РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Г. В. РУБЛЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА:

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ

Учебно-методическое пособие

для студентов очной формы обучения

технических и инженерных специальностей

Тюмень

Издательство

Тюменского государственного университета

2014

УДК: 519.2 (075.8)

ББК: В 172я73+В171я73

Р 824

Г.В.Рублева. Математическая статистика: статистические критерии проверки гипотез.Учебно-методическое пособие для студентов очной формы обучения технических и инженерных специальностей. Тюмень: Издательство Тюменского государственного университета, 2014, 50 с.

Представленный в пособии теоретический материал соответствует Федеральному Государственному образовательному стандарту по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов специальностей и направлений с повышенным требованием к изучению математики.

В учебно-методическом пособии рассматривается один из разделов математической статистики «Проверка статистических гипотез». Главное место занимают вопросы практического применения статистических критериев: для решения каких задач они используются, при анализе каких выборок – зависимых или независимых, больших или малых,с известным распределением или неизвестным, при исследовании признаков, выраженных в различных шкалах измерения.

Рабочая программа дисциплины опубликована на сайте ТюмГУ: Теория вероятностей и математическая статистика [электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.umk3.utmn.ru, свободный.

Рекомендовано к изданию кафедрой математического анализа и теории функций. Утверждено первым проректором Тюменского государственного университета.

РЕЦЕНЗЕНТЫ: **А.Г.Хохлов**, к. ф.-м. н., доцент,

А. А. Губайдуллин, д. ф.-м. н., профессор, академик РАЕН

1. Основные понятия задачи проверки гипотез

Методы математической статистики широко используются при анализе различных процессов и явлений.Если по результатам проведённых экспериментов требуется проверить некоторое предположение относительно генеральной совокупности и сделать обоснованный вывод, то используется статистическая проверка гипотез. Например, если сравниваются различные способы лечения, или разные варианты инвестиций, измерений, технологических процессов, рассматриваются вопросы об эффективности нового метода обучения, управления, о значимости математической модели и т.д.Практической реализации эксперимента предшествует этап, на котором исследователь должен чётко сформулировать предположение, подлежащее проверке.

Предположительное утверждение относительно генеральной совокупности, проверяемое по выборочным данным, называется **статистической гипотезой**. Далее осуществляется проверка фактического соответствия реальных результатов экспериментов предполагаемой гипотезе.Различают простую и сложную статистические гипотезы.

Простойназывают гипотезу, содержащую только одно предположение. **Сложной**называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Простая гипотеза, в отличие от сложной, полностью определяет теоретическую функцию распределения случайной величины. Например, гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли равна 1/2», «закон распределения случайной величины – нормальный с параметрами $a=0$, $\sigma=1$» - являются простыми, а гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли заключена между 0,3 и 0,6», «закон распределения не является нормальным» - сложными.

Проверяемую гипотезу обычно называют **нулевой** или **основной** и обозначают H_0. Наряду с нулевой гипотезой H_0 рассматривают **альтернативную**, или **конкурирующую**, гипотезу H_1, являющуюся логическим отрицанием H_0. Нулевая и альтернативная гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез. Например, для простой нулевой гипотезы $H_0: p = 1/2$ сложная альтернативная гипотеза может выглядеть таким образом $H_1: p \neq 1/2$ или так $H_1: p < 1/2$ или H_1 : $p > 1/2$.

Правило, по которому принимается решение об отклонении или принятии основной гипотезы H_0, называется **критерием**. Суть проверки статистической гипотезы заключается в том, что всё выборочное пространство делится на две взаимодополняющие области: **критическую область** $S_{кр}$ (область неправдоподобно малых и/или неправдоподобно больших значений) и **область допустимых значений** $\overline{S}_{кр}$ (область правдоподобных значений). В зависимости от вида альтернативной гипотезы H_1 различают односторонние (критическая область с одной стороны) и двухсторонние критерии (критических области две – «два хвоста распределения»). Затем по выборке $x_1,\dots,x_n$ определяется специально составленная выборочная характеристика – **критическая статистика** $\theta_{кр}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, точное или приближенное распределение которой известно. Для этого известного распределения по специальным таблицам находятся точки $\theta_{кр.н}$ и $\theta_{кр.в}$ (в случае двухсторонней критической области) или точка $\theta_{кр}$ (в случае односторонней критической области), разделяющие критическую область $S_{кр}$ и область допустимых значений $\overline{S}_{кр}$. Для одностороннего критерия область принятия основной гипотезы имеет ограничение только с одной стороны (сверху или снизу), соответственно требуется найти квантиль уровня $1-\alpha$, либо квантиль уровня α. Для двухстороннего критерия область принятия нулевой гипотезы имеет два ограничения – сверху (квантиль уровня $1-\alpha/2$) и снизу (квантиль уровня $\alpha/2$). Рассчитывается эмпирическое значение статистики $\theta_{эмп}$ подстановкой в $\theta_{кр}$ конкретных выборочных значений. Если $\theta_{эмп} \in S_{кр}$, то нулевая гипотеза отклоняется и принимается альтернативная гипотеза. Если же $\theta_{эмп} \in \overline{S}_{кр}$, то делается вывод о том, что нет оснований для отклонения нулевой гипотезы.

Так как исследователь работает с выборочными данными, которые попадают из генеральной совокупности случайным образом, то можно совершить ошибки (табл.1).

Таблица 1.

гипотеза H_0	*не отвергается*	*отвергается*
верна	правильное решение	ошибка 1-го рода
не верна	ошибка 2-го рода	правильное решение

Если на самом деле верной является нулевая гипотеза, а будет принята альтернативная гипотеза, то такая ошибка называется **ошибкой первого рода**. Вероятность $P(H_1 / H_0) = \alpha$ допустить ошибку 1-го рода называется **уровнем значимости критерия**.

Ошибка второго рода – это принятие нулевой гипотезы в то время, когда на самом деле верной является альтернативная гипотеза. Вероятность допустить ошибку 2-го рода: $P(H_0 / H_1) = \beta$.

При построении процедур проверки гипотез желательно минимизировать значения ошибок обоих родов, но на практике это невозможно: при фиксированном объёме выборки можно минимизировать лишь одну из величин α или β, другая при этом будет увеличиваться. Поэтому поступают таким образом: фиксируют вероятность ошибки первого рода на определённом уровне (обычно для α используют стандартные значения, например, равные **0,05**; **0,01**), а вероятность ошибки второго рода – минимизируют.

Мощностью критерия называется вероятность не допустить ошибку 2-го рода $P(H_1 / H_1) = 1 - P(H_0 / H_1) = 1 - \beta$. **Оптимальнымкритерием** считается такой, у которого при заданном уровне значимости α достигается максимальное значение функции мощности критерия $1 - \beta$ (задача Неймана-Пирсона).

Если использовать терминологию статистического контроля качества продукции, то вероятность α можно интерпретировать как «риск поставщика», т.е. вероятность по результатам выборочного контролязабраковать всю партию, удовлетворяющую стандарту; а вероятность β - «риск потребителя» - вероятность приёмки плохой продукции.

Процедура обоснованного сопоставления сформулированной гипотезы с имеющимися выборочными данными, осуществляемая с помощью статистического критерия, называется **статистической проверкой гипотезы**.

Разработаны различные статистические критерии проверки гипотез, но последовательность шагов действий укладывается в единую *логическую схему*:

1. Выдвигается основная гипотеза H_0 (в качестве нулевой гипотезы обычно используют то предположение, которое противоречит наблюдаемым фактам и, скорее всего, будет отклонено). Формулируется альтернативная гипотеза H_1.
2. Задается уровень значимости критерия α. Логическим обоснованием величины α является вес потерь от ошибочного отклонения гипотезы H_0 (чем больше потери, тем меньшее значение α необходимо выбирать).

3. Определяется некоторая функция результатов наблюдений – критическая статистика - случайная величина, подчиняющаяся определенному закону распределения вероятностей. Вычисляется её значение для выборочных данных - $\theta_{эмп}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

4. Из статистических таблиц распределения этой случайной величины находим нижнюю критическую точку для неправдоподобно малых значений случайной величины или верхнюю критическую точку для неправдоподобно больших значений случайной величины. Для одностороннего критерия область принятия основной гипотезы ограничена с одной стороны (и при этом площадь «хвоста» распределения равна α), для двухстороннего критерия область принятия основной гипотезы имеет два ограничения – снизу и сверху (при этом площадь каждого хвоста равна $\alpha / 2$).

5. Найденное по таблицам критическое значение $\theta_{кр}$ сравнивается с расчетным $\theta_{эмп}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если расчетное значение принадлежит области правдоподобных значений, то делается вывод «основная гипотеза H_0 не противоречит выборочным данным». В противном случае вывод такой - «основная гипотеза H_0 отклоняется с ошибкой первого рода α ».

