第七章　方差分析模型

Tianxiao Pang

Zhejiang University

December 10, 2019

内容

内容

方差分析模型是应用非常广泛的一类线性模型. 这种模型多有一定的试验设计背景, 因而也被称为试验设计模型.

单因素方差分析

方差分析起源于农业田间试验. 假定某个农业试验基地引进了a种小麦品种, 在进行大面积种植之前, 先进行小范围的试验种植, 以便从中挑选出最适合本地区的优良品种.

将一大块田划分成面积相等的几个小块, 其中n_1块种植第1种小麦, n_2块种植第2种小麦, $\cdots$, 等等. $n_1 + \cdots + n_a = n$. 我们的目的是比较小麦的品种, 因此我们感兴趣的只是小麦品种这一个因素. 其它所有因素, 如施肥量、浇水等对这n块田都控制在相同状态下.

在这个例子里, 我们感兴趣的因素只有一个, 即小麦品种. 每个具体的品种, 都称为小麦品种这个因素的一个水平. 现有a个不同的品种, 因此小麦品种这一因素一共有a个水平. 这是单因素a个水平的问题.

记y_{ij}为种植第i个品种的小麦的第j块田的产量, $i = 1, \cdots, a$, $j = 1, \cdots, n_i$. 对固定的i, $y_{i1}, \cdots, y_{in_i}$分别是种植第i种小麦的n_i块田的产量. 因为除了一些随机误差外, 这n_i块田的一切生产条件完全一样. 因此可把它们看做来自正态总体的一个样本. 即, 可假设$\{y_{ij}\}$相互独立且

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2),\ i = 1, \cdots, a,\ j = 1, \cdots, n_i. \tag{7.1.1}$$

表7.1.1: 单因素方差分析问题

水平	总体	样本
1	$N(\mu_1, \sigma^2)$	$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1n_1}$
2	$N(\mu_2, \sigma^2)$	$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2n_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	$N(\mu_a, \sigma^2)$	$y_{a1}, y_{a2}, \cdots, y_{an_a}$

因此要比较a个小麦品种的问题就归结为比较a个正态总体的均值$\mu_1, \cdots, \mu_a$的问题.

我们称所考虑的因素为因素A, 假定它有a个水平, 我们的目的是比较这a个水平的差异. 将(7.1.1)改写为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + e_{ij}, \\ e_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), \end{cases} \quad i = 1, \cdots, a, \ j = 1, \cdots, n_i, \qquad (7.1.2)$$

其中e_{ij}是试验误差. 比较因素A的a个水平的差异归结为比较这a个总体的均值$\mu_1, \cdots, \mu_a$之间的差异.

记

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a} n_i\mu_i,\ n = \sum_{i=1}^{a} n_i,\ \alpha_i = \mu_i - \mu,$$

这里μ为整个样本的均值的总平均, α_i表示第i个水平下的均值与总平均的差异, 反映了第i个水平对指标y的效应. 因此有

$$\sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i = \sum_{i=1}^{a} n_i(\mu_i - \mu) = n\mu - n\mu = 0.$$

因为$\mu_i = \mu + \alpha_i$, 于是(7.1.2)又可以写为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, \\ e_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2), \\ \sum_{i=1}^{a} n_i \alpha_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \cdots, a,\ j = 1, \cdots, n_i. \tag{7.1.3}$$

这就是单因素方差分析模型. 写成矩阵形式即为

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{e} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n), \\ \boldsymbol{h}'\boldsymbol{\beta} = 0, \end{cases} \tag{7.1.4}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= (y_{11}, \cdots, y_{1n_1}, y_{21}, \cdots, y_{2n_2}, \cdots, y_{a1}, \cdots, y_{an_a})', \\ \boldsymbol{\beta} &= (\mu, \alpha_1, \cdots, \alpha_a)', \\ \boldsymbol{e} &= (e_{11}, \cdots, e_{1n_1}, e_{21}, \cdots, e_{2n_2}, \cdots, e_{a1}, \cdots, e_{an_a})', \\ \boldsymbol{h} &= (0, n_1, n_2, \cdots, n_a)', \end{aligned}$$

以及

$$\boldsymbol{X} = \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n_1 \\ n_1+1 \\ \vdots \\ n_1+n_2 \\ \vdots \\ n_1+\cdots+n_{a-1}+1 \\ \vdots \\ n_1+\cdots+n_{a-1}+n_a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

可见, 单因素方差分析模型是一个带约束条件$\boldsymbol{h}'\boldsymbol{\beta} = 0$的线性模型.

易见, 检验

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_a$$

等价于检验

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0.$$

若H_0被拒绝, 则说明因素A的各水平的效应之间有显著的差异.

