



## TRABAJO DE GRADO

# Agujeros Negros en MOG, análisis del movimiento de partículas con y sin masa

Luis F. Flórez<sup>\*</sup>

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.

### Resumen

En este trabajo se aborda el modelo de gravedad modificada MOG y sus principales características en el marco de estudio del movimiento de partículas bajo el efecto de la gravedad descrita en el modelo. Se encuentran las ecuaciones de movimiento de Hamilton para las soluciones estática de MOG y la solución rotante de Kerr-MOG. Se hace .

**Keywords:** MOG Gravity, Black Holes in MOG, Modified Gravity, Dark Matter, Particle Motion and Astrodynamics.

## Part I

# Materia Oscura

### 1. Introducción

El modelo MOG es un modelo de gravedad que modifica la relatividad general para dar cuenta de resultados cosmológicos y de dinámica galáctica atribuidos a la presencia de materia y energía oscura. Siendo capaz de dar cuenta de fenómenos fuera del alcance de la relatividad general sin recurrir a la existencia de materia exótica no conocida. Mediante la introducción de dos campos adicionales, estas observaciones pueden ser correspondidas con efectos debidos a interacciones del modo que postula MOG.

#### 1.1 Materia Oscura

La energía y materia oscura surgen como hipótesis para explicar observaciones astronómicas inconsistentes con lo predicho por las teorías de consenso actualmente (Swart, Bertone, and Dongen 2017). Estas inconsistencias atañen tanto a la física de partículas y el modelo estándar, como a la gravitación y la relatividad general (RG). Las observaciones entre otras de las velocidades de rotación en galaxias, la tasa de

expansión del universo no son consistentes con la materia y energía observadas de acuerdo a estas teorías.

Para explicar esta inconsistencia, se han propuesto dos abordajes diferentes ampliamente extendidos, tanto desde la física de partículas como la gravedad. El primero de ellos busca, como suele hacerse en la física de partículas, explicar estas inconsistencias postulando la existencia de un nuevo tipo de materia exótica, que correspondería a cerca del 85% de materia del universo. Esta materia es lo que se diría débilmente interactuante: partículas que no absorben, emiten, reflejan o interactúan de manera alguna con la luz<sup>1</sup>. De este modo, se han propuesto diferentes candidatos a materia oscura, partículas hipotéticas que de existir con la naturaleza y propiedades adecuadas completan el modelo y dan explicación a las observaciones con un nuevo modelo extendido. Existen entre las propuestas diferentes ejemplos, que resuelven desde una gama principios la crisis cosmológica actual; entre los posibles candidatos a complementar como los axiones, los WIMPs, neutrinos estériles y fotones con masa. Estas partículas son propuestas fuera del modelo estándar de partículas, modificando con ellas la teoría desde la cual entendemos la materia y sus interacciones para dar cabida a nueva materia por descubrir. De existir estas partículas serían incluidas en un modelo modificado del modelo estándar, dando lugar a una nueva teoría de la materia. Desde la relatividad general también se llega a postular la existencia de objetos supermasivos y compactos que puedan explicar las inconsistencias gravitacionales vistas a nueva materia, sin llegar tampoco a ser encontrados.

El modelo más aceptado en la actualidad, de concordancia con la mayoría de observaciones y fenómenos como el Big Bang y un universo en expansión acelerada, es el modelo  $\Lambda$ CDM<sup>2</sup>. En este, el modelo cosmológico actual, la postulada *materia oscura*, responsable de las inconsistencias observacionales en las curvas de rotación galáctica, constituye el 27.5% (Abdullah, Klypin, and Wilson 2020) de la total en el universo. Por otro lado reintroduce la constante cosmológica  $\Lambda$  a dar cuenta de la *energía oscura*. Esta tiene como efecto primario la expansión acelerada del universo, y sería la principal componente del universo, correspondiente al 68% de la densidad de energía presente en el universo actualmente. La materia *bariónica*<sup>3</sup> representa el 4.5% restante de materia presente en el universo. Esta última, descrita en sus interacciones por el modelo estándar, es la materia que podemos describir con la teoría física de consenso actualmente y que en general podemos observar que existe en el universo. La materia oscura de  $\Lambda$ CDM se mueve a velocidades bajas

1. El problema de la materia y energía oscura se da en el marco de la relatividad general, mediante observaciones astronómicas y comparaciones con la teoría, método que ha podido probar en numerosas ocasiones de acuerdo lo observado con la teoría de Einstein. De modo que la interacción principal con la que *vemos* esta materia, es débil en las escalas a las que opera el modelo estándar, cual de entrada deja de considerar la gravedad en su construcción.

2.  $\Lambda$  denota la inclusión de una constante cosmológica no nula y CDM por otro lado, la materia oscura fría (siglas en inglés). Esta se dice fría en relación con su velocidad, en contraste a la materia oscura caliente (HDM), partículas que viajan a velocidades ultrarelativistas.

3. La materia bariónica es la contemplada en el modelo estándar de partículas actual compuesta por bariones, es decir, estados entrelazados

comparada con la luz, debido a esto, su efecto gravitatorio sería observable solo a escalas grandes. Por esto es que vemos solamente esta *oscuridad*<sup>4</sup> como efecto en observaciones a nivel astronómico y en problemas competentes a la cosmología, y no en cambio a escalas pequeñas como lo puede ser el sistema solar o la gravedad en el límite newtoniano diario. Por esto, creemos, su existencia y efectos habrían pasado desapercibidos hasta ahora. Este tipo de materia sin embargo, y dicho sea de paso, ningún otro tipo de materia exótica propuesta para explicar dicha oscuridad ha sido detectada. Hasta donde podemos ver, el universo solo parece estar compuesto de materia bariónica. Lo que vemos parece ser todo lo que hay.

Esta forma de aproximarse al problema, acorde a la manera en que la física de partículas históricamente ha logrado modelar y entender a profundidad las interacciones fundamentales entre la materia (bariónica, toda ella), reduce a una parte mínima cuanto sabemos acerca del universo y sus interacciones. La teoría en este caso parte de modificaciones a la teoría que tenemos sobre la materia y cómo esta interactúa de modos distintos a la gravedad. Podemos tener un abordaje diferente al problema si en cambio de modificar la distribución de materia y energía que conocemos, cambiando lo que entendemos de la materia constituyente del universo; modificamos la teoría mediante la cual entendemos la gravedad, teniendo en cuenta que es mediante esta interacción que detectamos las inconsistencias que nos llevan a pensar en las hipótesis de energía y materia oscura. Las teorías que postulan materia y energía oscura o alguna otra forma exótica constituyente del universo asumen como teoría correcta para modelar la gravedad la propuesta por Einstein hace ya más de cien años. Una alternativa de buscar nueva materia, hasta ahora indetectable, es replantear la manera en la que entendemos la gravedad: encontrar una nueva teoría para la gravedad que pueda dar cuenta de lo que observamos sin acudir a nueva materia más allá de la que tenemos certeza acerca de su naturaleza, o de su existencia al menos.