По своему прикладному содержанию статистические гипотезы можно подразделить на несколько *основных типов*:

- о числовых значениях параметров;
- о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей;
- об однородности выборок;
- о согласии эмпирического распределения и выбранной модели;
- о стохастической независимости элементов выборки;

2. Проверка гипотез о числовых значениях параметров

Статистическая проверка гипотез о числовых значениях параметров осуществляется по схеме, изложенной выше. В таблице 2 приведены критерии проверки гипотез о числовых значениях параметров нормального распределения, вероятности успеха в единичном испытании и коэффициента корреляции.

Рассмотрим алгоритм проверки одной из гипотез. Пусть случайная величина $X \sim N(a, \sigma)$, причём числовое значение математического ожидания a не известно, а числовое значение дисперсии σ^2 известно. Сформулируем основную гипотезу H_0: $a = a_0$ и альтернативную в виде H_1: $a \neq a_0$. Статистика критерия (случайная величина) $Z_{эмп} = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$, поэтому область отклонения нулевой гипотезы будет такой: $Z_{эмп} \in (-\infty, -z_{kp}) \cup (z_{kp}, +\infty)$ - *двухсторонняя критическая область*, где число $z_{кр}$ находят по таблице (см. П.1) из условия $\Phi(z_{кр}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$ (при $\alpha = 0{,}05$ значение $z_{кр} = 1{,}96$, т.е. квантиль уровня 0,975).Дляальтернативнойгипотезы H_1: $a > a_0$ критическая область значений статистики Z будет *правосторонней*: если $Z_{эмп} \in (z_{кр}, +\infty)$, то основная гипотеза H_0 - отклоняется, где число $z_{кр}$находят по таблице (см. П.1) из условия $\Phi(z_{кр}) = 1 - \alpha$ (если $\alpha = 0{,}05$ значение $z_{кр} = 1{,}645$, т.е. квантиль уровня 0,95). При альтернативной гипотезе H_1: $a < a_0$ критическая область значений Z будет левосторонней: если $Z_{эмп} \in (-\infty, -z_{кр})$, то основная гипотеза H_0 - отклоняется.

Таблица 2.

нулевая гипотеза H_0	*альтернативная гипотеза* H_1	*статистика критерия*	*критическая область*
$a = a_0$, σ^2 известно	$a > a_0$	$Z_{эмп} = \dfrac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$Z_{эмп} > z_{кр}(\alpha)$
	$a < a_0$		$Z_{эмп} < -z_{кр}(\alpha)$
	$a \neq a_0$		$\lvert Z_{эмп} \rvert > z_{кр}(\alpha / 2)$
$a = a_0$, σ^2 неизвестно	$a > a_0$	$T_{эмп} = \dfrac{\bar{x} - a_0}{s / \sqrt{n}}$	$T_{эмп} > t_{кр}(\alpha, n-1)$
	$a < a_0$		$T_{эмп} < -t_{кр}(\alpha, n-1)$
	$a \neq a_0$		$\lvert T_{эмп} \rvert > t_{кр}(\alpha / 2, n-1)$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$, a неизвестно	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2_{эмп} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2_{эмп} > \overline{\chi}^2_{кр}(\alpha, n-1)$
	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$\chi^2_{эмп} < \underline{\chi}^2_{кр}(1-\alpha, n-1)$
	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$\chi^2_{эмп} < \underline{\chi}^2_{кр}(\alpha / 2, n-1)$, $\chi^2_{эмп} > \overline{\chi}^2_{кр}(1-\alpha / 2, n-1)$
$p = p_0$, n порядка нескольких десятков и $np_0 > 5$, $n(1-p_0) > 5$	$p > p_0$	$Z_{эмп} = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$ $\hat{p} = \dfrac{m}{n}$, $q_0 = 1 - p_0$	$Z_{эмп} > z_{кр}(\alpha)$
	$p < p_0$		$Z_{эмп} < -z_{кр}(\alpha)$
	$p \neq p_0$		$\lvert Z_{эмп} \rvert > z_{кр}(\alpha / 2)$
$r = 0$	$r \neq 0$	$T_{эмп} = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}}$	$\lvert T_{эмп} \rvert > t_{кр}(\alpha / 2, n-2)$

Примечание*) В таблице 2: случайная величина Z имеет стандартизированное нормальное распределение, T подчиняется распределению Стьюдента, χ^2 - распределению «хи-квадрат», S - несмещённая оценка ср. квадр. отклонения.

3. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей

Гипотезы о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей – это, например, предположения о равенстве средних двух выборок (при известных или неизвестных дисперсиях), о равенстве дисперсий при неизвестных средних значениях, о равенстве вероятностей успеха в единичном испытании. Статистики критериев и критические области для проверки перечисленных гипотез приведены в таблице 3.

Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях. Пусть случайные величины подчиняются нормальному закону распределения: $X \sim N(a_1, \sigma_1)$ и $Y \sim N(a_2, \sigma_2)$, при этом a_1 и a_2 не известны, а σ_1 и σ_2 - известны. Пусть имеются результаты независимых выборочных наблюдений: $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$. Тогда средние выборочные также будут распределены нормально: $\bar{x} \sim N\left(a_1, \sigma_1 / \sqrt{n_1}\right)$ и $\bar{y} \sim N\left(a_2, \sigma_2 / \sqrt{n_2}\right)$. Для основной гипотезы H_0: $a_1 = a_2$ конкурирующую гипотезу рассмотрим в виде H_1: $a_1 > a_2$. Статистика критерия $Z_{эмп} = \dfrac{(\bar{x} - \bar{y})\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{\sigma_1^2 n_2 + \sigma_2^2 n_1}} \sim N(0,1)$, поэтому основная гипотеза отвергается, если $z_{кр} \in (z_{кр}, +\infty)$, где $z_{кр}$ находят по таблице (см. П.1) как квантиль уровня $p = 1 - \alpha$. При альтернативной гипотезе H_1: $a < a_0$ критическая область значений Z будет левосторонней: если $Z_{эмп} \in (-\infty, -z_{кр})$, то основная гипотеза H_0 - отклоняется.

Для H_1: $a \neq a_0$ критическая область двухсторонняя: $Z_{эмп} \in (-\infty, -z_{kp}) \cup (z_{kp}, +\infty)$, где число $z_{кр}$ находят по таблице (см. П.1) как квантиль уровня $p = 1 - \alpha / 2$.

Таблица 3.

нулевая гипотеза H_0	*альтернативная гипотеза* H_1	*статистика критерия*	*критическая область*
$a_1 = a_2$, σ_1^2 и σ_2^2 известны	$a_1 > a_2$	$Z_{эмп} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$Z_{эмп} > z_{кр}(\alpha)$
	$a_1 < a_2$		$Z_{эмп} < -z_{кр}(\alpha)$
	$a_1 \neq a_2$		$\lvert Z_{эмп} \rvert > z_{кр}(\alpha/2)$
$a_1 = a_2$, σ_1^2 и σ_2^2 не известны, но равны	$a_1 > a_2$	$T_{эмп} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$T_{эмп} > t_{кр}(\alpha, n_1 + n_2 - 2)$
	$a_1 < a_2$		$T_{эмп} < -t_{кр}(\alpha, n_1 + n_2 - 2)$
	$a_1 \neq a_2$	$s^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\lvert T_{эмп} \rvert > t_{кр}(\alpha/2, n_1 + n_2 - 2)$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, a_1 и a_2 не известны	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F_{эмп} = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$	$F_{эмп} > F_{кр}(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)$
	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$		$\lvert F_{эмп} \rvert > F_{кр}(\alpha/2, n_1 - 1, n_2 - 1)$
$p_1 = p_2$, n порядка нескольких десятков	$p_1 > p_2$	$Z_{эмп} = \dfrac{\sqrt{n_1 n_2}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})(n_1 + n_2)}}$,	$Z_{эмп} > z_{кр}(\alpha)$
	$p_1 < p_2$		$Z_{эмп} < -z_{кр}(\alpha)$
	$p_1 \neq p_2$	$\hat{p} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$	$\lvert Z_{эмп} \rvert > z_{кр}(\alpha/2)$

4. Проверка гипотез об однородности выборок

Иногда при работе с различными наборами данных требуется сравнить их и выяснить вызвано ли различие в числовых характеристиках этих групп систематическими или случайными причинами. Для решения подобных задач в математической статистике существуют 2 подхода – параметрические и непараметрические методы.

Методы обработки, основанные на предположении, что результаты наблюдений имеют закон распределения, принадлежащий тому или иному параметрическому семейству – нормальному, показательному или какому-либо другому, называются **параметрическими**. Проверка гипотез о равенстве числовых характеристик генеральных совокупностей (см. табл.3) – это, по сути, параметрические методы проверки гипотез об однородности выборок. Методы обработки, в которых не предполагается использование какого-то параметрического семейства, называют **непараметрическими**. Их применяют тогда, когда приходится иметь дело с обработкой данных, распределение которых неизвестно или не подчиняется какому-либо из известных законов распределения.