下面我们来推导H_0的检验统计量. 记

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}.$$

考虑统计量

$$\mathsf{SS}_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2,$$

称SS_T为总离差平方和, 简称为总平方和. 它反映了全部试验数据之间的差异.

对SS_T进行分解:

$$\begin{aligned}
\mathsf{SS}_T &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}+\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2 \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}),
\end{aligned}$$

其中$\bar{y}_{i\cdot}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}$. 因此$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})=0$. 这说明

$$\begin{aligned}
\mathsf{SS}_T &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2+\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2 \\
&\triangleq \mathsf{SS}_E+\mathsf{SS}_A. \qquad (7.1.5)
\end{aligned}$$

$\mathrm{SS}_E = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2$表示随机误差的影响. 因为对固定的$i$, $\{y_{i1}, \cdots, y_{in_i}\}$来自同一个正态总体$N(\mu_i, \sigma^2)$. 因此, 它们之间的差异完全是由随机误差所致, 而$\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2$正是它们误差大小的度量. 把$a$组这样的离差平方和求和就得到了$\mathrm{SS}_E$. 通常称$\mathrm{SS}_E$为误差平方和或组内平方和.

$\mathrm{SS}_A = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{a} n_i (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2$. $\bar{y}_{i\cdot}$是第i个总体的样本均值, 它是第i个总体均值的估计. $\bar{y}$是$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{a} n_i \mu_i$的估计. 因此, SS_A是a个总体均值$\mu_1, \cdots, \mu_a$之间的差异大小的一个度量. 我们称SS_A为效应平方和或组间平方和.

(7.1.5)是平方和分解公式, 它将总平方和按其来源分解成两部分. 一部分是SS_E, 即误差平方和, 是由随机误差引起的. 另一部分是SS_A, 即因素A的平方和, 是由因素A的各水平的差异引起的.

由于对固定的i, $\{y_{ij}, j = 1, \cdots, n_i\}$为来自$N(\mu_i, \sigma^2)$的样本, 因此

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n_i - 1).$$

所以有

$$\mathsf{E}(\mathsf{SS}_E) = \sum_{i=1}^{a}\mathsf{E}\Big[\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2\Big] = (n-a)\sigma^2,$$

这说明$\mathsf{SS}_E/(n-a)$是σ^2的一个无偏估计.

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}(\mathsf{SS}_A) &= \mathsf{E}\Big[\sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} - \alpha_i + \alpha_i)^2\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\Big[\mathsf{E}(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} - \alpha_i)^2 + \alpha_i^2\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{a} n_i\Big(\frac{\sigma^2}{n_i} - \frac{\sigma^2}{n}\Big) + \sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i^2 \\
&= (a-1)\sigma^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i^2.
\end{aligned}
$$

所以

$$\mathsf{E}\Big[\mathsf{SS}_A/(a-1)\Big] = \sigma^2 + \sum_{i=1}^{a} n_i\alpha_i^2/(a-1).$$

从这个结论可以看出, $\mathsf{SS}_A/(a-1)$反映了各水平效应的影响. 当H_0为真时, $\mathsf{SS}_A/(a-1)$ 是σ^2的无偏估计.

因此, 若H_0为真, 那么

$$F = \frac{\mathsf{SS}_A/(a-1)}{\mathsf{SS}_E/(n-a)}$$

将接近于1; 若H_0不真, 则F有变大的趋势. 这启发我们可以通过F的大小来检验H_0.

由样本$\{y_{ij}\}$的独立性, 可知

$$\frac{\mathsf{SS}_E}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{a}(n_i-1)) = \chi^2(n-a).$$

若H_0为真, 那么$\{y_{ij}\}$是独立同分布序列, 服从$N(\mu,\sigma^2)$. 所以

$$\frac{\mathsf{SS}_T}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

因此由柯赫伦(Cochran)定理知, 当H_0为真时,

$$\frac{\mathsf{SS}_A}{\sigma^2} = \frac{\mathsf{SS}_T}{\sigma^2} - \frac{\mathsf{SS}_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1-(n-a)) = \chi^2(a-1)$$

且SS_E与SS_A独立.

最后, 可知若H_0为真, 那么检验统计量

$$F = \frac{\mathsf{SS}_A/(a-1)}{\mathsf{SS}_E/(n-a)} \sim F(a-1, n-a). \tag{7.1.6}$$

给定显著性水平α, 假设检验的拒绝域为

$$\{F > F_\alpha(a-1, n-a)\}.$$

表7.1.2: 方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	SS_A	$a-1$	$\mathsf{MS}_A = \frac{\mathsf{SS}_A}{a-1}$	$F = \frac{\mathsf{MS}_A}{\mathsf{MS}_E}$
误差	SS_E	$n-a$	$\mathsf{MS}_E = \frac{\mathsf{SS}_E}{n-a}$	
总和	SS_T	$n-1$		

例7.1.1 设有三个小麦品种, 经试种得每公顷产量数据如下表(单位: kg/hm^2).

