目录

第三章 资产组合理论

3.1 问题引入

1952 年 3 月 Markowitz 在《金融杂志》发表了题为《资产组合的选择》的论文，将数学的方法应用于证券投资组合的研究，探讨了不同类别的、运动方向各异的证券之间的内在相关性，并于 1959 年出版了《证券组合选择》一书，详细论述了证券组合的基本原理，从而为现代西方证券投资理论奠定了基础。分散原理是资产组合理论的核心思想。一般说来，投资者对于投资活动所最关注的问题是预期收益和预期风险的关系。投资者的主要意图，是尽可能建立起一个有效组合，即在市场上为数众多的证券中，选择若干股票结合起来，以求得单位风险的水平上收益最高，或单位收益的水平上风险最小。

本章主要介绍 Markowitz 的资产组合理论，并且主要内容就是 Markowitz 提出的在均值-方差准则下的资产组合理论。在第四节中我们也简单介绍了在 VaR 与 C-VaR 风险度量下的资产组合理论。

3.1.1 单一资产的收益与风险

在评价一个资产的时候我们往往需要关注该资产在将来的收益，实践中我们经常用收益率来表示一项资产的收益情况，即该资产在一段时期内的收益额相对于其期初价格的比例：

$$r=\frac{P_1-P_0+d}{P_0}$$

其中 P_0 与 P_1 分别表示该资产期初与期末的价格，d 表示这段时间内资产的红利收益。即在这段时期中该资产的收益包括价差收益与红利收益。当然从上面的定义我们可以看出收益率并不一定是正数，当价格的下跌量超过红利收益时收益率可以是负值的。并且由于资产市场价格的波动性，资产期末的价格在期初看来是一个未知的变量，并且是一个随机的变量，所以资产的收益率也是随机变动的，因此我们对于随机的收益率用如下符号表示：$\tilde{r}$。

由于资产收益率的随机性，为了评价资产收益情况如何，我们经常需要用它的平均值来表示收益情况，即我们用期望收益率 $E(\tilde{r})$ 来表示资产的收益情况。

当然，投资者在考虑选择资产时不但要考虑资产的收益情况，还要关注与收益相伴的风险。金融数学中我们所谓的风险就是由于资产本身波动或市场行情变化等不确定性对投资者造成损失的可能性。对于风险的度量，最简单的办法就是用资产的方差 $Var(\tilde{r})=s^2(\tilde{r})$ 来表示。我们知道方差是相对于期望收益率 $E(\tilde{r})$ 的平均变化程度，即偏离我们收益评价准则的情况。当然我们需要注意到，$s^2(\tilde{r})$ 度量的资产收益不确定性即包括逆向的（价格下跌），也包括正向的（价格上涨）。而严格的说，对于持有资产的投资者来讲只有当价格下跌是才是真正的损失，当资产上涨时虽然也是一种波动性，但是这是有利于投资者的波动。但是由

于方差 $s^2(\tilde{r})$ 在计算上的方便性，很多时候就忽略掉 $s^2(\tilde{r})$ 将正向变动也归纳为风险的影响。但是，在第四节中我们介绍的在险价值（Value-at-Risk，VaR）方法将只考虑资产的逆向变动为风险。

3.1.2 资产组合的收益与风险

实践中，投资者往往不可能只是对一个资产进行投资，往往对几项资产同时进行投资，构建投资组合。那么一个自然的问题是，对于我们上一节定义的关于资产收益与风险的度量从单个资产到资产组合起了什么样的变化，即资产组合的收益与风险与单个资产的收益与风险有什么样的关系。

对于两个资产组合情形，假设第一个资产现在的价格为 P_1^0，它在下一个时期总的价值为 X_1^1，即包括它下一时刻的价格以及红利收益。同理可以对于第二个资产定义变量 P_2^0 与 X_2^1。另外我们假设投资者投资了 q_1 单位的第一个资产，投资了 q_2 单位的第二个资产，从而期初总的投资额为 $P_p = P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2$，投资组合在期末总的价值为 $X_p = X_1^0 q_1 + X_2^0 q_2$。则两个资产分别的收益率为：

$$\tilde{r}_1 = \frac{X_1^1 - P_1^0}{P_1^0} \qquad 与 \qquad \tilde{r}_2 = \frac{X_2^1 - P_2^0}{P_2^0}$$

资产组合的收益率为：

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_p &= \frac{X_p - P_p}{P_p} = \frac{X_1^0 q_1 + X_2^0 q_2 - P_1^0 q_1 - P_2^0 q_2}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2} \\
&= \frac{q_1 (X_1^0 - P_1^0)}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2} + \frac{q_2 (X_2^0 - P_2^0)}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2} \\
&= \frac{q_1 P_1^0}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2} \frac{X_1^0 - P_1^0}{P_1^0} + \frac{q_2 P_2^0}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2} \frac{X_2^0 - P_2^0}{P_2^0 q} \\
&= w_1 \tilde{r}_1 + w_2 \tilde{r}_2 \qquad (3.1.1)
\end{aligned}$$

其中 $w_1 = \frac{q_1 P_1^0}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2}$，$w_2 = \frac{q_2 P_2^0}{P_1^0 q_1 + P_2^0 q_2}$ 分别表示在总投资额 P_p 中两种资产投资额所占的比重。即（2.1.1）式表示资产组合的投资收益率等于单个资产收益率用其投资额在总投资额中所占比例作为权重得到的加权平均。并且比较显然的是，我们可以将上面两个资产的情形推广到含有 n 个资产的情形，即我们有：

$$\tilde{r}_p = w_1 \tilde{r}_1 + w_2 \tilde{r}_2 + \ldots + w_n \tilde{r}_n \qquad (3.1.2)$$

其中 w_i 与 $\tilde{r}_i$（$i = 1, 2 \ldots n$）的定义与上面相同。

对于两个资产的情形，根据概率论中关于随机变量和的期望与方差的性质可得：

$$E(\tilde{r}_p)=w_1E(\tilde{r}_1)+w_2E(\tilde{r}_2) \qquad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned}Var(\tilde{r}_p)&=w_1^2Var(\tilde{r}_1)+w_2^2Var(\tilde{r}_2)+2w_1w_2Cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)\\&=w_1^2\sigma^2(\tilde{r}_1)+w_2^2\sigma^2(\tilde{r}_2)+2w_1w_2\sigma(\tilde{r}_1)\sigma(\tilde{r}_2)\rho(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)\end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

当 $\rho(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=1$时，$\sigma(\tilde{r}_p)=w_1\sigma(\tilde{r}_1)+w_2\sigma(\tilde{r}_2)$，与（2.1.3）结合得$\sigma(\tilde{r}_p)$与$E(\tilde{r}_p)$线性相关：

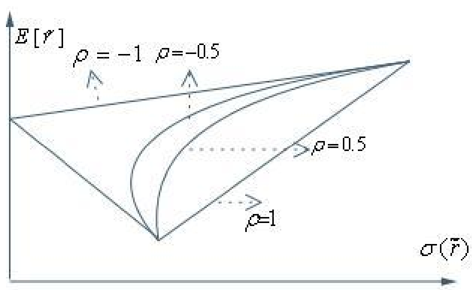
$$E(\tilde{r}_p)=\frac{E(\tilde{r}_1)}{\sigma(\tilde{r}_1)}\sigma(\tilde{r}_p)+w_2[E(\tilde{r}_2)\sigma(\tilde{r}_1)-\sigma(\tilde{r}_2)E(\tilde{r}_1)]$$

即风险$\sigma(\tilde{r}_p)$伴随着收益$E(\tilde{r}_p)$的变化而线性地变化；

当 $\rho(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)=-1$时，$\sigma(\tilde{r}_p)=w_1\sigma(\tilde{r}_1)-w_2\sigma(\tilde{r}_2)$，同理可知$\sigma(\tilde{r}_p)$与$E(\tilde{r}_p)$线性相关：

$$E(\tilde{r}_p)=\frac{E(\tilde{r}_1)}{\sigma(\tilde{r}_1)}\sigma(\tilde{r}_p)+w_2[E(\tilde{r}_2)\sigma(\tilde{r}_1)+\sigma(\tilde{r}_2)E(\tilde{r}_1)]$$

当 $\rho(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2)\neq\pm1$时，（2.1.4）式不能化简成上述线性形式，但是容易知道它们服从一个双曲方程，即可以用下面的图来表示：



图（3.1.1）

从上图我们可以看出，当两个资产不是完全正线性相关时，通过调整在二者的投资权重，可以得到不同的收益率，并且风险要比原先资产的风险要小。这就是资产组合的效果，组合的资产可以互相抵消一些相反变动的风险，从而起到降低风险的目的。当含有多个风险资产时，我们可以做同样的事情，这就是后面几节的主要内容。

3.2 不存在无风险资产条件下的资产组合理论

3.2.1 期望-方差准则

本节介绍期望方差准则下的资产组合理论，这是由 Markowitz 在 1952 年发展起来的。关于期望方差准则的来源，可以解释为期望方差是随机变量最重要的两个数值特征，并且分别表示资产收益率的平均收益和波动风险，因此用均值和方差来表示平均收益和风险是非常自然的想法。但是我们可以从更一般的期望效用准则得到期望方差准则的合理性。

在第二章我们介绍了 Von Neumann-Morgenstern 期望效用理论，它给出了投资者选择投资资产的一般准则，即投资者选择资产以使得自己下一期的期望效用最大化。当在某些特殊条件下时，期望效用准则与期望方差准则是一致的。

当个体的效用函数为**二次效用**时，期望效用准则等价于期望方差准则，因为：

$$u(\tilde{W})=\tilde{W}-\frac{b}{2}\tilde{W}^2,$$

其中 $\tilde{W}=W_0(1+\tilde{r})$ 为个体财富，W_0 为期初财富，$\tilde{r}$ 为投资收益率。则：

$$\begin{aligned}E[u(\tilde{W})]&=E(\tilde{W})-\frac{b}{2}E(\tilde{W}^2)=E(\tilde{W})-\frac{b}{2}[E(\tilde{W})^2+Var(\tilde{W})]\\&=W_0[1+E(\tilde{r})]-\frac{b}{2}W_0^2\{[1+E(\tilde{r})]^2+Var(\tilde{r})\}\end{aligned}$$

从上述表达式可以看出个体的期望效用完全由财富或投资收益的期望和方差决定，并且当固定期望收益率 $E(\tilde{r})$ 时，收益率的方差 $Var(\tilde{r})$ 越小，期望效用就越大；当固定方差 $Var(\tilde{r})$ 时，适当的选取参数 b 可知期望收益率 $E(\tilde{r})$ 越大，期望效用就越大。所以此时期望方差准则与期望效用准则是一致的。

当资产的**收益率 $\tilde{r}$ 服从正态分布**时，我们知道 $\tilde{r}$ 的任意阶矩都由其一、二阶矩决定，从而期望效用函数也可以用一、二阶矩表示。将 $u(\tilde{W})$ 在 $E(\tilde{W})$ 点 Taylor 展开得到：

$$u(\tilde{W})=u(E[\tilde{W}])+u'(E[\tilde{W}])(\tilde{W}-E[\tilde{W}])+\frac{u''(E[\tilde{W}])}{2}(\tilde{W}-E[\tilde{W}])^2+R_3$$

其中 $R_3=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{W}])(\tilde{W}-E[\tilde{W}])^n$ 为余项。从而期望效用为：

$$E[u(\tilde{W})]=u(E[\tilde{W}])+\frac{u''(E[\tilde{W}])}{2}Var[\tilde{W}]+E[R_3]$$

而其中 $E[R_3]=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}(E[\tilde{W}])E[(\tilde{W}-E[\tilde{W}])^n]=f(E[\tilde{W}],Var[\tilde{W}])$，从而此时期望效用也完全由资产收益率的均值方差所决定。

一般的，若 $\tilde{r}$ 不是正态变量时，残差的期望 $E[R_3]$ 不一定由一、二所决定，但是从 $E[(\tilde{W}-E[\tilde{W}])]=W_0^nE[(\tilde{r}-E(\tilde{r}))^n]$ 可知，当资产收益率 $\tilde{r}$ 相对于期望收益率偏差较小时，我们可以忽略残差 $E[R_3]$，此时我们有：

$$E[u(\tilde{W})]\approx u(E[\tilde{W}])+\frac{u''(E[\tilde{W}])}{2}Var[\tilde{W}]$$

并且当我们假设投资个体为严格风险厌恶个体时，$u''(W) < 0$。从而当固定期望收益率 $E(\tilde{r})$ 时，收益率的方差 $Var(\tilde{r})$ 越小，期望效用就越大；当固定方差 $Var(\tilde{r})$ 时，期望收益率 $E(\tilde{r})$ 越大，期望效用就越大。所以此时期望方差准则与期望效用准则也是一致的。

3.2.2 数学准备

为了后面在介绍资产组合理论时读者对于数学推导不至于有障碍，此处将本节与后面一节需要用到数学知识做出一一的罗列，我们并不给出一一的证明。更加具体的内容读者可以参考相关的数学专业书籍，本章中只要知道如何应用便可以了。

随机向量线性组合的期望方差：

设有随机向量 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，常数向量 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$，且记 x 的收益率向量与协方差矩阵为：

$$e = E(x) = (E(x_1), E(x_2), ..., E(x_n))^T$$

$$\Sigma = Var(x) = \left(Cov(x_i, x_j)\right)_{n\times n}$$

则对于 x 的任意线性组合 $h = x^T x$，其期望方差分别为：

$$E(h) = x^T e = \sum_{i=1}^{n} x_i E(x_i)$$

$$Var(h) = x^T \Sigma x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i Cov(x_i, x_j) x_j$$

二次型与线性函数的梯度：

后面在求解最优资产组合时，我们需要对二次型 $x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$ 与线性组合 $x^T B = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$ 关于每个 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ 求梯度，为了推导时形式上的简洁与方便，我们将上述两个函数的梯度写成下述矩阵相乘的形式，其验证是非常简单的事情。

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = \nabla x^T A x = Ax$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T B = \nabla x^T B = B$$

带约束条件非线性规划、凸规划与二次规划问题

在数学分析中我们已经知道对于最优化问题局部最优解存在性的必要条件是目标函数的梯度为零，必要条件则需要加上对于 Hessian 矩阵的要求。当存在等式约束条件时的最优化问题我们可以用 Lagrange 乘子法解决，即：

