目录

第三章 资本资产定价模型和套利定价理论

Markowitz 的工作可以说是开创了现代金融学的新篇章，他的证券组合选择理论被喻为第一次“华尔街革命”。而他的学生 Sharp（1964）以及 Lintner（1965）和 Mossin（1966）在 Markowitz 资产组合理论的基础上进一步研究市场在达到均衡时资产收益和风险之间的关系得到的资本资产定价模型（Capital Asset Pricing Model，CAPM），则可以说是现代金融学的核心内容。由于他们的工作，Markowitz 和 Sharp 一起荣获 1990 年的诺贝尔经济学奖。另外一位 1981 年的诺贝尔经济学奖获得者 Tobin 在研究允许卖空的证券组合选择问题时得到了著名的两基金分离定理，从而得到一些宏观经济方面的结论。

CAPM 要求存在一系列严格的假设条件，所以模型存在理论上的抽象和对现实经济的简化，与一些实证经验不完全符合，但由于它的逻辑性和实用性，以及多年来在理论上的突出贡献，仍被推崇为抓住了证券市场本质的经典经济模型。

为了避开 CAPM 中市场组合有效性检验的问题，Ross（1976）提出了套利定价理论（Arbitrage Pricing Theory，APT）。APT 本质上为一种多因子线性模型，且并不要求假设投资者的期望效用函数，因子也不局限于“市场组合”，于是在实证检验方面取得了较大的进展。

本章在前两节介绍了基于 Markowitz 资产选择理论的资本资产定价模型，以及在不同条件下模型的几个变型。第三节则介绍了套利定价模型的主要结论及其证明。最后在第四节比较了两个模型的异同点，以及如何实证检验。

3.1CAPM 模型基本假设

Markowitz 的证券组合选择理论研究的是个体投资者在投资时如何选择资产组合，而资本资产定价模型则研究市场在均衡状态下资产的价格特征。标准的 CAPM 是在 Markowitz 理论的基础上得到的，因此，它也必须继承 Markowitz 理论的基本假设，即在第二章中介绍的三条假设。但为了叙述的方便以及内容的完整性，我们在这里重新叙述。另外，由于 CAPM 研究的是整个市场的行为特征，所以对市场的所有投资者以及风险资产都有一定的假设。

假设 3.1

市场无摩擦，即市场上资产的交易不存在任何形式的交易成本，包括交易费用与市场流动性风险造成的交易成本，以及税收。

市场无摩擦虽然是理想化的假设，但是却大大简化了问题的复杂程度，正如在第二章中所看到的，最优问题能够得到漂亮的显示解，并且进一步得到有效前沿，从而可以运用理论结果对实际问题进行分析。当然也可以放宽这个假设，比如假设按照一定的方式收取交易费用，加入到最优问题的约束条件中，这样更符合实际，但是同时问题就大大复杂化了，目前也有一些学者在研究这个问题，并且在一定的假设下得到了一些结果，但本章就不做介绍了。

假设 3.2

不存在卖空限制，且资产是无限可分的，即投资者可以买入或卖出任意小份额的资产。

不存在卖空限制就意味着允许投资者所选择的资产组合权重为负数，这在第二章中就已经涉及，如果有卖空限制，则在最优问题的求解过程中必须加入资产组合权重非负这个约束条件，这样问题就变得复杂了。并且现实中也并非所有的市场都没有卖空限制，比如我国的金融市场就有卖空限制，因此对有卖空限制的情况下资本资产定价问题的研究也具有实际意义。另外，资产无限可分则是为了方便数学处理（使得模型中都是连续变量）。

假设 3.3

市场交易个体按照期望方差准则进行投资，即其期望效用函数完全或近似地用资产收益率的均值方差表示。并且假设投资个体行为遵循二阶随机占优，即在期望收益率相同的情况下偏好风险小的资产（组合），在风险相同的情况下偏好期望收益率大的资产（组合）。（注：有关期望效用函数，随机占优等概念将在第四章中介绍）。

这条假设保证了最优投资组合以及前沿边界可以通过求解二次规划问题(2.2.1)得到。

假设 3.4

市场上的所有风险资产，所有投资者对其概率分布的判断一致，即它们的期望收益向量以及协方差矩阵唯一，这保证了市场中存在唯一的一条有效前沿。

要做到这一点，就必须假设市场对所有投资者信息充分且畅通无阻，这就意味着一旦有新的信息出现，所有投资者都能在第一时间知道并且做出判断，并且判断的结果也须一致，即在新的信息集基础上得到的资产期望收益向量以及它们的协方差矩阵也要唯一。这就涉及到投资者行为金融学问题，这个也是当前金融学研究的热门问题。

假设 3.5

市场是完全竞争的，即单个投资者的投资行为不会影响资产的价格。

这个假设源自金融学中有效市场假说（EMH）。有效市场假说包括三个方面：投资者理性；信息完全；充分竞争。前两者已经包含在前面的假设中，而本条假设正好强调了这个假说的最后一个方面。

假设 3.6

所有投资者有相同的投资期限。

经典的 CAPM 考虑的是单期投资问题，即所有投资者只进行一期投资，且投资日期以及投资期限都相同。若放宽这个假设，也可以考虑多期或跨期投资问题，相应的就产生了 I-CAPM 模型。

假设 3.7

存在无风险资产，并且任意投资者都能以相同的利率买入或卖出任意数量的该种资产。

在第二章中我们已经介绍，存在或者不存在无风险资产这两种情况下得到的前沿边界大不相同，可见无风险资产对整个市场的影响力。另外，现实中同一个市场往往存在多种无风险资产，不同的市场也有不同的无风险资产，例如货币市场上可以将银行储蓄看作无风险资产，但不同的储蓄种类的利率不同，应该把它们看成多种无风险资产，在债券市场上则可将短期国库券看成无风险资产。

以上七条假设是标准资本资产定价模型成立的前提，缺一不可，其作用会在下面的论证中提到。在后面几节的讨论中还会涉及在放宽某一假设后如何修正 CAPM，从而使 CAPM 得到延伸和拓展，以便于更好的应用于实际。

3.2 CAPM 基本结论及推导

3.2.1 市场组合

为了叙述方面，我们事先说明，以下 3.2 节中出现的定理或者结论，如无特别说明，都是基于 3.1 节 7 条假设的前提之下的。

这里我们首先回顾下上一章的讨论。我们在第二章 2.2 节和 2.3 节中分别讨论了不存在无风险资产和存在无风险资产情况下的最优资产组合问题，并相应得到了两个不同的前沿边界。比较两个前沿边界我们知道，在 $r_f \neq A/C$ 时，两者正好相切于一点，如图所示（这里只画出了 $r_f < A/C$ 时的情形）。

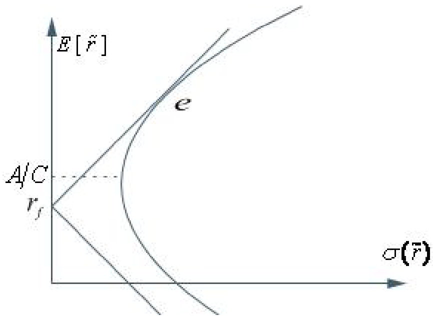

图 3.2.1

并且我们在 2.3 节中也已经提到，切点 e 对应的投资组合正是市场组合，下面我们就来说明这一点。但在此之前，我们必须首先说明，在实际市场中，只可能出现如图 3.2.1 所示的情况，而另外两种情况 $r_f = A/C$ 和 $r_f > A/C$ 是不合理的。