Если вывод необходимо делать по малым выборкам, и закон распределения неизвестен, то невозможно применение критериев, связанных с параметрами распределения. Непараметрические критерии обладают некоторыми преимуществами: более широкая область применения, меньшая чувствительность к «шуму» в статистических данных и к влиянию ошибок, попавших в практические данные. Однако параметрические критерии обладают большей мощностью. По этой причине, в случаях, когда выборки имеют нормальное распределение, нужно отдавать предпочтение именно параметрическим критериям.

4.1. Параметрические критерии

При решении вопроса о наличии различий между выборками проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних. В случае, когда вид распределения или функция распределения нам известны, задачу оценки различий двух групп независимых наблюдений можно решить с использованием параметрических критериев (см. табл.3):критерия Стьюдента (если сравниваются средние значения выборок);критерия Фишера (если сравниваются дисперсии выборок).

Критерий Стьюдента. Английский математик Вильям Госсет, печатавшийся под псевдонимом «Стьюдент», нашёл закон распределения случайной величины $T = \dfrac{\bar{x} - a}{s / \sqrt{n}}$, где генеральный параметр σ заменен на его выборочную оценку s. Этот закон, имеющий непрерывную функцию распределения, описывается формулой: $f(t) = C\left(1 + \dfrac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$ для $t \in (-\infty; +\infty)$, где C - константа, зависящая только от числа степеней свободы $n-1$.

Закон Стьюдента положил начало созданию теории «малой выборки». При большом объёме выборки особенность распределения в генеральной совокупности не имеет значения, так как распределение отклонений выборочного показателя от генеральной характеристики при большой выборке всегда оказывается нормальным. В выборках небольшого объёма ($n \le 30$) на распределении ошибок выборки будет сказываться характер распределения генеральной совокупности. Распределение Стьюдента зависит от двух величин: значения t и числа степеней свободы $k = n-1$. С увеличением n, т.е. числа наблюдений, это распределение быстро приближается к стандартизированному нормальному (с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$). Уже при $n \ge 30$

распределение Стьюдента не отличается от стандартизированного нормального распределения. Для практического использования распределения Стьюдента существуют специальные таблицы (см. П.2), в которых содержатся критические значения t для разных уровней значимости α и чисел степеней свободы k.

Пусть сравниваются средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ***двух независимых выборок*** объемов n_1 и n_2, взятых из нормально распределенных совокупностей с параметрами a_1, σ_1 и a_2, σ_2. Предполагается, что σ_1 и σ_2 не известны и разница между средними $d = \bar{x} - \bar{y}$ возникла случайно. В качестве основной гипотезы выдвигается следующее предположение $H_0 : a_1 = a_2$.

Для проверки нулевой гипотезы используется случайная величина $T = \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (a_1 - a_2)}{s_d}$, подчиняющаяся распределению Стьюдента с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$. Здесь s_d - ошибка разности между выборочными средними. Эта величина вычисляется по следующим формулам:

- для выборок одинакового объёма ($n_1 = n_2 = n$):

$$s_d = \sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} + \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)}};$$

- для неравновеликих выборок ($n_1 \neq n_2$):

$$s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}$$

При $a_1 = a_2$ разность $a_1 - a_2 = 0$, поэтому критерий будет иметь вид: $T_{эмп} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_d}$.

При конкурирующей гипотезе $H_1:\ a_1 \neq a_2$ верхняя критическая точка находится по таблице (см. П.2) как квантиль уровня $1-\alpha/2$, а нижняя критическая точка расположена симметрично верхней относительно оси ординат: $T_{кр.н} = -T_{кр.в}$. Если $T_{эмп} < T_{кр.н}$ или $T_{эмп} > T_{кр.в}$, то основная гипотеза отклоняется с вероятностью ошибки первого рода α.

Если сравниваемые ***выборки являются попарно связанными друг с другом*** значениями варьирующего признака, то при оценке различий между ними используется метод парных сравнений сопряженных вариант. В этом случае оценкой разности между генеральными средними $D = a_1 - a_2$ и дисперсией этой разности σ_D^2 будет выборочная средняя из суммы разностей между попарно связанными вариантами сравниваемых групп $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$: $\bar{d} = \frac{\sum(x_i - y_i)}{n} = \frac{\sum d_i}{n}$, где n - число парных наблюдений. Тогда выборочная дисперсия будет равна $s_d^2 = \frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}$, а ошибка средней разности вычисляется как: $s_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n(n-1)}}$.

Если варианты генеральной совокупности распределены нормально, то и разность между ними будет подчиняться нормальному закону распределения. Поэтому случайная величина $T = \frac{\bar{d} - D}{s_{\bar{d}}}$ будет иметь распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы.

Для основной гипотезы H_0: $D=0$ и конкурирующей H_1: $D>0$ статистика критерия: $T_{эмп}=\frac{|d|}{s_{\bar{d}}}$. Если $T_{эмп}>T_{кр}(\alpha, n-1)$, то основная гипотеза отклоняется с вероятностью ошибки первого рода α (для нахождения критического значения см. табл. П.2).

Замечание*). Если гипотеза о нормальности распределения попарных разностей окажется отвергнутой, то критерий Стьюдента применять не следует. В таких случаях нужно использовать непараметрические критерии.

Замечание**).Критерий Стьюдента можно применять также и тогда, когда сравниваются не средние величины выборок, а их относительные частоты.

Критерий Фишера. Пусть имеются две выборки из нормальных генеральных совокупностей. Если сравниваются дисперсии выборок, то вместо разности s_1-s_2 Р. Э. Фишер предложил рассматривать разность их натуральных логарифмов $z=\ln s_1-\ln s_2$ (при этом предполагается, что $s_1>s_2$), которая имеет нормальное распределение, как для больших выборок, так и для выборок среднего объема. Д. Снедекор заменил разность логарифмов отношением выборочных дисперсий: $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$.

Рассмотрим 2 случая:

1) Пусть для каждой генеральной совокупности *математические ожидания* a_1 и a_2 - *известны*. Для нулевой гипотезы H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ рассмотрим альтернативную в виде H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. Тогда при заданном уровне значимости α критическая область будет

двухсторонней и поэтому требуется определить две критические границы:

$\theta_{кр.н}$ =квантилю уровня ($1-\frac{\alpha}{2}$) и $\theta_{кр.в}$ =квантилю уровня $\frac{\alpha}{2}$. При этом числа степеней свободы будут равны n_1 и n_2.

Если же альтернативная гипотеза имеет вид H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, то критическая область будет правосторонней и надо будет определять только одну критическую точку – квантиль уровня $p = 1-\alpha$ (см. П.4) для чисел степеней свободы n_1 и n_2.

2) Пусть для каждой генеральной совокупности *математические ожидания* a_1 и a_2 - *неизвестны*. Дальше всё аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что здесь числа степеней свободы равны $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ (см. табл.3).

Замечание*).Следует отметить, что критерий Фишера весьма чувствителен к отклонениям от нормальности изучаемого признака в рассматриваемых выборках

4.2. Непараметрические критерии

При анализе статистических данных не всегда изучаемый признак подчиняется нормальному закону распределения, часто о законе распределения сравниваемых групп мало что известно. Поэтому в этих случаях применяют непараметрические критерии. Одна из возможных формулировок гипотезы об однородности выборок – это предположение о совпадении законов распределения, описывающих разные выборки. При ограниченном объёме статистического материала возможным путём повышения достоверности является объединение имеющихся выборок в одну совокупность. Но для этого следует убедиться в правомерности таких действий, т.е. доказать однородность выборок.

Виды непараметрических статистических критериев при сравнении выборок приведены на рис.1.

непараметрические критерии

<u>для зависимых распределений:</u>

- T -критерий Вилкоксона;
- критерий знаков;

<u>для независимых распределений:</u>

- T -критерий Уайта;
- критерий Ван-дер-Вардена;
- U -критерий Манна-Уитни;
- T – критерий Манна-Уитни;
- χ^2 - критерий однородности;
- критерий Колмогорова-Смирнова;

Рис.1. Виды статистических непараметрических критериев.

Рассмотрим алгоритмы применения **непараметрических критериев для связанных выборок**.

***T*-критерий Вилкоксона**. Этот критерий применяется для сравнения результатов, измеренных в двух разных условиях на одной и той же выборке (группе испытуемых): $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Рекомендуется для выборок умеренной численности (численность каждой выборки от 12 до 40).Он позволяет установить не только направленность изменений, но и их выраженность. С его помощью определяют, является ли сдвиг показателей в каком-то одном направлении более интенсивным, чем в другом.

Для основной гипотезы H_0: $a_1 = a_2$альтернативную запишем в видеH_1: $a_1 \neq a_2$, т.е. критерий – двухсторонний. Далее вычисляют разностимежду индивидуальными значениями во втором и первом замерах («после» - «до»): $x_i - y_i$. Не обращая внимания на знак каждой разности, ранжируют их по порядку от наименьшей к наибольшей. В случае, когда две парные отметки совпадают, разность равна нулю. Эта нулевая разность не учитывается в присваивании рангов. Затем суммируются отдельно положительные и отрицательные ранги. Эмпирическое значение критерия равно меньшей по абсолютной величине сумме рангов. Далее эмпирическое значение сравнивают с критическим (см. П.5), при этом в таблице при нахождении критического значения имеется в виду, что N равно числу только ненулевых разностей между отметками. При заданном уровне значимости α основная гипотеза отклоняется, если $|T_{эмп}| \le T_{кр}$.