En este marco es que se encuentran los modelos de gravedad modificada<sup>5</sup>, propuestas que apuntan a resolver las inconsistencias referentes a esta oscuridad en el universo haciendo ajustes a las leyes que comprenden la interacción gravitacional. Este planteamiento no reduce la dificultad del problema en cuanto a sus posibles candidatos, dentro de los modelos de gravedad propuestos encontramos numerosas hipótesis que tratan de resolver el problema cosmológico actual que involucran modificaciones y replanteamientos a constantes físicas y del modelo como el escalar de curvatura, la constante cosmológica o el tensor métrico. Entre estos modelos encontramos la gravedad STVG (Scalar-Tensor-Vector Gravity) que postula campos adicionales al gravitacional en relatividad general. De este modelo se deriva<sup>6</sup> aquel de nuestro interés: la gravedad modificada (Modified Gravity) *MOG*.

---

4. Si podemos llamar así al efecto que atribuimos a la energía o materia oscuras.

5. No hablamos aquí de teorías sino modelos en tanto estos son apenas aproximaciones dentro de la teoría en cuanto a modelo solamente. Hay que decir que estas teorías de gravedad no tienen respaldo como teoría a considerar hasta que no se aclaren los principios físicos que las sustentan.

6. Los campos considerados en la formulación inicial del modelo de Moffat se reducen en el caso de *MOG*, siendo este último una simplificación del primero.

## 1.2 MOG

La teoría MOG (MODified Gravity) <sup>7</sup> es una extensión covariante de la relatividad general con un campo vectorial masivo y campos escalares adicionales, propuesta por John Moffat en 2006 (J. Moffat 2021), para dar cuenta del problema actual respecto a la materia oscura. La principal implicación de este modelo es el campo vectorial masivo, que tiene su origen en una carga gravitacional característica de MOG. Con esto, los cuerpos masivos tendrían además del efecto del campo gravitacional, una fuerza de tipo Lorentz proporcional a su masa inercial. Dicho sea de paso, este campo afecta solamente a cuerpos masivos alterando su trayectoria, antes definida por las geodésicas de la RG; así, los fotones siguen comportándose como acostumbramos, moviéndose a lo largo de geodésicas.

La teoría propuesta por Moffat, que ha estado circulando entre la comunidad científica por cerca ya de veinte años, ha logrado *explicar*<sup>8</sup> varias observaciones astrofísicas atribuidas al problema de la oscuridad sin recurrir a modelos de materia no bariónica emergentes si se considera la RG como modelo correcto de la gravedad. MOG ha sido capaz de ajustarse a las curvas de rotación galáctica, observaciones de cúmulos galácticos y estelares, así como los picos en el espectro del fondo cósmico de microondas CMB sin acudir a la existencia de materia exótica (Harikumar 2022). Ha sido mostrado que la cosmología de MOG es consistente con la de  $\Lambda$ CDM y ha tenido éxito al explicar el crecimiento estructural a gran escala sin servirse de energía o materia oscura. Recientemente ha logrado también dar una buena prueba entre los modelos de gravedad modificada al representar correctamente sistemas binarios y de pequeña escala, un problema crucial en las modificaciones a la gravedad que requieren de condiciones de "activación" viz. MOG es capaz de reproducir la gravedad no solo a escalas galácticas y cosmológica sino también en la escala del sistema solar<sup>9</sup>.

Así, el modelo de MOG se presenta como una alternativa interesante a considerar frente al problema de la materia y energía oscura si nos permitimos creer; primero, que dentro del modelo cosmológico actual estas no son otra cosa que hipótesis sustentadas en la manera que hemos comprendido la gravedad, y segundo, que al cambiar las ecuaciones y teoría que modelan esta interacción tan propia en sus métodos, podríamos encontrar las piezas faltantes en nuestro modelo del universo sin delimitar tanto cuanto conocemos de él. Modificar la gravedad a la manera de MOG es en este sentido un camino prometedor en la búsqueda de una respuesta a la oscuridad que según vemos nos rodea, y que al seguir oculta a nuestros experimentos puede llevarnos a preguntar si debemos buscar la respuesta a la luz de

7. También conocida en una versión más general como STVG (Scalar-Tensor-Vector-Gravity)

8. MOG es hasta el momento apenas un modelo. Las observaciones concuerdan bastante bien con las observaciones astrofísicas atribuidas a la materia oscura, sin embargo, la naturaleza física y fenomenológica de los campos introducidos por Moffat, así como su observación es un asunto todavía no bien considerado ni resuelto.

9. La teoría MOND (MODified Newtonian Dynamics), predominante entre las teorías de gravedad modificada presentaba justamente estos problemas. Requería que se considerara solo a grandes escalas y que sus efectos fueran "apagados" al estudiarse sistemas a pequeña escala.

una nueva teoría.

## Part II

# Agujeros Negros en MoG

El marco de prueba para modelos de gravedad y en general para problemas de gran escala como lo es la materia oscura, es la dinámica de objetos gravitacionalmente importantes: sistemas de agujeros negros y estrellas, de uno o más cuerpos, así como galaxias y cúmulos galácticos. En este orden de ideas es importante revisar las soluciones analíticas primarias que se dan en este tipo de casos: soluciones para objetos con simetría esférica. Al considerar soluciones analíticas nos vemos reducidos a la solución para el problema de un solo cuerpo, en esto no vemos ninguna diferencia con la relatividad general. Pasaremos entonces a considerar los principios en los que se fundamenta MOG y las consideraciones teóricas de las que partimos para nuestro análisis del movimiento en nuestra gravedad.

### 2. Gravedad Modificada MOG

La teoría MOG es una formulación covariante de la gravedad derivada de un principio de acción relativista, que extiende la Relatividad General mediante la adición de dos grados de libertad gravitacionales. (Harikumar 2022) Tenemos, además de la métrica, la constante  $G$  promovida a campo escalar y un campo vectorial masivo  $\phi_\mu$ . De modo que en la acción de MOG encontramos una extensión de la RG, que con los campos adicionales podemos escribir la acción de MOG partiendo de las ya conocidas acciones correspondientes  $S_G$  al campo gravitacional Einsteiniano<sup>10</sup> y  $S_M$  a la materia; y adicional a estos dos campos tenemos las acciones  $S_S$  y  $S_\phi$  correspondientes a los campos escalar y vectorial propuestos

$$S = S_G + S_\phi + S_S + S_M \quad (1)$$

Tenemos entonces dos modificaciones fundamentales en la teoría MOG: En primer lugar, a la constante gravitacional newtoniana  $G_N$  es ahora representada por el campo escalar  $\chi = 1/G$  con  $G = G_N(1 + \alpha)$  como magnitud de la interacción gravitacional modificada, con el parámetro  $\alpha$  dando cuenta de la modificación a esta magnitud con respecto a la RG. En segundo lugar se ha introducido el campo vectorial  $\phi_\mu$  de espín-1 que se acopla universalmente a la materia debido a la masa, de esta manera se busca una modificación repulsiva a la gravedad en rangos cortos. La masa  $\mu$  asociada al bosón vectorial del campo, es el parámetro restante de la teoría que controla el rango de acción del campo y la contribución repulsiva de MOG.