定理 3.8

在先前的 7 条假设条件下，如果市场上存在无风险资产，且所有的风险资产都是严格正供给的，那么只可能是$r_f < A/C$。

证明：这里假设市场上的风险资产都是严格正供给符合实际情况。由假设 3.3 知市场上所有投资个体行为遵循二阶随机占优，也就是说所有投资者都会根据自己的效用函数，选择有效前沿上的一个投资组合进行投资，结合定理 2.3.2 的讨论可知：

当$r_f = A/C$时，在有效前沿边界上的投资策略为全部投资于无风险资产，并持有自融资组合，也就是说所有的投资者都将自己的财富投资于无风险资产，而风险资产的净需求为零。在**市场出清**的前提下（注：存在一个价格体系，使得市场的总需求等于总供给，此时我们称之为市场出清，market clearing），这就与风险资产严格正供给矛盾。

当$r_f > A/C$时，有效前沿上的投资策略是卖空风险组合$\tilde{r}_e$，并买入无风险资产。当所有投资者都选择这样投资时，市场必然无法出清，所以$r_f > A/C$也是不可能的。

于是，只可能成立$r_f < A/C$。我们也可以换一种方式来理解，$r_f < A/C$就等价于最小方差资产组合$\tilde{r}_{mvp}$的风险溢价$E(\tilde{r}_{mvp}) - r_f$严格为正。

下面我们给出**市场组合**的定义。记W_0^i为个体i的初始财富（资产），w_{ij}为个体i投资于资产j所用的资金占初始财富的比例，则社会总财富为

$$W_{m0} = \sum_{i=1}^{I} W_0^i \text{，}$$

其中I表示市场包含的投资者总数。在市场均衡的情况下，社会总财富等于投资与资产的总价值。记w_{mj}为投资于资产j的总价值占社会总财富的比例，我们称w_{mj}为市场资产组合的资产权重。在市场出清的情况下，我们有

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} W_0^i = w_{mj} W_{m0} \text{。} \qquad (3.2.1)$$

（3.2.1）等式两边同时除以W_{m0}，有

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ij} \frac{W_0^i}{W_{m0}} = w_{mj}$$

也就是说市场组合的权重是个体组合权重的一个凸组合。

最后，我们还需假设市场组合中只包含风险资产，那么就有下面定理：

定理 3.9

图 3.2.1 中所示的切点e对应的最优资产组合就是市场组合。

证明：我们仍然按照第二章中用到的假设以及相关的记号。记w_{ej}表示切点组合e投资于资产j的权重。则由定理 2.3.2 的结论（1）可知，任意无风险前沿边界上的投资组合都可以表示为无风险资产和切点组合的仿射组合。不妨设第i个投资者投资于切点组合e的权重为w_e^i，则该投资者投资于无风险资产上的权重等于$1-w_e^i$。因此，第i个投资者投资于风险资产j的财富为$W_0^i w_e^i w_{ej}$，从而所有投资者投资于资产j的财富总额为$\sum_{i=1}^{I} W_0^i w_e^i w_{ej}$。另一方面，由市场组合的定义可知，

$$w_{mj}=\frac{\sum_{i=1}^{I} W_0^i w_e^i w_{ej}}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{I} W_0^i w_e^i w_{ej}}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{I} W_0^i w_e^i\right) w_{ej}}{\left(\sum_{i=1}^{I} W_0^i w_e^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ej}\right)}=w_{ej},\forall j$$

这说明切点组合e就是市场组合。

3.3.2 资本市场线

我们将存在无风险资产时的有效前沿称为**资本市场线**（Capital Market Line , CML）。如图 3.2.1 所示，资本市场线是一条始于点$(0,r_f)$，斜率为$\sqrt{H}$的射线。其函数表达式可以写为

$$\sqrt{H}=\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_p)}。 \quad （3.2.2）$$

（3.2.2）式右端的比值称为资产组合p的**夏普比**（Sharpe Ratio），它被用来衡量一个资产组合的风险效益，即因承担风险而可能带来的收益。资本市场线上的任意资产组合的夏普比是常数$\sqrt{H}$，它的值只取决于市场上基础资产的期望收益向量以及它们的协方差矩阵。如果我们结合市场组合e，又可以将（3.2.2）式改写为

$$\frac{E[\tilde{r}_m]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_m)}=\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sigma(\tilde{r}_p)} \quad （3.2.3）$$

$$或者\ E[\tilde{r}_p]=r_f+\tilde{\beta}_{mp}(E[\tilde{r}_m]-r_f) \quad （3.2.3'）$$

这里$\tilde{r}_m$表示市场组合的收益率，$\tilde{\beta}_{mp}=\frac{\sigma(\tilde{r}_p)}{\sigma(\tilde{r}_m)}$（这里的$\tilde{\beta}_{mp}$与我们前面定义的$\beta$系数在形式上并不一致，但实际上是相等的，我们稍后证明）。（3.2.3'）式已经有了资本资产定价公

式的形式，但实际上并不是，资本资产定价公式是要对所有的可行资产进行定价，而（3.2.3’）式只适用于有效前沿上的资产组合，这也说明了资本市场线的局限性。

3.3.3 资本资产定价公式和证券市场线

在第二章中我们已经得到了可行资产与前沿资产之间的关系，由定理 2.3.3 的（4）可知，$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，$\forall$ 前沿资产 $\tilde{r}_p$，其期望收益率有如下重要关系：

$$E(\tilde{r}_q)=\beta_{pq}E(\tilde{r}_p)+(1-\beta_{pq})r_f \quad (3.2.4)$$

或：$$E(\tilde{r}_q)-r_f=\beta_{pq}\,(E(\tilde{r}_p)-r_f) \quad (3.2.4')$$

其中 $\beta_{pq}=\dfrac{Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{Var(\tilde{r}_p)}$ 称为 $\tilde{r}_q$ 关于 $\tilde{r}_p$ 的 β 系数。

现在我们取前沿资产组合为市场组合，则对任意可行资产 q 有如下的定价公式：

$$E(\tilde{r}_q)=\beta_{mq}E(\tilde{r}_m)+(1-\beta_{mq})r_f \quad (3.2.5)$$

或：$$E(\tilde{r}_q)-r_f=\beta_{mq}(E(\tilde{r}_m)-r_f) \quad (3.2.5')$$

这就是著名的**资本资产定价模型**。它突破了资本市场线的局限，使得对任意可行资产都可以通过一个有经济含义的前沿资产组合（市场组合）来定价，这也是从理论到实践的飞跃。

另一方面，我们将（3.2.5’）式看成是 $E(\tilde{r}_q)$ 和 β_{mq} 的函数，那么在 $E(\tilde{r}_q)-\beta_{mq}$ 坐标图上，这正好又是一条直线，我们称之为**证券市场线**（Security Market Line , SML），如下图所示。

图 3.2.2

证券市场线的斜率为 $E(\tilde{r}_m)-r_f$，正好是市场组合的风险溢价，而由前面的讨论不难得到当 $r_f<A/C$ 时，$E(\tilde{r}_m)-r_f>0$，也就是说，此时证券市场线的斜率为正。它反映了，在市场均衡的前提下，任意可行资产的期望收益率取决于它关于市场组合的 β 系数，并且 β 系数越大，其期望收益率也越大。