表7.1.3: 小麦品种试验数据

品种＼试验号	1	2	3	4	5
1	4350	4650	4080	4275	
2	4125	3720	3810	3960	3930
3	4695	4245	4620		

问: 不同品种的小麦产量之间有无显著的差异?

计算过程:

$\bar{y} = 4205$; $\bar{y}_{1\cdot} = 4339$, $n_1 = 4$; $\bar{y}_{2\cdot} = 3909$, $n_2 = 5$; $\bar{y}_{3\cdot} = 4520$, $n_3 = 3$; 总平方和$\mathsf{SS}_T = 1186800$, 自由度为$n - 1 = 12 - 1 = 11$; 效应平方和$\mathsf{SS}_A = 807311.25$, 自由度为$a - 1 = 2$; 误差平方和$\mathsf{SS}_E = 379488.75$, 自由度为$n - a = 12 - 3 = 9$. F值为

$$F = \frac{807311.25/2}{379488.75/9} = 9.57.$$

表7.1.4: 小麦品种的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	807311.25	2	403655.62	9.57
误差	379488.75	9	42165.42	
总和	1186800	11		

查表得$F_{0.05}(2, 9) = 4.26 < 9.57$. 所以认为小麦品种的效应具有显著的差异.

R程序:

```
wheat=data.frame(
X=c(4350,4650,4080,4275,4125,3720,3810,3960,3930,4695,4245,4620),
A=factor(rep(1:3,c(4,5,3)))
)
wheat.aov=aov(X~A,data=wheat)
summary(wheat.aov)
```

```
            Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
A            2 807311  403656   9.573 0.00591 **
Residuals    9 379489   42165
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
>
```

如果F检验的结论是拒绝原假设, 则表明从现在掌握的数据看, 我们有理由认为因素A的a的水平效应之间有显著的差异, 也就是说, $\mu_1, \cdots, \mu_a$不完全相同. 这时, 我们需要对每一对μ_i和μ_j之间的差异程度作出估计. 这就要对效应之差$\mu_i - \mu_j$作区间估计, 或者对$H_0 : \mu_i = \mu_j$进行假设检验.

不难看出,

$$\frac{(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}) - (\mu_i - \mu_j)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim N(0, 1); \tag{7.1.7}$$

记$\hat{\sigma}^2 = \mathsf{SS}_E/(n-a)$, 那么

$$\frac{(n-a)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\mathsf{SS}_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-a); \tag{7.1.8}$$

且

$$(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot})\text{与}\mathsf{SS}_E\text{相互独立}.$$

所以

$$\frac{(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}) - (\mu_i - \mu_j)}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim t(n-a).$$

因此在$H_0 : \mu_i = \mu_j$成立时, 检验统计量

$$t_{ij} = \frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}} \sim t(n-a).$$