El campo vectorial  $\phi_\mu$  es propuesto como un campo de tipo Maxwell-Proca, al que asociamos una carga  $Q_g$  mediante la cual este se acopla a la materia (Moffat and Toth 2012). La forma de esta carga se postula como  $Q^2 = \alpha G_N M^2$  dependiente de la masa y del parámetro  $\alpha$ . Se tienen dos posibles soluciones para la forma cuadrática de

---

10. Esta es la acción de Einstein-Hilbert correspondiente a un universo con constante cosmológica  $\Lambda = 0$

la carga gravitacional, para explicar diferentes fenómenos cosmológicos es necesario que el término adicional correspondiente a la carga sea repulsivo, tomando la forma de un potencial de Yukawa. Para que este sea nuestro caso escogemos la solución con la raíz positiva,

$$Q_g = \sqrt{\alpha G_N} M = \kappa M > 0.$$

Es este campo vectorial es el que le permite a MOG introducir la quinta fuerza repulsiva con la que puede describir las observaciones de materia oscura. A lo largo de este trabajo y al hacer un análisis rápido del modelo, podemos ver un paralelo evidente entre el campo de MOG con carga  $Q_g$  y el campo eléctrico asociado a un agujero negro con carga  $Q$ .

A partir del campo  $\phi_\mu$  se construye el tensor de campo  $B_{\mu\nu}$ , de manera análoga al tensor de campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ . Este parecido hará que el desarrollo ulterior de MOG, como veremos, tenga equivalencias y resultados para los que nos servirá el electromagnetismo como punto de referencia. Tenemos así las ecuaciones del nuevo campo <sup>11</sup>

$$B^{\mu\nu}_{,\mu} = 0 \quad B_{\mu\nu,\sigma} + B_{\sigma\mu,\nu} + B_{\nu\sigma,\mu} = 0 \quad B_{\mu\nu} = \phi_{\mu,\nu} - \phi_{\nu,\mu}. \quad (2)$$

Al introducir este campo en la teoría, la ecuación para las geodésicas que sigue una partícula de prueba en MOG se ve modificada de acuerdo su masa. Para el caso del movimiento de fotones, la ecuación para MOG coincide con las ecuaciones de la relatividad general,

$$\ddot{x}_\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0, \quad (3)$$

Esta es la ecuación para las geodésicas formulada en relatividad general, aquí los fotones se mueven a lo largo de geodésicas nulas en el espacio tiempo de MOG como lo harían en el de RG. De este modo podemos afirmar la concordancia de MOG con el principio de equivalencia débil. El principio de equivalencia fuerte no se cumple en MOG, podemos ver esto para el caso del movimiento de partículas ahora con masa. Para partículas masivas tenemos en la ecuación 4 un término adicional,

$$\ddot{x}_\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = \kappa B^\mu_{\nu} \dot{x}^\nu, \quad (4)$$

Que tiene una forma similar a la ecuación geodésica para una partícula de prueba con carga sujeta a la gravedad en relatividad general vista antes, con un término inhomogéneo debido al campo vectorial introducido para MOG. Esta ecuación es familiar si en lugar del campo de MOG, consideramos el acople con un campo electromagnético  $F_{\mu\nu}$ . La diferencia radica fundamentalmente en el tipo de carga a la cual cada campo se acopla y la masa del campo. La carga eléctrica  $Q_e = eQ$  asociada al campo electromagnético con potencial  $A_\mu$ , se corresponde con la carga de origen gravitacional  $Q_g = \kappa M$  y el campo vectorial  $\phi_\mu$ . Estas similitudes que encontramos en ambos formalismos tienen que ver con la acción de Maxwell-Proca para los campos antes mencionados. En ambos casos tenemos un campo espín-1,

11. Se emplea la notación para la derivada covariante  $\partial_\mu \phi_\nu = \phi_{\nu,\mu}$

pero cuando hablamos del electromagnetismo (Maxwell) consideramos el campo sin masa, como es el caso del fotón, mientras que en el caso de MOG (un campo tipo Proca) el campo  $\phi_\mu$  tiene una masa diferente de cero.

Hemos hablado de la construcción teórica de MOG lo suficiente para los objetivos de este trabajo, que es el análisis del movimiento en este modelo. Por lo que más que seguir profundizando en la teoría de Moffat, seguiremos nuestro camino a casos más particulares. Veremos ahora el formalismo que emplearemos en adelante para estudiar el movimiento de partículas alrededor de agujeros negros.

### 3. Mecánica en variedades curvas

Para describir el movimiento de objetos en la gravedad MOG, haremos un análisis del movimiento para partículas en dos métricas dentro de este modelo, que son; primero, la solución para un agujero negro estático y esféricamente simétrico, y en segundo lugar, la solución para un agujero negro rotante y axialmente simétrico. Estas son las correspondientes a la extensión de las soluciones de Schwarzschild y Kerr en el marco del modelo MOG.

En esta sección se obtendrán las ecuaciones de movimiento siguiendo el formalismo hamiltoniano y la derivación de cantidades conservadas a partir de la métrica y la función lagrangiana.

#### 3.1 Lagrangiano

Para encontrar las cantidades conservadas seguimos el formalismo lagrangiano, definiendo la función lagrangiana <sup>12</sup> como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (5)$$

Asumimos una forma general del lagrangiano que nos permita desarrollar luego las soluciones estacionaria y rotante de agujero negro; para esto consideramos no nulos los elementos de la diagonal  $g_{\mu\mu} \neq 0$  así como el elemento cruzado temporal-azimutal  $g_{t\phi} \neq 0$ . De este modo, el lagrangiano más general que podemos considerar está dado por<sup>13</sup>

$$2\mathcal{L} = g_{00}\dot{t}^2 - 2g_{03}\dot{t}\dot{\phi} - g_{11}\dot{r}^2 - g_{22}\dot{\theta}^2 - g_{33}\dot{\phi}^2. \quad (6)$$

A partir de este lagrangiano podemos encontrar los momentos canónicos asociados como  $p_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^\mu = \partial_\mu\mathcal{L} = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ ,

$$\begin{aligned} p_0 &= \partial_t\mathcal{L} = g_{00}\dot{t} + g_{03}\dot{\phi} = \mathcal{E} & p_1 &= \partial_r\mathcal{L} = g_{11}\dot{r} \\ p_3 &= \partial_\phi\mathcal{L} = g_{33}\dot{\phi} + g_{03}\dot{t} = -\ell_z & p_2 &= \partial_\theta\mathcal{L} = g_{22}\dot{\theta}. \end{aligned}$$

12. Se considera la función lagrangiana específica  $\mathcal{L} = L/m$ , la palabra específica se refiere a cantidades por unidad de masa, refiriéndose a la masa  $m$  de la partícula de prueba.