Критерий знаков. Сравнивая выборки с попарно связанными вариантами $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$, иногда удобно (а бывает и необходимо) наблюдаемые между ними различия $y_i - x_i$ обозначать знаками плюс (положительный эффект воздействующий на признак фактора) и минус (отрицательный эффект воздействующий на признак фактора). Необходимо заметить, что количество измерений должно быть не менее пяти, но и не более трехсот. В этом случае, как и в случае других выборочных показателей, значение z- критерия знаков есть величина случайная. Она служит для проверки основной гипотезы H_0: совокупность или совокупности, из которых взяты сравниваемые выборки, имеют одну и ту же или одинаковые функции распределения.

Если попарно сравниваемые выборки не различаются, то число плюсовых и минусовых разностей должно быть одинаковым. Если же налицо заметное преобладание плюсов или минусов, то это может быть следствием воздействия на признак учитываемого фактора. Практически величина критерия знаков определяется большим числом однозначных разностей: $z_{эмп} = max\{+, -\}$. При этом нулевые разности т.е. случаи, не давшие ни положительного, ни отрицательного результата в расчет не принимаются и число парных наблюдений уменьшается. Т.к. значение критерия величина случайная, то значимость приходится проверять по таблицам (см. П.6), в которых содержатся критические точки этого критерия $z_{кр}(\alpha)$для n, взятых без нулевых разностей.Гипотеза H_0 отвергается, если$z_{эмп} > z_{кр}$для принятого уровня значимости α.

Теперь перейдём к рассмотрениюалгоритмов применения **непараметрических критериев для выборок с попарно несвязанными вариантами**.

***T*-критерий Уайта.** Данный критерий применяется для установления достоверности различий, наблюдаемых при сравнении двух независимых результатов, полученных по шкале порядка. Алгоритм применения критерия:

1. результаты экспериментальной и контрольной групп объединяют в общий вариационный ряд и располагают в порядке неубывания, затем присваивают им ранги (порядковый номер того места, которое варианта занимает в упорядоченном ряду);
2. затем эти ранги суммируют отдельно для каждой группы;
3. если сравниваемые результаты контрольной и экспериментальной групп совершенно не отличаются друг от друга, то суммы их рангов должны быть равны между собой, и наоборот, чем значительнее расхождение между полученными результатами, тем больше разница между суммами их рангов;
4. достоверность различий между суммами рангов оценивается с помощью T - критерия Уайта по специальным таблицам (см. П.7): в качестве эмпирического значения берётся меньшая из сумм рангов и сравнивается с табличным значением критерия. Если

$T_{эмп} \geq T_{кр}$, то это указывает на недостоверность различий между группами.

Критерий Ван-дер-Вардена. Этот критерий также как и предыдущий относится к группе ранговых критериев и применим для сравнения выборок равновеликого и неравновеликого объема. Алгоритм применения критерия:

1. обе сравниваемые выборки ранжируют в один общий ряд по возрастающим значениям признака. Затем каждой варианте присваивается ранг;
2. далее для одной из выборок (для неравновеликих выборок выбирают выборку меньшего объёма) вычисляют отношения $\frac{R_i}{n+1}$, где R_i - ранг $i-$ой варианты, $n = n_1 + n_2 + 1$ - сумма всех членов сравниваемых групп;
3. далее по специальным таблицам (см. П.8.1) находят значения функции $\psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$ для каждого аргумента и суммируют результаты, определяя величину критерия: $X_{эмп} = \sum \psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$.
4. найденное эмпирическое значение сравнивают с её критическим значением $X_{кр}(\alpha, n)$ для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $n = n_1 + n_2$ (см. П.8.2). Нулевая гипотеза или предположение о том, что сравниваемые выборки извлечены из генеральных совокупностей с одинаковыми функциями распределения, опровергается, если $X_{эмп} \geq X_{кр}$

U-критерий Манна-Уитни.Данный критерийиспользует всю информацию, присущую порядковым шкалам и является одним из наиболее мощных статистических критериев, применяемых для оценки различий между центральными параметрами.

Выдвигается основная гипотеза H_0:не существует различия между медианами двух рассматриваемых выборок против альтернативной H_1:различие между медианами существует. Схема проверки гипотезы:

1. объединяем вместе обе выборки и располагаем варианты в порядке убывания. Присваиваем ранги каждому наблюдению;
2. находим сумму рангов для каждой группы: R_1 - сумма рангов, относящихся к группе с объемом выборки n_1, R_2 - сумма рангов, относящихся к группе с объемом выборки n_2;
3. вычисляем эмпирическое значение по формуле:

$$U_{эмп} = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1 \quad \text{или} \quad U_{эмп} = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2;$$

при принятом уровне значимости α для данных объемов выборок n_1 и n_2 по специальной таблице (см. П.9) находим интервал, в который должно попадать эмпирическое значение. Если эмпирическое значение не попадает в указанный интервал, то основная гипотеза отклоняется.

T ***-критерий Манна-Уитни***(непараметрический аналог критерия Стьюдента, другое его название - ***W*** ***- критерий Вилкоксона***). Этот критерий является ранговым и применяется для проверки однородности двух выборок независимых случайных величин, распределения которых неизвестны.Критерий находит применение при объеме выборки меньше 60, так как при больших n возрастает трудоемкость метода. Статистические данные должны быть представлены в несгруппированном виде.

Пусть имеются две выборки независимых непрерывных случайных величин: x_i, $i=1,...,n_1$ и y_j, $j=1,...,n_2$. Алгоритм применения критерия:

1) Сформулировать основную гипотезу $H_0: F(x)=F(y)$ и альтернативную ей $H_1: F(x)\neq F(y)$, где $F(x)$ и $F(y)$ - неизвестные непрерывные функции распределения случайных величин X и Y.

2) Задать уровень значимости α.

3) Формирование критической статистики. Статистика критерия имеет вид: $T_{эмп} = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} R_i^{n_1}$, где $R_i^{n_1}$ - ранги элементов выборки меньшего объема $(n_1 < n_2)$. Для вычисления эмпирического значения статистики надо из двух выборок составить общий вариационный ряд с обозначением рангов вариант. Если в обеих выборках есть одинаковые варианты, то в общем вариационном ряду первыми записываются варианты меньшей по объему (первой) выборки. Суммирование рангов осуществляется по элементам меньшей выборки. Предельное распределение статистики $T_{эмп}$ стремится к распределению Вилкоксона – Манна-Уитни.

4) По статистическим таблицам критических точек распределения Вилкоксона – Манна-Уитни для уровня значимости α находим нижнюю критическую точку: $T_{кр.н} = \omega_{\alpha/2}(n_1,n_2)$, где $\omega_{\alpha/2}(n_1,n_2)$ - квантиль распределения Вилкоксона. Верхняя критическая точка находится из выражения:

$T_{кр.в} = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - T_{кр.н}$ или в виде $T_{кр.в} = 2MW - T_{кр.н}$, где $2MW$находятпо таблице(см. П.10) для n_1и n_2.

5) Далее эмпирическое значение статистики сравнивается с критическими нижними и верхними значениями. Если выполняется условие $T_{кр.н} < T_{эмп} < T_{кр.в}$, то нет оснований отклонить основную гипотезу, в противном случае основная гипотеза отвергается.

Замечание*).Если нужной численности групп в таблице критических значений нет, то можно воспользоваться тем, что при численности групп превышающей 8, распределение величины T приближается к нормальному со средним $a_T = \dfrac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$и стандартным отклонением$\sigma_T = \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$, где n_1 и n_2 - объемы меньшей и большей выборок. В таком случае величина $Z_T = \dfrac{T - a_T}{\sigma_T}$имеет стандартное нормальное распределение. Это позволяет сравнить ее с критическими значениями нормального распределения.

Эмпирическое значение стандартизированной статистики Вилкоксона рассчитывается по формуле:

$$T_{эмп} = \left(R - \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} \right) / \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

При уровне значимости α =0,05 гипотеза однородности отклоняется, если $|T_{эмп}|$>1,96.