还有一点需要说明的是，资本市场线在某种意义上是证券市场线的一种特殊情况，事实上（3.2.3’）式中的 $\tilde{\beta}_{mp}$ 正好等于我们这里定义的 β 系数。由第二章（2.3.11）式可知，

$$\tilde{r}_p=(1-\tilde{\beta}_{mp})r_f+\tilde{\beta}_{mp}\tilde{r}_m \quad (3.2.6)$$

将（3.2.6）式代入 β 系数的定义式得

$$\beta_{mp}=\frac{Cov(\tilde r_m,\tilde r_p)}{Var(\tilde r_m)}=\frac{Cov(\tilde r_m,(1-\tilde\beta_{mp})r_f+\tilde\beta_{mp}\tilde r_m)}{Var(\tilde r_m)}=\tilde\beta_{mp}+(1-\tilde\beta_{mp})Cov(\tilde r_m,\tilde r_f)=\tilde\beta_{mp}$$

（3.2.7）

由此可见，如果我们将（3.2.3'）式也看成是期望收益率与β系数的函数，那么资本市场线正好是将证券市场线限制在前沿资产范围内的情形。

3.3.4 两基金分离定理

在第二章中我们已经得到这样的结论：前沿边界可以由任意两个前沿组合的仿射组合生成。也就是说，如果投资者的投资决策就是根据自己的效用函数在有效前沿上选取一点，那么他考虑全体基础资产的线性组合和考虑两种前沿资产的组合是一样的。这两种组合在现实市场中可能就是两种业绩良好的共同基金（mutual fund）；于是在实际处理时，投资者只要考虑如何配置这两个基金的投资比例以达到适合自己的期望收益水平即可，而不需要再去从基础资产中一一购买自己需要的比例。下面我们来具体论述下两基金分离定理以及相关结论。

首先我们给出两基金分离的定义。

定义 3.10

如果存在两个共同基金α_1和α_2，使得对于任何资产组合q都可以找到实数λ（与q相对应），对于所有的凹函数$u(\cdot)$，满足

$$E[u(\lambda\tilde r_{\alpha_1}+(1-\lambda)\tilde r_{\alpha_2})]\geq E[u(\tilde r_q)] \qquad (3.2.8)$$

那么我们称资产收益率向量$\tilde r\equiv(\tilde r_j)_{j=1}^n$具有**两基金分离性**，$\alpha_1$和$\alpha_2$是分离基金。

（注：（3.2.8）涉及到效用理论的知识将在第五章中介绍，这里就不详细展开）。
由此定义，我们知道前沿资产组合全体具有两基金分离性，并且这两个共同基金可以在前沿边界上任意选取。反过来，我们有如下定理：

定理 3.11

如果α_1和α_2是基础资产$\{\tilde r_j\}_{j=1}^n$的两个分离基金，那么α_1和α_2必定在$\{\tilde r_j\}_{j=1}^n$生成的前沿边界上。

证明：我们知道，在一定的假设下（资产收益率都有有限二阶矩、协方差矩阵存在且正定等），资产组合的前沿边界一定存在。因为$E\left\{u\left[\lambda\tilde r_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde r_{\alpha_2}\right]\right\}\geq E\left[u\left(\tilde r_q\right)\right]$对任意的凹函数 u 均成立，根据第 5 章的内容可知，这等价于：$\lambda\tilde r_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde r_{\alpha_2}\underset{SSD}{\geq}q$，所以，必

然有如下表达式成立：

$$E\left[\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde{r}_{\alpha_2}\right]=E\left(\tilde{r}_q\right) \tag{3.2.9}$$

$$\operatorname{var}\left[\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde{r}_{\alpha_2}\right]\le\operatorname{var}\left(\tilde{r}_q\right) \tag{3.2.10}$$

也就是说，因为投资组合 $\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde{r}_{\alpha_2}$ 二阶随机占优于投资组合 q，所以前者与后者相比具有相同的期望收益和更小的方差。

在上面的基础上，我们采用反证法证明投资组合 α_1 和 α_2 一定是前沿边界投资组合。

假定投资组合 α_1 和 α_2 不全是前沿边界投资组合，则存在如下三种情形：

（1）α_1 是前沿边界投资组合，α_2 不是前沿边界投资组合。

（2）α_1 不是前沿边界投资组合，α_2 是前沿边界投资组合。

（3）α_1 和 α_2 都不是前沿边界投资组合。

针对上述三种情形，证明的思路均是在反证假设下寻找一个组合，使该组合和投资组合 α_1 和 α_2 的线性组合具有相同的期望收益但是具有更小的方差，从而与题设的推论产生矛盾，进而否定反证假设。由于三种情形的证明过程类似，所以此处仅给出第一种情形的证明为例。因为 α_2 不是前沿边界投资组合，则必然存在与 α_2 具有相同期望收益的前沿边界投资组合 α_2'，因此必然可以构造新投资组合 $q_1=\lambda_1\alpha_1+\left(1-\lambda_1\right)\alpha_2'$，其中 λ_1 是一个与 q_1 相关的常数，根据第 2 章的知识可知，构造的新组合必然是前沿边界投资组合。

由于式（3.2.9）对任意投资组合都成立，所以对投资组合 q_1 也成立，从而可以找到相应的 λ，即 $E\left[\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde{r}_{\alpha_2}\right]=E\left(\tilde{r}_{q_1}\right)=E\left[\lambda_1\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda_1\right)\tilde{r}_{\alpha_2'}\right]$。因为 $E\left(\tilde{r}_{\alpha_2'}\right)=E\left(\tilde{r}_{\alpha_2}\right)$，同时必然有 $E\left(\tilde{r}_{\alpha_1}\right)\neq E\left(\tilde{r}_{\alpha_2}\right)$，否则两个组合退化为一个组合，所以可以证明 $\lambda=\lambda_1$。

由于投资组合 $\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+\left(1-\lambda\right)\tilde{r}_{\alpha_2}$ 具有与投资组合 q_1 相同的期望收益，但该组合不是前沿边界投资组合，所以其方差要大于投资组合 q_1 的方差，从而与式（3.2.10）相矛盾，所以反证假设错误，即原命题成立。

最后我们介绍一下两基金分离定理成立的一些等价条件。

$\tilde{r}_p$，$\tilde{r}_q$ 和 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 这三个变量的关系总可以写成

$$\tilde{r}_q = \beta_0 + \beta_1 \tilde{r}_{zc(p)} + \beta_2 \tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_q \qquad (3.2.11)$$

且这里 $\tilde{\varepsilon}_q$ 是残差，满足

$$Cov(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_q) = Cov(\tilde{r}_{zc(p)}, \tilde{\varepsilon}_q) = E[\tilde{\varepsilon}_q] = 0 \qquad (3.2.12)$$

其中 $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ 分别是 $\tilde{r}_p$，$\tilde{r}_q$ 和 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 的多元回归系数。由于 $\tilde{r}_p$ 和 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 不相关，我们就得到

$$\beta_1 = 1 - \beta_{pq}\text{，}\beta_2 = \beta_{pq}\text{，} \qquad (3.2.13)$$

将（3.2.11）式两边取期望得 $\beta_0 = 0$，所以我们可以将可行资产组合 q 的收益率写成：

$$\tilde{r}_q = (1 - \beta_{pq}) \tilde{r}_{zc(p)} + \beta_{pq} \tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_q \qquad (3.2.14)$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_q$ 满足（3.2.12）式，并且我们记

$$\tilde{Q}\left(\beta_{pq}\right) = \tilde{r}_{zc(p)} + \beta_{pq}(\tilde{r}_p - \tilde{r}_{zc(p)})\text{。} \qquad (3.2.15)$$