1)、对于以下标准的带约束条件的优化问题 Problem 1 局部最优解 x^* 的存在性与不带约束最优化问题 Problem 2 局部最优解 x^* 的存在性等价，并且若最优解存在则相等。

$$\text{Problem 1:}\begin{cases} \min\ f_0(x) \\ s.t.\quad h_i(x)=0,\quad i=1,\dots,p \end{cases}$$

$$\text{Problem 2:}\begin{cases} \min L(x,l)=f_0(x)+\sum_{i=1}^{p} l_i h_i(x) \\ \text{其中 } l_i \text{ 称为Lagrange乘子} \end{cases}$$

从而 Problem 1 可以通过 Problem 2 来求解。

2)、对于以下标准的带约束条件的优化问题：

$$\begin{cases} \min\ f_0(x) \\ s.t.\quad f_i(x)\le 0,\quad i=1,\dots,m \\ \qquad h_i(x)=0,\quad i=1,\dots,p \end{cases}$$

局部最优解 x^* 满足的一阶必要条件（Kuhn-Tucker 条件）：

$$\begin{cases} 1).\ \nabla f_0(x)+\sum_{i=1}^{m} l_i\nabla f_i(x)+\sum_{i=1}^{p} n_i\nabla h_i(x)=0 \\ 2).\quad f_i(x)\le 0,\qquad i=1,\dots,m \\ \qquad l_i\ge 0,\qquad i=1,\dots,m \\ \qquad l_i\cdot f_i(x)=0,\quad i=1,\dots,m \\ 3).\quad h_i(x)=0,\qquad i=1,\dots,p \end{cases}$$

3)、当目标函数 $f_0(x)$ 为凸函数时，由上面的 Lagrange 乘子法和 Kuhn-Tucker 条件得到的局部最优解就是全局最优解，即该局部的最小值点也是整个凸可行域中的最小值点。

特别的，当目标函数 $f_0(x)$ 为二次型 $x^T Ax$ 时（其中矩阵 A 非负定），局部最优解如果存在则必定就是全局最优解。这种目标函数为二次型的最优化问题称作二次规划问题。

3.2.3 资产组合理论的假设条件

本节给出 Markowitz 资产组合理论的假设条件。

假设 1 市场上有 n 中资产风险资产，它们的分布已知（或者可以根据某些相关信息估计出来），并且它们的均值方差存在，均值不全相等，协方差矩阵非奇异。

假设 2 市场上资产的交易不存在摩擦，即不存在任何形式的交易成本，包括交易费用与市场流动性风险造成的交易成本。并且我们假设市场上允许对资产进行卖空，即允许资产投资权重为负数。另外假设可以买入或卖出任意小份额的资产。

假设 3 市场交易个体按照期望方差准则进行投资，即其期望效用函数完全或近似地用资产收益率的均值方差表示。并且假设投资个体行为遵循二阶随机占优，即在期望收益率相同的情况下偏好风险小的资产（组合），在风险相同的情况下偏好期望收益率大的资产（组合）。

上述假设 1 中存在均值不同的收益率使得可以通过组合资产以达到不同的期望收益率。而协方差矩阵非奇异保证了不能通过资产的组合完全消除资产收益率的风险。因为且方差矩阵奇异当且仅当这 n 个风险资产是线性相关的，从而可以通过适当选择权重使得组合的方差为零。假设 2 中市场无摩擦与资产无限课分割保证可以不花交易成本的配置任何资产。卖空资产的可行性使得个体可以更随意的调整投资权重以实现更大范围的期望收益率与更小的风险。假设 3 中的期望方差准则与二阶随机占优原则使得我们可以通过固定期望收益率通过调整投资权重以减小风险从而达到最优投资策略。

当然上述假设条件都可以推广到更加一般的情形，例如对于协方差矩阵奇异时的处理，存在交易成本与卖空限制是的最优资产组合方法，用 VaR、C-VaR 等其他风险度量方法为准则时的资产组合方法。本章中我们将简要介绍 VaR、C-VaR 风险度量下的资产组合理论，对于更加深入的讨论与其他的推广请读者参看后续相关课程的内容。

3.2.4 资产组合前沿边界的推导

下面我们正式进入最优资产组合的推导过程。从上一小节的假设条件我们知道，投资者在选择投资时的准则是期望方差准则，即投资者根据资产收益率的一、二阶矩决定是否投资该资产以及投资多少。并且由于对投资者二阶随机占优的假设，当给定期望收益率时，投资者偏好与风险最小的资产（组合）。因此我们可以将求解最优资产组合的问题等价描述为求解如下二次规划问题：

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} Var\{w^T \vec{r}\} = \frac{1}{2} w^T V w \\ s.t. \quad w^T e = E[\tilde{r}_p] \\ \qquad w^T 1 = 1 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中，$\vec{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n)^T$ 为基础资产收益率向量；

$e = E(\vec{r}) = (E(\tilde{r}_1), E(\tilde{r}_2), ..., E(\tilde{r}_n))^T$ 为基础资产的期望收益率，且假设 $e \neq 1$；

$V = (Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j))_{n \times n}$ 为基础资产收益率向量的协方差矩阵，假设它为正定的；

$w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ 为资产组合在各个基础资产上的配置权重向量；

$1 = (1,1,...,1)^T$ 为 n 维向量；

从而，$\{w^T \vec{r}: \ \forall w \in \mathbb{R}^n\}$ 就是所有可行的资产组合。

需要注意的是，上述（2.2.1）规划问题的约束条件中，只是要求 w 是一个权重向量，即各个坐标分量之和为 1，并没有规定为非负数。也就是说我们是允许某些资产的配置权重为负数的，即市场上可以卖空该种资产。由此也可以看出，只要我们大量卖空收益率低的资产，并用所得买入收益率高的资产，总可以使资产组合的收益率任意大，但是与此伴随的将是放大了的风险，这就是资产组合的效果，也是资产组合理论的研究的基础。另外需要注意的是我们在目标函数 $\frac{1}{2} w^T V w$ 中加入了 $\frac{1}{2}$，这只是为了下面求解书写的方便，并不影响最优解的位置。

对于（3.2.1）规划问题的求解，我们可以用 Lagrange 乘子法来解决：

Lagrange 函数为：

$$L(w, l, g) = \tfrac{1}{2} w^T V w + l(E[\tilde{r}_p] - w^T e) + g(1 - w^T 1) \qquad (3.2.2)$$

其中 l, g 就是对应约束条件的 Lagrange 乘子。

一阶条件为：

$$\tfrac{\partial L}{\partial w} = V w_p - l e - g 1 = 0 \qquad (3.2.2a)$$

$$\tfrac{\partial L}{\partial l} = E[\tilde{r}_p] - w_p^T e = 0 \qquad (3.2.2b)$$

$$\tfrac{\partial L}{\partial g} = 1 - w_p^T 1 = 0 \qquad (3.2.2c)$$

由于我们的规划问题是二次规划问题，因此一阶条件所对应的解 w_p 就是全局最优解。

由于协方差矩阵 V 正定，故在（3.2.2a）中可解得：

$$w_p = l \cdot V^{-1} e + g \cdot V^{-1} 1$$

将其分别代入（3.2.2b）和（3.2.2c）可以解得 Lagrange 乘子分别如下：

$$l = \frac{C E[\tilde{r}_p] - A}{D}$$

$$g = \frac{B - A E[\tilde{r}_p]}{D}$$

其中各参数定义如下：

$$A = 1^T V^{-1} e = e^T V^{-1} 1$$

$$B = e^T V^{-1} e$$

$$C = 1^T V^{-1} 1$$

$$D = C \cdot (e - \tfrac{A}{C} 1)^T V^{-1} (e - \tfrac{A}{C} 1) = BC - A^2$$

由于 V^{-1} 是正定矩阵，从而必定有 $B > 0$， $C > 0$ 且 $D > 0$ 。

从而，我们得到了最优解的表达式如下：

$$\begin{aligned} w_p &= l \cdot V^{-1} e + g \cdot V^{-1} 1 \\ &= \frac{C E[\tilde{r}_p] - A}{D} \cdot V^{-1} e + \frac{B - A E[\tilde{r}_p]}{D} \cdot V^{-1} 1 \\ &= \frac{1}{C} \cdot V^{-1} 1 + \left[\frac{B - A E[\tilde{r}_p]}{D} - \frac{1}{C}\right] \cdot V^{-1} 1 + \frac{C E[\tilde{r}_p] - A}{D} \cdot V^{-1} e \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{C}\cdot V^{-1}1+\frac{-A}{C}\frac{CE[\tilde{r}_p]-A}{D}\cdot V^{-1}1+\frac{CE[\tilde{r}_p]-A}{D}\cdot V^{-1}e$$

$$=\frac{1}{C}\cdot V^{-1}1+\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C}\cdot V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1)$$

$$=w_{mvp}+t_p\cdot w_* \qquad (3.2.3)$$

其中各项定义如下：

$$w_{mvp}=\frac{1}{C}V^{-1}1 \qquad (3.2.3a)$$

$$w_*=V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1) \qquad (3.2.3b)$$

$$t_p=\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C} \qquad (3.2.3c)$$

最优解收益率为：

$$\tilde{r}_p=w_p^T\cdot\vec{r}=(w_{mvp}+t_p\cdot w_*)^T\cdot\vec{r}=\tilde{r}_{mvp}+t_p\cdot\tilde{r}_* \qquad (3.2.4)$$

其中 $\tilde{r}_{mvp}=w_{mvp}^T\cdot\vec{r}$ （3.2.4a）

$$\tilde{r}_*=w_*^T\cdot\vec{r} \qquad (3.2.4b)$$

之所以对最优解做上述分解，我们可以从下面关于$\tilde{r}_{mvp}$，$\tilde{r}_*$和t_p的性质中可以看出这种分解的直观意义与重要作用。

对于组合$\tilde{r}_{mvp}$，有：

$1^T w_{mvp}=\frac{1}{C}1^TV^{-1}1=1$，从而$w_{mvp}$是一个资产组合；

$$E(\tilde{r}_{mvp})=e^Tw_{mvp}=\frac{1}{C}e^TV^{-1}1=\frac{A}{C} \qquad (3.2.5a)$$

$$Var(\tilde{r}_{mvp})=w_{mvp}^TVw_{mvp}=(\frac{1}{C}V^{-1}1)^TV(\frac{1}{C}V^{-1}1)=\frac{1}{C} \qquad (3.2.5b)$$

对于组合$\tilde{r}_*$，有：

$1^Tw_*=1^TV^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1)=0$，从而$w_*$只是一个自融资组合；

$$\begin{aligned}E(\tilde{r}_*)&=e^Tw_*=e^TV^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1)\\&=e^TV^{-1}e-\tfrac{A}{C}e^TV^{-1}1\\&=B-\frac{A}{C}A=\frac{D}{C}\end{aligned} \qquad (3.2.6a)$$

$$\begin{aligned}Var(\tilde{r}_*) &= w_*^T V w_* = (V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1))^T V(V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1)) \\ &= (e^T - \tfrac{A}{C}1^T)V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1) \\ &= e^T V^{-1} e - 2\tfrac{A}{C} e^T V^{-1} 1 + (\tfrac{A}{C})^2 1^T V^{-1} 1 \\ &= B - 2\frac{A}{C}A + (\frac{A}{C})^2 C \\ &= B - \frac{A^2}{C} = \frac{D}{C}\end{aligned} \qquad (3.2.6b)$$

对于组合 $\tilde{r}_{mvp}$ 与 $\tilde{r}_*$ 之间关系，有：

$$\begin{aligned}Cov(\tilde{r}_{mvp}, \tilde{r}_*) &= w_{mvp}^T V w_* = (\frac{1}{C}V^{-1}1)^T V(V^{-1}(e-\frac{A}{C}1)) \\ &= \frac{1}{C}1^T V^{-1}(e-\frac{A}{C}1) \\ &= \frac{1}{C}(1^T V^{-1} e - \frac{A}{C}1^T V^{-1} 1) = 0\end{aligned} \qquad (3.2.7)$$

对于任意最优资产组合 $\tilde{r}_p$，有：

$$\begin{aligned}E(\tilde{r}_p) &= E(\tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*) \\ &= E(\tilde{r}_{mvp}) + t_p \cdot E(\tilde{r}_*) = \frac{A}{C} + t_p \cdot \frac{D}{C}\end{aligned} \qquad (3.2.8a)$$

$$\begin{aligned}Var(\tilde{r}_p) &= Var(\tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*) \\ &= Var(\tilde{r}_{mvp}) + t_p^2 \cdot Var(\tilde{r}_*) \\ &= \frac{1}{C} + (\frac{E[\tilde{r}_p] - A/C}{D/C})^2 \frac{D}{C}\end{aligned} \qquad (3.2.8b)$$

从（3.2.8）式可以看出，要使得在所有最优资产组合中方差 $Var(\tilde{r}_p)$ 达到最小值，当且仅当 $t_p = 0$，即当且仅当最优资产组合为 $\tilde{r}_p = \tilde{r}_{mvp}$。从而我们得到 $\tilde{r}_{mvp}$ 为所有最优资产组合中方差最小的，并且我们知道对于每个给定的期望收益率 $E[\tilde{r}_p]$，最优资产组合又是使得方差最小的资产组合，从而我们可以知道 $\tilde{r}_{mvp}$ 不但是所有最优资产组合中方差最小的，而且是所有可行资产组合中方差最小的，因此将 $\tilde{r}_{mvp}$ 称为**最小方差资产组合**（Minimal Variance Portfolio）。

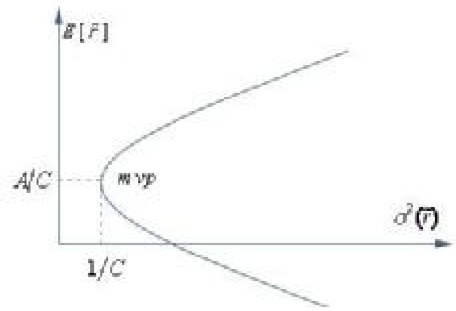
从（3.2.8）式还可以看出一个重要的结论，它给出了最优资产组合收益率的期望和方差的关系：

$$s^2(\tilde{r}_p) = \frac{1}{C} + (\frac{E[\tilde{r}_p] - A/C}{D/C})^2 \frac{D}{C} \qquad (3.2.8b')$$