χ^2***- критерий однородности.*** Пусть имеются две выборки объемами n_1 и n_2. Элементы каждой выборки независимы, непрерывны и сгруппированы в L интервалов. Для проверки однородности этих выборок сравниваются функции распределения. Данный критерий однородности применим при $n \geq 60$ (ещё лучше, если выполняется условие $n \geq 200$) и данные представлены в группированном виде.Основная гипотеза имеет вид $H_0 : F_X(x) = F_Y(y)$ против конкурирующей $H_1 : F_X(x) \neq F_Y(y)$

Критическая статистика: $\psi_{кр} = n_1 n_2 \sum\limits_{j=1}^{L} \dfrac{\left(\dfrac{m_j}{n_1} - \dfrac{k_j}{n_2}\right)^2}{m_j + k_j}$

где m_j и k_j - количество попаданий в $j-$ый интервал группирования соответственно первой и второй выборок. Если $n_1 = n_2 = n$, то

$$\psi_{кр} = \sum_{j=1}^{L} \frac{(m_j - k_j)^2}{m_j + k_j}.$$

Далее определяется верхняя критическая точка статистического критерия $\psi_{кр.в} = \chi^2(\alpha, L-1)$ как квантиль для χ^2-распределения с помощью таблицы (см. П.3). Данный критерий является односторонним. Области неправдоподобно малых значений статистики χ^2 нет. Чем меньше расчетное значение критической статистики, тем более благоприятные условия складываются для принятия гипотезы об однородности двух выборок.

Далее вычисляется эмпирическое значение статистикиподстановкой в формулу критической статистики исходных данных. $\psi_{эмп}$ не может быть меньше нуля.

Если $\psi_{эмп} \geq \psi_{кр.в}$, то гипотеза H_0 отклоняется.

Критерий Колмогорова-Смирнова. Пусть имеются две независимые выборки, извлеченные из генеральных совокупностей с неизвестными теоретическими функциями распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$. Проверяемая нулевая гипотеза имеет вид $H_0 : F_X(x) = F_Y(y)$ против конкурирующей $H_1 : F_X(x) \neq F_Y(y)$. Предполагается, что функции распределения непрерывны. Статистика Колмогорова-Смирнова вычисляется по формуле:

$$\lambda'_{эмп} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\, max\left|F_X^*(x) - F_Y^*(y)\right|,$$

где $F_X^*(x)$ и $F_Y^*(y)$ - эмпирические функции распределения, построенные по двум выборкам объемов n_1 и n_2. Гипотеза H_0 отвергается, если $\lambda'_{эмп} > \lambda'_{кр}$. При малых объемах выборок $(n_1, n_2 \leq 20)$ критические значения статистики Колмогорова-Смирнова для заданных уровней значимости критерия можно найти в специальных таблицах. При $n_1, n_2 \to \infty$ (практически при $n_1, n_2 \geq 50$) распределение указанной статистики сходится к распределению Колмогорова. Поэтому гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α, если $\lambda'_{эмп} > \lambda_\alpha$. В таблице 4 приводятся критические значения λ_α критерия Колмогорова для различных значений α.

Таблица 4.

уровень значимости α	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
критическое значение λ_α	1,22	1,36	1,48	1,63	1,73	1,95

5. Проверка гипотез о согласии эмпирического распределения и выбранной модели

Если проверка основной гипотезы состоит в выяснении, согласуется ли высказанное в ней предположение с выборочными наблюдениями $x\ , x_2, ..., x_n$, то соответствующие критерии называются **критериями согласия**.

Критерий согласия χ^2 относительно закона распределения.

Случай 1.Основная гипотеза H_0**:** выборка извлечена из совокупности, имеющей распределение $F(x, \theta)$, значения параметров $\theta = (\theta_1, ,..., \theta_l)$ которой известны. Алгоритм проверки гипотезы:

1. Весь диапазон значений наблюдаемого случайного признака X разбивают на группы (интервалы) $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k$ без общих точек и подсчитывают числа m_i - частоты попадания наблюдаемых значений признака в i-ый интервал. Сумма всех частот должна совпасть с объёмом выборки: $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

2. Подсчитываются вероятности $p_i = P(X \in \Delta_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

3. Для каждого интервала подсчитываются ожидаемые частоты np_i (если для каких-либо интервалов $np_i \le 5$, то их объединяют с соседними так, чтобы в итоге для каждого интервала ожидаемая частота была больше 5). Полученное таким образом число интервалов обозначим $k*$.

4. Эмпирическое значение статистики рассчитывается по формуле:

$$\chi^2_{эмп} = \sum_{i=1}^{k*} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{k*} \frac{m_i^2}{np_i} - n$$

Если $\chi^2_{эмп} > \chi^2_{кр}(\alpha, k*-1)$, то гипотезу H_0 отклоняют.

Случай 2. Основная гипотеза H_0: выборка извлечена из совокупности, имеющей распределение $F(x, \theta)$ с некоторыми заранее не известными значениями параметров $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r$, где $r \le l$.

Ввиду того, что некоторые значения параметров распределения неизвестны, то вероятности $p_i = P(X \in \Delta_i)$ и числа $\psi_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i^2}{np_i} - n$ будут не числами, а некоторыми функциями неизвестных параметров. Оценками этих параметров $\theta_1^*, \theta_2^*, ..., \theta_r^*$ заменяют неизвестные параметры в функции распределения. Далее действуют по описанной выше схеме с той лишь разницей, что число степеней свободы будет равно $k*-r-1$.

Проверка гипотезы о нормальном распределении по критерию Пирсона. Для проверки гипотезы используется дискретное распределение признака и точечные оценки среднего значения признака $\overline{x}_в$ и его среднего квадратического отклонения. Далее действуем по следующему алгоритму:

1. вычислить теоретические частоты $n'_i = \frac{n \cdot h}{s} \cdot \varphi(u_i)$, где n - объём выборки, h - величина группировочного интервала (разность между двумя соседними вариантами в дискретном вариационном ряду), $u_i = \frac{x_i - \overline{x}_в}{s}$, $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$.

2. по имеющимся исходным и полученным расчётным данным составляем таблицу 5, по которой находим эмпирическое значение критерия как сумму чисел в последнем столбце:

Таблица 5.

x_i	n_i	u_i	$\varphi(u_i)$	n'_i	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
: :	: :	: :	: :	: :	: :
Итого:	n			Итого:	$\chi^2_{эмп}$

3. По таблице критических точек распределения хи-квадрат, по заданному уровню значимости α =0,05 и числу степеней свободы $k-3$ находят критическую точку $\chi^2_{кр}$ правосторонней критической области. Если $\chi^2_{эмп} < \chi^2_{кр}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении признака, в противном случае – гипотезу отклоняют.

Замечание*). Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы следует в качестве k принять число групп, оставшихся после объединения частот.

Проверка гипотезы о равномерном распределении. При проверке гипотезы о равномерном распределении признака используется критерий Пирсона и интервальный ряд распределения. Алгоритм следующий:

1. оценить параметры a и b - концы интервала, в котором наблюдались возможные значения признака, по формулам:

$a = \bar{x}_в - \sqrt{3} \cdot s$, $b = \bar{x}_в + \sqrt{3} \cdot s$, где s - оценка среднего квадратического отклонения признака.

2. найти плотность вероятности предполагаемого распределения: $f(x) = 1/(b-a)$.

3. найти теоретические частоты:

$$n_1' = n \cdot \frac{x_1 - a}{b-a}; \quad \ldots n_i' = n \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{b-a}; \quad \ldots n_k = n \cdot \frac{b - x_{k-1}}{b-a}.$$

4. сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k-3$.

*Проверка гипотезы о биномиальном распределении.*Для проверки гипотезы используется дискретное распределение признака. Алгоритм применения критерия:

1. найти по формуле Бернулли вероятности P_i появления ровно i событий в N испытаниях ($i = 0, 1, \ldots, k$, $k \le N$).

2. найти теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i$.

3. сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k-2$. Предполагается, что вероятность p была оценена по выборке.

*Проверка гипотезы о распределении по закону Пуассона.*Для проверки гипотезы используется дискретное распределение признака и точечная оценка среднего значения признака $\bar{x}_в$. Алгоритм проверки:

1. принять в качестве оценки параметра λ распределения Пуассона выборочную среднюю: $\lambda = \bar{x}_в$.

2. найти по формуле Пуассона (или по готовым таблицам) вероятности P_i появления ровно i событий в N испытаниях ($i = 0, 1, \ldots, k$, $k \le N$).

3. найти теоретические частоты $n_i' = n \cdot P_i$.

4. сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $k-2$. Предполагается, что вероятность p была оценена по выборке.

Проверка соответствия распределения случайной признака X *нормальному закону распределения* может быть произведена приближенно *с помощью исследования показателей асимметрии* A_s *и эксцесса* E_x. При нормальном распределении показатели асимметрии A_s и эксцесса E_x некоторой генеральной совокупности равны нулю. Предположим, что наблюдаемые значения признака X представляют собой выборку из генеральной совокупности, поэтому можно определить только выборочные характеристики асимметрии и эксцесса и их ошибки:

$$\widehat{A}_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^3}}, \quad \sigma_{\widehat{A}_s} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}},$$

$$\widehat{E}_x = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} - 3, \qquad \sigma_{\widehat{E}_x} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}},$$

где $\widehat{A}_s$ - выборочная характеристика асимметрии, $\widehat{E}_s$- выборочная характеристика эксцесса, $\sigma_{\widehat{A}_s}$ и $\sigma_{\widehat{E}_x}$- соответствующие средние квадратические ошибки. Если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$\left|\widehat{A}_s\right| < 1{,}5 \cdot \sigma_{\widehat{A}_s} \quad \text{и} \quad \left|\widehat{E}_x + \frac{6}{n+1}\right| < 1{,}5 \cdot \sigma_{\widehat{E}_x},$$

то нет оснований для отклонения основной гипотезы о нормальном характере распределения случайного признака X. Если выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$\left|\widehat{A}_s\right| \geq 2 \cdot \sigma_{\widehat{A}_s} \quad \text{либо} \quad \left|\widehat{E}_x + \frac{6}{n+1}\right| \geq 2 \cdot \sigma_{\widehat{E}_x},$$

то гипотеза о нормальном характере распределения отвергается.