定理 3.12

设最小方差资产组合之外的前沿边界资产组合 p 和其零协方差前沿边界资产组合 $zc(p)$，则如下三种说法等价：

（1）资产收益率向量满足两基金分离性质。

（2）对任意投资组合 q 和任意凹函数 u，$E\left\{u\left[\tilde{Q}\left(\beta_{pq}\right)\right]\right\} \le E\left[u\left(\tilde{r}_q\right)\right]$ 成立。

（3）对任意投资组合 q，$E\left[\tilde{\varepsilon}_q \mid \tilde{Q}\left(\beta_{pq}\right)\right] = 0$。

（4）对于任意的凹函数 u 和任意的投资组合 q，$\lambda = 0$ 是如下规划问题的最优解：

$$\max_{\lambda} E\left\{u\left[\lambda \tilde{r}_q + (1-\lambda)\tilde{Q}\left(\beta_{qp}\right)\right]\right\}$$

上述定理的证明略，有兴趣的读者可以参看 Huang 和 Litzenberger 的著作《金融经济学基础》。

3.3.5 不存在无风险资产情况下的 CAPM

在市场上不存在无风险资产时，为了给前沿资产定价，只要市场组合不是最小方差资产组合，我们就将分离基金选为市场组合以及与之协方差为零的资产组合，那么就有

$$E(\tilde{r}_q) = \beta_{mq} E(\tilde{r}_m) + (1-\beta_{mq}) E(\tilde{r}_{zc(m)}) \tag{3.2.16}$$

或：$$E(\tilde{r}_q) - E(\tilde{r}_{zc(m)}) = \beta_{mq}(E(\tilde{r}_m) - E(\tilde{r}_{zc(m)})) \tag{3.2.16'}$$

这就是由 Black（1972）和 Lintner（1969）发明的零-β资本资产定价模型。这里的零-β就是指两个分离基金的协方差为零。并且有前面的分析知，市场组合位于有效前沿边界上，故

$$E(\tilde{r}_m) - E(\tilde{r}_{zc(m)}) > 0 \tag{3.2.17}$$

上式反映在证券市场线上就表现为直线斜率为正。

3.3.6 卖空限制下的 CAPM

我们假设风险资产禁止卖空，而无风险资产则没有卖空限制。并且假定$r_f < A/C$，由前面的讨论可知这样的假设是合理的。

我们仍然由 Markowitz 的资产组合理论出发，将求解最优资产组合的问题等价描述为求解如下二次规划问题：

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} Var\{\hat{w}^T r\} = \frac{1}{2} w^T V w \\ s.t. \quad \hat{w}^T e = w_0 r_f + w^T e = E[\tilde{r}_p] \\ \hat{w}^T \hat{1} = w_0 + w^T 1 = 1 \\ w \geq 0 \end{cases} \tag{3.2.18}$$

与问题（2.3.1）相比，（3.2.18）只在约束条件增加了一条，即所有风险资产的权重都必需非负。所以在相同的期望收益水平下，问题（3.2.18）得到的最优解的方差（即风险）大于或者等于问题（2.3.1）最优解的方差，这意味着在期望方差（或者标准差）平面上，前者所确定的前沿边界要在后者确定的前沿边界内部或者两者重合。

我们在假设$r_f < A/C$时就意味着所有的风险资产都是严格正供给的，也就是说市场组合中所有资产的权重都为正。根据前面的讨论，问题（2.3.1）得到的有效前沿是一条从点$(0, r_f)$出发，并与双曲线型前沿边界相切的一条射线，并且该切点组合就是市场组合。于是，有效前沿上的任意资产组合都可以表示成无风险资产与切点组合的再组合。这里我们引用下定理

2.3.2 的结论 2)、当 $r_f < A/C$ 时，如图（2.3.2），各部分前沿边界组合所对应的投资策略如下：

①、在 e **点左边**的有效无风险前沿边界组合的投资策略为风险资产组合 $\tilde{r}_e$ 与无风险资产 r_f 的凸组合；

②、在 e **点处**全部投资于风险组合 $\tilde{r}_e$；

③、e **点右边**的有效无风险前沿边界组合的投资策略为卖空无风险资产，并买入风险组合 $\tilde{r}_e$；

④、**非有效前沿**上的投资策略是卖空风险组合 $\tilde{r}_e$，并买入无风险资产。

我们发现在有效前沿上的投资策略中投资于切点组合的资产权重必然大于或者等于零，也就是说投资者不会卖空风险资产，即 $w \geq 0$。因此，问题（2.3.1）的解也就是问题（3.2.18）的解，两者得到的有效前沿是一致的，从而在卖空限制下的定价公式也不会发生变化，即：

$$E(\tilde{r}_q) - r_f = \beta_{mq}(E(\tilde{r}_m) - r_f)$$

注意，上述结论只是对有效前沿在一定的假设下才成立，而对一般的 Markowitz 资产组合问题，其最优解的前沿边界则发生变化。其实 Markowitz 在其论文中讨论了不允许卖空的情形，并得到了以下结论:

定理 3.13

在不允许卖空的条件下，资产组合最有问题的解的前沿边界存在，并且它或是一个孤立点（所有 $E[\tilde{r}_p]$ 都相等），或是有限段双曲线（不存在无风险资产）或者直线段（存在无风险资产）的联结。

3.3.7 β 系数

在 CAPM 理论中，一项风险资产对于市场组合的 β 值是一个反映该资产对个体投资组合风险贡献的充分统计量。那些收益和市场组合收益正相关的风险资产具有正的风险溢价。在这种情况下，资产的 β 值越高，其风险补偿越大。这层关系可以凭直觉理解如下。考虑资产 A 和资产 B 两项资产。资产 A 和资产 B 在期末具有相同的预期的回报支付。有所不同的是，资产 A 的回报支付和市场组合正相关，而资产 B 的回报支付和市场组合负相关。换句话说，资产 A 在整体经济繁荣的时候有较高的回报支付，而资产 B 在整体经济衰落的时候

有较高的回报支付。在经济衰落时一单位的回报支付比经济繁荣时一单位的回报支付更具有价值。因此，资产B更受人们的欢迎，其期初时的价格要高于资产A期初时的价格。又由于资产A和资产B有相同的预期回报支付，所以资产A和资产B相比拥有更高的预期收益率。换句话说，资产A的回报支付结构不如资产B的吸引人，因此在均衡条件下，资产A需要生成一个和资产B相比更高的预期收益率而使自己和资产B一样吸引人。

3.3 套利定价理论

3.3.1 单因子模型

同式（3.2.14），我们可以根据带无风险资产的定价公式，即式（3.2.5），可以得到任意可行资产组合与市场组合收益率之间的线性关系：

$$\tilde{r}_q = r_f + \beta_{mq}(\tilde{r}_m - r_f) + \tilde{\varepsilon}_q$$

（3.3.1）

其中$Cov(\tilde{r}_m, \tilde{\varepsilon}_q) = E[\tilde{\varepsilon}_q] = 0$。

现在我们脱离 CAPM 的结论，直接假设这个线性关系成立，即假设对任意的可行资产$\tilde{r}_j$如下关系式成立：

$$\tilde{r}_j = \alpha_j + \beta_{mj}\tilde{r}_m + \tilde{\varepsilon}_j \qquad (3.3.2)$$