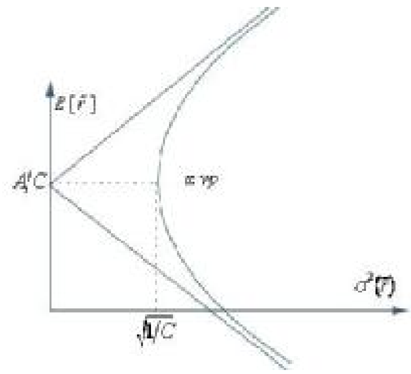
或者 $\dfrac{\sigma^2(\tilde r_p)}{1/C}-\dfrac{(E[\tilde r_p]-A/C)^2}{D/C}=1$ （3.2.8b′′）

若在 $\sigma^2(\tilde r)-E[\tilde r]$ 平面中看，（3.2.8b′）表示一条抛物线，如图（3.2.1）；

若在 $\sigma(\tilde r)-E[\tilde r]$ 平面中看，（3.2.8b′′）则表示双曲线的右半支，如图（3.2.2）。



图（3.2.1）



图（3.2.2）

我们称上图画出的抛物线和双曲线为**资产组合前沿边界**。由二次规划问题（3.2.1）结合上图可以看出，对于每给定的一个期望收益率，前沿边界上的资产组合是所有可行资产组合中方差最小的。换言之，所有的可行资产在 $\sigma^2(\tilde r)-E[\tilde r]$ 平面中都落在抛物线（3.2.8a）的右边，在 $\sigma(\tilde r)-E[\tilde r]$ 平面中都落在双曲线（3.2.8b）的右边。这也就是我们为什么称上述的两条曲线为“前沿边界”。并且，再一次我们从上面的图中看出，$\tilde r_{mvp}$ 是所有可行资产中方差最小的。

对于前沿边界，我们把期望收益率严格高于最小方差组合收益率 A/C 的那上半部分称为**有效前沿边界**，而把另外的下半部分称为**非有效前沿边界**。因为对于每给定的方差，存在两个期望收益率的前沿边界资产组合，在有效前沿边界的那个资产组合收益率要严格高于非前沿边界的那个（除了 mvp ）。

至此，我们已经说明了（3.2.4）中前沿边界资产组合分解中 $\tilde r_{mvp}$ 的含义。对于 $\tilde r_*$ 的含义，我们从上述计算中观察到，$\tilde r_*$ 是一个期望和方差相等的自融资组合，并且它和 $\tilde r_{mvp}$ 线性无关。所谓自融资组合，就是资产组合在配置时通过构建不同资产的多空头寸是的组合现期的价值为零。换言之，组合的构建是通过卖空部分资产，然后用其所得购入其他资产的，故称为自融资组合。但是要注意的是该自融资的组合并非一个“免费的午餐”，它的收益与风险并存，投资者根据自己的风险偏好来选择在该组合上的配置。

并且我们观察到，τ_p 在 mvp 处为 0，而在有效前沿上为正，在非有效前沿上为负。若我们只限定在有效前沿边界上讨论，可以看出当 $\tau_p=0$ 时，则只能得到有效前沿上最小的

收益率 A/C。此时投资者选择的是最保守的投资策略，他没有在“**风险调节组合**”$\tilde{r}_*$ 做任何配置。当投资者允许在 $\tilde{r}_*$ 做正的配置时，组合的风险随之增加，当然收益率也相应增加。因此我们可以把 t_p 当成一种**风险容忍度**。当 $t_p = 0$ 时，在可行的资产组合中投资者不容许任何更多的风险，因此投资者只能获得最小的收益率；而当 $t_p > 0$ 时，投资者允许在组合中加入“风险调节组合”$\tilde{r}_*$，相应的收益率和风险也都增加。

综上所述，对于前沿边界资产收益率的线性无关分解 $\tilde{r}_p = \tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*$，我们对其中的概念解释如下：

$\tilde{r}_{mvp}$：**最小方差资产组合**，它是前沿边界组合；

$\tilde{r}_*$： **风险调节组合**，它是一个自融资组合，期望方差相等，且与 $\tilde{r}_{mvp}$ 线性无关；

t_p： **风险容忍度**（只针对有效前沿边界），它表示组合 p 配置中对风险的容忍度。为了叙述方便，我们仍然称 $t_p < 0$ 的情形为风险容忍度。

3.2.5 前沿边界性质

前一节推导出了最优资产组合收益率的表达式，并且分别画出了 $s^2(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$ 平面和 $s(\tilde{r}) - E[\tilde{r}]$ 平面中最优资产组合所构成的前沿边界。本节我们讨论前沿资产组合的刻画和前沿资产组合之间的关系。

以下定理说明了前沿边界资产组合间的关系：

定理 3.2.1 对于资产组合前沿边界，有下列重要性质：

1)、任何资产组合 $\tilde{r}_p$ 为前沿组合当且仅当存在常数 t 使得 $\tilde{r}_p = \tilde{r}_{mvp} + t \cdot \tilde{r}_*$；

任何资产组合 $\tilde{r}_p$ 为有效前沿组合当且仅当存在常数 $t > 0$ 使得 $\tilde{r}_p = \tilde{r}_{mvp} + t \cdot \tilde{r}_*$；

2)、任意有限个前沿资产组合的仿射组合仍为前沿组合；

3)、任意有限个有效前沿资产组合的凸组合仍为有效前沿组合；

4)、前沿边界可以由任意两个前沿组合的仿射组合生成。 W.

证明： 1)、这个分解就是上述二次规划问题解的必要条件，而对于二次规划问题一阶必要条件就是最优解的充要条件。因而 1）成立。

2)、设 $\tilde{r}_{p_1}, \tilde{r}_{p_2}, ..., \tilde{r}_{p_k}$ 为 k 个前沿边界资产组合，$a_1, a_2, ..., a_k$ 为 k 个仿射组合系数，即 $a_1, a_2, ..., a_k \in$ ¡，且 $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$，则

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{w}_{p_i} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot (\vec{w}_{mvp} + t_{p_i} \vec{w}_*)$$
$$= (\sum_{i=1}^{k} a_i) \cdot \vec{w}_{mvp} + (\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot t_{p_i}) \cdot \vec{w}_* = \vec{w}_{mvp} + t_p \cdot \vec{w}_*$$

其中 $$t_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot t_{p_i}$$

从而由 1）的结论可知 $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{w}_{p_i}$ 确实是一个前沿资产组合。

3）、设 $\vec{w}_{p_1}, \vec{w}_{p_2}, ..., \vec{w}_{p_k}$ 为 k 个有效前沿边界资产组合，$a_1, a_2, ..., a_k$ 为 k 个凸组合系数，即 $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}^+$，且 $a_1 + a_2 + ... + a_k = 1$，则由 2）已知 $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{w}_{p_i}$ 是前沿组合，且由有效性可知 $t_{p_i} > 0,\ \ i = 1, ..., k$，从而：

$$t_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot t_{p_i} > \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot 0 = 0$$

即由 1）的结论可知 $\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \vec{w}_{p_i}$ 确实是一个有效前沿资产组合。

4）、不妨给定前沿资产组合 $\vec{w}_{p_1}, \vec{w}_{p_2}$，即有 $\vec{w}_{p_1} = \vec{w}_{mvp} + t_{p_1} \vec{w}_*$，　$\vec{w}_{p_2} = \vec{w}_{mvp} + t_{p_2} \vec{w}_*$，从而对于任意前沿组合 $\vec{w}_p = \vec{w}_{mvp} + t_p \vec{w}_*$ 有：

$$\vec{w}_p = \vec{w}_{mvp} + t_p \vec{w}_* = \frac{\vec{w}_{p_2} - t_{p_2} \vec{w}_{p_1}}{t_{p_1} - t_{p_2}} + t_p \frac{\vec{w}_{p_1} - \vec{w}_{p_2}}{t_{p_1} - t_{p_2}}$$
$$= \frac{t_p - t_{p_2}}{t_{p_1} - t_{p_2}} \vec{w}_{p_1} + \frac{t_{p_1} - t_p}{t_{p_1} - t_{p_2}} \vec{w}_{p_2}$$

其中 $$\frac{t_p - t_{p_2}}{t_{p_1} - t_{p_2}} + \frac{t_{p_1} - t_p}{t_{p_1} - t_{p_2}} = 1$$

从而任意前沿资产组合 $\vec{w}_p$ 是任意选定的两个前沿资产组合的仿射组合。 W.

上述定理中的 3）说明有效前沿边界是凸集。4）中的结论被称为**两基金分离定理**，该性质说明为了获得前沿边界上的任意资产组合，我们不需要拿基础资产（股票，权证等）过来直接配置，而是可以通过持有任意两个选定的前沿资产组合，或者称为基金来实现。

3.2.6 P-零协方差组合

前沿边界资产之间还有一个非常重要的性质。我们知道前沿资产收益率作为一个随机变量我们有可能在所有可行的资产组合里面找到很多个与这个前沿收益率协方差为零的组合收益率。但是当范围限定在前沿边界上时，发现除了最小方差资产组合之外的前沿资产组合都可以在前沿边界上找到一个与之协方差为零的资产组合。

对于任意前沿资产组合$\tilde{r}_p$和$\tilde{r}_q$，我们可以计算它们的协方差如下：

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q) &= Cov(\tilde{r}_{mvp}+t_p\tilde{r}_*,\tilde{r}_{mvp}+t_q\tilde{r}_*) \\ &= Var(\tilde{r}_{mvp})+t_pt_qVar(\tilde{r}_*)=\frac{1}{C}+t_pt_q\frac{D}{C} \end{aligned} \qquad (3.2.9)$$

令$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=0$，则得到$0=\frac{1}{C}+t_pt_q\frac{D}{C}$，当$t_p\neq 0$时，从中可以解出$t_q$，从而由定理 3.2.1 我们知道这样的前沿资产组合确实存在，可以用这个t_q得到。我们把此时的$\tilde{r}_q$记成$\tilde{r}_{zc(p)}$（Zero-Covariance portfolio of p）。并且关于其性质我们有如下定理：

定理 3.2.2 对于前沿资产组合$\tilde{r}_p$与其零协方差资产组合$\tilde{r}_{zc(p)}$，有如下性质：

1）、最小方差资产组合$\tilde{r}_{mvp}$与任意资产组合的协方差为$\tilde{r}_{mvp}$的方差，即：

$$Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_{mvp})=Var(\tilde{r}_{mvp}) \qquad \forall \text{可行资产}\ \tilde{r}_q$$

从而$\tilde{r}_{mvp}$不存在零协方差资产组合；

2）、$\tilde{r}_p$和$\tilde{r}_{zc(p)}$分别在不同的前沿边界上，即二者不可能同时在有效或者非有效前沿边界上。

3）、零协方差资产组合$\tilde{r}_{zc(p)}$和$\tilde{r}_p$在前沿边界上的几何位置可以通过下面方法得到：

在$\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，$\tilde{r}_{zc(p)}$是连接$p$点与$mvp$点的直线与$E[\tilde{r}]$轴交点所对应的前沿资产组合，如图（3.2.3）；

在$\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$平面中，$\tilde{r}_{zc(p)}$是通过$p$的切线与$E[\tilde{r}]$轴交点所对应的前沿资产组合，如图（3.2.4）。 W.

证明： 1）、对于任意可行资产$\tilde{r}_q$，我们有$\tilde{r}_q=w_q\cdot\vec{r}$，从而有：

$$Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_{mvp})=w_q^TVw_{mvp}=w_q^TV(\frac{1}{C}V^{-1}1)=\frac{1}{C}w_q^T1=\frac{1}{C}=Var(\tilde{r}_{mvp}), \quad \text{得证。}$$

2）、由$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_{zc(p)})=0$，以及（3.2.9）式可得：

$$\frac{1}{C}+\tau_p\tau_{zc(p)}\frac{D}{C}=0 \qquad 即 \quad \tau_p\tau_{zc(p)}=\frac{-1}{D}<0$$

从而根据定理 3.2.1 的结论我们可得 $\tilde{r}_p$ 和 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 必定分别在不同的前沿边界上。

3)、由前沿边界方程（3.2.8b）可得：

$$-\frac{D}{C^2}=(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2-\frac{D}{C}\sigma^2(\tilde{r}_p) \qquad 从而：\tau_p\tau_{zc(p)}=\frac{-1}{D} \quad \Rightarrow$$

$$(E[\tilde{r}_p]-A/C)(E[\tilde{r}_{zc(p)}]-A/C)=-\frac{D}{C^2}=(E[\tilde{r}_p]-A/C)^2-\frac{D}{C}\sigma^2(\tilde{r}_p)$$

$$\Rightarrow \quad (E[\tilde{r}_p]-A/C)^2-(E[\tilde{r}_p]-A/C)(E[\tilde{r}_{zc(p)}]-A/C)=\frac{D}{C}\sigma^2(\tilde{r}_p)$$

$$\Rightarrow \quad (E[\tilde{r}_p]-A/C)(E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}])=\frac{D}{C}\sigma^2(\tilde{r}_p) \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}&=\frac{D/C}{E[\tilde{r}_p]-A/C}=\frac{1}{\tau_p}=-D\tau_{zc(p)}\\&=-D\frac{E[\tilde{r}_{zc(p)}]-A/C}{D/C}=\frac{A/C-E[\tilde{r}_{zc(p)}]}{1/C}\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

即 $zc(p)$ 在可以 $\sigma^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中可用上述方法求解。

另外，（3.2.10）式 $\Rightarrow$

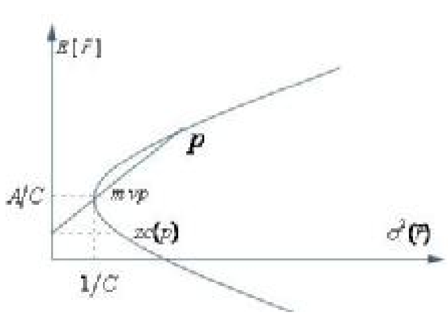
$$\frac{E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]}{\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{D/C\,\sigma(\tilde{r}_p)}{E[\tilde{r}_p]-A/C}$$

而由（3.2.8b）的 $\sigma^2(\tilde{r}_p)=\dfrac{1}{C}+(\dfrac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C})^2\dfrac{D}{C}$

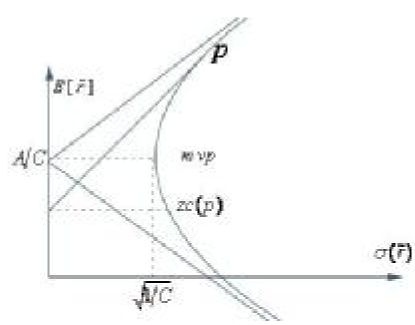
$$\Rightarrow 2D/C\,\sigma(\tilde{r}_p)d\sigma(\tilde{r}_p)=2(E[\tilde{r}_p]-A/C)dE[\tilde{r}_p] \quad \Rightarrow \quad \frac{D/C\,\sigma(\tilde{r}_p)}{E[\tilde{r}_p]-A/C}=\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)}$$

从而：$$\frac{E[\tilde{r}_p]-E[\tilde{r}_{zc(p)}]}{\sigma(\tilde{r}_p)}=\frac{D/C\,\sigma(\tilde{r}_p)}{E[\tilde{r}_p]-A/C}=\frac{dE[\tilde{r}_p]}{d\sigma(\tilde{r}_p)} \tag{3.2.12}$$

即 $zc(p)$ 在可以 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中可用上述方法求解。 W.