6. Проверка гипотез о стохастической независимости элементов выборки

Основное требование при проведении выборочного исследования – это случайность попадания элементов генеральной совокупности в выборку. Поэтому перед тем как приступить к статистической обработке результатов наблюдений, необходимо убедиться в том, что элементы выборки образуют случайную последовательность. Рассмотрим критерии для проверки случайности и независимости элементов выборки.

Критерий серий, основанный на медиане. Этот критерий является ранговым критерием. Пусть имеются выборочные результаты наблюдений: $x_1, x_2, ..., x_n$ из некоторой генеральной совокупности. Основная гипотеза H_0: элементы выборки являются стохастически независимыми. Альтернативная гипотеза H_1: элементы выборки не являются стохастически независимыми.Далее необходимо составить вариационный ряд из элементов выборки и найти оценку медианы $\hat{M}_e$. В исходной выборке под каждым наблюдаемым значением признака x_i ставится знак «+», если $x_i > \hat{M}_e$ и знак «-», если $x_i < \hat{M}_e$. В случае равенства $x_i = \hat{M}_e$ знак не ставится (если исходные данные записаны в столбец, то рядом с ним формируется столбец из знаков). Последовательность подряд идущих одинаковых знаков называется серией. Количество серий обозначим ν, а протяжённость самой длинной серии - K_{max}. Если одновременно выполнены неравенства:

$$\begin{cases} \nu > 0{,}5\left(n+1-z_{кр}\sqrt{n-1}\right) \\ K_{max} < 3{,}3\,lg(n+1) \end{cases},$$

то нет оснований при заданном уровне значимости α отклонить основную гипотезу. В противном случае элементы выборки нельзя считать стохастически независимыми. Здесь $z_{кр}$ находится по таблице П.1 как квантиль уровня $1-\alpha/2$ (при $\alpha=0{,}05$ $z_{кр}=1{,}96$).

Замечание*). Критерий серий, основанный на медиане, улавливает только монотонное изменение среднего.

Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий. Как и предыдущий, этот критерий является ранговым. Пусть из некоторой генеральной совокупности извлечена выборка, $x_1, x_2, ..., x_n$ - результаты наблюдений Основная гипотеза H_0: элементы выборки являются стохастически независимыми. Альтернативная гипотеза H_1: элементы выборки не являются стохастически независимыми. В исходной выборке под каждым наблюдаемым значением признака x_i ставится знак «+», если $x_i < x_{i+1}$ и знак «-», если $x_i > x_{i+1}$. В случае равенства $x_i = x_{i+1}$ знак не ставится (если исходные данные записаны в столбец, то рядом с ним формируется столбец из знаков). Затем подсчитываетсяколичество серий v и протяжённость самой длинной серии K_{max}. Если выполнены оба неравенства:

$$\begin{cases} v > \left[\frac{1}{3}(2n-1) - z_{кр}\sqrt{\frac{16n-29}{90}}\right], \\ K_{max} < K_{кр}(n) \end{cases}$$

то при заданном уровне значимости α нет оснований отклонить основную гипотезу. В противном случае элементы выборки нельзя считать стохастически независимыми. Здесь $z_{кр}$ находится по таблице П.1 как квантиль уровня $1-\alpha/2$ (при $\alpha=0{,}05$ $z_{кр}=1{,}96$). Верхняя граница определяется в зависимости от объёма выборки: $K_{кр}(n)$=5, если $n \le 26$; $K_{кр}(n)$=6 для $26 < n \le 153$; $K_{кр}(n)$=7, если $153 < n \le 1170$.

Замечание**). Критерий «восходящих» и «нисходящих» серийулавливает смещение оценки математического ожидания монотонного и периодического характера и является более мощным, по сравнению с критерием серий, основанном на медиане.

Критерий стохастической независимости Аббе *(критерий квадратов последовательных разностей).* Данный критерий применяется в тех случаях, когда изучаемый признак имеет нормальное распределение. Пусть основная гипотеза H_0: элементы выборки являются стохастически независимыми. Конкурирующая гипотеза H_1: элементы выборки не являются стохастически независимыми. Статистика критерия $\gamma_{эмп} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2}{2(n-1)s^2}$, где s^2- несмещённая оценка дисперсии выборки. При $n \le 60$ критическое значение $\gamma_{кр}(\alpha, n)$ находится по таблице (см.П.11). Если $n > 60$, то нижняя критическая точка находится по формуле: $\gamma_{кр} = 1 + \dfrac{z_{кр}}{\sqrt{n + 0,5(1 + z_{кр}^2)}}$, где $z_{кр}$ находится по таблице П.1 как квантиль уровня $1 - \alpha/2$ (при $\alpha = 0,05$ $z_{кр} = 1,96$). Если $\gamma_{эмп} > \gamma_{кр}$, то при заданном уровне значимости α нет оснований отклонить гипотезуо стохастической независимости элементов выборки.

Замечание***).Критерий Аббе позволяет обнаружить систематическое смещение среднего в ходе выборочного обследования.

Задачи

1.1 Расход сырья на изготовление одного изделия случаен. Сравниваются две технологии производства: старая и новая. Выборочные характеристики соответственно равны: $\bar{x} = 307{,}11$ и $s_1^2 = 2{,}378$; $\bar{y} = 304{,}77$ и $s_2^2 = 1{,}685$. Предполагая, что расход сырья имеет нормальное распределение, выясните, влияет ли технология на средний расход сырья на одно изделие ($\alpha = 0{,}05$).

1.2 Проведено исследование розничного товарооборота продовольственных магазинов в двух районах области (по 50 магазинов в каждом). Априори известны средние значения товарооборота – 78,9 и 78,68 тыс. руб. Полученные в результате оценки среднеквадратичных отклонений в первом и втором районах области соответственно равны 7,22 и 7,79 тыс. руб. Можно ли считать, что разброс розничного товарооборота магазинов в районах неодинаков при уровне значимости 0,05? Можно ли сделать вывод о разной покупательной способности населения районов?

1.3 Исследование пропусков по болезни детей в двух группах детского сада в течение года (по 16 детей в каждой группе) дало следующие результаты: $\bar{x} =$ 32 дня, $\bar{y} = 41$ день, $s_1^2 = 9$ дней^2 и $s_2^2 = 17$ дней^2. При $\alpha = 0{,}1$ можно ли считать, что среднее количество дней пропусков по болезни в обеих группах одинаковым?

1.4 Данные о производительности выпуска стиральных машин на двух предприятиях представлены в таблице:

x_i	82	74	64	72	84	68	76	88	70	60
y_i	52	63	72	64	48	70	78	68	70	54

Можно ли считать распределение производительности на обоих предприятиях считать различным при $\alpha = 0{,}05$?

1.5 Для определениякачества технологической операции регулярно осуществляются проверки, которые состоят в измерении одного параметра изделия, прошедшего данную операцию. Имеются данные за два дня:

x_i	82	74	64	72	84	68	76	88	70	60
y_i	52	63	72	64	48	70	78	68	70	54

Необходимо оценить стабильность контролируемой операции (проверив однородность выборок) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

1.6 Группа из 36 человек была разбита на 18 однородных пар на основе отметок, полученных ими при проверке степени уверенности в себе. Затем одна группа (экспериментальная) прошла курс подготовки одновременно с выработкой навыков уверенного поведения, в то время как другая группа (контрольная) прошла этот курс в том же объёме, но приобретение подобных навыков не предусматривалось. Впоследствии обе группы прошли испытание в условиях нескольких искусственно созданных ситуаций, причем оценивавшие их эксперты не были осведомлены о том, кто получил экспериментальную подготовку. По результатам эксперимента проверьте гипотезу о наличии различий между группами при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

однородные пары	эксперим. группа	контр. группа		однородные пары	эксперим. группа	контр. группа
1	89	73		10	55	50
2	83	77		11	64	66
3	80	58		12	54	46
4	72	77		13	50	38
5	77	70		14	42	47
6	74	62		15	48	40
7	69	67		16	44	43
8	65	68		17	38	29
9	60	44		18	36	25