来导出所谓的单因子模型。在这个线性关系的基础上，我们处理任意两个可行资产组合之间的关系时就可以通过单一的因子即市场组合来简化。

为了导出单因子模型，我们还需要假设：

（1） 不同可行资产组合的残差$\tilde{\varepsilon}_j$，$\tilde{\varepsilon}_k$不相关，即：

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_k) = 0, \forall j \neq k \qquad (3.3.3)$$

（2） 任意可行资产组合的残差期望为零：

$$E(\tilde{\varepsilon}_j) = 0, \forall j \qquad (3.3.4)$$

（3） 残差与因子即市场组合也不相关：

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{r}_m) = 0, \forall j \qquad (3.3.5)$$

有了这三个假设，我们就可以来推导单因子模型的相关结论。首先我们来考虑任意两个可行资产组合之间的协方差

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\tilde r_j,\tilde r_k) &= \mathrm{cov}(\alpha_j+\beta_{mj}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_j,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)\\ &= \mathrm{cov}(\alpha_j,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)+\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)+\\ &\quad \mathrm{cov}(\tilde\varepsilon_j,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)\end{aligned}$$

α_j 为常数，故 $\mathrm{cov}(\alpha_j,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)=0$ 。

而 $\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)=\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\alpha_k)+\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\beta_{mk}\tilde r_m)+\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\tilde\varepsilon_k)$，其中 $\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\alpha_k)=0$，且由式（3.3.5）知 $\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\tilde\varepsilon_k)=0$，所以

$$\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)=\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\beta_{mk}\tilde r_m)=\beta_{mj}\beta_{mk}\sigma_m^2$$

类似的不难得到

$$\mathrm{cov}(\tilde\varepsilon_j,\alpha_k+\beta_{mk}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_k)=0$$

于是我们有

$$\mathrm{cov}(\tilde r_j,\tilde r_k)=\beta_{mj}\beta_{mk}\sigma_m^2 \tag{3.3.6}$$

上式表明任意两个可行资产组合的协方差都可以表示成三项乘积，其中 β_{mj},β_{mk} 是常数，它们分别表示这两个可行资产组合对因子市场组合的敏感程度，σ_m^2 是市场组合的方差。

根据式（3.3.6）我们又可以得到任意可行资产组合与市场组合方差之间的关系：

$$\sigma^2(\tilde r_j)=\beta^2{}_{mj}\sigma_m^2+\sigma^2(\tilde\varepsilon_j) \tag{3.3.7}$$

式（3.3.7）表明任意可行资产组合的风险可以分解为系统风险即市场组合的方差和非系统风险即对应的残差方差，并且系统风险前面的系数 β_{mj} 就是我们先前定义的可行资产组合关于市场组合的 β 系数，这个不难得到：

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde r_j,\tilde r_m)}{\sigma_m^2}=\frac{\mathrm{cov}(\alpha_j+\beta_{mj}\tilde r_m+\tilde\varepsilon_j,\tilde r_m)}{\sigma_m^2}=\frac{\mathrm{cov}(\beta_{mj}\tilde r_m,\tilde r_m)}{\sigma_m^2}=\beta_{mj}\text{。}$$

现在我们退一步来讲，只需将先前的假设限定在 n 种基础资产上成立。那么对任意的可行资产组合，即这 n 种资产的仿射组合，由 β 及 $\tilde\varepsilon$ 的线性性可知，我们仍然有同样的结论：

对任意的可行资产组合 $\tilde r_p = w^T\vec r$，我们有

$$\begin{cases} \beta_{mp} = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_{mj} \\ \tilde{\varepsilon}_p = \sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{\varepsilon}_j \\ \sigma^2(\tilde{r}_p) = \beta^2{}_{mp}\sigma_m^2 + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_p) \end{cases} \tag{3.3.8}$$

3.3.2 多因子模型

在单因子模型中，我们将市场中的所有可行资产组合与市场组合的收益率建立一种线性关系，其本质体现的是一种线性定价法则。而在多因子模型中，我们仍然继承这种线性定价的思想，只是将影响资产价格的因子扩充到K个，记为$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_K$，它们可能是各种资产组合的收益率，各种证券市场指数的增长率，或者宏观经济指标的增长率等等，但从抽象的角度来看，我们都把它们理解为收益率。那么同单因子模型一样，我们假设如下：

（1）对任意的基础资产j，

$$\tilde{r}_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij} \tilde{f}_i + \tilde{\varepsilon}_j \tag{3.3.9}$$

其中α_j为常数，β_{ij}为资产j对因子i的敏感程度。

（2）不同可行资产组合的残差$\tilde{\varepsilon}_j$，$\tilde{\varepsilon}_k$不相关，即：

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{\varepsilon}_k) = 0, \forall j \neq k \tag{3.3.10}$$

（3）任意可行资产组合的残差期望为零：

$$E(\tilde{\varepsilon}_j) = 0, \forall j \tag{3.3.11}$$

（4）任意残差与任意因子也不相关：

$$\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j, \tilde{f}_k) = 0, \forall j, k \tag{3.3.12}$$

（5）不同的因子也不相关：

$$\mathrm{cov}(\tilde{f}_j, \tilde{f}_k) = 0, \forall j \neq k \tag{3.3.13}$$

事实上，模型中的β_{ij}就是我们先前定义的资产j关于因子i的β系数，这是因为

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_j,\ \tilde{f}_i)}{\sigma^2(\tilde{f}_i)} = \frac{\mathrm{cov}(\alpha_j + \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij} \tilde{f}_i + \tilde{\varepsilon}_j,\ \tilde{f}_i)}{\sigma^2(\tilde{f}_i)}$$

$$= \frac{\mathrm{cov}(\alpha_j,\ \tilde{f}_i) + \mathrm{cov}(\sum_{i=1}^{K} \beta_{ij} \tilde{f}_i,\ \tilde{f}_i) + \mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j,\ \tilde{f}_i)}{\sigma^2(\tilde{f}_i)}$$

α_j 为常数，故 $\mathrm{cov}(\alpha_j,\ \tilde{f}_i)=0$，并且由假设知 $\mathrm{cov}(\tilde{\varepsilon}_j,\ \tilde{f}_i)=0$，且 $\mathrm{cov}(\tilde{f}_j,\tilde{f}_i)=0,\forall j\neq i$，所以

$$\frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_j,\ \tilde{f}_i)}{\sigma^2(\tilde{f}_i)}=\frac{\mathrm{cov}(\beta_{ij}\tilde{f}_i\ \ \tilde{f}_i)}{\sigma^2\ \tilde{f}_i}=\beta_{ij} \qquad (3.3.14)$$

并且关于资产组合的方差及协方差，我们也有类似的结论，推导的过程与上节相同，这里就不作赘述：

对任意不同的资产 j,k，

$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_j,\tilde{r}_k)=\vec{\beta}_j^T\Sigma_f\vec{\beta}_k \qquad (3.3.15)$$

$$\sigma^2(\tilde{r}_j)=\vec{\beta}_j^T\Sigma_f\vec{\beta}_j+\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j) \qquad (3.3.16)$$

其中 $\vec{\beta}_j=(\beta_{1j},\beta_{2j},...,\beta_{Kj})^T$，$\Sigma_f=\begin{pmatrix}\sigma^2(\tilde{f}_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma^2(\tilde{f}_2) & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \sigma^2(\tilde{f}_K)\end{pmatrix}$

由式（3.3.19）我们知道任意资产的风险可以分解为基于这 K 个因素的系统风险以及非系统风险 $\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j)$。