13. Se ha escogido para este trabajo la signatura  $(+,-,-,-)$ .

### 3.2 Formulación Hamiltoniana

El lagrangiano resultante no presenta ninguna dependencia de la variable temporal  $t$  ni del tiempo propio  $\tau$ , como es de esperarse al considerar una métrica estática. De modo que, con  $\partial_t \mathcal{L} = 0$  podemos afirmar que el Hamiltoniano se conserva y puede relacionarse con la energía del sistema. Tenemos para los momentos canónicos y las variables coordenadas las siguientes relaciones

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \qquad \dot{x}^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu.$$

De modo que el hamiltoniano puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \\ &= p_\mu (g^{\mu\nu} p_\nu) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{\mu\alpha} p_\alpha) (g^{\nu\beta} p_\beta) \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta. \end{aligned}$$

Tenemos las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \qquad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}.$$

Para la primera ecuación tenemos,

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \right) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\beta} p_\mu p_\beta + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} p_\alpha p_\mu \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\mu} g^{\alpha\mu} p_\alpha p_\mu = g^{\alpha\mu} p_\alpha, \end{aligned} \tag{7}$$

De modo que para cada componente tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}^0 &= \dot{t} = -g^{00} \mathcal{E} + g^{03} \ell_z & \dot{x}^1 &= \dot{r} = g^{11} p_1 \\ \dot{x}^2 &= \dot{\theta} = g^{22} p_2 & \dot{x}^3 &= \dot{\phi} = g^{33} \ell_z - g^{30} \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{8}$$

A modo de previsión se ha considerado el elemento  $g^{03}$  fuera de la diagonal, característico de la solución rotante de agujero negro. Para el caso de la métrica estática este término se desvanece dejando solamente los elementos en la diagonal  $g^{\mu\mu}$ .

Para la segunda ecuación de Hamilton

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} p_\alpha p_\beta \tag{9}$$

Para las diferentes coordenadas tenemos, en primer lugar las coordenadas cíclicas,

$$\dot{p}_0 = -\partial_t \mathcal{H} = 0 = \dot{\mathcal{E}} \qquad \dot{p}_3 = -\partial_\phi \mathcal{H} = 0 = \dot{\ell}_z \tag{10}$$



Por otro lado, para las coordenadas radial y cenital se tiene

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= -\partial_r \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \partial_r g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \\ &= -\frac{1}{2} \partial_r g^{00} p_0^2 - \frac{1}{2} \partial_r g^{03} p_0 p_3 - \frac{1}{2} \partial_r g^{11} p_1^2 - \frac{1}{2} \partial_r g^{22} p_2^2 - \frac{1}{2} \partial_r g^{33} p_3^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( -\partial_r g^{00} \mathcal{E}^2 + 2 \partial_r g^{03} \mathcal{E} \ell_z - \partial_r g^{11} p_1^2 - \partial_r g^{22} p_2^2 - \partial_r g^{33} \ell_z^2 \right) \quad (11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_2 &= -\partial_\theta \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \partial_\theta g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \\ &= \frac{1}{2} \left( -\partial_\theta g^{00} \mathcal{E}^2 + 2 \partial_\theta g^{03} \mathcal{E} \ell_z - \partial_\theta g^{11} p_1^2 - \partial_\theta g^{22} p_2^2 - \partial_\theta g^{33} \ell_z^2 \right). \quad (12)\end{aligned}$$

Con esto tenemos las ecuaciones de Hamilton para una partícula libre sobre una métrica  $g_{\mu\nu}$ .

### 3.3 Campo de interacción

El campo vectorial característico de MOG debe ser tenido en cuenta a la hora de calcular los momentos canónicos  $p_\mu$ . Se ha considerado el caso de una partícula libre con  $2\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ .

Para incluir el campo  $\phi_\mu$  podemos encontrar un paralelo entre MOG y las soluciones de agujero negro cargadas eléctricamente<sup>14</sup>. De este modo podemos asociar al campo  $B_{\mu\nu}$  un potencial generalizado que al incluirlo en el lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{q}{m} \phi_\mu \dot{x}^\mu, \quad (13)$$

Lo que resulta en un término extra en la definición para los momentos canónicos  $p_\mu$ , ahora momentos  $\pi_\mu$  generalizados (Misner, Thorne, and Wheeler 1973). Introduciendo este aporte los momentos se definen como

$$\pi_\mu = \partial_{\dot{x}^\mu} \mathcal{L} + \frac{q}{m} \phi_\mu. \quad (14)$$

## 4. Solución Agujero Negro MOG

La solución Schwarzschild-MOG describe un agujero negro estático y esféricamente simétrico en el espacio tiempo de MOG, análoga a la solución de Schwarzschild en relatividad general. La métrica para esta solución está dada por<sup>15</sup>

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (15)$$

14. Como veremos, la solución estática para un agujero negro en MOG tiene una forma similar a la cargada eléctricamente en relatividad general (Reissner-Nördstrom)

15. La componente  $d\Omega^2$  es el diferencial de ángulo sólido  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  que da cuenta de las variaciones angulares del elemento de línea

Esta solución tiene la misma forma que la solución de Reissner-Nördstrom, con la diferencia en el origen de la carga  $Q$  que ahora es de origen gravitacional.

Así tenemos ahora la métrica  $g_{\mu\nu}$  de la forma

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\alpha G_N G M^2}{r^2} = 1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} = \gamma \\ g_{11} &= \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{\alpha G_N G M^2}{r^2}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2}\right)^{-1} = \gamma^{-1} \\ g_{22} &= r^2 \\ g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Donde se diferencia la constante gravitacional newtoniana  $G_N$  y su equivalente en MOG,  $G$ . Esta constante en relatividad general es considerada en MOG como un campo escalar, el parámetro  $\alpha$  da cuenta de la variación de una respecto a la otra, con  $G = G_N(1 + \alpha)$ .<sup>16</sup>

#### 4.1 Lagrangiano

Con la métrica anterior, el lagrangiano (13) toma la forma<sup>17</sup>

$$2\mathcal{L} = \gamma \dot{t}^2 - \gamma^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + 2 \frac{q}{m} \phi_\mu \dot{x}^\mu.$$

Debido a la simetría esférica de la solución Schwarzschild-MOG, el campo vectorial  $\phi_\mu$  toma también una forma esféricamente simétrica. Siguiendo el paralelo de los campos Maxwell-Proca, podemos considerar este campo como definido por un potencial escalar sin contribuciones a las componentes espaciales, esto es, de la forma  $\phi_\mu = (\phi_t, \vec{0})$ , que podemos escribir para MOG como

$$\phi_\mu = \left( -\frac{\sqrt{\alpha G_N} M}{r}, \vec{0} \right) = \left( -\frac{\kappa M}{r}, \vec{0} \right), \quad (16)$$

Ahora, siguiendo el paralelo con el caso cargado eléctricamente,  $\phi_\mu$  toma una forma análoga al caso de  $A_\mu$  donde no se ha considerado potencial magnético vectorial  $A_i = \mathbf{A}$ . Así, los momentos canónicos  $\pi_\alpha = \partial_\alpha \mathcal{L} + \kappa \phi_\alpha$  resultan ser

$$\begin{aligned} \pi_t &= \partial_t \mathcal{L} - \kappa \phi_t = \gamma \dot{t} + \frac{\alpha G_N M}{r} = \mathcal{E} & \pi_r &= \partial_r \mathcal{L} = -\gamma^{-1} \dot{r} \\ \pi_\theta &= \partial_\theta \mathcal{L} = -r^2 \dot{\theta} & \pi_\varphi &= \partial_\varphi \mathcal{L} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = -\ell_z \end{aligned}$$