给定显著性水平α, 检验的拒绝域为

$$W = \{|t_{ij}| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-a)\}.$$

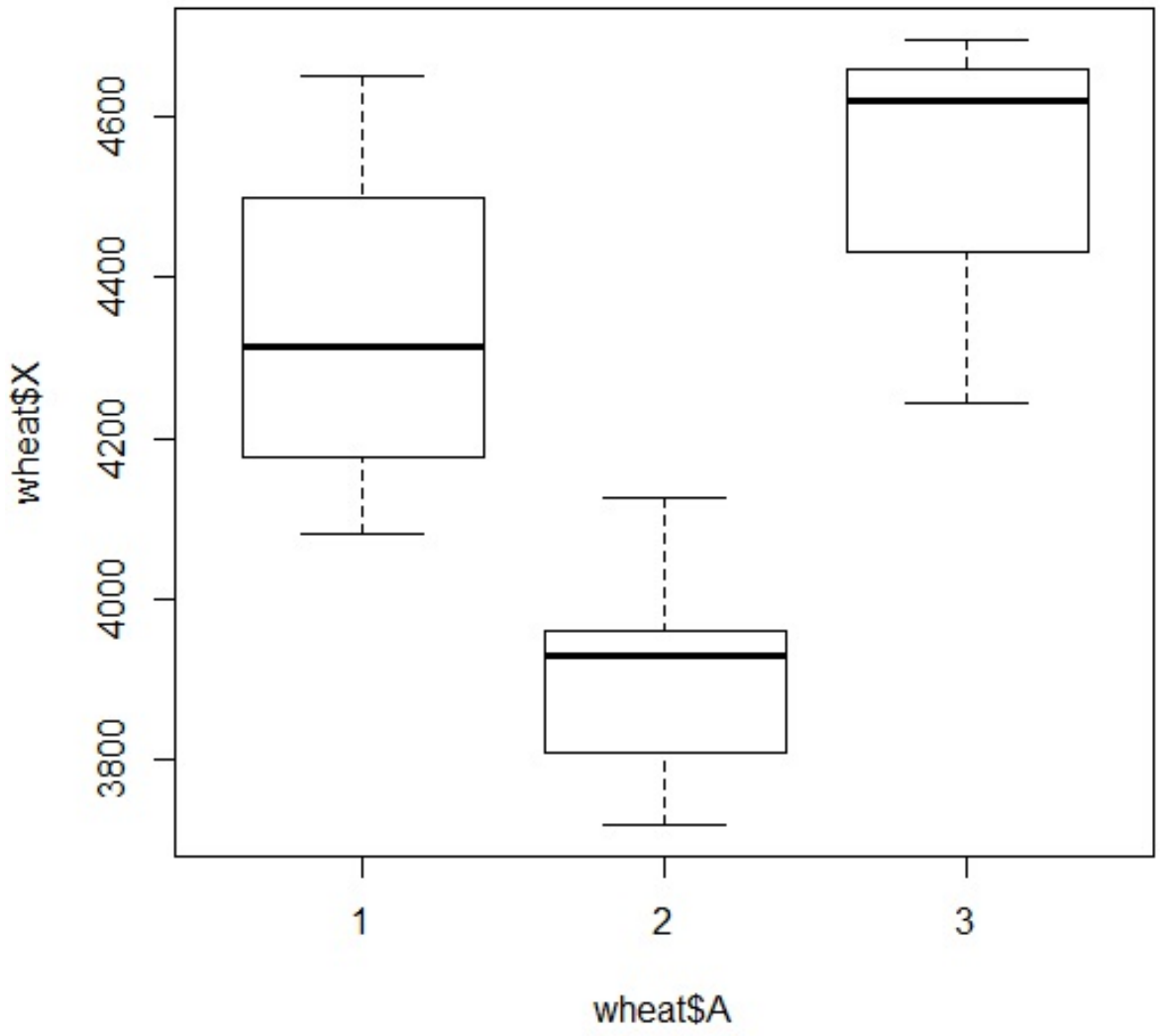
或者用区间估计的方法进行假设检验. $\mu_i - \mu_j$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} - \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-a), \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot} + \hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-a)\right).$$

如果这个区间包含0, 则表明我们可以以概率$1-\alpha$断言μ_i与μ_j没有显著差异; 如果整个区间落在0的左边, 则我们可以以概率$1-\alpha$断言μ_i小于μ_j; 如果整个区间落在0的右边, 则我们可以以概率$1-\alpha$断言μ_i大于μ_j.

例7.1.1续 μ_1, μ_2, μ_3之间的差异.

R程序: plot(wheat$X~wheat$A)



首先计算各个因子间的均值, 再用多重t检验方法作检验.

```
> mu=tapply(wheat$X,wheat$A,mean)
> mu
       1        2        3
4338.75 3909.00 4520.00
>
```

```
> pairwise.t.test(wheat$X,wheat$A,p.adjust.method="none")

        Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  wheat$X and wheat$A

  1      2
2 0.0123 -
3 0.2776 0.0028

P value adjustment method: none
>
```

因此我们以95%的概率断言: μ_1和μ_2有显著差异(根据点估计, $\mu_1 > \mu_2$), μ_2和μ_3有显著差异(根据点估计, $\mu_3 > \mu_2$), μ_1和μ_3无显著差异.

注: Benjamini and Hochberg (1995): Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing. Journal of the Royal Statistical Society, Series B, **57** (1): 289 – 300, 是高维假设检验的一篇重要文献.

两因素方差分析

在一项实际试验中, 往往有这样的情况, 研究者本想考察某个因素对指标的影响, 但是由于客观条件的限制, 还有个别因素不可能在所有试验中把它们控制在完全相同的状态. 譬如, 在上一节开始讨论的小麦品种的例子中, 实验者要研究的是"小麦品种"这一因素对产量的影响. 但在实际中可能会出现这样的情况, 很难找到一大块田的土质肥沃程度完全一样. 因此"土质"就成为另一个因素不可避免地进入了试验, 导致了两因素的试验问题.

在农业试验中解决这个问题的方法是采用所谓的区组设计. 它的做法是, 先把一块田分成若干块, 譬如b块, 使得每块田的土质肥沃程度基本上保持一致. 在试验设计中, 称这种块为区组, 然后把每一个区组又分成若干小块, 称为试验单元. 现在有a种小麦品种, 方便的方法就是把每个区组分成a个试验单元. 在每一个试验单元上种植一种小麦.

