovou složitostí
- **Θ(log(n))** – označení algoritmů s logaritmickou časovou složitostí:
  - Základ logaritmu není podstatný.
  - Např. rychlé vyhledávací algoritmy
- **Θ(n)** – označení algoritmů s lineární časovou složitostí
  - Např. běžné vyhledávací algoritmy
- **Θ(n.log(n))** – označení algoritmů nazvané linearitmické
  - Např. rychlé řadicí algoritmy
- **Θ(n^2)** – označení algoritmů s kvadratickou časovou složitostí
  - Algoritmy sestavené z dvojnásobného počítaného cyklu do *n*.
  - Např. jednoduché řadicí algoritmy (např. bubble-sort)

Typické časové složitosti

- **$\Theta(n^3)$** – označení algoritmů s kubickou časovou složitostí
  - Algoritmy s touto složitostí jsou prakticky použitelné pouze pro málo rozsáhlé problémy.
  - Kdykoli se *n* zdvojnásobí, čas zpracování je osminásobný.
- **$\Theta(k^n)$** – označení algoritmů s exponenciální časovou složitostí (k je přirozené číslo)
  - pro k = 2 – binomická časová složitost
  - Existuje několik prakticky použitelných algoritmů s touto složitostí.
  - Často se označují jako algoritmy pracující s „hrubou silou“ (angl. brute-force algorithms).
  - Kdykoli se *n* zdvojnásobí je čas řešení kvadrátem.

Prostorová složitost

- Měří paměťové nároky algoritmu
- Kolik nejvíce elementárních paměťových buněk algoritmus použije.
- Elementární paměťová buňka: proměnná typu integer, float, byte apod.
- Vyjádříme ji jako funkci *f(n)* v závislosti na velikosti vstupu *n*.

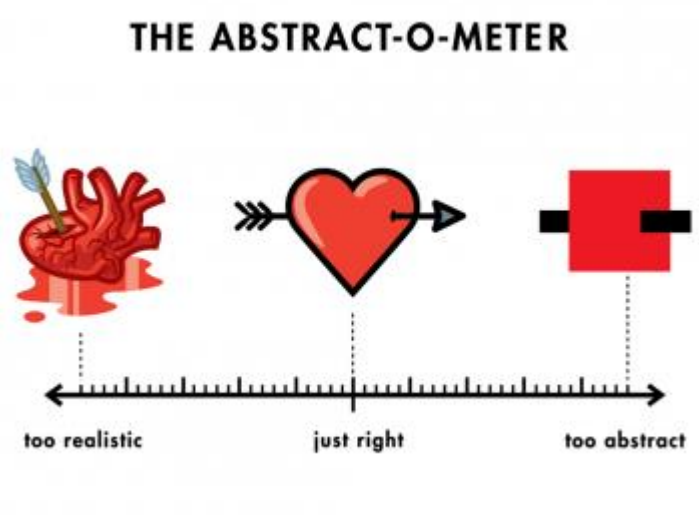
- Pomocná paměť:
  - extra paměť, kterou algoritmus využije, pokud nepočítáme velikost vstupu.
  - umožní lépe rozlišit paměťové nároky algoritmů, jejichž prostorová složitost je stejná.

Obsah

- Organizační informace
- Algoritmy a datové struktury – úvod
- Složitost algoritmů – základní pojmy
- Opakování – abstrakce, datové struktury, funkce, rekurze

Abstrakce

- Obecně: myšlenkový proces zanedbávající odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti a vztahy
- V informatice: odděluje účel entity od její implementace:
  - Zdůrazňujeme smysl entity
  - Potlačujeme způsob a detaily implementace (nepotřebujeme vědět, jak to funguje uvnitř)
  - Nástroj pro zvládnutí komplexnosti řešených problémů
  - Nástroje abstrakce: funkce, třídy, abstraktní datové typy, atd.
  - Často využíváme několik úrovní abstrakce



Datové typy a struktury

- **Datové typy:**
  - Jednoduché – bool, char, int, float, …
  - Strukturované – pole, **struktura**, unie, …
- **Datové struktury** – složeny z komponent jiného typu:
  - Homogenní x heterogenní
  - Statické x dynamické
  - Komponentou strukturovaného typu může být jiný dříve definovaný strukturovaný typ – možnost tvorby hierarchických a rekurzivních struktur.
  - **Průchod** – algoritmus, který postupně projde (a stejným způsobem zpracuje) všechny prvky homogenní datové struktury.