16. Si reescribimos la métrica en unidades naturales con  $G_N = 1$  obtenemos  $k_1 = 2(1 + \alpha)M$  y  $k_2 = \alpha(1 + \alpha)M^2$

17. Se ha reescrito el factor de dilatación temporal como  $\gamma = \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) = 1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2}$  para efectos de una notación más compacta

De los cuales dos son conservados; los correspondientes a la variable temporal  $t$  y azimutal  $\varphi$ . A estos asociamos las cantidades conservadas de energía propia de la partícula y el momento angular en la dirección cenital.

$$\begin{aligned}\pi_t &= \mathcal{E} && \text{Energía específica de la partícula} \\ \pi_\varphi &= -\ell_z && \text{Momento angular a lo largo del eje } \mathbf{z}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el lagrangiano considerado es específico, así mismo lo son estas cantidades conservadas. A partir de las definiciones de estos momentos podemos reescribir las velocidades  $\dot{x}_\mu$  en términos de las momentos canónicos generalizados  $\pi_\mu$  de la siguiente manera

$$\dot{t} = \gamma^{-1} \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha G_N M}{r} \right) \quad \dot{r} = \gamma \pi_r \quad \dot{\theta} = \frac{\pi_\theta}{r^2} \quad \dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (17)$$

Con esto, podemos considerar en el lagrangiano las velocidades  $\dot{x}^\mu(\pi_\mu)$  como funciones de los momentos canónicos <sup>18</sup> y reescribir  $\mathcal{L}$  (13) en términos de las cantidades conservadas

$$\begin{aligned}2\mathcal{L} &= -\gamma^{-1} \mathcal{E} + \gamma^{-1} \dot{t}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} - 2 \frac{\alpha G_N M}{r} \dot{t} \\ &= -\gamma^{-1} \mathcal{E} + \gamma^{-1} \dot{t}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{\ell^2}{r^2 \sin^2 \theta} - 2\gamma^{-1} \left( \frac{\mathcal{E} - \alpha G_N M}{r} \right) \dot{t}\end{aligned} \quad (18)$$

#### 4.2 Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton, que describen el movimiento de un sistema en función de la relación entre las variaciones de sus momentos y posiciones generalizadas, pueden ser escritas en un espacio-tiempo curvo como

$$\dot{x}_\mu = g^{\alpha\mu} p_\alpha \quad \dot{p}_\mu = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} p_\mu p_\nu, \quad (19)$$

Para las cuales requerimos primero, las componentes de la métrica inversa, que en el caso de Schwarzschild-MOG al ser una matriz diagonal, se tiene que  $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$ . Buscamos ahora las ecuaciones de Hamilton para la métrica de Schwarzschild-MOG, de modo que para la primera ecuación tenemos,

$$\dot{t} = \gamma^{-1} \mathcal{E} \quad \dot{r} = \gamma \pi_r \quad \dot{\theta} = \frac{\pi_\theta}{r^2} \quad \dot{\phi} = \frac{\ell}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (20)$$

Para la segunda ecuación requerimos de las siguientes derivadas de la métrica inversa,

$$\partial_r g^{00} = \partial_r \gamma^{-1} = \frac{\partial}{\partial r} \left( 1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} \right)^{-1} = \left( 1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} \right)^{-2} \left( \frac{k_1}{r^2} - \frac{2k_2}{r^3} \right) = \frac{k_1 r^2 - 2k_2}{(r^2 - k_1 r + k_2)^3}$$

---

18.  $\dot{t} = \gamma^{-1} \mathcal{E}$  y  $\dot{\phi} = \ell^2 / r^2 \sin^2 \theta$

$$\partial_r g^{11} = \frac{k_1}{r^2} - \frac{2k_2}{r^3} \quad \partial_r g^{22} = -\frac{2}{r^3} \quad \partial_r g^{33} = -\frac{2}{r^3 \sin^2 \theta}$$

$$\partial_\theta g^{00} = \partial_\theta g^{11} = \partial_\theta g^{22} = 0 \quad \partial_\theta g^{33} = -\frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta}$$

De modo que la segunda ecuación de Hamilton en cada componente resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_0 &= 0 & \dot{\pi}_3 &= 0 & \dot{\pi}_2 &= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \ell^2 \\ \dot{\pi}_1 &= -\frac{k_1 r^2 - 2k_2 r}{(r^2 - k_1 r + k_2)^2} \mathcal{E} - \left( \frac{k_1}{r^2} - \frac{2k_2}{r^3} \right) \pi_1^2 + \frac{1}{r^3} \pi_2^2 + \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \ell^2 \end{aligned}$$

Estas son entonces las ecuaciones de Hamilton en el caso general para MOG, que al considerar el movimiento limitado plano ecuatorial<sup>19</sup>, se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \gamma^{-1} \mathcal{E} & \dot{r} &= \gamma \pi_1 \\ \dot{\pi}_1 &= -\gamma^{-2} \gamma' \mathcal{E} - \gamma' \pi_1^2 + \ell^2 / r^3 & \dot{\phi} &= \frac{\ell}{r^2} \end{aligned}$$

### 4.3 Ecuación de órbita

Para describir el movimiento alrededor del agujero negro veremos las órbitas que se obtienen de la solución (15). Dada la simetría esférica de la solución podemos resolver el movimiento en el plano ecuatorial sin pérdida de generalidad, lo que nos deja trabajando solo con las variables polares  $(r, \varphi)$  coordenadas radial y acimutal. Se requiere entonces encontrar una función para el radio dependiente del ángulo. Si escribimos el lagrangiano (18) conservando estas variables<sup>20</sup>

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} &= \gamma \gamma^{-2} \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha G_N M}{r} \right)^2 - \gamma^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ &= \gamma^{-1} \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha G_N M}{r} \right)^2 - \gamma^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 \\ \delta &= \left( 1 - \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} \right)^{-1} \left[ \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha G_N M}{r} \right)^2 - \dot{r}^2 \right] - r^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Despejando de esta ecuación el diferencial  $(\dot{r}/\dot{\phi})^2 = (dr/d\varphi)^2$

$$\left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^2}{\ell^2} \left( \mathcal{E} - \frac{\alpha G_N M}{r} \right)^2 - (r^2 - k_1 r + k_2) \left( 1 + \frac{\delta r^2}{\ell^2} \right)$$

19. En el plano ecuatorial se considera  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $d\theta = \dot{\theta} = 0$ .

20. Se introduce la variable  $\Delta = r^2 - k_1 r + k_2 = \gamma r^2$ , una forma común de escribir el factor de contracción y su decaimiento radial. Esta forma viene heredada del desarrollo para la métrica de Kerr, donde este término incluye además el momento angular intrínseco del agujero negro.