图（3.2.3）



图（3.2.4）

3.2.7 前沿资产与可行资产关系

任意的可行资产 $\tilde{r}_q$ 与前沿资产之间存在着密切的关系，并且我们可以将任意可行资产分解成不相关的“前沿部分”和“个体部分”，即有如下定理成立。

定理 3.2.3 对于前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 与任意可行资产组合 $\tilde{r}_q$，有如下性质：

1）、 $Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_{mvp})=Var(\tilde{r}_{mvp})$ $\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$

2）、$Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_*)=E(\tilde{r}_q)-A/C$ $\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$

3）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，可做如下不相关分解：

$$\tilde{r}_q=\tilde{r}_{mvp}+t_q\cdot\tilde{r}_*+\tilde{\varepsilon}_q \tag{3.2.13}$$

其中 $t_q=\dfrac{E(\tilde{r}_q)-A/C}{D/C}$， $Cov(\tilde{r}_{mvp},\tilde{\varepsilon}_q)=0$， $Cov(\tilde{r}_*,\tilde{\varepsilon}_q)=0$

4）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$， $\forall$ 前沿资产 $\tilde{r}_p$，其期望收益率有如下重要关系：

$$E(\tilde{r}_q)=b_{pq}E(\tilde{r}_p)+(1-b_{pq})E(\tilde{r}_{zc(p)}) \tag{3.2.14}$$

或： $$E(\tilde{r}_q)-E(\tilde{r}_{zc(p)})=b_{pq}(E(\tilde{r}_p)-E(\tilde{r}_{zc(p)})) \tag{3.2.14'}$$

其中 $b_{pq}=\dfrac{Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{Var(\tilde{r}_p)}$ 称为 $\tilde{r}_q$ 关于 $\tilde{r}_p$ 的 b 系数。 W.

证明： 1）、这是定理 3.2.2 的结论；

2）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，都有 $Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_*)=w_qVw_*$

$$\begin{aligned}&=w_qV\cdot V^{-1}(e-\tfrac{A}{C}1)\\&=w_q\cdot e-\tfrac{A}{C}w_q\cdot 1=E(\tilde{r}_q)-A/C\end{aligned}$$

3）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，令 $\tilde{\varepsilon}_q=\tilde{r}_q-(\tilde{r}_{mvp}+t_q\cdot\tilde{r}_*)$

则： $$\begin{aligned}Cov(\tilde{\varepsilon}_q,\tilde{r}_{mvp})&=Cov(\tilde{r}_q-\tilde{r}_{mvp}-t_q\cdot\tilde{r}_*,\tilde{r}_{mvp})\\&=Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_{mvp})-Cov(\tilde{r}_{mvp},\tilde{r}_{mvp})-t_q\cdot Cov(\tilde{r}_{mvp},\tilde{r}_*)\\&=Var(\tilde{r}_{mvp})-Var(\tilde{r}_{mvp})=0\end{aligned}$$

$$Cov(\tilde{\varepsilon}_q,\tilde{r}_*)=Cov(\tilde{r}_q-\tilde{r}_{mvp}-t_q\cdot\tilde{r}_*,\tilde{r}_*)$$

$$= Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_*) - Cov(\tilde{r}_{mvp},\tilde{r}_*) - \tau_q \cdot Cov(\tilde{r}_*,\tilde{r}_*)$$

$$= E(\tilde{r}_q) - A/C - 0 - \frac{E[\tilde{r}_q]-A/C}{D/C}\cdot\frac{D}{C} = 0$$

4)、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，由于分解 $\tilde{r}_q = \tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_* + \tilde{\varepsilon}_q$，我们可得 $\forall$ 前沿资产 $\tilde{r}_p$，有：

$$Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p) = Cov(\tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_* + \tilde{\varepsilon}_q, \tilde{r}_{mvp} + \tau_p \cdot \tilde{r}_*) = Var(\tilde{r}_{mvp}) + \tau_q \tau_p Var(\tilde{r}_*)$$

$$= 1/C + \tau_q \cdot \frac{-1}{D\cdot \tau_{zc(p)}}\frac{D}{C} = \frac{1}{C} + \frac{E(\tilde{r}_q)-A/C}{D/C}\cdot\frac{1}{\tau_{zc(p)}}\frac{-1}{C} \qquad \Rightarrow$$

$$E(\tilde{r}_q) = D/C\,\tau_{zc(p)} - C\,D/C\,\tau_{zc(p)} Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p) + A/C$$

$$= (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C) - C(E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)Var(\tilde{r}_p)\frac{Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)}{Var(\tilde{r}_p)} + A/C$$

$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)CVar(\tilde{r}_p)\beta_{pq}$$

$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)C(\frac{1}{C} + (\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C})^2\frac{D}{C})\beta_{pq} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)(1 + (\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C})^2 D)\beta_{pq}$$

$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)\beta_{pq} - D(\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C})^2(E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)\beta_{pq}$$

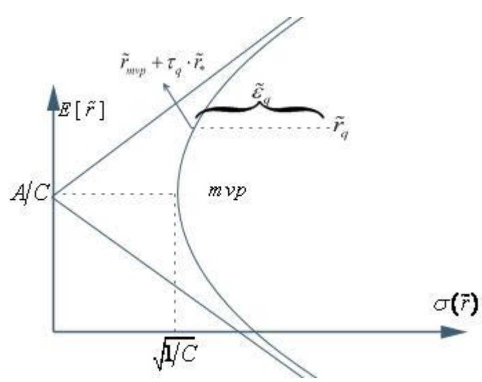
$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)\beta_{pq} - D\tau_p\tau_{zc(p)}(E[\tilde{r}_p] - A/C)\beta_{pq}$$

$$= E(\tilde{r}_{zc(p)}) - (E(\tilde{r}_{zc(p)}) - A/C)\beta_{pq} + (E[\tilde{r}_p] - A/C)\beta_{pq} \qquad \cdots\cdots\cdots(**)$$

$$= E[\tilde{r}_p]\beta_{pq} + (1-\beta_{pq})E(\tilde{r}_{zc(p)})$$

其中（*）式是代入的前沿方程：$Var(\tilde{r}_p) = \frac{1}{C} + (\frac{E[\tilde{r}_p]-A/C}{D/C})^2\frac{D}{C}$

（**）式是代入了零协方差的条件：$\tau_p\tau_{zc(p)} = \frac{-1}{D}$ W.



图（3.2.5）

上述定理给出了任意可行资产组合与前沿边界资产组合的关系。其中 3）的含义可以用图（3.2.5）来形象地解释：对于任意非前沿的可行资产组合 $\tilde{r}_q$，它可以分解成不相关的两部分：$\tilde{r}_{mvp}+t_q\cdot\tilde{r}$ 为与 $\tilde{r}_q$ 期望相同，但是方差最小的资产组合，它是前沿边界资产组合。而 $\tilde{e}_q$ 是一个与 $\tilde{r}_{mvp}+t_q\cdot\tilde{r}$ 不相关的资产组合，它体现了额外的风险，但是对于这种风险的增加，并没有对期望收益率有任何贡献。而 4）中结论就是著名的“零 $-b$ 资本资产定价模型”，它表示任意非前沿资产组合 $\tilde{r}_q$ 的期望收益率与任意给定的前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 的期望收益率之间的关系。其中 b 系数 $b_{pq}=Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)/Var(\tilde{r}_p)$ 表示了相对与前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 的风险 $Var(\tilde{r}_p)$ 而言 $\tilde{r}_q$ 的风险。但是我们从 3）的结论知道 $\tilde{e}_q$ 与 $\tilde{r}_{mvp}$ 和 $\tilde{r}$ 不相关，从而与任意前沿资产组合不相关，所以额外增加的风险 $\tilde{e}_q$ 并没有获得期望收益率的增加，这也是符合 3）中图像的分析的。

3.2.8 q-零协方差组合

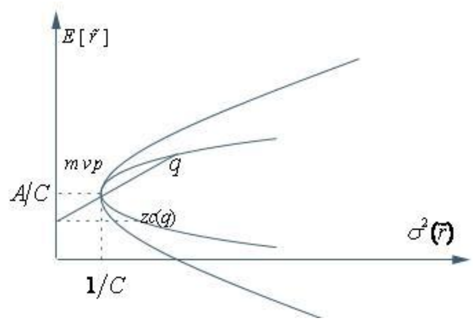
回顾定理 3.2.2 中我们给出了前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 的零协方差组合，并且在 $s^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面和 $s(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中指出了如何找到这样的零协方差前沿资产组合。事实上，与前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 零协方差的资产组合远不止这一个 $\tilde{r}_{zc(p)}$，我们有无穷多个可行资产组合可以与 $\tilde{r}_p$ 零协方差：在图（3.2.3）和图（3.2.4）中 $zc(p)$ 点右边水平对应的那些可行资产都是有这种形式的资产组合：$\tilde{r}_q=\tilde{r}_{zc(p)}+\tilde{e}_q$。而 $\tilde{e}_q$ 是与前沿边界都不相关的一个个体风险。从而所有的这些 $\tilde{r}_q$ 都与 $\tilde{r}_p$ 零协方差，但是我们知道 $\tilde{r}_{zc(p)}$ 是所有这些可行资产组合中方差最小的。基于这一点观察，对于非前沿的可行资产组合 $\tilde{r}_q$，我们也可以试图找到与它零协方差的最小方差资产组合。事实上，这是能够做到的，并且也可以在 $s^2(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中用几何方法找到。

在正式介绍结论之前，先介绍下面的一个引理。这个引理告诉我们有两个收益率 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$ 生成的前沿边界与 $\tilde{r}_1$、$\tilde{r}_2$ 本身的关系。我们知道前沿边界上的资产组合都是基础资产 $\vec{r}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,...,\tilde{r}_n)^T$ 的线性组合，但是基础资产 $\tilde{r}_i$ 本身却不一定在前沿边界上。但是这件事情

在只有两个基础资产 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$ 的条件下是可以做到的。当然，对于 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$ 我们不必限定在原先所说的“基础资产”，而是可以任意的两个资产组合，即可以是 $\mathbf{\tilde{r}}=(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,...,\tilde{r}_n)^T$ 的组合。

引理 3.2.4 对于任意均值不等的两个资产组合 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$，即 $E(\tilde{r}_1)\neq E(\tilde{r}_2)$，则他们都处在由自己生成的前沿边界上. W.

证明：设 $\tilde{r}_q$ 是 $\tilde{r}_1$ 和 $\tilde{r}_2$ 线性组合得到的任意资产收益率，即 $\tilde{r}_q=\alpha\tilde{r}_1+(1-\alpha)\tilde{r}_2$，对于给定的资产收益率 $E(\tilde{r}_1)$，要使得 $E(\tilde{r}_q)=\alpha E(\tilde{r}_1)+(1-\alpha)E(\tilde{r}_2)=E(\tilde{r}_1)$，当且仅当 $\alpha=1$，即当且仅当 $\tilde{r}_q=\tilde{r}_1$，从而要达到与 $\tilde{r}_1$ 同期望的收益率当且仅当为 $\tilde{r}_1$ 本身，即 $\tilde{r}_1$ 也在前沿边界上。同理 $\tilde{r}_2$ 也在前沿边界上。 W.



图（3.2.6）

定理 3.2.5 对于任意可行资产组合 $\tilde{r}_q$，都存在一个可行资产组合 $\tilde{r}_{zc(q)}$，满足：

1）、$\tilde{r}_{zc(q)}=\arg\min\limits_{\{\tilde{r}_u|Cov(\tilde{r}_u,\tilde{r}_q)=0\}}Var(\tilde{r}_u)$，即 $\tilde{r}_{zc(q)}$ 是所有与 $\tilde{r}_q$ 零协方差的可行组合中方差最小的资产组合；

2）、$\tilde{r}_{zc(q)}=\dfrac{1/C}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_q)}\tilde{r}_q+\dfrac{-\sigma^2(\tilde{r}_q)}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_q)}\tilde{r}_{mvp}$，且当 $E(\tilde{r}_q)\neq E(\tilde{r}_{mvp})$ 时，$\tilde{r}_{zc(q)}$ 落在 $\tilde{r}_q$ 与 $\tilde{r}_{mvp}$ 生成的前沿边界上，并且可用图（3.2.6）的方式从图中找到 $\tilde{r}_{zc(q)}$。 W.

证明：求解最有问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{\{w_u\}}\frac{1}{2}Var\{w_u^T\mathbf{\tilde{r}}\}=\frac{1}{2}w_u^TVw_u\\ s.t.\quad w_u^TVw_q=0\\ \qquad\ w_u^T1=1\end{cases}$$

用 Lagrange 乘子法可以解得最优解为：$\tilde{r}_{zc(q)}=\dfrac{1/C}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_q)}\tilde{r}_q+\dfrac{-\sigma^2(\tilde{r}_q)}{1/C-\sigma^2(\tilde{r}_q)}\tilde{r}_{mvp}$.

