Lógica de proposiciones

1 Introducción

Lenguaje lógico simbólico más sencillo.
Permite representar sentencias simples del lenguaje natural mediante formulas atómicas, cuya composición representa sentencias más complejas:

$p \equiv$ temperatura alta $\quad q \equiv$ nivel bajo $\quad r \equiv$ cerrar by-pass salida
$((p \wedge q) \supset r) \equiv$ Si la temperatura está alta y el nivel es bajo, cerrar el by-pass de salida

Aporta:
- Lenguaje de representación simbólico
- Calculo de valores de verdad: la valor de verdad de una sentencia compuesta se obtiene a partir del valor de verdad de las sentencias que la constituyen
- Deducción: métodos para inferir nuevas fórmulas

2 Lenguaje de la lógica proposicional

2.1 Sintaxis

Alfabeto proposicional: $AP = SP \cup CL \cup SA$

Símbolos Proposicionales, SP: p, q, r, ..., t (pueden variar; típicamente, alfabeto contable)

Conectores Lógicos, CL:

$\neg$	negación lógica	no
$\wedge$	conjunción lógica	y
$\vee$	disyunción lógica	o
$\supset$	condición lógica	implica
$\leftrightarrow$	bi-condición lógica	si y solo si

Símbolos Auxiliares, SA: ( )

SP, CL y SA han de ser disjuntos dos a dos.

Def. 2.1.1 Fórmula Atómica o Átomo.

Se denomina Fórmula Atómica a cualquier símbolo proposicional.

Def. 2.1.2 Fórmula Bien Formada (FBF) .

Las FBF's se definen inductivamente por:
1. Una formula Atómica es una FBF.
2. Si α es una FBF, $(\neg\alpha)$ es una FBF.
3. Si α y β son FBF's $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \supset \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ son FBF's .
4. El conjunto de FBF's es el cierre transitivo del conjunto de fórmulas atómicas con las leyes 1), 2) y 3).

Conjunto de FBF's: Lenguaje proposicional sobre AP: L_{AP} (L si AP fijo).

FBF's:	$(p \supset (q \wedge r))$	$((p \wedge q) \vee r)$
no FBF's:	$(p \supset)$	$(p \wedge \vee r)$

El uso de paréntesis se puede reducir con los convenios:
asociatividad: de izquierda a derecha
prioridad (creciente): $\leftrightarrow$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$

2.2 Semántica

Def. 2.2.1 Interpretación.

Se denomina interpretación (sobre SP), I, a una función que asigna a cada fórmula atómica un valor de verdad.

I: SP ---> {T, F}

Def. 2.2.2 Evaluación de FBF's

A partir de I, se define de forma única una función de evaluación de FBF's, V: L_{AP} ---> {T, F}, de la siguiente forma:

1. Si p es un átomo, V(p)=I(p)
2. Si α es una FBF, $V(\neg\alpha)$: T si $V(\alpha)$= F; F si $V(\alpha)$= T
3. Si α y β son FBF's,
   $V(\alpha \wedge \beta)$= T si $V(\alpha)=V(\beta)$=T; F en otro caso
   $V(\alpha \vee \beta)$= F si $V(\alpha)=V(\beta)$=F; T en otro caso
   $V(\alpha \supset \beta)$= F si $V(\alpha)$=T y $V(\beta)$=F; T en otro caso
   $V(\alpha \leftrightarrow \beta)$= T si $V(\alpha)=V(\beta)$; T en otro caso

Se dice que α es cierta bajo I, o que I satisface α sii $V(\alpha)$= T, donde V se define a partir de I según def. 2.2.2. En caso contrario, se dice que α es falsa bajo I

3 Modelo, Consistencia, Validez y Satisfacibilidad.

3.1 Modelo, Consistencia y Validez

Def 3.1.1 Modelo.

Una interpretación, I, es un modelo de una FBF, α, sii $V(\alpha)$=T
Una interpretación, I, es un modelo de un conjunto finito de FBF's, $\Omega=\{\alpha_1, \alpha_2, ... , \alpha_n\}$ sii I es un modelo de todo $\alpha_i \in \Omega$.

$\alpha \equiv (p \wedge q)$ cualquier I con I(p)=I(q)=T es un modelo de α.
$\Omega=\{p, q\}$ cualquier I con I(p)=I(q)=T es un modelo de Ω.

Def 3.1.2 Consistencia.

Una FBF, α, es consistente o satisfacible sii tiene un modelo.
Un conjunto finito de FBF's, Ω, es consistente o satisfacible sii tiene un modelo.

$\alpha \equiv ((p \wedge q) \supset r)$ es consistente, pues cualquier I con I(p)=I(q)=I(r)= F es un modelo para α

Def 3.3 Inconsistencia.

Una FBF, α, es inconsistente o insatisfacible sii no es consistente.
Un conjunto finito de FBF's, Ω, es consistente o satisfacible sii no es consistente.

$\beta \equiv (p \wedge \neg p)$ es inconsistente
$\gamma \equiv ((p \supset q) \wedge (p \wedge \neg q))$ es inconsistente

Def. 3.1.4 Validez.