#### 4.3.1 Precesión apsidal

El primer problema abierto que fue capaz de resolver la relatividad general al plantear la gravedad como una teoría geométrica del espacio tiempo fue el de la precesión del perihelio de mercurio. Este logro fue el primero de los escalones que dejó a la teoría de Einstein abrirse paso y establecerse sobre la gravedad newtoniana, permitiendo mostrar la precisa corrección que implicaba la propuesta de Einstein. El estudio de la precesión orbital ha sido desde entonces una prueba primaria a la que someter cuanto modelo es propuesto para explicar la interacción gravitacional, buscando consistencia en el marco que motivó desde el principio nuestras consideraciones sobre la gravedad: las órbitas planetarias y la astrodinámica.

Motivados por el valor histórico y práctico del cálculo de la precesión nos ocupamos ahora del problema análogo en gravedad modificada, siendo de nuestro interés comparar la precesión predicha por la RG y su correspondencia en MOG. En el primer caso, tenemos el bien conocido corrimiento del perihelio resultante de la relatividad general, como referencia

$$\Delta\varphi_{RG} = \frac{6\pi G_N M}{a(1-e^2)c^2} = 6\pi \frac{M^2}{L^2}.$$

Una característica distintiva encontrada en MOG es un mayor corrimiento del perihelio con respecto a la RG, este incremento además depende explícitamente del parámetro  $\alpha$  (Della Monica, Martino, and Laurentis 2021),

$$\Delta\varphi_{MOG} = \Delta\varphi_{RG} \left( 1 + \frac{5}{6}\alpha \right).$$

## 5. Agujero Negro rotante Kerr-MOG

### 5.1 Solución Kerr-MOG

El caso a considerar ahora es el de la solución para un agujero negro rotante en el espacio tiempo de MOG. Esta solución es análoga a la solución encontrada por Kerr (Kerr 1963) en la gravedad de Einstein. La métrica para esta solución está dada por

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (21)$$

Con los factores  $\rho^2$  y  $\Delta$  definidos como

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 - 2GMr + a^2 + \alpha G_N G M^2 & \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 - 2(1 + \alpha)G_N M r + a^2 + \alpha(1 + \alpha)G_N^2 M^2 \end{aligned}$$

La forma de esta solución es similar a la encontrada en relatividad general, sin embargo difiere en la definición del parámetro  $\Delta$ , incorporando las correcciones debidas al modelo de MOG y una redefinición de la componente métrica temporal.

De forma más explícita, la métrica en componentes se puede ver como <sup>21</sup>

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & g_{00} &= \frac{\gamma r^2 - 1}{r^2 + a^2} \\
 g_{03} &= \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} (k_1 r - k_2) & g_{03} &= a \frac{r^2 (1 - \gamma)}{r^2 + a^2} \\
 g_{11} &= \frac{\rho^2}{\Delta} & g_{11} &= \frac{r^2 + a^2}{\gamma r^2 - 1} \\
 g_{22} &= \rho^2 & g_{22} &= \frac{1}{r^2 + a^2} \\
 g_{33} &= \frac{A}{\rho^2} & g_{33} &= r^2 + a^2 r^2 \frac{\gamma - 1}{r^2 + a^2}
 \end{aligned}$$

De esta métrica se sigue el lagrangiano 6 correspondiente a Kerr como

$$2\mathcal{L} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t}^2 - 2 \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} (k_1 r - k_2) \dot{t} \dot{\phi} - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 - \frac{A}{\rho^2} \dot{\phi}^2 \quad (22)$$

De este modo los momentos canónicos pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 p_0 = \partial_t \mathcal{L} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} + \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} (k_1 r - k_2) \dot{\phi} = -\mathcal{E} & p_1 = \partial_r \mathcal{L} &= \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r} \\
 p_3 = \partial_\phi \mathcal{L} &= \frac{A}{\rho^2} \dot{\phi} + \frac{a \sin^2 \theta}{\rho^2} (k_1 r - k_2) \dot{t} = \ell_z & p_2 = \partial_\theta \mathcal{L} &= \rho^2 \dot{\theta}
 \end{aligned}$$

Tenemos nuevamente que las variables temporal  $t$  y acimutal  $\phi$  son coordenadas cíclicas que conservan las cantidades específicas de energía  $\mathcal{E}$  y momento angular  $\ell_z$ . Con estas cantidades calculadas es posible encontrar las ecuaciones de Hamilton para la métrica de Kerr-MOG. Aunque antes necesitamos la métrica inversa, las componentes del tensor  $g^{\mu\nu}$  pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= \frac{A\rho^2}{[(k_1 r - k_2)^2 + A] a^2 \sin^2 \theta - A\Delta} = -\frac{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2a^2(1 + \alpha)Mr \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 - 2(1 + \alpha)Mr + a^2)} \\
 g^{03} &= \frac{a\rho^2(k_1 r - k_2)}{[(k_1 r - k_2)^2 + A] a^2 \sin^2 \theta - A\Delta} = -\frac{2aMr(1 + \alpha)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 - 2(1 + \alpha)Mr + a^2)} \\
 g^{11} &= \frac{\Delta}{\rho^2} = \frac{r^2 - 2Mr(1 + \alpha) + M^2\alpha(1 + \alpha) + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\
 g^{22} &= \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{r^2 + \cos^2 \theta a^2} \\
 g^{33} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{[(k_1 r - k_2)^2 + A] a^2 \sin^2 \theta - A\Delta} \frac{\rho^2}{\sin^2 \theta} = \frac{\csc^2 \theta (r^2 - 2(1 + \alpha)Mr + a^2 \cos^2 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(r^2 - 2(1 + \alpha)Mr + a^2)}
 \end{aligned}$$

21. Se ha reescrito  $A = (r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta$  y se presenta también una forma alternativa de la métrica en términos del factor  $\gamma$  de la solución estática.

Para contruir las ecuaciones de Hamilton requerimos como en el caso estático, las derivadas de la métrica  $\partial_r g^{\mu\nu}$  y  $\partial_\theta g^{\mu\nu}$ . Derivando primero cn respecto a  $\theta$

$$\partial_\theta g^{00} = -\frac{(2a^2 Mr(a^2 + r^2)(1 + \alpha) \sin 2\theta)}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))}$$

$$\partial_\theta g^{03} = \frac{(2a^3 Mr(1 + \alpha) \sin 2\theta)}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))}$$

$$\partial_\theta g^{11} = \frac{a^2(a^2 + r^2 - 2Mr(1 + \alpha) + M^2\alpha(1 + \alpha)) \sin 2\theta}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2}$$

$$\partial_\theta g^{22} = \frac{a^2 \sin 2\theta}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2}$$

$$\partial_\theta g^{30} = -\frac{(2a^3 Mr(1 + \alpha) \sin 2\theta)}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))}$$

$$\partial_\theta g^{33} = -\frac{(2 \cot \theta \csc^2 \theta (\cos^4 \theta a^4 + r^3(r - 2M(1 + \alpha)) + a^2 r(r + \cos 2\theta(r - 2M(1 + \alpha))))}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))}$$

$$\partial_r g^{00} = -\frac{M(1 + \alpha) (2 \cos^2 \theta a^6 + 2 \cos(2\theta) a^4 r^2 - 2r^6 + a^2 r^3 ((-3 + \cos(2\theta))r + 8M(1 + \alpha)))}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))^2}$$