3.3.3 套利定价模型（APT）

在介绍 Ross 的套利定价模型之前，我们必须先介绍套利（arbitrage）的概念。我们说一个自融资资产组合 p 在 $[0,T]$ 时间内存在**套利机会**，如果存在 $T^*\in(0,T]$，满足

$$V_0(p)=0 \qquad (3.3.17)$$

$$\text{而}V_{T^*}(p)\geq 0 \qquad (3.3.18)$$

$$\text{且}\Pr ob\{V_{T^*}(p)>0\}>0 \qquad (3.3.19)$$

这里 $V_t(p)$ 表示资产 p 在 t 时刻的价值，$\Pr ob\{\omega\}$ 表示事件 ω 发生的概率。相应的资产组合称为**套利组合**。

本章讨论的都是单期投资模型，所以我们只需考虑两个时刻，即现在与未来。那么通俗的讲，一个资产组合如果存在套利机会就是说现在投入为零，但是未来却有正的收益，这样投资者就可以不冒任何风险的获得收益。**市场无套利**是指任意资产组合都不能存在这样的套利机会，即世上没有免费的午餐。下面我们举一个简单的例子来帮助理解套利的概念。

假设在 3.3.1 节的单因子模型中，我们有这样两种资产 A,B，它们关于市场组合的 β 系

数相同，但是它们的收益率不同：$\tilde{r}_A = \alpha_A + \beta\tilde{r}_m + \tilde{\varepsilon}_A$，$\tilde{r}_B = \alpha_B + \beta\tilde{r}_m + \tilde{\varepsilon}_B$，不妨设 $\tilde{r}_A \geq \tilde{r}_B$，

$\alpha_A > \alpha_B$，则 $E(\tilde{r}_A) = \alpha_A + \beta E(\tilde{r}_m) > \alpha_B + \beta E(\tilde{r}_m) = E(\tilde{r}_B)$，由此可得 $\Pr ob\{\tilde{r}_A > \tilde{r}_B\} > 0$。现在我们就可以构造套利组合：卖空 1 元的资产 B，买入 1 元的资产 A,那么这个组合的成本为零，但是收益为 $\tilde{r}_A - \tilde{r}_B > 0$，这样就出现了套利机会。于是市场中所有的投资者都会复制这样的资产组合去套利，也就是说，他们都会卖空资产 B，买入资产 A，在竞争机制的作用下，必然会导致资产 A 的价格上涨，收益率下降，资产 B 的价格下降，收益率上升，最后达到均衡状态，套利机会消失。所以，在市场均衡的前提下，我们假设市场无套利是合理的。

现在我们就可以来讨论 Ross 的套利定价理论。首先从较简单的情况入手：

定理 3.1

如果无风险资产存在，并且 $\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0, \forall j$，那么在市场无套利假设下，我们有

$$\tilde{r}_j = r_f + \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}(\tilde{f}_i - r_f) + \tilde{\varepsilon}_j, \forall j \qquad (3.3.20)$$

上式仍然保留 $\tilde{\varepsilon}_j$ 是为了与后面 $\tilde{\varepsilon}_j \neq 0$ 时的情况在形式上保持一致。

证明：等价的只需证明

$$\alpha_j = (1 - \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}) r_f, \forall j \qquad (3.3.21)$$

利用反证法，如果两者不相等，就会出现套利机会。为此，我们构造资产组合 p_j：

它由无风险资产和 K 个因子构成，其中投资于无风险资产的权重为 $w_{j0} = (1 - \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij})$，投资于因子 k 的权重为 $w_{jk} = \beta_{kj}$。

当 $\alpha_j < (1 - \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}) r_f$ 时，买入 1 元的资产组合 p_j，同时卖空 1 元的资产 j。这个投资组合的花费为零，但是收益为

$$(1 - \sum_{i=1}^{K} \beta_{ij}) r_f - \alpha_j > 0$$

即其在现在的价值为零，而在未来有严格正的价值，那么就存在了套利机会，这与市场无套利假设矛盾。

当$\alpha_j > (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij})r_f$时，我们只需卖空 1 元的资产组合 p_j，同时买入 1 元的资产 j。同理，这个组合也是一个套利组合。

综上，我们就证明了式（3.3.20）或（3.3.21）成立。

注意，上述定理的条件，只用到了 3.3.2 节中的假设（1），另外再加上$\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0, \forall j$以及无套利假设，而并没有用到假设（2）－（5）。

下面我们来讨论$\tilde{\varepsilon}_j$不恒为零的情况。这时问题比$\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0$的情况变得复杂了许多，失去了$\tilde{\varepsilon}_j \equiv 0$这个强有力的条件，我们还是需要对$\tilde{\varepsilon}_j$进行限定，除了 3.3.2 节中提到的假设（2）和（3）外，我们还需要控制其方差，为了叙述方便，我们记为假设（6）：

对任意的资产 j，其残差$\tilde{\varepsilon}_j$的方差一致有界，即存在常数σ，满足，对$\forall j$，

$$\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j) \le \sigma^2 \qquad (3.3.22)$$

因为套利定价模型考虑的是市场中存在大量资产的情况，即基础资产构成的线性空间无限维，我们将无套利假设变为**渐近无套利假设**。极限意义下的套利机会是指存在这样一个套利组合序列，如果它们的方差收敛到零，而期望却有大于零的下界。渐近无套利假设即指不存在极限意义下的套利机会。

有了这些假设的保证，我们就可以证明，在拥有大量资产的市场中，对大多数资产而言，它们的收益率之间存在这一种近似的线性关系，即式（3.3.20）对大多数 j 成立。

定理 3.2

在上述假设的条件下，假设一个市场中存在 n 种基础资产和一种无风险资产，那么当$n \to \infty$时，对$\forall \varepsilon > 0$，存在自然数$N_\varepsilon > 0$，使得$j \ge N_\varepsilon$都有

$$\left|\alpha_j - (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij})r_f\right| < \varepsilon \qquad (3.3.23)$$

也就是说，在存在大量资产的市场中，对于任意小的ε，除了至多N_ε个资产外，剩下的资产都满足$\alpha_j \approx (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij})r_f$，即式（3.3.20）近似的成立。下面我们就来证明这个定理：

假设这个结论不成立，则对给定的ε，存在资产子列$\{j_l\}_1^\infty$，满足

$$\left|\alpha_{j_l} - (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f\right| \ge \varepsilon \qquad (3.3.24)$$

现在我们如同证明定理 3.1 一样，对每个 j_l 构造资产组合 p_{j_l}：

$$\tilde{r}_{p_{j_l}} = (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f + \sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l}\tilde{f}_i \tag{3.3.25}$$

当 $\alpha_{j_l} < (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f$ 时，买入 1 元的资产组合 p_{j_l}，同时卖空 1 元的资产 j_l；当 $\alpha_{j_l} > (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f$ 时则相反。于是我们就到了一个自融资组合，其收益率为

$$\left|\alpha_{j_l} - (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f\right| + \delta_{j_l}\tilde{\varepsilon}_{j_l} \tag{3.3.26}$$

其中

$$\delta_{j_l} = \begin{cases} 1 & \alpha_{j_l} > (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f \\ -1 & \alpha_{j_l} < (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f \end{cases} \tag{3.3.27}$$

这样我们就得到了一系列自融资组合，随后我们再将前 L 个组合赋予权重 $1/L$，再由它们组成一个新的组合，这个新的组合仍然是一个自融资组合，它的期望收益率为

$$\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left|\alpha_{j_l} - (1-\sum_{i=1}^{K}\beta_{ij_l})r_f\right| \geq \varepsilon \tag{3.3.28}$$