若用y_{ij}表示在第j个区组中种植第i种小麦的那个试验单元的产量, 则y_{ij}就可表为

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}, \quad i = 1, \cdots, a, \quad j = 1, \cdots, b, \tag{7.2.1}$$

这里μ称为总平均, α_i为第i种小麦品种的效应, β_j为第j个区组的效应, e_{ij}为随机误差.

在实际应用中, 更多的情况是研究者所感兴趣的问题本身就是两因素的.

例如, 在一项工业试验中, 影响产品质量的因素是反应温度和反应压力. 实验者的目的是选择最好的生产条件, 若反应温度有a个水平, 反应压力有b个水平. 记y_{ij}为在反应温度处于第i个水平和反应压力处于第j个水平时产品质量的指标值, 那么y_{ij}也有表达式(7.2.1).

若影响产品质量的因素除了反应温度和反应压力外, 还有反应时间和催化剂这两个因素, 当我们把任两个因素控制在某一状态而研究剩余两个因素对产品质量的影响时, 这同样导致一个两因素的问题.

考虑一般的两因素试验问题, 将这两个因素分别记为A和B. 假定因素A有a个不同的水平, 记为$A_1, \cdots, A_a$, 而因素B有b个不同的水平, 记为$B_1, \cdots, B_b$.

在因素A和B的各个水平的组合下做c次试验. 记y_{ijk}为在水平组合(A_i, B_j)下的第k次试验的指标值. 对固定的i和j, $y_{ij1}, \cdots, y_{ijc}$都是在水平组合(A_i, B_j)下的指标观测值, 我们可以把它们看成来自一个正态总体的样本, 均值为μ_{ij}. 于是

$$y_{ijk} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_{ij}, \sigma^2), \quad k = 1, \cdots, c. \tag{7.2.2}$$

表7.2.1 两因素方差分析问题:

$A_i \diagdown B_j$	B_1	B_2	$\cdots$	B_b
A_1	$y_{111}, y_{112}, \cdots, y_{11c}$	$y_{121}, y_{122} \cdots, y_{12c}$	$\cdots$	$y_{1b1}, y_{1b2} \cdots, y_{1bc}$
A_2	$y_{211}, y_{212}, \cdots, y_{21c}$	$y_{221}, y_{222} \cdots, y_{22c}$	$\cdots$	$y_{2b1}, y_{2b2} \cdots, y_{2bc}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	$y_{a11}, y_{a12}, \cdots, y_{a1c}$	$y_{a21}, y_{a22} \cdots, y_{a2c}$	$\cdots$	$y_{ab1}, y_{ab2} \cdots, y_{abc}$

将(7.2.2)改写成

$$\begin{cases} y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk},\ i = 1, \cdots, a,\ j = 1, \cdots, b,\ k = 1, \cdots, c, \\ e_{ijk} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0, \sigma^2). \end{cases} \tag{7.2.3}$$

为进行统计分析, 将μ_{ij}做适当的分解. 记

$$\mu = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij},\quad \bar{\mu}_{i\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij},\quad \bar{\mu}_{\cdot j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{ij},$$

$$\alpha_i = \bar{\mu}_{i\cdot} - \mu,\quad i = 1, \cdots, a,$$

$$\beta_j = \bar{\mu}_{\cdot j} - \mu,\quad j = 1, \cdots, b,$$

$$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot j} + \mu,$$

其中μ为总平均, α_i为因素A的水平A_i的效应, β_j为因素B的水平B_j的效应, γ_{ij}可写为

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \mu_{ij} - (\bar{\mu}_{i\cdot} - \mu) - (\bar{\mu}_{\cdot j} - \mu) - \mu \\ &= (\mu_{ij} - \mu) - \alpha_i - \beta_j,\end{aligned}$$

表示A_i和B_j的交互效应. 通常把因素A和B对实验指标的交互效应设想为某一因素的效应, 称这个因素为A与B的交互作用, 记为$A \times B$. 不难验证

$$\sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \gamma_{ij} = 0.$$

注意到μ_{ij}可改写为$\mu_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}$, 因此(7.2.3)可写成

$$\begin{cases} y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+e_{ijk}, \\ \qquad\qquad i=1,\cdots,a,\ j=1,\cdots,b,\ k=1,\cdots,c, \\ e_{ijk}\overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2), \\ \sum_{i=1}^{a}\alpha_i=0,\ \sum_{j=1}^{b}\beta_j=0,\ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\gamma_{ij}=0. \end{cases} \tag{7.2.4}$$

这就是两因素方差分析模型.

无交互效应的情形

假设$\gamma_{ij}=0, i=1,\cdots,a, j=1,\cdots,b$, 即不存在交互效应. 我们只考虑每种水平组合下试验次数为$c=1$的情形. 对于$c>1$的情形, 统计分析方法完全不同.