$$\partial_r g^{03} = -\frac{aM(1 + \alpha) (2 \cos^2 \theta a^4 - (3 + \cos(2\theta))a^2 r^2 - 6r^4 + 8Mr^3(1 + \alpha))}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))^2}$$

$$\partial_r g^{11} = -\frac{2 (M(1 + \alpha)(\cos^2 \theta a^2 + r(-r + M\alpha)) + a^2 r \sin^2 \theta)}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2}$$

$$\partial_r g^{22} = -\frac{2r}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2}$$

$$\partial_r g^{30} = -\frac{aM(1 + \alpha) (2 \cos^2 \theta a^4 - (3 + \cos(2\theta))a^2 r^2 - 6r^4 + 8Mr^3(1 + \alpha))}{(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))^2}$$

$$\partial_r g^{33} = \frac{\csc^2 \theta (-8r^3(r - 2M(1 + \alpha))^2 + 4a^2 r^2 (-4 \cos^2 \theta r + (5 + 3 \cos(2\theta))M(1 + \alpha)) + 8r^5)}{4(\cos^2 \theta a^2 + r^2)^2(a^2 + r(r - 2M(1 + \alpha)))^2}$$

Una vez calculados estos elementos, las ecuaciones de Hamilton quedan expresadas desde su forma generalizada en (7)(9)

## Part III

# Órbitas y movimiento en MOG

## 6. Trayectorias en MOG

Ahora que hemos revisado el movimiento desde la estructura geométrica a las ecuaciones que determinan el movimiento de partículas en MOG, nos corresponde hacer un estudio más enfocado al movimiento y las trayectorias que este describe. Seguiremos ahora analizando las órbitas en el espacio-tiempo MOG en los dos casos de agujero negro que hemos visto a lo largo del trabajo, y para los dos tipos de partícula que dividen el comportamiento en gravedad. Haremos así una revisión de las órbitas características de cada solución para partículas masivas, así como para fotones, lo que es decir, la sombra de los agujeros negros de MOG.

### 6.1 Potencial Efectivo

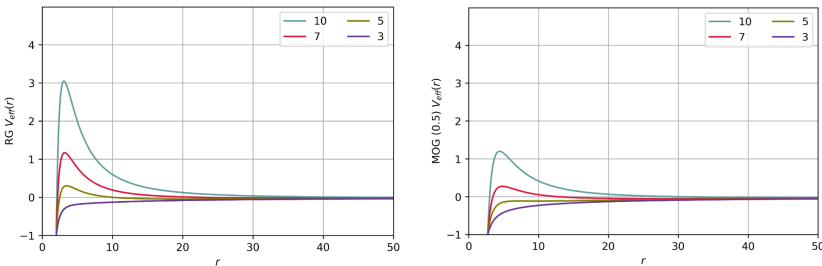
Podemos definir el potencial efectivo en el espacio tiempo de MOG para las dos soluciones en cuestión a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas antes para el plano ecuatorial. Este potencial da cuenta de la energía potencial gravitacional debida al agujero negro y de la energía centrífuga debida al movimiento en dicho potencial. A continuación vemos los resultados de ambos casos, tanto estático como rotante.

#### 6.1.1 Potencial Efectivo para MOG

De la ecuación de movimiento para la variable  $r$  ?? el agujero negro de Schwarzschild-MOG podemos definir el potencial efectivo como

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2(\alpha + 1)M}{r} + \frac{\alpha(\alpha + 1)M^2}{r^2}\right) \left(1 + \frac{\delta \ell^2}{r^2}\right). \quad (23)$$

Para comparar este potencial con el encontrado en Relatividad General podemos hacer una comparación para diferentes valores de  $\alpha$ , siendo este nuestro parámetro de referencia que da cuenta del efecto de la modificación en el modelo, en particular la fuerza de la interacción gravitacional dada clásicamente por la constante  $G_N$  ahora vista como el campo  $\chi = 1/G$ . A continuación presentamos en la Figura 2 los potenciales de MOG y RG para la solución estática.



**Figure 1.** Comparación de los potenciales efectivos para la solución estática en Relatividad General (izquierda) y MOG (derecha) con un parámetro  $\alpha = 0.5$  y diferentes valores para el momento angular  $\ell$  de la partícula.



Al hacer esta comparación entre los dos modelos podemos ver que MOG tiene un potencial efectivo menor que el de relatividad general, si consideramos el hecho de que el parámetro  $\alpha$  aumenta la magnitud de la interacción  $G$ , el campo vectorial tiene un mayor efecto en la atracción gravitacional, logrando reducirlo aún frente al aumento del campo escalar. Por otro lado vemos un pico menos pronunciado que

### 6.1.2 Potencial Efectivo para Kerr-MOG

En el caso de Kerr-MOG el movimiento para una partícula de prueba masiva está descrito por la ecuación (J. W. Moffat 2015)

$$A(r)\mathcal{E}^2 - 2B(r)\mathcal{E} + D(r) - r^4(p^r)^2 = 0$$

Donde se han definido,

$$\begin{aligned} A(r) &= (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta, \\ B(r) &= (\ell a + \alpha G_N m M r)(r^2 + a^2) - \ell a\Delta, \\ D(r) &= (\ell a + \alpha G_N m M r)^2 - \Delta\ell^2 - m^2 r^2 \Delta \\ \mathcal{E} &= \frac{B(r) + \sqrt{B(r)^2 - A(r)D(r)} + A(r)r^4(p^r)^2}{A(r)}, \end{aligned}$$

Tal que el potencial efectivo para un agujero negro rotante en MOG se puede escribir como

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{B(r) + \sqrt{B(r)^2 - A(r)D(r)}}{A(r)}. \quad (24)$$

## 7. Sombra de ANs en MOG

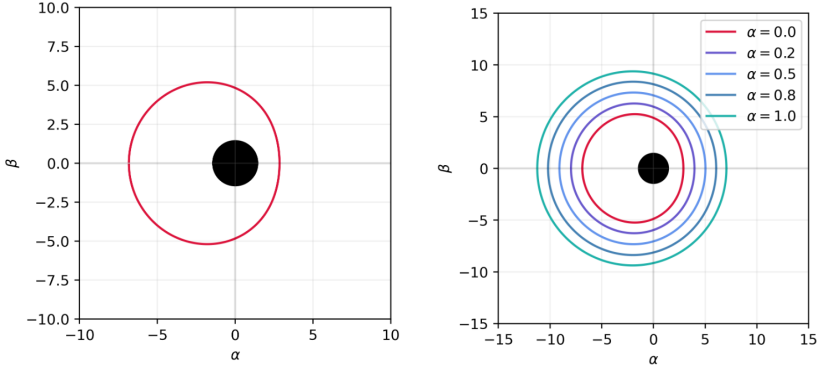
Un resultado notable de la gravedad fuerte es la existencia de regiones fuera del horizonte de eventos donde los fotones pueden no tener órbitas cerradas (caso de la esfera de fotones). La imagen que llega a nosotros de un agujero negro es gracias a que este está rodeado de un disco de acreción de Nabikov-Thorne o medio ópticamente delgado y capaz de emitir luz, que tras seguir su camino alrededor del agujero negro llega hasta nosotros vista como un área oscura sobre un fondo brillante (Larrañaga 2022).