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Квантили нормального распределения z_p: $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

$$p = 1 - \alpha, \; z_{1-p} = -z_p$$

p	z_p	p	z_p	p	z_p
0,5	0,000	0,68	0,468	0,86	1,080
0,51	0,025	0,69	0,496	0,87	1,126
0,52	0,050	0,70	0,524	0,88	1,175
0,53	0,075	0,71	0,553	0,89	1,227
0,54	0,100	0,72	0,583	0,90	1,282
0,55	0,126	0,73	0,613	0,91	1,341
0,56	0,151	0,74	0,643	0,92	1,405
0,57	0,176	0,75	0,674	0,93	1,476
0,58	0,202	0,76	0,706	0,94	1,555
0,59	0,228	0,77	0,739	0,95	1,645
0,60	0,253	0,78	0,772	0,96	1,751
0,61	0,279	0,79	0,806	0,97	1,88
0,62	0,305	0,80	0,842	0,975	1,96
0,63	0,332	0,81	0,878	0,99	2,326
0,64	0,358	0,82	0,915	0,995	2,576
0,65	0,385	0,83	0,954	0,9999	3,720
0,66	0,412	0,84	0,994	0,99999	4,265
0,67	0,440	0,85	1,036		

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Квантили распределения Стьюдента $t_{k,p}$:

$$p = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{\pi k}\;\Gamma(k/2)} \int_{-\infty}^{t_{k,p}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} dx\,,\quad p = 1-\alpha\,,\quad t_{1-p} = -t_p$$

k \ p	**0,900**	**0,950**	**0,990**	**0,995**
1	3,078	6,314	31,821	63,657
2	1,886	2,920	6,965	9,925
3	1,638	2,353	4,541	5,841
4	1,533	2,132	3,747	4,604
5	1,476	2,015	3,365	4,032
6	1,440	1,943	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,821	3,250
10	0,700	1,812	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,479	2,779
27	3,314	1,703	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,423	2,704
60	3,296	1,671	2,390	2,660
120	1,289	1,658	2,358	2,617
∞	1,282	1,645	2,326	2,586

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Квантили распределения $\chi^2_{k,p}$: $p = \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \int\limits_0^{\chi^2_{k,p}} x^{k/2-1} e^{-x/2} dx$

k \ p	**0,01**	**0,025**	**0,05**	**0,95**	**0,975**	**0,99**
1	0,0002	0,003	0,004	3,84	5,02	6,64
2	0,02	0,05	0,10	5,99	7,38	9,21
3	0,12	0,21	0,35	7,82	9,36	11,34
4	0,30	0,48	0,71	9,49	11,1	13,28
5	0,55	9,83	1,15	11,07	12,8	15,09
6	0,87	1,24	1,64	12,59	14,4	16,81
7	1,24	1,69	2,17	14,06	16,0	18,48
8	1,65	2,18	2,73	15,51	17,5	20,09
9	2,09	2,70	3,33	16,92	19,0	21,67
10	2,56	3,25	3,94	18,31	20,5	23,21
11	3,05	3,82	4,58	19,68	21,9	24,72
12	3,57	4,40	5,23	21,03	23,3	26,22
13	4,11	5,01	5,89	22,36	24,7	27,68
14	4,66	6,63	6,57	23,69	26,1	29,14
15	5,23	6,26	7,26	25,00	27,6	30,58
16	5,81	6,91	7,96	26,30	28,8	32,00
17	6,41	7,56	8,67	27,59	30,2	33,41
18	7,02	8,23	9,39	28,87	31,5	34,81
19	7,63	8,91	10,12	30,14	32,9	36,19
20	8,26	9,59	10,85	31,41	34,2	37,57
21	8,90	10,3	11,59	32,67	35,5	38,93
22	9,54	11,0	12,34	33,92	36,8	40,29
23	10,20	11,7	13,09	35,17	38,1	41,64
24	10,86	12,4	13,85	36,42	39,4	43,98
25	11,52	13,1	14,61	37,65	40,6	44,31
26	12,2	13,8	15,37	38,89	41,9	45,64
27	12,88	14,6	16,15	40,11	43,2	46,96
28	13,56	15,3	16,93	41,34	44,5	48,28
29	14,26	16,0	17,71	42,56	45,7	49,59
30	14,95	16,8	18,49	43,77	47,0	50,89
40	22,16	24,4	26,51	56,76	59,3	63,69
50	29,71	32,4	34,76	67,51	71,4	76,15
75	49,5	52,9	66,1	96,2	100,8	106,4
100	70,07	74,2	77,93	124,34	129,6	135,81

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Квантили распределения Фишера $f_{k_1,k_2,p}$:

$$p=\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{n_1/2}\frac{\Gamma\left(\left(k_1+k_2\right)/2\right)}{\Gamma\left(k_1/2\right)\Gamma\left(k_2/2\right)}\int_0^{f_{k_1,k_2,p}} x^{k_1/2-1}\left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\left(k_1+k_2\right)/2}dx$$

$p=0{,}95$, что соответствует правосторонней области с $\alpha=0{,}05$

k_1 \ k_2	1	2	3	4	5	6	8	12	30	50	100
1	161	200	216	225	230	234	239	244	248	252	253
2	18,5	19,0	19,2	19,25	19,3	19,33	19,37	19,41	19,44	19,47	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,66	8,58	8,56
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,80	5,70	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,56	4,44	4,40
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,87	3,75	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,38	3,32	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,15	3,03	2,98
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,86	2,80	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,77	2,64	2,59
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	2,95	2,79	2,57	2,51	2,46
12	4,85	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,54	2,40	2,35
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,6	2,38	2,31	2,26
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,7	2,53	2,31	2,24	2,19
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79	2,64	2,48	2,25	2,18	2,12
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,19	2,12	2,07
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,15	2,08	2,02
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,11	2,04	1,98
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,07	2,00	1,94
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,12	1,96	1,90
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,92	1,84	1,78
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,93	1,76	1,69
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,74	1,66	1,59
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,29	2,13	2,02	1,95	1,78	1,60	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,65	1,56	1,48
100	3,94	3,09	2,70	2,48	2,19	2,03	1,92	1,85	1,63	1,48	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,55	1,46	1,37
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,14	1,98	1,87	1,80	1,62	1,42	1,32
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,10	1,95	1,84	1,76	1,58	1,36	1,26

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические значения для T - критерия Вилкоксона

N	уровень значимости для одностороннего критерия			
	0,05	**0,025**	**0,01**	**0,005**
	уровень значимости для двухстороннего критерия			
	0,10	**0,05**	**0,02**	**0,01**
5	0	-	-	-
6	2	0	-	-
7	3	2	0	-
8	5	3	1	0
9	8	5	3	1
10	10	8	5	3
11	13	10	7	5
12	17	13	9	7
13	21	17	12	9
14	25	21	15	12
15	30	25	19	15
16	35	29	23	19
17	41	34	27	23
18	47	40	32	27
19	53	46	37	32
20	60	52	43	37
21	67	58	49	42
22	75	65	55	48
23	83	73	62	54
24	91	81	69	61
25	100	89	76	68
26	110	98	84	75
27	119	107	92	83
28	130	116	101	91
29	140	126	110	100
30	151	137	120	109
31	163	147	130	118
32	175	159	140	128
33	187	170	151	138
34	200	182	162	148
35	213	195	173	159
40	286	264	238	220
45	371	343	312	291
50	466	434	397	373

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Критические значения критерия знаков

n	уровень значимости α			n	уровень значимости α	
	0,05	**0,01**			**0,05**	**0,01**
6	6	-		**45**	30	32
7	7	-		**46**	31	33
8	8	8		**47**	31	33
9	8	9		**48**	32	34
10	9	10		**49**	32	34
11	10	11		**50**	33	35
12	10	11		**51**	33	36
13	11	12		**52**	34	36
14	12	13		**53**	35	37
15	12	13		**54**	35	37
16	13	14		**55**	36	38
17	13	15		**56**	36	39
18	14	15		**57**	37	39
19	15	16		**58**	37	40
20	15	17		**59**	38	40
21	16	17		**60**	39	41
22	17	18		**61**	39	41
23	17	19		**62**	40	42
24	18	19		**63**	40	43
25	18	20		**64**	41	43
26	19	20		**65**	41	44
27	20	21		**66**	42	44
28	20	22		**67**	42	45
29	21	22		**68**	43	46
30	21	23		**69**	44	46
31	22	24		**70**	44	47
32	23	24		**71**	45	47
33	23	25		**72**	45	48
34	24	25		**73**	46	48
35	24	26		**74**	46	49
36	25	27		**75**	47	50
37	25	27		**76**	48	50
38	26	28		**77**	48	51
39	27	28		**78**	49	51
40	27	29		**79**	49	52
41	28	30		**80**	50	52
42	28	30		**85**	53	55
43	29	31		**90**	55	58
44	29	31		**100**	61	64

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Критические значения T - критерия Уайта (α =0,05)

большее число наблюдений	меньшее число наблюдений								
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
7	36								
8	38	49							
9	40	51	63						
10	42	53	65	78					
11	44	55	68	81	96				
12	46	58	71	85	99	115			
13	48	60	73	88	103	119	137		
14	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	56	70	84	100	117	135	154		
18	58	72	87	103	121	139			
19	60	74	90	107	124				
20	62	77	93	110					
21	64	79	95						
22	66	82							
23	68								