Una FBF, α, es valida o tautológica sii α es cierta bajo todas las interpretaciones de SP.

$\alpha \equiv (p \wedge \neg p)$ es una fórmula válida
$\beta \equiv (p \supset (p \vee q))$ es una fórmula válida
$\gamma \equiv (p \leftrightarrow (p \vee q))$ no es válida

Inconsistentes	Consistentes	
		Validas
Siempre F	*T o F*	*Siempre T*

Relación entre Fórmulas consistentes, inconsistentes y validas.

3.2 Satisfacibilidad

Def. 3.2.1 Problema de la satisfacibilidad.

Se denomina problema de la satisfacibilidad a demostrar la consistencia (o inconsistencia) de un conjunto finito de fórmulas.

Métodos semánticos para probar en lógica porposicional:
consistencia: obtener interpretación
inconsistencia y validez: tablas de verdad, refutación.

Para probar por refutación la inconsistencia de $\gamma \equiv ((p \supset q) \wedge (p \wedge \neg q))$, suponer que existe una I tal que $V(\gamma)=T$. Ello lleva a que $V(p \supset q)=V(p \wedge \neg q)=T$ y la demostración ya es inmediata.

Para probar por el método de las tablas de verdad la inconsistencia de $\gamma \equiv ((p \supset q) \wedge (p \wedge \neg q))$, hay que considerar 2^3 interpretaciones, y una tabla con 7 entradas. El método siempre es aplicable, pero puede ser muy costoso: si tenemos n símbolos proposicionales, hay 2^n interpretaciones distintas.

Def. 3.2.2 Lógica decidible.

Una lógica es decidible si el problema de la satisfacibilidad es computable en dicha lógica. Es decir, si podemos dar un procedimiento de computo que para cualquier conjunto finito de FBF's como entrada, termine indicando su consistencia o inconsistencia.

La lógica proposicional es decidible, pues siempre se puede recurrir al método de las tablas de verdad. Pero el problema tiene una complejidad no-polinomial (NP), con un comportamiento asintótico $O(2^n)$ en el tiempo.

4 Equivalencia

Def. 4.1 Equivalencia.

Dos FBF's α y β son equivalentes, y se denota por $\alpha = \beta$, sii α y β tienen los mismos valores de verdad bajo cualquier interpretación I.

4.1 Leyes de equivalencia

Denotamos por α,β y γ FBF's; por □ una FBF inconsistente; por ■ una FBF válida.

1	$(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \alpha)$	Eliminación del bí-condicional
2	$(\alpha \supset \beta) = (\neg\alpha \vee \beta)$	Eliminación del condicional
3	$(\alpha \wedge \beta) = (\beta \wedge \alpha)$ $(\alpha \vee \beta) = (\beta \vee \alpha)$	Conmutativa
4	$((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma) = (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))$	Asociativa
5	$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) = ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \beta))$ $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) = ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$	Distributiva $\vee$ respecto $\wedge$
6	$(\alpha \wedge ■) = \alpha$ $(\alpha \vee □) = \alpha$	Absorción
7	$(\alpha \wedge \neg\alpha) = □$ $(\alpha \wedge □) = □$	Contradicción
8	$(\alpha \vee \neg\alpha) = ■$ $(\alpha \vee ■) = ■$	Exclusión de los medios
9	$(\alpha \wedge \alpha) = \alpha$ $(\alpha \vee \alpha) = \alpha$	Idempotencia
10	$\neg(\neg\alpha) = \alpha$	Doble negación
11	$\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta$ $\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$	De Morgan

Las leyes se demuestran utilizando las tablas de verdad o bien examinando las valores de la función de evaluación, V, sobre las formulas que relaciona cada ley.

5 Consecuencia lógica

Def. 5.1 Consecuencia Lógica.

Sean α, α_1, α_2, ... , α_n FBF's. Se dice que α es una consecuencia lógica de las premisas α_1, α_2, ... , α_n y se denota por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$ sii todo modelo de $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ es un modelo de α.

Sea Ω un conjunto finito de FBF's. Se dice que α es una consecuencia lógica de Ω, y se denota $\Omega \models \alpha$, sii α es una consecuencia lógica de una secuencia de formulas de Ω.

$\alpha_1 \equiv p \supset q \qquad \alpha_2 \equiv p \qquad \alpha \equiv q \qquad \alpha_1, \alpha_2 \models \alpha$

V(p)	V(p ⊃ q)	V(q)
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F

Teorema de Refutación

Sean α, α_1, α_2, ... , α_n FBF's. Las siguientes expresiones son equivalentes
1. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \models \alpha$
2. $((\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \supset \alpha)$ es una tautología
3. $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\alpha)$ es inconsistente

La demostración es sencilla procediendo, por ejemplo, 3) $\Rightarrow$2) $\Rightarrow$1) $\Rightarrow$3).

Interés del teorema: 3) nos proporciona un método para comprobar si una fórmula es consecuencia lógica de unas premisas (métodos de demostración por refutación).