### 7.0.1 Ray tracing en geometrías curvas

Las trayectorias de los fotones están determinadas por dos parámetros de impacto  $\lambda = \ell/\mathcal{E}$  y  $q_c = \mathcal{K}/\mathcal{E}^2$ .<sup>22</sup> Estos parámetros de impacto, resultan ser, para MOG,

$$\lambda(r) = \frac{G_N(1 + \alpha)M(r^2 - a^2) - r\alpha G_N^2(1 + \alpha)M^2 - r\Delta}{a(r - G_N(1 + \alpha)M)}, \quad (25)$$

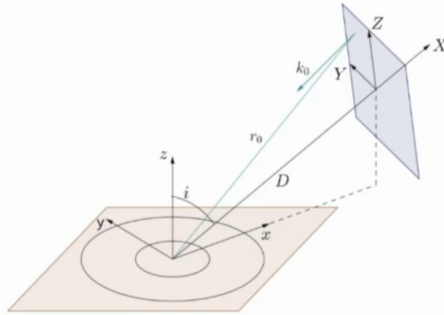
<sup>22.</sup>  $\mathcal{K}$  es una constante derivada del análisis para el movimiento de fotones siguiendo el formalismo de Hamilton-Jacobi



**Figure 2.** Comparación de las sombras para un agujero negro rotante con un momento angular de  $a = 0.9$  en Relatividad General (izquierda) y MOG con diferentes valores para el parámetro  $\alpha$  (derecha).

$$q_c(r) = \frac{r^2}{a^2(r - G_N(1 + \alpha)M)^2} \left[ 4G_N(1 + \alpha)Mr(a^2 + \alpha G_N^2(1 + \alpha)M^2) - 4\alpha G_N^2(1 + \alpha)M^2\Delta - r^2(r - 3G_N(1 + \alpha)M)^2 \right]. \quad (26)$$

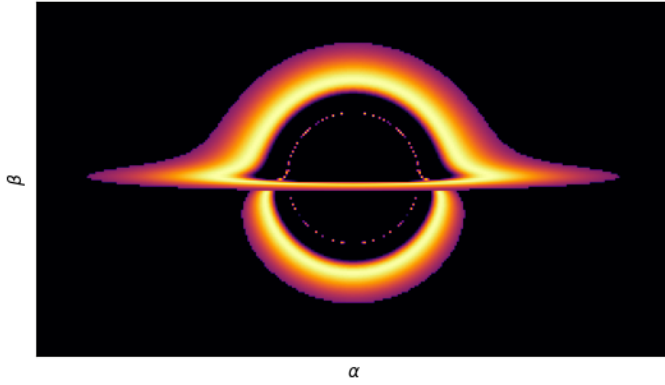
Para producir la imagen del agujero negro usamos las coordenadas celestes  $\alpha$  y  $\beta$ , considerando un observador lejano al agujero negro donde  $\iota$  es la coordenada angular correspondiente al ángulo entre el eje de rotación del agujero negro y la línea de visión del observador, en nuestro caso una pantalla a la cual llegan los fotones provenientes del entorno del agujero negro. Podemos ver una ilustración de la proyección vista en la pantalla en la Figura 3.



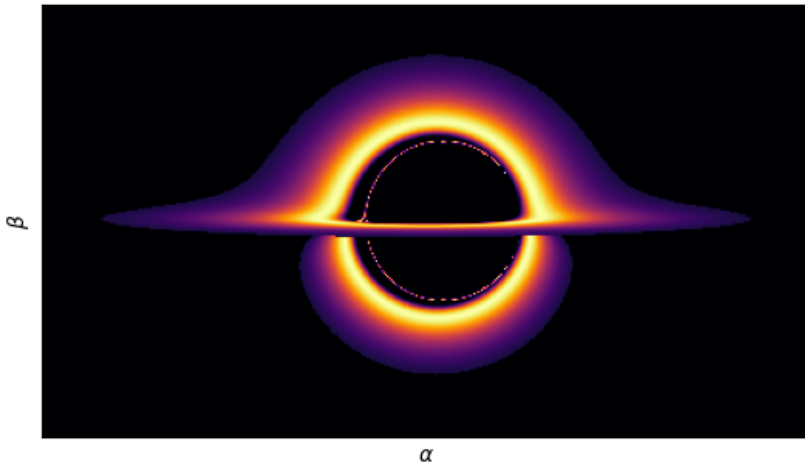
**Figure 3.** Posición del fotón en la pantalla del observador, las coordenadas  $(X, Y)$  son las correspondientes a las coordenadas celestes  $(\alpha, \beta)$ , donde  $D$  es la distancia del agujero negro a la pantalla del observador.

Mediante los parámetros de impacto, la sombra del agujero negro es definida en el plano de imagen a través las coordenadas celestes dadas por

$$\alpha = \frac{\lambda_c}{\sin \iota} \quad \beta = \sqrt{q_c^2 + \lambda_c^2 \cot \iota - a^2 \cos \iota}.$$



**Figure 4.** Imagen resultado del trazado de rayos para un agujero negro estático en la teoría de MOG.



**Figure 5.** Imagen resultado del trazado de rayos para un agujero negro rotante en la teoría de MOG, con parámetros  $a = 0.6$ ,  $\alpha = 0.5$

## References

- Abdullah, Mohamed H., Anatoly Klypin, and Gillian Wilson. 2020. Cosmological constraints on  $m$  and  $\beta$  from cluster abundances using the galcat19 optical-spectroscopic sdss catalog. *The Astrophysical Journal* 901, no. 2 (September): 90. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aba619>. <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aba619>.
- Della Monica, Riccardo, Ivan de Martino, and Mariafelicia de Laurentis. 2021. Orbital precession of the s2 star in scalar–tensor–vector gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 510, no. 4 (December): 4757–4766. issn: 1365-2966. <https://doi.org/10.1093/mnras/stab3727>. <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stab3727>.
- Harikumar, Sreekanth. 2022. Moffat modified gravity (mog). *Universe* 8 (April): 259. <https://doi.org/10.3390/universe8050259>.
- Kerr, Roy P. 1963. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* 11 (5): 237–238. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237>. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>.
- Larrañaga, E. A. 2022. Lecture notes. *Classical Black Holes* (May).
- Misner, C. W., K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. 1973. *Gravitation*, edited by Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A.
- Moffat, J. W. 2015. Black holes in modified gravity (mog). *The European Physical Journal C* 75, no. 4 (April). issn: 1434-6052. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3405-x>. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3405-x>.
- Moffat, J. W., and V. T. Toth. 2012. *Modified gravity: cosmology without dark matter or einstein's cosmological constant*. arXiv: 0710.0364 [astro-ph]. <https://arxiv.org/abs/0710.0364>.
- Moffat, J.W. 2021. Modified gravity (mog), cosmology and black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021, no. 02 (February): 017–017. issn: 1475-7516. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/02/017>. <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/02/017>.
- Swart, J. G. de, G. Bertone, and J. van Dongen. 2017. How dark matter came to matter. *Nature Astronomy* 1:59. <https://doi.org/10.1038/s41550-017-0059>.