从该解的表达式可以看出，$\tilde{r}_{zc(q)}$ 是 $\tilde{r}_q$ 与 $\tilde{r}_{mvp}$ 的仿射组合，并且由于 $1/C-\sigma^2(\tilde{r}_q)<0$，所以 $\tilde{r}_{zc(q)}$ 是卖空 $\tilde{r}_q$，买入 $\tilde{r}_{mvp}$ 得到的组合。并且由于当 $E(\tilde{r}_q)\neq E(\tilde{r}_{mvp})$ 时，由引理 2.2.4 可知 $\tilde{r}_q$ 与 $\tilde{r}_{mvp}$ 可以生成前沿边界，且他们自身也在前沿边界上。所以 $\tilde{r}_{zc(q)}$ 是连接 q 点与 mvp 点的直线与 $E[\tilde{r}]$ 轴交点在 $\tilde{r}_q-\tilde{r}_{mvp}$ 前沿边界对应的资产组合。 W.

3.3 存在无风险资产条件下的资产组合理论

前一节中我们具体讨论了当不考虑无风险资产时的最优资产组合问题与前沿边界，本节我们在基础资产中加入无风险资产，然后考虑这种条件下的最优资产组合问题与前沿边界。

3.3.1 资产组合前沿边界的推导

此时资产组合前沿边界问题就是求解如下二次规划问题：

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}Var\{\hat{w}^T\hat{r}\}=\frac{1}{2}w^TVw \\ s.t.\quad \hat{w}^T\hat{e}=w_0r_f+w^Te=E[\tilde{r}_p] \\ \qquad \hat{w}^T\hat{1}=w_0+w^T1=1 \end{cases} \tag{3.3.1}$$

其中，$\hat{r}=(r_f,\vec{r}^T)^T$ 为基础资产收益率向量，其中 $\vec{r}$ 为风险资产收益率；

$\hat{e}=E(\hat{r})=(r_f,e^T)^T$ 为基础资产期望收益率，其中 e 为风险资产期望收益率；

$\hat{V}=\begin{pmatrix}0&0\\0&V\end{pmatrix}$，假设 $V=Var(\vec{r})$ 为正定的；

$\hat{w}=(w_0,w^T)^T$ 为资产组合的配置权重向量，w 为在风险资产上的配置权重；

$\hat{1}=(1,1^T)^T$ 为 $n+1$ 维向量，1 是对应的 n 维向量；

从而，$\{\hat{w}^T\hat{r}:\ \forall\hat{w}\in\mathbb{R}^{n+1}\}$ 就是所有可行的资产组合。

用 Lagrange 乘子法求解该二次规划问题，Lagrange 函数为：

$$L(w,\lambda,\gamma)=\frac{1}{2}w^TVw+\lambda(E[\tilde{r}_p]-w_0r_f-w^Te)+\gamma(1-w_0-w^T1) \tag{3.3.2}$$

其中 λ,γ 就是对应约束条件的 Lagrange 乘子。

一阶条件：$\frac{\partial L}{\partial w}=Vw-\lambda e-\gamma 1=0$ （3.3.2a）

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = -\lambda r_f - \gamma 1 = 0 \tag{3.3.2b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E[\tilde{r}_p] - w_0 r_f - w^T e = 0 \tag{3.3.2c}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w_0 - w^T 1 = 0 \tag{3.3.2d}$$

同样，由于这是二次规划问题，从而上面的一阶条件就是问题的充要条件。
从（3.3.2a）~（3.3.2d）中可解得：

$$w_p = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} 1$$

$$w_0 = 1 - w_p^T 1$$

$$\lambda = \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}$$

$$\gamma = -r_f \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}$$

其中 $H = (e - r_f 1)^T V^{-1} (e - r_f 1) = B - 2 r_f A + r_f^2 C > 0$， A, B, C 如前定义。

代入 λ, γ ，解得：

$$\begin{aligned} w_p &= \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-1} 1 \\ &= \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} V^{-1} e - r_f \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} V^{-1} 1 \\ &= \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} V^{-1} (e - r_f 1) \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

从而可以得到最优解的表达式如下：

$$\begin{aligned} \hat{w}_p &= (1 - w_p^T 1, w_p^T)^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} C(\frac{A}{C} - r_f) \\ \dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} V^{-1}(e - r_f 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H} \begin{pmatrix} -C(\frac{A}{C} - r_f) \\ V^{-1}(e - r_f 1) \end{pmatrix} \\ &= \hat{w}_{mvp} + \tau_p \cdot \hat{w}_* \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

其中各项定义如下：

$$\hat{w}_{mvp} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}， \text{其中 } \vec{0} \text{ 为 } n \text{ 维零向量；} \tag{3.3.4a}$$

$$\hat{w}_* = \begin{pmatrix} -C(\frac{A}{C} - r_f) \\ V^{-1}(e - r_f 1) \end{pmatrix} \tag{3.3.4b}$$

$$t_p = \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}$$ （3.3.4c）

最优解收益率：

$$\tilde{r}_p = \tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*$$ （3.3.5）

其中 $$\tilde{r}_{mvp} = \hat{w}_{mvp}^T \cdot \hat{r}$$ （3.3.5a）

$$\tilde{r}_* = \hat{w}_*^T \cdot \hat{r}$$ （3.3.5b）

与 3.2 节中不存在无风险资产条件下资产组合的分解一样，此时分解中的 $\tilde{r}_{mvp}$，$\tilde{r}_*$ 和 t_p 与前一节的内容有几乎一样的性质。

对于组合 $\tilde{r}_{mvp}$，有：

$\hat{1}^T \hat{w}_{mvp} = 1$，从而 $\hat{w}_{mvp}$ 是一个资产组合；

$$E(\tilde{r}_{mvp}) = \hat{e}^T \hat{w}_{mvp} = r_f$$ （3.3.6a）

$$Var(\tilde{r}_{mvp}) = \hat{w}_{mvp}^T \hat{V} \hat{w}_{mvp} = 0$$ （3.3.6b）

对于组合 $\tilde{r}_*$，有：

$\hat{1}^T \hat{w}_* = -C(\frac{A}{C} - r_f) + 1^T V^{-1}(e - r_f 1) = 0$，从而 $\hat{w}_*$ 只是一个自融资组合；

$$\begin{aligned} E(\tilde{r}_*) &= \hat{e}^T \hat{w}_* = -C(\tfrac{A}{C} - r_f) r_f + e^T V^{-1}(e - r_f 1) \\ &= B - 2 r_f A + r_f^2 C = H \end{aligned}$$ （3.3.7a）

$$Var(\tilde{r}_*) = \hat{w}_*^T \hat{V} \hat{w}_* = (V^{-1}(e - r_f 1))^T V (V^{-1}(e - r_f 1)) = H$$ （3.3.7b）

对于组合 $\tilde{r}_{mvp}$ 与 $\tilde{r}_*$ 之间关系，有：

$Cov(\tilde{r}_{mvp}, \tilde{r}_*) = 0$，因为 $\tilde{r}_{mvp}$ 就是无风险资产. （3.3.8）

对于任意最优资产组合 $\tilde{r}_p$，有：

$$\begin{aligned} E(\tilde{r}_p) &= E(\tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*) \\ &= E(\tilde{r}_{mvp}) + t_p \cdot E(\tilde{r}_*) = r_f + t_p \cdot H \end{aligned}$$ （3.3.9a）

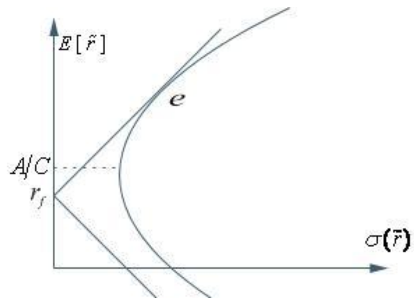
$$\begin{aligned} Var(\tilde{r}_p) &= Var(\tilde{r}_{mvp} + t_p \cdot \tilde{r}_*) \\ &= Var(\tilde{r}_{mvp}) + t_p^2 \cdot Var(\tilde{r}_*) = (\frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H})^2 H \end{aligned}$$ （3.3.9b）

显而易见，$\tilde{r}_{mvp}$ 就是存在无风险资产时的**最小方差资产组合**。

从（3.3.9）式还可以前沿边界方程：

$$\sigma(\tilde{r}_p)=\left|\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{\sqrt{H}}\right| \qquad (3.3.10)$$

在 $\sigma(\tilde{r})-E[\tilde{r}]$ 平面中，前沿边界可以表示为图（3.3.1）：



图（3.3.1）

此时的 $\tilde{r}_*$ 也是一个**风险调节组合**，它是自融资组合，与 $\tilde{r}_{mvp}$ 线性无关，并且均值方差同为 H 。这些性质都与 3.2 节完全相同。

对于 $E[\tilde{r}_p]\geq r_f$ 的**有效前沿边界**上，t_p 仍然表示**风险容忍度**，当 $t_p=0$ 时，可行资产的配置中没有风险，因此只能获得最小的收益 r_f ；当允许 $t_p>0$ 时，可行资产中加入了风险资产的配置，均值方差都相应增加。

仔细观察可以发现，不但此时前沿边界分解中 $\tilde{r}_{mvp}$ 、$\tilde{r}_*$ 和 t_p 的性质和意义与 3.2 节相同，他们本身的表达式也是非常相似。这一点请读者自己观察比较。

3.3.2 前沿边界性质

与 3.2 节中关于前沿边界资产组合性质的定理 3.2.1 平行的，我们有如下的定理 3.3.1。定理的证明与定理 3.2.1 完全一样，故在此略去其证明。

定理 3.3.1 对于资产组合前沿边界，有下列重要性质：

1)、任何资产组合 $\tilde{r}_p$ 为前沿组合当且仅当存在常数 t 使得 $\tilde{r}_p=\tilde{r}_{mvp}+t\cdot\tilde{r}_*$ ；

任何资产组合 $\tilde{r}_p$ 为有效前沿组合当且仅当存在常数 $t>0$ 使得 $\tilde{r}_p=\tilde{r}_{mvp}+t\cdot\tilde{r}_*$ ；

2)、任意有限个前沿资产组合的仿射组合仍为前沿组合；

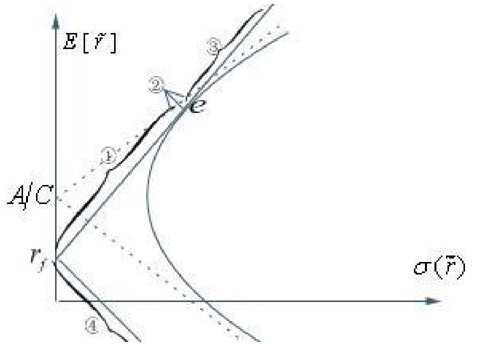
3)、任意有限个有效前沿资产组合的凸组合仍为有效前沿组合；

4)、前沿边界可以由任意两个前沿组合的仿射组合生成。 W.

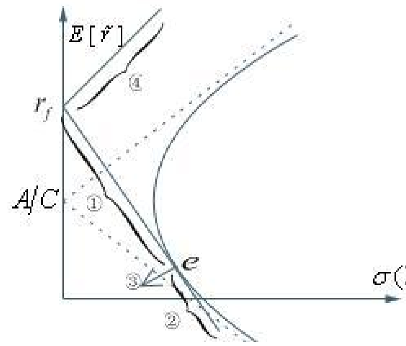
除此之外，在图（3.3.1）中我们还发现此时的前沿边界与不考虑无风险资产情况下的前沿边界有一个公共点 e 。事实上，这个公共点不是任何时候都存在的，但是在大多数情况下

都能够做到。并且如果这个公共点存在，那么它对应着一个非常特殊的资产组合，在前沿边界上以e为分界点，在它两边的投资策略截然不同。并且这个特殊的e点在下一章资本资产定价模型中对应着一个非常重要的资产组合——市场组合。

为了下面命题的方便描述，我们不妨将前沿边界（3.3.10）称为**无风险前沿边界**，而将前沿边界（3.2.b''）称作**风险前沿边界**。



图（3.3.2）



图（3.3.3）

定理 3.3.2 对于风险前沿边界（3.3.10）公共点e的存在性如下：

1）、当$r_f \neq A/C$时，e点存在，并且当$r_f < A/C$时，e点在有效无风险前沿边界上；

当$r_f > A/C$时，e点在非有效无风险前沿边界上。

且对于任意无风险前沿边界收益率$\hat{r}_p$有如下表示

$$\hat{r}_p = (1 - \frac{E(\hat{r}_e) - E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e) - r_f})\hat{r}_e + \frac{E(\hat{r}_e) - E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e) - r_f} r_f \qquad (3.3.11)$$

2）、当$r_f < A/C$时，如图（3.3.2），各部分前沿边界组合所对应的投资策略如下：

①、在e**点左边**的有效无风险前沿边界组合的投资策略为风险资产组合$\hbar_e$与无风险资产r_f的凸组合；

②、在e**点处**全部投资于风险组合$\hbar_e$；

③、e**点右边**的有效无风险前沿边界组合的投资策略为卖空无风险资产，并买入风险组合$\hbar_e$；

④、**非有效前沿**上的投资策略是卖空风险组合$\hbar_e$，并买入无风险资产。

3）、当$r_f > A/C$时，如图（3.3.3），各部分前沿边界组合所对应的投资策略如下：

①、在e**点左边**的非有效无风险前沿边界组合的投资策略为风险资产组合$\hbar_e$与无风险资产r_f的凸组合；

②、在e**点处**全部投资于风险组合$\tilde{\omega}_e$；

③、e**点右边**的非有效无风险前沿边界组合的投资策略为卖空无风险资产，并买入风险组合$\tilde{\omega}_e$；

④、**有效前沿**上的投资策略是卖空风险组合$\tilde{\omega}_e$，并买入无风险资产。

4）、当$r_f = A/C$时，$w_0 \equiv 1$，　　且$\hat{r}_p = r_f + \dfrac{E(\hat{r}_p) - r_f}{D/C}\hat{r}_*$　　　（3.3.12）

当在有效前沿边界上的投资策略为全部投资于r_f，并持有自融资组合$\hat{r}_*$；

当在非有效前沿边界上的投资策略为全部投资于r_f，并持有自融资组合$-\hat{r}_*$；　W.