此时, 模型(7.2.4)可写为

$$\begin{cases} y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+e_{ij}, \ \ i=1,\cdots,a, \ j=1,\cdots,b, \\ e_{ij} \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,\sigma^2), \\ \sum_{i=1}^{a}\alpha_i=0, \ \ \sum_{j=1}^{b}\beta_j=0. \end{cases} \tag{7.2.5}$$

这就是无交互效应的两因素方差分析模型.

我们的目的是考察因素A或B的各个水平对指标的影响有无显著差异, 这归结为对假设

$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$

或

$$H_2 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$

进行检验.

我们采用与单因素方差分析模型类似的方法导出检验统计量.

记

$$\bar{y} = \frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}, \quad \bar{y}_{i\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}, \quad \bar{y}_{\cdot j} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} y_{ij},$$

$$\mathsf{SS}_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y})^2.$$

SS_T是全部试验数据的离差平方和, 称为总平方和. 对其进行分解得

$$\begin{aligned}
\mathsf{SS}_T &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y} + \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y} + \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{a} b(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{b} a(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y})^2 \\
&\triangleq \mathsf{SS}_E + \mathsf{SS}_A + \mathsf{SS}_B.
\end{aligned}$$

因为$\bar{y}_{i\cdot}$是水平A_i下所有观测值的平均, 所以$\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y})^2$反映了$\bar{y}_{1\cdot},\cdots,\bar{y}_{a\cdot}$差异的程度. 这种差异是由于因素$A$的不同水平所引起的, 因此称$\mathsf{SS}_A$为因素$A$的平方和. 类似地, 称$\mathsf{SS}_B$为因素$B$的平方和. 称$\mathsf{SS}_E$反映了试验的随机误差的影响, 称为误差平方和.

和一元方差分析类似, 可以证明

$$\mathsf{SS}_E/\sigma^2 \sim \chi^2((a-1)(b-1)),$$

当H_1成立时,

$$\mathsf{SS}_A/\sigma^2 \sim \chi^2(a-1)\text{且与}\mathsf{SS}_E\text{独立}.$$

于是当H_1成立时,

$$F_A=\frac{\mathsf{SS}_A/(a-1)}{\mathsf{SS}_E/[(a-1)(b-1)]}\sim F(a-1,(a-1)(b-1)). \quad (7.2.6)$$

给定显著性水平α, 假设检验的拒绝域为

$$W=\{F_A>F_\alpha(a-1,(a-1)(b-1))\}.$$

同理, 当H_2成立时,

$$F_B = \frac{\mathsf{SS}_B/(b-1)}{\mathsf{SS}_E/[(a-1)(b-1)]} \sim F(b-1,(a-1)(b-1)). \quad (7.2.7)$$

给定显著性水平α, 假设检验的拒绝域为

$$W = \{F_B > F_\alpha(b-1,(a-1)(b-1))\}.$$

表7.2.2: 无交互效应的两因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	SS_A	$a-1$	$\mathsf{MS}_A = \frac{\mathsf{SS}_A}{a-1}$	$F_A = \frac{\mathsf{MS}_A}{\mathsf{MS}_E}$
因素B	SS_B	$b-1$	$\mathsf{MS}_B = \frac{\mathsf{SS}_B}{b-1}$	$F_B = \frac{\mathsf{MS}_B}{\mathsf{MS}_E}$
误差	SS_E	$(a-1)(b-1)$	$\mathsf{MS}_E = \frac{\mathsf{SS}_E}{(a-1)(b-1)}$	
总计	SS_T	$ab-1$		

例7.2.1 一种火箭使用了4种燃料、三种推进器, 进行射程试验. 对于每种燃料和每种推进器的组合作一次试验, 得到试验数据如下表. 问各种燃料之间及各种推进器之间有无显著差异?

表7.2.3: 火箭试验数据

燃料A＼燃料B	B_1	B_2	B_3
A_1	58.2	56.2	65.3
A_2	49.1	54.1	51.6
A_3	60.1	70.9	39.23
A_4	75.8	58.2	48.7

这是一个两因素试验且不考虑交互效应. 记燃料为因素A, 它有4个水平, 水平效应为$\alpha_1, \cdots, \alpha_4$; 推进器为因素$B$, 它有3个水平, 水平效应为$\beta_1, \beta_2, \beta_3$. 我们再显著性水平$\alpha = 0.05$下检验

$$H_1 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$
$$H_2 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

经计算(略)得

表7.2.4: 火箭试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	157.59	3	52.53	F_A =0.4306
因素B	223.85	2	111.93	F_B =0.9175
误差	731.98	6	122.00	
总计	1113.42	11		

因为$F_{0.05}(3,6) = 4.76, F_{0.05}(2,6) = 5.14$, 而$F_A = 0.4306 < 4.76$, $F_B = 0.9175 < 5.14$, 所以我们接受H_1和H_2, 即认为各种燃料和各种推进器之间的差异对于火箭射程无显著影响.