而方差为

$$\frac{1}{L^2}\sum_{l=1}^{L}\sigma^2(\tilde{\varepsilon}_{j_l}) \leq \frac{\sigma^2}{L} \tag{3.3.29}$$

则当 $L \to \infty$ 时，方差趋于零，而期望收益率始终大于或等于 ε。这就出现了一个极限意义下的套利机会，与渐近无套利假设矛盾。

至此，定理得证。

这就是 Ross 提出的套利定价模型（Arbitrage Pricing Theory）证明的核心内容。它告诉我们如何用有限种资产来对无限种资产进行定价。

值得一提的是，如果我们令 $K=1$，$\tilde{f}_1 = \tilde{r}_m$，再结合 3.3.2 节中的假设（4）和（5）就有

$$\begin{cases} \tilde{r}_j = r_f + \beta_{mj}(\tilde{r}_m - r_f) + \tilde{\varepsilon}_j \\ E(\tilde{r}_j) - r_f = \beta_{mj}(E(\tilde{r}_m) - r_f) \\ \beta_{mj} = \dfrac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_j, \tilde{r}_m)}{\sigma_m^2} \end{cases}$$

这个结论在形式上与 CAPM 的结论一致，但是我们不能把两者等同起来。形式上的 CAPM 是套利定价模型的一种特殊情形，并且我们在推导套利定价模型时并没有要求假设（4）和（5）成立。如果假设（4）和（5）不成立，那么套利定价模型中的敏感系数就不再等于我们先前定义的 β 系数，那么形式上的 CAPM 也就不成立了。但是，在实际应用中，我们往往把假

设（4）和（5）加入到模型假设中。

对于假设（6）我们还需要作一点说明。我们在讨论单因子模型以及多因子模型时都得出这样的结论，任意资产组合的风险（方差）都可以分解为系统风险和非系统风险两个部分。而假设（6）说基础资产的非系统性风险一致有界。如果市场中存在无穷多种资产，那么我们可以构造一个资产组合，使得该资产组合的非系统性风险为 0。

定理 3.3

在套利定价理论的假设以及结论的基础上，存在一个高度多样化的资产组合 p，满足

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = \vec{\beta}_p^T \Sigma_f \vec{\beta}_p \qquad (3.3.30)$$

证明：我们假设 $\tilde{r}_p = \vec{w}^T \vec{r}$，其中 $\vec{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$，$\vec{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n)^T$。这里说高度多样化的资产组合是指：（1）n 充分大，即市场中存在无穷多的基础资产；（2）投资于每种基础资产的权重 w_i 足够小，即 $\max_i w_i \to 0$。下面我们来计算 $\tilde{r}_p$ 的方差：

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = \sigma^2(\vec{w}^T \vec{r}) = \vec{w}^T \sigma^2(\vec{r}) \vec{w} = \vec{w}^T \left(\operatorname{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) \right)_{n \times n} \vec{w} \qquad (3.3.31)$$

而由式（3.3.15）及（3.3.16）可知，

$$\operatorname{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j) = \begin{cases} \vec{\beta}_i^T \Sigma_f \vec{\beta}_j & i \neq j \\ \vec{\beta}_j^T \Sigma_f \vec{\beta}_j + \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_j) & i = j \end{cases} \qquad (3.3.32)$$

将（3.3.32）代入（3.3.31）得，

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{r}_p) &= \vec{w}^T \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1^T \\ \vec{\beta}_2^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_n^T \end{pmatrix} \Sigma_f \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \cdots & \vec{\beta}_n \end{pmatrix} \vec{w} + \sigma^2(\vec{w}^T \vec{\varepsilon}) \\ &= \vec{\beta}_p^T \Sigma_f \vec{\beta}_p + \sigma^2(\vec{w}^T \vec{\varepsilon}) \end{aligned} \qquad (3.3.32)$$

其中

$$\vec{\beta}_p = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n w_i \beta_{1i} & \sum_{i=1}^n w_i \beta_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^n w_i \beta_{Ki} \end{pmatrix} \qquad (3.3.33)$$

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 & \tilde{\varepsilon}_2 & \cdots & \tilde{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \qquad (3.3.34)$$

而由假设（2）和（6）知

$$\sigma^2(\vec{w}^T \vec{\varepsilon}) = \sum_{i=1}^n {w_i}^2 \sigma^2(\tilde{\varepsilon}_i) \leq \sigma^2 \sum_{i=1}^n {w_i}^2 \leq \sigma^2 (\max_i w_i) \sum_{i=1}^n w_i = \sigma^2 (\max_i w_i) \to 0 \qquad (3.3.35)$$

于是我们得到 $\sigma^2(\tilde{r}_p) = \vec{\beta}_p^T \Sigma_f \vec{\beta}_p$。

3.4 两模型对比及实证检验

3.4.1 CAPM 与 APT 对比

CAPM 本质上是一种均衡定价模型，它以市场均衡为前提，在整个市场达到供求平衡的情况下，来对资产定价，这就要求假设市场中所有个体为“均值方差型”投资者，而 APT 则不需要对个体进行假定，它只要求无套利假设或者渐近无套利假设成立，如果市场中出现一个套利机会，所有投资者都会构造投资组合去套利，从而使资产价格变动，最终达到一个均衡价格，套利机会消失，从本质上讲，APT 是一种相对定价方法。虽然在市场均衡时市场无套利机会，但无套利并不表示市场已经达到均衡状态了，两个模型在假设上就存在较大的区别，下面我们就详细来比较一下。

（1） 前面已经提到，CAPM 需要假设市场中所有个体都根据期望方差准则进行投资，他们的效用函数遵循二阶随机占优；而 APT 则不需要这样的假设，它只要求当出现套利机会时，所有投资者都会尽可能的构造投资组合去套利，直到机会消失。从这一点来看，APT 的假设更加符合实际。

（2） 我们在讨论 CAPM 时，有这样一个结论，市场组合就是有效前沿上的切点组合，与其说这是一个结论，不如说是一个假设，因为它是在一系列严格假设下才得出的结论，许多书上把它称作市场组合的有效性假说，而市场组合的有效性正是 CAPM 实证检验的最大难题，甚至有些学者认为，市场组合的有效性是不可检验的；而 APT 则避免了这个问题，它直接假设任意资产（组合）的收益率与市场中若干种因子之间存在一种线性关系，甚至这些因子中并不一定要包括市场组合的收益率，从而也不需要检验其有效性，这也是 Ross 提出 APT 的一个原因。

（3） 经典的 CAPM 是在 Markowitz 资产组合理论的基础上发展出来，而 Markowitz 资产组合理论讨论的问题都只考虑了投资者如何将自己的财富分配到有限种基本资产中，而实际市场上往往包含无限种资产，这必然会使模型的实际应用受到限制；而 APT 则直接考虑市场中存在大量基础资产，将这无限种资产的收益率通过有限个因子建立线性关系，从而对它们进行定价。

（4） 以上三点为两模型假设的最大不同之处，而两者也有许多共同的假设。例如市场无摩擦，且完全竞争，所有资产都无限可分等，另外，两者都隐含了投资者对所有资产都有一致的预期这个假设，只有在这个前提下才能保证资产之间的线性关系表达式唯一。