证明： 为了符号上便于区分，对于含无风险资产的前沿边界收益率及相关量全部用“^”表示，而不含无风险资产的相关量则用“~”表示。

1）、当$r_f \neq A/C$时，　e点存在当且仅当权重$w_0 = 1 - \dfrac{E[\hat{r}_e] - r_f}{H} C(\frac{A}{C} - r_f) = 0$，

即：$\hat{t}_e = \dfrac{1/C}{A/C - r_f}$，或　$E[\hat{r}_e] = \dfrac{B - r_f A}{A - C r_f}$，

$$\Rightarrow \quad \tilde{t}_e = \frac{E[\hat{r}_e] - A/C}{D/C} = \hat{t}_e = \frac{1/C}{A/C - r_f} \qquad (3.3.13)$$

从而：　$\hat{r}_e = \hat{r}_{mvp} + \hat{t}_e \hat{r}_* = r_f + \dfrac{1/C}{A/C - r_f} \cdot \hat{r}_*$

$$= r_f + \frac{1/C}{A/C - r_f}\{-C(\tfrac{A}{C} - r_f) r_f + \vec{r}^T V^{-1}(e - r_f 1)\}$$

$$= \frac{1/C}{A/C - r_f}\{\vec{r}^T V^{-1}(e - \tfrac{A}{C}1) + \vec{r}^T V^{-1}(\tfrac{A}{C} - r_f 1)\}$$

$$= \tfrac{1}{C}\vec{r}^T V^{-1} 1 + \frac{1/C}{A/C - r_f}\vec{r}^T V^{-1}(e - \tfrac{A}{C}1) = \tilde{\omega}_{mvp} + \tilde{t}_e \tilde{\omega}_* \qquad (3.3.14)$$

从而，由定理 3.2.1 可知这个$\hat{r}_e$确实也是风险前沿边界的前沿资产组合，并且由于

$\tilde{t}_e = \hat{t}_e = \dfrac{1/C}{A/C - r_f}$，从而：

当$r_f < A/C$时，e点在有效无风险前沿边界上；

当 $r_f > A/C$ 时，e 点在非有效无风险前沿边界上。

并且可以将任意无风险前沿边界收益率 $\hat{t}_p$ 进行如下分解：

$$\hat{r}_p = \hat{r}_{mvp} + \hat{t}_p \hat{r}_* = r_f + \hat{t}_p \hat{r}_* \qquad \hat{r}_e = \hat{r}_{mvp} + \hat{t}_e \hat{r}_* = r_f + \hat{t}_e \hat{r}_* \qquad \Rightarrow$$

$$\hat{r}_p = \frac{\hat{t}_p}{\hat{t}_e}\hat{r}_e + (1-\frac{\hat{t}_p}{\hat{t}_e})r_f = (1-\frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f})\hat{r}_e + \frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f}r_f \qquad (3.3.11)$$

2）、当 $r_f < A/C$ 时，由于 $D = BC - A^2 > 0$

可以得：$E[\hat{r}_e] = \dfrac{B/C - r_f\, A/C}{A/C - r_f} > \dfrac{A^2/C^2 - r_f\, A/C}{A/C - r_f} = A/C$

$\Rightarrow \quad E(\hat{r}_e) - r_f > A/C - r_f > 0$， 因此可得：

①：当在 e 点左边的有效前沿边界上时，有 $r_f < E(\hat{r}_p) < E(\hat{r}_e)$，

$$\Rightarrow \frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} > 0, \qquad 且1-\frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} = \frac{E(\hat{r}_p)-r_f}{E(\hat{r}_e)-r_f} > 0,$$

从而此时的策略就是 $\hat{r}_e$ 与 r_f 的凸组合

②：当在 e 点处时，$E(\hat{r}_p) = E(\hat{r}_e)$

$$\Rightarrow \frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} = 0, \qquad 且1-\frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} = 1,$$

从而此时的策略就是全部买入风险组合 $\hat{r}_e$。

③：当在 e 点右边的有效前沿边界上时，有 $E(\hat{r}_p) > E(\hat{r}_e)$，

$$\Rightarrow \frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} < 0, \qquad 且1-\frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} > 0,$$

从而此时的策略就是卖空无风险资产 r_f,并且买入风险组合 $\hat{r}_e$。

④：当在非有效前沿边界上时，有 $E(\hat{r}_p) < r_f < E(\hat{r}_e)$，

$$\Rightarrow \frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} > 0, \qquad 且1-\frac{E(\hat{r}_e)-E(\hat{r}_p)}{E(\hat{r}_e)-r_f} = \frac{E(\hat{r}_p)-r_f}{E(\hat{r}_e)-r_f} < 0,$$

从而此时的策略就是卖空风险组合 $\hat{r}_e$,并且买入无风险资产 r_f。

3）、证明完全同上。

4）、首先， $w_0 = 1 - \dfrac{E[\hat{r}_e]-r_f}{H}C(\tfrac{A}{C}-r_f) \equiv 1$

其次，$\hat{r}_p = \hat{r}_{mvp} + \hat{t}_p \cdot \hat{r}_* = r_f + \dfrac{E(\hat{r}_p)-r_f}{B-2r_fA+Cr_f^2}\hat{r}_* = r_f + \dfrac{E(\hat{r}_p)-r_f}{D/C}\hat{r}_*$ W.

从而，从上面的定理以及图（3.3.2）和图（3.3.3）可以看出，当加入无风险资产以后，我们通过对所有包括无风险资产在内的基础资产进行组合，可以在绝大部分情况下可以将前沿边界向前推进很多，这是因为有了无风险资产，我们可以在保证期望收益率在一定水平的条件下可以将风险降得更小。

3.3.3 前沿资产与可行资产关系

与 3.2 节平行的我们还有以下重要结论。定理 3.3.3 给出了任意可行资产组合与前沿资产组合之间的关系。

定理 3.3.3 对于前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 与任意可行资产组合 $\tilde{r}_q$，有如下性质：

1）、 $Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_{mvp}) = Var(\tilde{r}_{mvp}) = 0$ $\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$

2）、 $Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_*) = E(\tilde{r}_q) - r_f$，其中 w_q^0 为 $\tilde{r}_q$ 在 r_f 上的配置权重。

3）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，可做如下不相关分解：

$$\tilde{r}_q = \tilde{r}_{mvp} + t_q \cdot \tilde{r}_* + \tilde{\varepsilon}_q \qquad (3.2.13)$$

其中 $t_q = \dfrac{E(\tilde{r}_q)-r_f}{H}$， $Cov(\tilde{r}_{mvp}, \tilde{\varepsilon}_q) = 0$， $Cov(\tilde{r}_*, \tilde{\varepsilon}_q) = 0$

4）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$， $\forall$ 前沿资产 $\tilde{r}_p$，其期望收益率有如下重要关系：

$$E(\tilde{r}_q) = b_{pq}E(\tilde{r}_p) + (1-b_{pq})r_f \qquad (3.2.14)$$

或：$E(\tilde{r}_q) - r_f = b_{pq}(E(\tilde{r}_p) - r_f)$ （3.2.14'）

其中 $b_{pq} = \dfrac{Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{Var(\tilde{r}_p)}$ 称为 $\tilde{r}_q$ 关于 $\tilde{r}_p$ 的 b 系数。 W.

证明： 1）、这是显然的事情，因为 $\tilde{r}_{mvp} = r_f$；

2）、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，都有 $Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_*) = Cov(w_q^0 r_f + w_q^T \vec{r}, w_*^0 r_f + w_*^T \vec{r}) = w_q^T V w_*$

$$= w_q^T V \cdot V^{-1}(e - r_f 1) = w_q^T \cdot e - r_f w_q^T \cdot 1$$
$$= w_q \cdot e - (1 - w_q^0) r_f = E(\tilde{r}_q) - r_f$$

3)、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，令 $\tilde{\varepsilon}_q = \tilde{r}_q - (\tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_*)$

则： $Cov(\tilde{\varepsilon}_q, \tilde{r}_{mvp}) = Cov(\tilde{\varepsilon}_q, r_f) = 0$

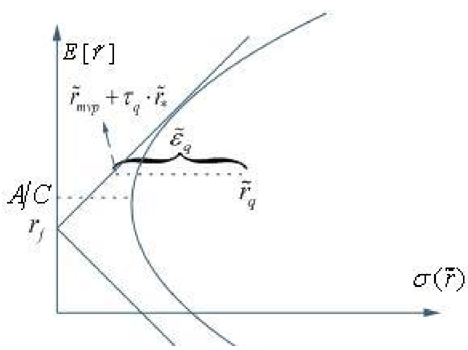
$$Cov(\tilde{\varepsilon}_q, \tilde{r}_*) = Cov(\tilde{r}_q - \tilde{r}_{mvp} - \tau_q \cdot \tilde{r}_*, \tilde{r}_*)$$
$$= Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_*) - Cov(\tilde{r}_{mvp}, \tilde{r}_*) - \tau_q \cdot Cov(\tilde{r}_*, \tilde{r}_*)$$
$$= E(\tilde{r}_q) - r_f - 0 - \frac{E[\tilde{r}_q] - r_f}{H} \cdot H = 0$$

4)、$\forall$ 可行资产 $\tilde{r}_q$，由于分解 $\tilde{r}_q = \tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_* + \tilde{\varepsilon}_q$，我们可得 $\forall$ 前沿资产 $\tilde{r}_p$，有：

$$Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = Cov(\tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_* + \tilde{\varepsilon}_q, \tilde{r}_{mvp} + \tau_p \cdot \tilde{r}_*) = Var(\tilde{r}_{mvp}) + \tau_q \tau_p Var(\tilde{r}_*)$$
$$= 0 + \frac{E(\tilde{r}_q) - r_f}{H} \cdot \frac{E(\tilde{r}_p) - r_f}{H} H = \frac{E(\tilde{r}_p) - r_f}{H}(E(\tilde{r}_q) - r_f)$$

$$\Rightarrow \quad Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)(E(\tilde{r}_p) - r_f) = \frac{(E(\tilde{r}_p) - r_f)^2}{H}(E(\tilde{r}_q) - r_f) = \sigma^2(\tilde{r}_p)(E(\tilde{r}_q) - r_f)$$

$$\Rightarrow \quad E(\tilde{r}_q) - r_f = \frac{Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}(E(\tilde{r}_p) - r_f) = \beta_{pq}(E(\tilde{r}_p) - r_f) \qquad \blacksquare$$



图（3.3.4）

上述定理给出了任意可行资产组合与任意前沿资产组合之间的关系。其中 3）中的结论可以形象地用上图（3.3.4）来解释：对于任意非前沿的可行资产组合 $\tilde{r}_q$，它可以分解成不相关的两部分：$\tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_*$ 为与 $\tilde{r}_q$ 期望相同，但是方差最小的资产组合，它是前沿边界资产组合。而 $\tilde{\varepsilon}_q$ 是一个与 $\tilde{r}_{mvp} + \tau_q \cdot \tilde{r}_*$ 不相关的资产组合，它体现了额外的风险，但是对于这种风险的增加，并没有对期望收益率有任何贡献。而 4）中结论就是著名的“资本资产定价

模型”，它表示任意非前沿资产组合 $\tilde{r}_q$ 的期望收益率与任意给定的前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 的期望收益率之间的关系。其中 b 系数 $b_{pq}=Cov(\tilde{r}_q,\tilde{r}_p)/Var(\tilde{r}_p)$ 表示了相对与前沿资产组合 $\tilde{r}_p$ 的风险 $Var(\tilde{r}_p)$ 而言 $\tilde{r}_q$ 的风险。但是我们从 3）的结论知道 $\tilde{\varepsilon}_q$ 与 $\tilde{r}_{mvp}$ 和 $\tilde{r}_*$ 不相关，从而与任意前沿资产组合不相关，所以额外增加的风险 $\tilde{\varepsilon}_q$ 并没有获得期望收益率的增加，这也是符合 3）中图像的分析的。

3.4 VaR 风险度量下的资产组合理论

前面两节中介绍了 Markowitz 在期望-方差准则下资产组合理论，本节中我们将对资产风险的方差（标准差）度量推广到另一种度量方式：VaR 与 C-VaR。我们前面提到过，方差作为风险度量工具，它将资产价格的正向逆向变动都视为风险，但是实际中只有资产价格的逆向变动对投资者来说才是真正意义上的风险，所以需要对方差这个风险度量准则进行改进。VaR 与 C-VaR 就是两个很好的风险度量工具。本节中我们将介绍这两个风险度量工具的基本概念与基本性质，并初步讨论在正态假设条件下用 VaR 与 C-VaR 准则得到的最有资产组合与用方差准则得到的最有资产组合之间的关系。

3.4.1 从期望-方差准则到 VaR 与 C-VaR 风险度量

自从 Markowitz 提出了期望-方差准则下的资产组合理论，方差准则作为风险的一种度量方式，已经应用到了很多方向，很多时候人们都愿意用方差来近似表示风险，虽然方差准则错误地将资产价格的正向变动也视为风险，但是其在计算和应用上的方便性还是很具有吸引力。但是随着金融活动的复杂化，金融风险危害的加大应运而生的。尤其是 19 世纪 70 年代后，随着布雷顿森林体系的崩溃，与美元挂钩的固定汇率制被浮动汇率制代替，利率波动频繁，幅度加大；与此同时国际范围内的金融创新活动风起云涌，各国竞相放松金融管制，信息通讯技术飞速发展，这些因素既加大了金融风险，也为金融参与者有效管理风险提供了必要和可能。当最初的风险测量方法（包括方差波动性方法）无法满足日趋复杂且瞬息万变的金融市场要求时，JP Morgan 公司的风险管理人员为满足当时总裁 Weatherstone 每天提交“4.15 报告”的要求而开发的风险测量方法 VaR 很快在风险测量，监管等领域获得广泛应用，成为金融市场风险测度的主流。

巴塞尔银行监管委员会，美国证券交易委员会以及国际互换与衍生工具协会（ISDA）都要求金融机构基于 VaR 确定内部风险资本要求，内部风险控制，风险披露等。在 1996 年的“资本协议市场风险补充规定”中，巴塞尔监管委员会指出，银行可以运用经过监管部门审查的内部模型来确定市场风险的资本充足性要求，并推荐了 VaR 方法。而 1995 年 12 月美国证券交易委员会发布的加强市场风险披露建议要求，所有公开交易的美国上市公司都应该使用包括 VaR 在内的三种方法之一披露公司有关衍生金融工具交易情况的信息。1995 年 ISDA 也写道：“ISDA 相信，市场风险的测定对于财务报表的阅读者非常重要。大多数著名的从业人员都认为，恰当的测定技术应该是某种形式的 VaR.”