R程序:

```
rocket=data.frame(
Y=c(58.2,56.2,65.3,49.1,54.1,51.6,60.1,70.9,39.23,75.8,58.2,48.7),
A=gl(4,3),
B=gl(3,1,12)
)
rocket.aov=aov(Y~A+B,data=rocket)
summary(rocket.aov)
```

```
> summary(rocket.aov)
            Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
A            3  157.6   52.52   0.431  0.739
B            2  223.5  111.74   0.917  0.449
Residuals    6  731.3  121.88
> |
```

如果经过F_A检验, H_1被拒绝, 那么在这种情况下, 我们认为因素A的a个水平效应$\alpha_1, \cdots, \alpha_a$不全相同. 此时我们希望比较$\alpha_i$的大小, 这需要做$H_0 : \alpha_i = \alpha_k$的假设检验或者$\alpha_i - \alpha_k$区间估计.

因为$y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2)$, 利用$\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$易知

$$\bar{y}_{i\cdot} \sim N(\mu + \alpha_i, \frac{\sigma^2}{b}), \quad i = 1, \cdots, a.$$

于是

$$\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{k\cdot} \sim N(\alpha_i - \alpha_k, \frac{2\sigma^2}{b}). \tag{7.2.8}$$

注意到

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathsf{SS}_E}{(a-1)(b-1)}$$

是σ^2的无偏估计, 因此对固定的i, k, $H_0 : \alpha_i = \alpha_k$的检验统计量

$$t_{ik} = \frac{\sqrt{b}(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{k\cdot})}{\sqrt{2}\hat{\sigma}} \sim t((a-1)(b-1)).$$

给定显著性水平α, 检验的拒绝域为

$$W = \{|t_{ik}| > t_{\frac{\alpha}{2}}((a-1)(b-1))\}.$$

或者考虑区间估计. $\alpha_i - \alpha_k$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{k\cdot} - \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}}((a-1)(b-1)), \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{k\cdot} + \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}}((a-1)(b-1))\right) \quad (7.2.9)$$

如果这个区间包含0, 则表明我们以概率$1-\alpha$断言α_i和α_k没有显著差异. 如果整个区间落在0的左边, 则我们以概率$1-\alpha$断言α_i小于α_k. 如果整个区间落在0的右边, 则我们以概率$1-\alpha$断言α_i大于α_k.

(7.2.9)是一个效应之差$\alpha_i - \alpha_k$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间. 不难推出, m个效应之差$\alpha_{i_1} - \alpha_{k_1}, \cdots, \alpha_{i_m} - \alpha_{k_m}$的置信水平为$1-\alpha$ 的同时置信区间为

$$\bigcap_{j=1}^{m} \Big(\bar{y}_{i_j\cdot} - \bar{y}_{k_j\cdot} - \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2m}}((a-1)(b-1)), \\ \bar{y}_{i_j\cdot} - \bar{y}_{k_j\cdot} + \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2m}}((a-1)(b-1)) \Big) \quad (7.2.10)$$

若经过F_B检验, 假设H_2被拒绝, 类似于以上的讨论, 我们可以建立$\beta_j - \beta_k$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot k} - \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}}(a-1)(b-1), \bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot k} + \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2}}(a-1)(b-1)\right) \tag{7.2.11}$$

m个效应之差$\beta_{j_1} - \beta_{k_1}, \cdots, \beta_{j_m} - \beta_{k_m}$的置信水平为$1-\alpha$ 的同时置信区间为

$$\bigcap_{i=1}^{m} \Big(\bar{y}_{j_i \cdot} - \bar{y}_{k_i \cdot} - \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2m}}((a-1)(b-1)), \bar{y}_{j_i \cdot} - \bar{y}_{k_i \cdot} + \hat{\sigma} t_{\frac{\alpha}{2m}}((a-1)(b-1))\Big) \tag{7.2.12}$$