ПРИЛОЖЕНИЕ 8.1

Значение функции $\psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$ для расчёта критерия Ван-дер-Вардена

$\frac{R_i}{n+1}$	$\psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$	$\frac{R_i}{n+1}$	$\psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$	$\frac{R_i}{n+1}$	$\psi\left(\frac{R_i}{n+1}\right)$
0,01	-2,33	0,33	-0,44	0,66	0,41
0,02	-2,05	0,34	-0,41	0,67	0,44
0,03	-1,88	0,35	-0,39	0,68	0,47
0,04	-1,75	0,36	-0,36	0,69	0,50
0,05	-1,64	0,37	-0,33	0,70	0,52
0,06	-1,55	0,38	-0,31	0,71	0,55
0,07	-1,48	0,39	-0,28	0,72	0,58
0,08	-1,41	0,40	-0,25	0,73	0,61
0,09	-1,34	0,41	-0,23	0,74	0,64
0,10	-1,28	0,42	-0,20	0,75	0,67
0,11	-1,23	0,43	-0,18	0,76	0,71
0,12	-1,18	0,44	-0,15	0,77	0,74
0,13	-1,13	0,45	-0,13	0,78	0,77
0,14	-1,08	0,46	-0,10	0,79	0,81
0,15	-1,04	0,47	-0,08	0,80	0,84
0,16	-0,99	0,48	-0,05	0,81	0,88
0,17	-0,95	0,49	-0,03	0,82	0,92
0,18	-0,92	0,50	0,00	0,83	0,95
0,19	-0,88	0,52	0,05	0,84	0,99
0,20	-0,84	0,53	0,08	0,85	1,04
0,21	-0,81	0,54	0,10	0,86	1,08
0,22	-0,77	0,55	0,13	0,87	1,13
0,23	-0,74	0,56	0,15	0,88	1,18
0,24	-0,71	0,57	0,18	0,89	1,23
0,25	-0,67	0,58	0,20	0,90	1,28
0,26	-0,64	0,59	0,23	0,91	1,34
0,27	-0,61	0,60	0,25	0,92	1,41
0,28	-0,58	0,61	0,28	0,93	1,48
0,29	-0,55	0,62	0,31	0,94	1,55
0,30	-0,53	0,63	0,33	0,95	1,64
0,31	-0,5	0,64	0,36	0,97	1,88
0,32	-0,47	0,65	0,39	0,99	2,33

ПРИЛОЖЕНИЕ 8.2

Критические значения для критерия Ван-дер-Вардена

n	$n_1 - n_2 =$ **0 или 1**	$n_1 - n_2 =$ **2 или 3**	$n_1 - n_2 =$ **4 или 5**
8	2,4	2,3	-
9	2,48	2,4	-
10	2,6	2,49	2,3
11	2,72	2,58	2,4
12	2,86	2,79	2,68
13	2,96	2,91	2,78
14	3,11	3,06	3,00
15	3,24	3,19	3,06
16	3,39	3,36	3,28
17	3,49	3,44	3,36
18	3,63	3,60	3,53
19	3,73	3,69	3,61
20	3,86	3,84	3,78
21	3,96	3,92	3,85
22	4,08	4,06	4,01
23	4,18	4,15	4,08
24	4,29	4,27	4,23
25	4,39	4,36	4,30
26	4,50	4,48	4,44
27	4,59	4,56	4,51
28	4,68	4,68	4,64
29	4,78	4,76	4,72
30	4,88	4,87	4,84
35	5,33	5,31	5,28
40	5,75	5,74	5,72
45	6,14	6,12	6,10
50	6,50	6,51	6,48

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Критические значения верхней и нижней границы для

U - критерия Манна-Уитни, $\alpha = 0{,}05$

n_2 \ n_1	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
7	8 41	10 46	12 51	14 56	18 66	22 76	26 86	30 96	34 106
8	10 46	13 51	15 57	17 63	22 74	26 86	31 97	36 108	41 119
9	12 51	15 57	17 64	20 70	26 82	31 95	37 107	42 120	48 132
10	14 56	17 63	20 70	23 77	29 91	36 104	42 118	48 132	55 145
11	16 61	19 69	23 76	26 84	33 99	40 114	47 129	55 143	62 158
12	18 66	22 74	26 82	29 91	37 107	45 123	53 139	61 155	69 171
13	20 71	24 80	28 89	33 97	41 115	50 132	59 149	67 167	76 184
14	22 76	26 86	31 95	36 104	45 123	55 141	64 160	74 178	83 197
15	24 81	29 91	34 101	39 111	49 131	59 151	70 170	80 190	90 210
16	26 86	31 97	37 107	42 118	53 139	64 160	75 181	86 202	98 222
17	28 91	34 102	39 114	45 125	57 147	67 171	81 191	93 213	105 235
18	30 96	36 108	42 120	48 132	61 155	74 178	86 202	99 225	112 248
19	32 101	38 114	45 126	58 151	65 163	78 188	92 212	106 236	119 261
20	34 106	41 119	48 132	55 145	69 171	83 197	98 222	112 248	127 273

ПРИЛОЖЕНИЕ 10

Критические значения статистики W -критерия Вилкоксона

n_1	n_2	α		$2MW$
		0,005	**0,025**	
7	**7**	32	36	105
	8	34	38	112
	9	35	40	119
	10	37	42	126
	11	38	44	133
	12	40	46	140
	13	41	48	147
	14	43	50	154
	15	44	52	161
	20	52	62	196
	25	60	72	231
8	**8**	43	49	136
	9	45	51	144
	10	47	53	152
	11	49	55	160
	12	51	58	168
	13	53	60	176
	14	54	62	184
	15	56	65	192
	16	58	67	200
	20	66	77	232
	25	75	89	272

ПРИЛОЖЕНИЕ 11

Критические значения для критерия Аббе

n	уровень значимости α			n	уровень значимости α	
	0,01	**0,05**			**0,01**	**0,05**
4	0,3128	0,3902		**33**	0,6141	0,7216
5	0,2690	0,4102		**34**	0,6193	0,7256
6	0,2808	0,4451		**35**	0,6242	0,7292
7	0,3070	0,4680		**36**	0,6290	0,7328
8	0,3314	0,4912		**37**	0,6337	0,7363
9	0,3544	0,5121		**38**	0,6381	0,7396
10	0,3759	0,5311		**39**	0,6425	0,7429
11	0,3957	0,5482		**40**	0,6467	0,7461
12	0,4140	0,5638		**41**	0,6508	0,7491
13	0,4309	0,5778		**42**	0,6548	0,7521
14	0,4466	0,5908		**43**	0,6587	0,8550
15	0,4611	0,6027		**44**	0,6622	0,7576
16	0,4746	0,6137		**45**	0,6659	0,7603
17	0,4872	0,6237		**46**	0,6693	0,7628
18	0,4989	0,6330		**47**	0,6727	0,7653
19	0,5100	0,6417		**48**	0,6757	0,7676
20	0,5203	0,6498		**49**	0,6787	0,7698
21	0,5301	0,6574		**50**	0,6814	0,7718
22	0,5393	0,6645		**51**	0,6842	0,7739
23	0,5479	0,6713		**52**	0,6869	0,7759
24	0,5562	0,6776		**53**	0,6896	0,7779
25	0,5639	0,6836		**54**	0,6924	0,7799
26	0,5713	0,6893		**55**	0,6949	0,7817
27	0,5784	0,6946		**56**	0,6974	07836
28	0,5850	0,6996		**57**	0,6999	0,7853
29	0,5915	0,7046		**58**	0,7024	0,7872
30	0,5975	0,7091		**59**	0,7049	0,7891
31	0,6034	0,7136		**60**	0,7070	0,7910
32	0,6089	0,7177				

Список литературы

1. Айвазян С.А., Бежаева З.И., Староверов О.В. Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1997. – 240 с.
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. / 3-е изд. – М.: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 416 с.
3. Гаспаров Д.В., Шаповалов В.И. Малая выборка. – М.: Статистика, 1978. – 248 с.
4. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под. ред. В.А.Колемаева. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 302 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. / пер. с англ. Под ред.А.Н.Колмогорова. – М.: Изд-во «Мир», 1975. – 648 с.
6. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000ю – 543 с.
7. Лакин Г.Ф. Биометрия: учеб. пособие. / изд. 4-еизд., перераб. и доп.– М.: Высшая школа, 1990. - 352 с.
8. Никитина Н.Ш. Математическая статистика для экономистов: Учеб. пособие. – 2-е перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – 170 с.
9. Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике. Современный подход. Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 198 с.
10. Соколов Г.А., Гладких И.М. Математическая статистика: учебник для вузов / изд. 2-е перераб. – М.: Изд-во «Экзамен», 2007. – 431 с.
11. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С.Королюк, Н.И.Портенко, А.В.Скороход, А.Ф.Турбин. – М.: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