Statické proměnné (struktury)

- Dostávají jméno při deklaraci.
- Prostor jimi zaujímaný se vyhradí (alokuje) **v době překladu**.
- K obsahu těchto proměnných se dostáváme prostřednictvím jejich **jména**.
- Je-li struktura statická, **nemění** se za běhu programu ani počet ani uspořádání jejich komponent.
- Příkladem statické struktury je pole nebo záznam.

Dynamické proměnné (struktury)

- Vznikají i zanikají **v době běhu programu**.
- Nemohou mít jméno (identifikátor).
- K obsahu dynamických proměnných (struktur) se dostáváme **prostřednictvím ukazatele**.
- Počet i uspořádání komponent dynamických struktur se za běhu programu **mění**.
- Funkce `malloc()` a `free()`

Dynamické proměnné (struktury)

- K tvorbě dynamické struktury je vhodné (nutné) použít datového typu ***struktura*** (*záznam*). Její heterogennost umožňuje, aby dynamický prvek obsahoval vedle vlastní hodnoty také ukazatel(e).
- Příkladem dynamické struktury je seznam nebo strom.

Dynamické proměnné (struktury)

- Kdy je použijeme?
  - Pokud předem nevíme, kolik prvků daného typu budeme potřebovat uložit.
- Jak zajistit to, abychom měli ukazatel na každý vložený prvek?
  - Nemůžeme předem určit, kolik ukazatelů budeme potřebovat a „pojmenovat“ všechny ukazatele.
  - V každém nově vloženém prvku si zajistíme prostor pro uložení ukazatele na následníka (následníky).

Operace `malloc()`

- Vrací hodnotu *„ukazující“* na paměťový prostor v paměťové oblasti vyhrazené pro tento účel (hromada, halda, angl. *heap*).
- Velikost prostoru je třeba určit parametrem této funkce, obvykle pomocí operátoru `sizeof()`.
- Vždy je potřeba otestovat návratovou hodnotu
- Vrácený ukazatel je vhodné přetypovat na ukazatel na datový typ, s nímž je ukazatel svázán.
- `NULL` je ukazatelová konstanta s hodnotou vyjadřující, že ukazatel neukazuje na žádnou proměnnou (strukturu). Tuto konstantu lze přiřadit ukazateli libovolného typu.

Operace `free(ptr)`

- Ruší použitelnost dynamické proměnné (struktury), na kterou ukazuje ukazatel `ptr`. Po této operaci je hodnota ukazatele **nedefinovaná**.
- Pokud se paměť, kterou zaujímá zrušená proměnná (struktura), vrátí do vyhrazené paměťové oblasti, říkáme, že DPP pracuje **s regenerací**. V jiném případě jde o mechanismus **bez regenerace** (v praxi sotva použitelné).
- S pamětí je potřeba dobře hospodařit:
  - Ke každé operaci `malloc()` patří i operace `free()`
  - Nesmíme ztratit ukazatel na dynamicky vytvořenou proměnnou!

Funkce

- Důležitý nástroj pro **zvyšování abstrakce**.
- Má formu uzavřeného podprogramu – v místě volání funkce se generuje skok do podprogramu, po provedení funkce se řízení vrací zpět za skok do podprogramu.
- Rozlišujeme deklaraci funkce, definici funkce a volání funkce
- Parametry funkce:
  - Předávání odkazem nebo hodnotou
  - Představují *interface*, kterým je funkce připojena k programu.
  - Pozor na vedlejší efekt.
- *Pozn:* procedura = funkce, která nevrací žádnou hodnotu.

Rekurze

- Metoda definování určitého objektu pomocí sebe sama
- Umožňuje definovat nekonečnou množinu objektů konečným popisem
- Rekurzivní struktura dat (lineární seznam)
- Rekurzivní struktura algoritmu
- Rekurzivní volání funkce – funkce je volána v těle sebe samé