3.4.2 CAPM 的实证检验

CAPM 自诞生以来，许多学者就对其进行广泛深入的实证检验。由于模型本身要求严格的假设，导致对它的检验会遇到很多的困难。首先我们要考虑的问题就是如何找出市场组合。我们知道，按照 CAPM 的理论，任何资产的期望收益率与市场组合的期望收益率构成一种线性关系，线性关系的斜率恰好为这种资产关于市场组合的 β 值。那么我们要对模型进行检验首先必须找出市场组合，并计算各资产关于市场组合的 β 值。但是，按照市场组合的定

义，真正的市场组合必须包含市场中所有的财富。如果严格按照定义，我们很难找到真正的市场组合，也就是说，真正的市场组合是不可观测的，因此，在很多情况下，实证中所用的都是市场组合的代表组合。事实上，我们有如下定理：

定理 3.4

如果市场代表组合关于真实市场组合的 β 值为 1，即 $\beta_{mm'}=1$，且任意基础资产的收益率与代表组合有如下线性关系：

$$\tilde{r}_j=\alpha'_j+\beta_{m'j}\tilde{r}_{m'}+\tilde{\varepsilon}'_j \tag{3.4.1}$$

其中残差 $\tilde{\varepsilon}'_j$ 市场组合以及其代表组合均不相关，即

$$\operatorname{cov}(\tilde{\varepsilon}'_j,\tilde{r}_{m'})=\operatorname{cov}(\tilde{\varepsilon}'_j,\tilde{r}_m)=0 \tag{3.4.2}$$

那么该资产关于市场组合及其代表组合有相同的 β 值，即 $\beta_{mj}=\beta_{m'j}$。

证明：$\beta_{mj}=\dfrac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_j,\tilde{r}_m)}{\sigma^2(\tilde{r}_m)}=\dfrac{\operatorname{cov}(\alpha'_j+\beta_{m'j}\tilde{r}_{m'}+\tilde{\varepsilon}'_j,\tilde{r}_m)}{\sigma^2(\tilde{r}_m)}=\dfrac{\beta_{m'j}\operatorname{cov}(\tilde{r}_{m'},\tilde{r}_m)}{\sigma^2(\tilde{r}_m)}=\beta_{m'j}\beta_{mm'}=\beta_{m'j}$。

这个定理告诉我们，即使市场组合不可观测，如果我们可以找到满足上述条件的代表组合，那么各个资产的真实 β 值也是可以估算的。下面一个定理则告诉我们如何从实际市场中通过若干种基础资产来构建市场组合的代表组合：

定理 3.5

如果存在 N 种基础资产，它们关于市场组合的真实 β 值为 $\vec{\beta}_m=(\beta_{m1},\beta_{m2},...,\beta_{mN})^T$，那么由这 N 个基础资产构造市场组合的代表组合 m' 就是所有这 N 个资产的线性组合中 β 值为 1 且方差最小的组合，即 $\vec{w}_{m'}=(w_{m'1},w_{m'2},...,w_{m'N})^T$ 是下列最优问题的解：

$$\min\frac{1}{2}\vec{w}^TV\vec{w}, s.t.\vec{w}^T\vec{\beta}_m=1$$

（3.4.3）

其中 V 是这 N 个资产的协方差矩阵。

证明：利用拉各朗日乘子法求解该最优规划问题：

$$L(\vec{w},\lambda)=\frac{1}{2}\vec{w}^TV\vec{w}+\lambda(1-\vec{w}^T\vec{\beta}_m)$$

其一阶条件为：

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{w}}=V\vec{w}-\lambda\vec{\beta}_m=0,\frac{\partial L}{\partial\lambda}=1-\vec{w}^T\vec{\beta}_m=0$$

求解可得：

$$\lambda=\frac{1}{\vec{\beta}_m{}^T V^{-1}\vec{\beta}_m},\vec{w}_{m'}=\frac{V^{-1}\vec{\beta}_m}{\vec{\beta}_m{}^T V^{-1}\vec{\beta}_m} \quad (3.4.4)$$

令 $\vec{r}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,...,\tilde{r}_N)^T$ 表示这 N 个资产的收益率向量，那么

$$\tilde{r}_{m'}=\vec{w}_{m'}{}^T\vec{r} \quad (3.4.5)$$

并且这 N 个资产的收益率关于代表组合的 β 向量 $\vec{\beta}_{m'}$ 满足：

$$\vec{\beta}_{m'}=\frac{\mathrm{cov}(\vec{r},\tilde{r}_{m'})}{\sigma^2(\tilde{r}_{m'})}=\frac{V\vec{w}_{m'}}{\vec{w}_{m'}{}^T V\vec{w}_{m'}}=\frac{\lambda\vec{\beta}_m}{\lambda^2\vec{\beta}_m{}^T V^{-1}\vec{\beta}_m}=\vec{\beta}_m \quad (3.4.6)$$

因此，在存在有限种基础资产的局部市场中，我们可以通过上述方法构造市场组合的代表组合，使得各个资产的真实 β 值得到有效的估计。

这样，我们就通过构造市场组合的代表组合解决了真实市场组合的不可观测问题。接下去我们要关心的问题就是我们利用历史数据来估算各种资产的 β 值是否合理。我们知道，CAPM 是一个两期模型，它只建立在当前和未来两个时期，并且对应的 β 值也应该是现时的，而我们用历史数据估算出来的 β 值来代替当前的 β 值这就要求 β 值是时间平稳的，并且各个资产（组合）的收益率也是时间平稳的，而这在现实中则不一定成立。同时，我们也默认了 CAPM 在历史上各个时期都成立，这一点也值得商榷。为了解决这个问题，许多学者也在不断研究，并且提出了各自不同的方法。其中有一种思想假设各个资产的收益率服从正态分布。详细的过程我们这里的不作介绍，有兴趣的读者可以参考 Miller and Scholes（1972），Roll（1981）以及金融经济学基础（huang and Litzenberger）等。

3.4.3 APT 的实证检验

前面我们已经提到，APT 模型在实证检验上优于 CAPM 之处就在于它不需要检验市场组合的有效性。但是如何确定影响资产价格的 K 个因子是 APT 实证检验首先要解决的问题。

首先是通过理论分析的方法从金融市场中选择可能对资产价格产生影响的各种因素。从宏观上看，各种宏观经济和金融市场的经济指标可以作为影响因素，例如通货膨胀率，就业率，人口增长率，GDP 增长率，CPI，以及股票指数等；从微观上看，可以考虑个人投资者或者公司的资产构成特征，例如上市公司的市值，及其盈利情况，投资者对利率变动的敏感程度等。

在初步确定这些因子之后，通过一些统计方法，主要是主成分分析和因子分析法，来对这些因子进行检验，排除不相关部分，留下具有显著性影响的部分。遗憾的是，到目前位置，到底哪些因素对资产价格有显著性的影响，学术界尚没有一致的结论。

本章小结

通过本章对资本资产定价模型以及套利定价理论的讨论，我们已经大致了解这两个模型的理论核心以及各自的优缺点。CAPM 在金融经济学理论上的贡献可以说是里程碑意义的，在一系列严格的假设之下，我们得到了任意资产组合期望收益率与市场组合期望收益率之间的线性关系，但是由于市场组合有效性的检验问题，使得它在实际应用中却不如 APT。虽然 APT 在理论上的贡献不能与 CAPM 相提并论，但是它打破了 CAPM 在有限个基础资产形成的有限维空间中讨论问题的局限，在无限维空间中得到了除去有限个资产以外资产收益率之间存在一种近似线性关系的结论，并且为之后在金融经济学中引入 Hilbert 空间做了铺垫，就这一点而言，其理论贡献也不可忽视。