在正式介绍VaR之前，我们先引入一致风险度量的概念。Philippe Artzner 等人在 1998 年的一篇论文中首次提出了**一致风险度量**（Coherent Measure of Risk）的概念。一致风险度量提出了风险度量工具的一些重要的公理性要求。目前，风险度量工具一致性的要求已经得到了很多学者的认同与研究。

定义 3.4.1 所谓一致风险度量 r，是指对于任意随机的损失 X，其风险的大小记为 $r(X)$，

并且 r 满足平移不变性、次可加性、正齐次性与单调性：

1)、平移不变性： $r(X+l)=r(X)+l$，对于任意随机损失 X 与常数 l；

2)、次可加性： $r(X+Y)\le r(X)+r(Y)$，对于任意随机损失 X 与 Y；

3)、正齐次性： $r(lX)=l\,r(X)$，对于任意随机损失 X 与正常数 l

4)、单调性： $r(X)\le r(Y)$，对于任意随机损失 X 与 Y，且 $X\le Y$。

从一致性我们可以得到凸性，事实上对于任意随机损失 X、Y 与正常数 l，有：

$$r(lX+(1-l)Y)\le r(lX)+r((1-l)Y)=l\,r(X)+(1-l)r(Y)$$

风险度量的平移不变性表示确定的损失变动将导致相同数量的确定风险的变动；次可加性表示可以通过对损失的组合使得风险得以降低，这个性质是符合 Markowitz 资产组合理论所体现的分散原理的；正齐次性表示成倍的损失将导致成倍的风险，扩大持有同一个风险资产并不能降低单位投资额的风险；单调性表示损失越大风险也越大，这是非常自然的一个要求。由次可加性与正齐次性得到的凸性保证了当以这个具有凸性的风险度量作为目标函数进行最优化时，用一阶条件得到的局部最优解同时也是整个可行区域的整体最优解。

标准差作为风险度量函数，它不具有一致性定义中的一些要求。它没有单调性，也没有平移不变性，这是非常直观的事情。但是具有正齐次性与次可加性，事实上：

$s(lX)=l\,s(X)$是显然的；

$$\begin{aligned}s(X+Y)&=\sqrt{s^2(X)+2Cov(X,Y)+s^2(Y)}\\&\le\sqrt{s^2(X)+2s(X)s(Y)+s^2(Y)}=s(X)+s(Y)\end{aligned}$$

本节接下来将要介绍的VaR与$C-VaR$在一定程度上解决这些问题，但是VaR仍然不是一致风险度量，$C-VaR$是一致度量。

3.4.2 数学基础

为了接下来讨论时不存在数学上的障碍，我们将本节将要用到的数学知识罗列在此。

随机变量的分位数：

设随机变量x的分布函数为$F(x)$，则对于任意给定的实数$a\in[0,1]$，定义x的a分位数Q_a为：$Q_a=\inf\{x\,|\,P\{x\ge x\}=a\}$

特别地，当x的分布函数为连续严格单调递增时，$Q_a=F^{-1}(a)$

条件概率与条件期望：

对于事件 A 与正概率事件 B，定义在给定 B 发生的条件下 A 发生的条件概率为：

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

对于随机变量 x 与正概率事件 A，定义 x 在给定事件 A 发生条件下的条件分布为：

$$F(x|A) = P(x \le x|A) = \frac{P(x \le x, A)}{P(A)}$$

当 x 只取离散个值时，则可以定义条件概率密度为：

$$p(x|A) = P(x = x|A) = \frac{P(x = x, A)}{P(A)}$$

当 x 为连续随机变量，并且条件分布 $F(x|A)$ 可以有如下表示时，$p(x|A)$ 称为 x 在给定 A 条件下的条件概率密度：

$$F(x|A) = \int_{-\infty}^{x} p(t|A)dt，\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

有了条件分布以后我们可以定义条件期望如下：

$$E(x|A) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x|A)$$

该条件期望有如下性质需要在接下来的讨论中应用到，其中 I_A 为 A 的示性函数：

$$E(x|A) = \frac{1}{P(A)} E(xI_A)$$

3.4.3 VaR 与 C-VaR 的概念、性质

下面我们正式进行 VaR 与 $C-VaR$ 的介绍与讨论。

假设有 n 个基础风险资产，他们的收益率向量为 $\vec{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n)^T$，并且设 $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ 为资产组合在基础资产上的配置权重。并且设 $L = L(w, \vec{r})$ 为损失函数，即：$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。例如我们可以令 $L(w, \vec{r}) = 1 - w^T(1 + \vec{r}) = -w^T\vec{r}$，其中 1 表示初始的投资量，而 $w^T(1+\vec{r}) = 1 + w^T\vec{r}$ 表示投资期末的投资总收益。

假设对于任意给定的 w，随机的收益率向量 $\vec{r}$ 服从联合概率密度 $p(r;w): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$\forall r \in \mathbb{R}^n$。当然在很多时候我们可以假设收益率向量 $\vec{r}$ 的联合分布与权重 w 无关。但是由

于我们上面的损失函数其实并不一定非得限定 w 为投资权重作为控制变量，我们可以加入其他的因素作为控制变量，因此我们有时需要 w 留在联合概率密度函数中，因为不同的 w 会使得 $\vec{r}$ 有不同的联合密度。本章中我们假设 $p(r;w)$ 与 w 无关，即 $p(r;w)=p(r)$.

设随机损失 $L=L(w,\vec{r})$ 的分布函数为 $\Psi(l)$，即 $\Psi(l)=P\{L(w,\vec{r})\le l\}$，由概率论中随机向量函数的分布函数计算公式可知：$\Psi(l)=\int_{L\le l}p(r)dr$

给了上述符号与基本变量，我们可以用以下方式来定义 VaR：

定义 3.4.2 对于任意给定的控制变量 w 与概率（置信水平）α，VaR 定义为损失函数 L 的 α 分位数，即：

$$VaR_{\alpha}=\inf\{l\in\mathbb{R}\mid\Psi(l)\ge\alpha\}$$

置信水平的选取反映了投资主体对风险的厌恶程度，置信水平越高，厌恶风险的程度越大。由前面所述 VaR 的定义我们可以看出，置信水平的选取对 VaR 值有很大影响。同样的资产组合，由于选取的置信水平不同计算出的 VaR 值也不同。由于国外已将 VaR 值作为衡量风险的一个指标对外公布，因此各金融机构有选取不同的置信水平以影响 VaR 值的内在动力。例如，国外各银行选取的置信水平就不尽相同，美洲银行和 J.P.Morgan 银行选择 95%，花旗银行选择 95.4%，大通曼哈顿银行(Chemical and Chase)选择 97.5%，信孚银行(Bankers Trust)选择 99%。由 VaR 的定义可知，置信水平越高，资产组合的损失小于其 VaR 值的概率越大，也就是说，VaR 模型对于极端事件的发生进行预测时失败的可能性越小。因此，Basle 委员会要求采用 99%的置信水平。

VaR 实际上就是损失函数 L 的分位数，当知道 L 的具体分布时，特别是当 L 服从诸如正态分布等较好分布时，VaR 的计算并不复杂，我们只要有标准正态分布的分位数表就可以具体计算出 VaR 的值。当然如果 L 的具体分布不是像正态分布那样好的分布，借助计算机我们也可以计算出数值近似解出来，这件事情并不是很困难。但是，实际中我们往往并不知道损失函数 L 的具体分布，或者我们也不知道 $\vec{r}$ 的联合分布，并且当很多时候我们还不能假设它们服从正态或联合正态分布时，情况就变得稍微复杂了。并且一般我们在计算 VaR 时都要涉及到资产波动率或 L 波动率的计算，而且我们还不能假设波动率是恒定不变的，所以估计波动率也是一个重要的任务。当然对于这些问题的解决，已经有大量的文献做了相关的工作，我们不在这一一介绍，下面的三个例子给出了 VaR 计算的方法。这三个例子的方法就是 J.P.Morgan 银行 Risk Metrics 所采用的均值—协方差方法。

例 3.4.3 （单个正态收益率资产的 VaR ）

假设只考虑一个风险资产的情形，从而 $w=1$，并且假设资产收益率 $\tilde{r}$ 服从正态分布，即 $\tilde{r}\sim N(\mu,\sigma^2)$。我们仍然设损失函数为 $L=-w\tilde{r}=-\tilde{r}$。从而 VaR 满足 $P\{L\le VaR_{\alpha}\}=\alpha$，即：

$$P\{L\le VaR_{\alpha}\}=P\{-\tilde{r}\le VaR_{\alpha}\}=P\{\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\le\frac{VaR_{\alpha}+\mu}{\sigma}\}=\alpha$$

由于 $\frac{-\tilde{r}+\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以可以得到 $\frac{VaR_{\alpha}+\mu}{\sigma}=Z_{\alpha}$，其中 Z_{α} 为标准正态分布的 α 分位数。由此可以解出 VaR 为：

$$VaR_\alpha = -\mu + \sigma Z_\alpha \,. \qquad (3.4.1)$$

例 3.4.4 （多个联合正态收益率资产组合的VaR）

假设考虑含有n个风险资产的情形，它们的收益率向量为$\vec{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n)^T$服从联合正态分布，即$\vec{r} \sim N(e, \Sigma)$。其中$e = E(\vec{r}) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$为收益率向量的期望，$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n} = (Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j))_{n\times n}$为收益率向量的协方差矩阵。并且设$w$为资产组合在基础资产上的配置权重，损失函数$L(w, \vec{r}) = -w^T \vec{r}$。由正态随机向量线性组合的分布可知$L \sim N(-w^T e, w^T \Sigma w)$。从而$VaR_\alpha$满足$P\{L \le VaR_\alpha\} = \alpha$，由例 3.4. 3 的结论可得：

$$VaR_\alpha = -w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} Z_\alpha \qquad (3.4.2)$$

例 3.4.5 （含无风险资产时多个联合正态收益率资产组合的VaR）

当含有n个风险资产$\vec{r}$和一个无风险资产r_f时，收益率向量为$\hat{r} = (r_f, \vec{r}^T)^T$，其中$\vec{r}$为风险资产收益率，其分布为$\vec{r} \sim N(e, \Sigma)$。并且设$\hat{w} = (w_0, w^T)^T$为资产组合的配置权重向量，其中$w$为在风险资产上的配置权重。损失函数$L(\hat{w}, \hat{r}) = -\hat{w}^T \hat{r} = -w_0 r_f - w^T \vec{r}$，从而可知$L \sim N(-w_0 r_f - w^T e, w^T \Sigma w)$。$VaR_\alpha$满足$P\{L \le VaR_\alpha\} = \alpha$，同样由例 3.4.3 的结论可得：

$$VaR_\alpha = -w_0 r_f - w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} Z_\alpha \qquad (3.4.3)$$

方差—协方差法的基本思想是对组合内资产收益率的分布做出假设，并且令投资组合收益率是各资产收益率的线性组合，从而精确或近似计算出分位数。当然在分布已知的假设下计算VaR的一个重要方法是 Monte Carlo 模拟法。Monte Carlo 模拟法最早于 1942 年由研制原子弹的科学家研制并加以应用，其名称 Monte Carlo 来自法国南部著名的赌城。在金融市场上，Monte Carlo 模拟法用来模拟确定时期不同情形下的资产组合值。Monte Carlo 模拟法是计算VaR的各种方法中最为有效的方法。对于资产组合的不同分布状况以及各种非线性的情形，Monte Carlo 模拟法都可以得到令人满意的结果。

当然有些时候我们并没有假设收益率所满足的分布，此时我们可以应用历史模拟法计算VaR。历史模拟法的计算不需要对资产组合收益的分布作出假设。这种方法是借助于过去一段时间内的资产组合收益的频度分布，通过找到历史上一段时间内的平均收益以及既定置信区间下的最低收益水平来推断VaR的值。该方法的本质是用收益率的历史经验分布来代替收益率的真实分布，以此来求得资产组合的VaR值。

如上定义的VaR_α可以记成如下形式：$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid \int_{L\le l} p(r)dr \ge \alpha\}$，即它是损失$L$的泛函，因此它是风险函数。作为风险函数，它不满足我们 2.4.1 节中提出的对于风险函数的一致性要求，因为$VaR_\alpha(L)$关于L不是次可加的。另外我们可以说明$VaR_\alpha(L)$

关于 L 也不是凸的。

性质 3.4.6（VaR 的单调性、正齐次性与平移不变性）

单调性：对于随机损失 X 与 Y，若 $X \le Y$，则：

$$P\{X \le VaR_a(X)\} = P\{Y \le VaR_a(Y)\} = a \qquad \Rightarrow \qquad VaR_a(X) \le VaR_a(Y)$$

正齐次性：对于随机损失 X 与常数 l，有：

$$P\{X \le VaR_a(X)\} = P\{lX \le VaR_a(lX)\} = a$$

即：$P\{X \le VaR_a(X)\} = P\{X \le l^{-1}VaR_a(lX)\} = a \qquad \Rightarrow$

$$VaR_a(X) = l^{-1}VaR_a(lX) \qquad \text{即：} VaR_a(lX) = lVaR_a(X)$$

平移不变性：对于随机损失 X 与常数 d，有：

$$P\{X \le VaR_a(X)\} = P\{X + d \le VaR_a(X+d)\} = a$$

即：$P\{X \le VaR_a(X)\} = P\{X \le VaR_a(X+d) - d\} \quad \Rightarrow$

$$VaR_a(X) = VaR_a(X+d) - d\text{，} \qquad \text{即：} VaR_a(X+d) = VaR_a(X) + d$$

例 3.4.7 （VaR 的非次可加性）

设有两个风险资产 A 和 B，其损失和概率分别如下：

	A		B		A+B		
损失	50	70	40	90	90	110	140
概率	98%	2%	96%	4%	94%	2%	4%

而且 $P\{A=70, B=90\}=0$，则可以得到 A+B 的损失和近似概率如上表。现在考虑 $a=0.95$ 时的 VaR，容易得到：

$VaR_{0.95}(A)=50$，$VaR_{0.95}(B)=40$，$VaR_{0.95}(A+B)=110$

则 $VaR_{0.95}(A+B) > VaR_{0.95}(A) + VaR_{0.95}(B)$，即 VaR 不满足可加性。

例 3.4.8（VaR 的非凸性）

设有两个风险资产 A 和 B，其损失和概率分别如下：

	A		B		$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$		
损失	50	70	40	90	45	55	70
概率	98%	2%	96%	4%	94%	2%	4%

而且 $P\{A=70, B=90\}=0$，则 $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B$ 的损失和近似概率如上表。计算 $a=0.95$ 时的，容易得到：

$VaR_{0.95}(A)=50$，$VaR_{0.95}(B)=40$，$VaR_{0.95}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)=55$

则 $VaR_{0.95}(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B)>\frac{1}{2}VaR_{0.95}(A)+\frac{1}{2}VaR_{0.95}(B)$，即 VaR 不满足凸性。 W.