有交互效应的情形

若要考虑因素A, B之间的交互作用$A \times B$时, 在各水平组合下需要做重复试验. 设每种组合下试验次数均为$c(c > 1)$. 此时对应的统计模型就是(7.2.4). 在这样的模型下, α_i并不能反映水平A_i的优劣. 这是因为在交互效应存在的情况下, 因子水平A_i的优劣还与因子B的水平有关系. 对不同的B_j, A_i的优劣也不相同. 因此, 对这样的模型, 检验$\alpha_1 = \cdots = \alpha_a = 0$与检验$\beta_1 = \cdots = \beta_b = 0$都是没有实际意义的. 然后一个重要的检验问题是交互效应是否存在的检验, 即检验

$$H_3 : \gamma_{ij} = 0, \quad i = 1, \cdots, a, j = 1, \cdots, b.$$

引进记号:

$$\bar{y} = \frac{1}{abc}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}, \quad \bar{y}_{ij\cdot} = \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk},$$

$$\bar{y}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{bc}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}, \quad \bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{1}{ac}\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c} y_{ijk}.$$

作平方和分解:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{SS}_T &= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk}-\bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot}+\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}+\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y}+\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij\cdot})^2+bc\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y})^2 \\
&\quad +ac\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot}-\bar{y})^2+c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y})^2 \\
&\triangleq \mathsf{SS}_E+\mathsf{SS}_A+\mathsf{SS}_B+\mathsf{SS}_{A\times B},
\end{aligned}
$$

其中

$$\mathsf{SS}_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2,$$

$$\mathsf{SS}_A = bc\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y})^2,$$

$$\mathsf{SS}_B = ac\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y})^2,$$

$$\mathsf{SS}_{A\times B} = c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y})^2.$$

我们称SS_E为误差平方和, SS_A为因素A的平方和, SS_B为因素B的平方和, $\mathsf{SS}_{A\times B}$为交互作用的平方和.

类似于以前的讨论, 可以证明当H_3成立时,

$$F_{A\times B}=\frac{\mathsf{SS}_{A\times B}/[(a-1)(b-1)]}{\mathsf{SS}_E/[ab(c-1)]}\sim F((a-1)(b-1),ab(c-1)). \tag{7.2.13}$$

给定显著性水平α, 假设检验的拒绝域为

$$W=\{F_{A\times B}>F_\alpha((a-1)(b-1),ab(c-1))\}.$$

表7.2.5: 关于交互效应的两因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	SS_A	$a-1$	$\mathsf{MS}_A = \frac{\mathsf{SS}_A}{a-1}$	$F_A = \frac{\mathsf{MS}_A}{\mathsf{MS}_E}$
因素B	SS_B	$b-1$	$\mathsf{MS}_B = \frac{\mathsf{SS}_B}{b-1}$	$F_B = \frac{\mathsf{MS}_B}{\mathsf{MS}_E}$
交互效应$A \times B$	$\mathsf{SS}_{A\times B}$	$(a-1)(b-1)$	$\mathsf{MS}_{A\times B} = \frac{\mathsf{SS}_{A\times B}}{ab(c-1)}$	$F_{A\times B} = \frac{\mathsf{MS}_{A\times B}}{\mathsf{MS}_E}$
误差	SS_E	$ab(c-1)$	$\mathsf{MS}_E = \frac{\mathsf{SS}_E}{ab(c-1)}$	
总计	SS_T	$abc-1$		

例7.2.2 研究树种与地理位置对松树生长的影响, 对4个地区的3种同龄松树的直径进行测量得到数据如下表所示. A_1, A_2, A_3表示三个不同的树种, B_1, B_2, B_3, B_4 表示4个不同的地区. 对每一种水平组合, 进行了5次测量, 对比试验结果进行方差分析.

表7.2.6: 3种同龄松树的直径测量数据(单位: cm)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	23 25 21 14 15	20 17 11 26 21	16 19 13 16 24	20 21 18 27 24
A_2	28 30 19 17 22	26 24 21 25 26	19 18 19 20 25	26 26 28 29 23
A_3	18 15 23 18 10	21 25 12 12 22	19 23 22 14 13	22 13 12 22 19

R程序:

```
tree=data.frame(
A=gl(3,20,60),
B=gl(4,5,60),
Y=c(23, 25, 21, 14, 15, 20, 17, 11, 26, 21,
16, 19, 13, 16, 24, 20, 21, 18, 27, 24,
28, 30, 19, 17, 22, 26, 24, 21, 25, 26,
19, 18, 19, 20, 25, 26, 26, 28, 29, 23,
18, 15, 23, 18, 10, 21, 25, 12, 12, 22,
19, 23, 22, 14, 13, 22, 13, 12, 22, 19)
)
tree.aov=aov(Y~A+B+A:B, data=tree)
summary(tree.aov)
```

```
            Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
A            2  352.5  176.27   8.959 0.000494 ***
B            3   87.5   29.17   1.483 0.231077
A:B          6   71.7   11.96   0.608 0.722890
Residuals   48  944.4   19.68
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> 
```

可见在显著性水平$\alpha = 0.05$下, 树种(因素A)的效应是有显著差异的, 而地理位置(因素B)的效应及树种和地理位置的交互效应无显著差异.