

1. 蜘蛛和苍蝇在0和1两个位置上独立地依循Markov链移动一直到它们相遇时,蜘蛛吃掉苍蝇.

它们的初始位置分别是0和1,转移矩阵分别为 $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. 如果假定它们相遇后将永远呆在相遇的位置. 令 X_n 和 Y_n 分别表示 n 时蜘蛛和苍蝇的位置, 令 $Z_n = (X_n, Y_n)$.

(1)说明 $\{Z_n\}$ 是一个时齐Markov链,写出状态空间和一步转移矩阵;

(2)计算蜘蛛在位置0吃掉苍蝇的概率.

(3) 求 蜘蛛 遇见 苍蝇 的 平均 步 数 .

2. 设 $\{X_n\}$ 是一时齐Markov链,状态空间为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,一步转移概率为 $p_{01} = p_{32} =$

$$p_{67} = 1, p_{10} = p_{12} = p_{21} = p_{23} = p_{54} = p_{56} = p_{76} = p_{77} = 0.5, p_{43} = p_{44} = p_{45} = \frac{1}{3}.$$

(1) 写出所有互达等价类,并判断哪些是闭的?

(2) 求出各状态的周期和常返性,并计算正常返态的平均回转时.

(3) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{45}^{(n)}$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{67}^{(n)}$.

(4) 若 $P(X_0 = 3) = P(X_0 = 4) = 1/2$, 对 $i = 4, 5, 6, 7$, 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i)$ 。

书本习题四 20, 24, 28

其中24(2)是假设如果初始分布为平稳分布 π

28题问哪一些是可逆的