鉴于 VaR_a 的上述不良性质，我们需要找到一个更加合适的风险度量工具。直观意义上理解，VaR_a 表示在给定概率 a 之下的最小的损失。另外一种从直观意义上的容易理解的风险度量方式是在已知损失超过 VaR_a 的条件下具体计算平均损失，这种度量方式称作条件在险价值（Conditional Value-at-Risk），记作 $C-VaR$。

定义 3.4.9 对于任意给定的控制变量 w 与概率 a，$C-VaR$ 定义为损失函数 L 在不小于 VaR 条件下的期望，即：

$$C-VaR_a=E\{L\mid L\geq VaR_a\}$$

从 $C-VaR$ 的定义可以得到一个显然的性质是 $C-VaR_a\geq VaR_a$，因为：

$$\begin{aligned}C-VaR_a&=E\{L\mid L\geq VaR_a\}=\frac{1}{1-a}E\{L\cdot I_{\{L\geq VaR_a\}}\}\\&\geq E\{VaR_a\cdot I_{\{L\geq VaR_a\}}\}=VaR_a\cdot\frac{P\{L\geq VaR_a\}}{1-a}=VaR_a\end{aligned}$$

即 $C-VaR$ 的风险度量比 VaR 更加保守。

$C-VaR$ 是给定一个事件的条件下的条件期望，相比于 VaR 的计算，$C-VaR$ 的计算并没有特别大的优势，事实上可以说它的计算与 VaR 的计算都会遇到类似的问题，但是 $C-VaR$ 作为风险度量工具，它满足我们 2.4.1 节中所定义的一致性度量的要求。因此它是较好的风险度量。$C-VaR$ 的一致性在下面的性质中给出了证明。

性质 3.4.10 $C-VaR$ 作为风险度量工具是一致性的，即有单调性、平移不变性、正齐次性与次可加性。

证明：单调性：对于随机损失 X 与 Y，若 $X\leq Y$，则：

$$\begin{aligned}C-VaR_a(X)&=E\{X\mid X\geq VaR_a(X)\}\\&\leq\frac{1}{1-a}E\{Y\cdot(I_{\{X\geq VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}})\}+\frac{1}{1-a}E\{Y\cdot I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}}\}\end{aligned}$$

因为当 $Y\geq VaR_a(Y)$ 时，$I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}}=1$，故 $I_{\{X\geq VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}}\leq 0$

当 $Y<VaR_a(Y)$ 时，$I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}}=0$，故 $I_{\{X\geq VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}}\geq 0$

从而：$E\{Y\cdot(I_{\{X\geq VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\geq VaR_a(Y)\}})\}$

$$
\begin{aligned}
&= E\{Y\cdot(I_{\{Y<VaR_a(Y)\}}+I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}})\cdot[I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}]\}\\
&\le E\{VaR_a(Y)\cdot I_{\{Y<VaR_a(Y)\}}\cdot[I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}]\}+0\\
&\le VaR_a(Y)\cdot E\{[I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}-I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}]\}\\
&= VaR_a(Y)(P\{X\ge VaR_a(X)\}-P\{Y\ge VaR_a(Y)\})=0
\end{aligned}
$$

所以：$C-VaR_a(X)\le \dfrac{1}{1-a}E\{Y\cdot I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}\}=C-VaR_a(Y)$

平移不变性：对于随机损失 X 与常数 l ，有：

$$
\begin{aligned}
C-VaR_a(X+l) &= E\{X+l \mid X+l\ge VaR_a(X+l)\}\\
&= E\{X+l \mid X+l\ge VaR_a(X)+l\}\\
&= E\{X+l \mid X\ge VaR_a(X)\}\\
&= E\{X \mid X\ge VaR_a(X)\}+l = C-VaR_a(X)+l
\end{aligned}
$$

正齐次性：对于随机损失 X 与正常数 l ，有：

$$
\begin{aligned}
C-VaR_a(lX) &= E\{lX \mid lX\ge VaR_a(lX)\}\\
&= l\,E\{X \mid lX\ge lVaR_a(X)\}\\
&= l\,E\{X \mid X\ge VaR_a(X)\}\\
&= l\cdot\{C-VaR_a(X)\}
\end{aligned}
$$

次可加性：对于随机损失 X 与 Y，有：

$$
\begin{aligned}
C-VaR_a(X+Y) &= E\{X+Y \mid X+Y\ge VaR_a(X+Y)\}\\
&= \frac{1}{1-a}E\{(X+Y)\cdot I_{\{X+Y\ge VaR_a(X+Y)\}}\}\\
&= \frac{1}{1-a}E\{X\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}]+Y\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}]\}\\
&\quad+\frac{1}{1-a}E\{X\cdot I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}+Y\cdot I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}\}
\end{aligned}
$$

因为当 $X\ge VaR_a(X)$ 时， $I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}=1$，故 $I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}\le 0$

当 $X<VaR_a(X)$ 时， $I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}=0$，故 $I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}\ge 0$

从而：$E\{X\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}]\}$

$$
\begin{aligned}
&= E\{X\cdot(I_{\{X<VaR_a(X)\}}+I_{\{X\ge VaR_a(X)\}})\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}]\}\\
&\le E\{VaR_a(X)\cdot I_{\{X<VaR_a(X)\}}\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}]\}+0\\
&\le VaR_a(X)E\{I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}\}\\
&= VaR_a(X)(P\{Z\ge VaR_a(Z)\}-P\{X\ge VaR_a(X)\})=0
\end{aligned}
$$

同理：$E\{Y\cdot[I_{\{Z\ge VaR_a(Z)\}}-I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}]\}\le 0$

所以 $$C-VaR_a(X+Y)\le\frac{1}{1-a}E\{X\cdot I_{\{X\ge VaR_a(X)\}}+Y\cdot I_{\{Y\ge VaR_a(Y)\}}\}$$ W.
$$=C-VaR_a(X)+C-VaR_a(Y)$$

性质 3.4.11 $C-VaR$ 作为风险度量工具是具有凸性。

证明：对于随机损失 X 与 Y，以及非负常数 l，有：

$$C-VaR_a(lX+(1-l)Y)\le C-VaR_a(lX)+C-VaR_a((1-l)Y)$$ W.
$$=l\cdot\{C-VaR_a(X)\}+(1-l)\cdot\{C-VaR_a(Y)\}$$

下面给出 $C-VaR$ 计算的几个有用特例：

例 3.4.12 （单个正态收益率资产的 $C-VaR$ ）

假设只考虑一个风险资产的情形，假设同例 3.4.3 。从而 $C-VaR$ 可以用下面的方法计算：

$$C-VaR_a=E\{L\mid L\ge VaR_a\}=\frac{1}{1-a}E\{-\tilde{r}\cdot I_{\{-\tilde{r}\ge VaR_a\}}\}$$
$$=\frac{s}{1-a}E\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\cdot I_{\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\ge\frac{VaR_a+m}{s}\}}\}-\frac{m}{1-a}E\{I_{\{-\tilde{r}\ge VaR_a\}}\}$$
$$=\frac{s}{1-a}E\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\cdot I_{\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\ge\frac{VaR_a+m}{s}\}}\}-m$$

由于 $\frac{-\tilde{r}+m}{s}\sim N(0,1)$，所以可得：

$$\frac{1}{1-a}E\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\cdot I_{\{\frac{-\tilde{r}+m}{s}\ge\frac{VaR_a+m}{s}\}}\}=\Psi(\frac{VaR_a+m}{s}),$$

其中 $\Psi(x)=\frac{1}{(1-a)\sqrt{2p}}\int_x^{+\infty}te^{-t^2/2}dt$，若记 $U_a=\Psi(\frac{VaR_a+m}{s})$，则：

$$C-VaR_a=-m+sU_a. \tag{3.4.4}$$

例 3.4.13 （多个联合正态收益率资产组合的 $C-VaR$ ）

假设考虑含有 n 个风险资产的情形，假设同例 3.4.4 。则损失函数 $L(w,\vec{r})=-w^T\vec{r}$ 且它为正态分布 $L\sim N(-w^Te,w^T\Sigma w)$。由例 3.4.12 的结论可得：

$$C-VaR_a=-w^Te+\sqrt{w^T\Sigma w}U_a \tag{3.4.5}$$

例 3.4.14 （含无风险资产时多个联合正态收益率资产组合的 $C-VaR$ ）

当含有 n 个风险资产 $\vec{r}$ 和一个无风险资产 r_f 时，假设同例 3.4.5 。损失函数 $L(\hat{w},\hat{r})$ 服从正态分布 $L\sim N(-w_0r_f-w^Te,w^T\Sigma w)$。由例 3.4.12 的结论可得：

$$C-VaR_a = -w_0 r_f - w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} U_a \qquad (3.4.6)$$

3.4.4 VaR 与 C-VaR 准则下的资产组合理论

介绍了VaR与$C-VaR$的概念与基本性质后，我们接下来介绍当以VaR和$C-VaR$代替方差或标准差作为风险度量函数时的最优资产组合问题。

由于VaR是非凸的，所以一般条件下将VaR作为目标函数时求最优问题时解的存在性不一定能够保证。但是$C-VaR$是凸的，所以当以$C-VaR$作为目标函数时，解得存在性得到了保证。但是我们知道VaR是求损失函数的分位数，$C-VaR$是求损失函数的条件期望。这些计算当损失函数L只是服从一般分布或者不知道分布的条件下时计算是比较困难的，这方面的问题已经有大量的文献进行了深入研究，本章不做详细叙述。下面我们只是介绍当基础资产收益率服从多元正态分布时的最优资产组合问题。我们的结论是非常漂亮的：当满足正态假设时，以方差（或标准差）s^2、VaR和$C-VaR$作为目标函数时得到的最优解是一样的。

定理 3.4.15 假设有n个基础风险资产，收益率向量为$\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, ..., \tilde{r}_n)^T$，任意资产组合在基础资产上的配置权重为$w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$，损失函数 $L(w, \tilde{r}) = -w^T \tilde{r}$。并且假设$\tilde{r}$服从多元正态分布$\tilde{r} \sim N(e, \Sigma)$。则对于任意给定$a$，以下三个最优问题得到的最优解相同。

Problem 1	Problem 2	Problem 3
$Mins^2(L(w))$	$MinVaR_a(L(w))$	$MinC-VaR_a(L(w))$
$w \in \mathbb{R}^n$	$w \in \mathbb{R}^n$	$w \in \mathbb{R}^n$
s.t. ①②	s.t. ①②	s.t. ①②

其中的限制条件为：$E[L] = -w^T e = -R$， ①

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad ②$$

W.

证明：上述三个约束条件可以记为：

$$f(w) = -w^T e + R = 0, \qquad ①$$

$$h(w) = w^T 1 - 1 = 0, \qquad ②$$

并且 $s^2(L(w)) = w^T \Sigma w$

$$VaR_a(L(w)) = -w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} Z_a$$

$$C-VaR_a(L(w)) = -w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} U_a$$

其中 Z_a 与 U_a 如例 3.4.3 与例 3.4.12 定义，它们关于 w 为常数。

则这三个目标函数的一阶导数分别为：

$$\nabla s^2(L(w)) = \nabla(w^T \Sigma w) = \frac{\partial(w^T \Sigma w)}{\partial w} = 2\Sigma w$$

$$\nabla VaR_a(L(w)) = \nabla(-w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} Z_a) = -e + Z_a (w^T \Sigma w)^{-1/2} \Sigma w$$

$$\nabla C-VaR_a(L(w)) = \nabla(-w^T e + \sqrt{w^T \Sigma w} U_a) = -e + U_a (w^T \Sigma w)^{-1/2} \Sigma w$$

约束函数的一阶导数为：

$$\nabla f(w) = \nabla(-w^T e + R) = -e$$

$$\nabla h(w) = \nabla(w^T 1) = 1$$

其中 $1 = (1, \ldots, 1)$，全为 1 的向量。

所以 Kuhn-Tucker 条件为：

$$\begin{cases} \nabla s^2 + l \nabla f(w) + n \nabla h(w) = 0 \\ w^T e = R \\ w^T 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla\ VaR_a + l \nabla f(w) + n \nabla h(w) = 0 \\ w^T e = R \\ w^T 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla\ \text{C-}VaR_a + l \nabla f(w) + n \nabla h(w) = 0 \\ w^T e = R \\ w^T 1 = 1 \end{cases}$$

首先，求解 Problem 1：$\begin{cases} 2\Sigma w + l e + n 1 = 0 \\ w^T e = R \\ w^T 1 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \qquad w = \frac{RC - A}{BC - A^2} \Sigma^{-1} e - n \Sigma^{-1} 1 \qquad (3.4.7)$$

其次，求解 Problem2：$\begin{cases} -e + Z_a (w^T \Sigma w)^{-1/2} \Sigma w + l e + n 1 = 0 \\ w^T e = R \\ w^T 1 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \ Z_a (w^T \Sigma w)^{-1/2} \Sigma w + (l - 1) e + n 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ (w^T \Sigma w)^{1/2} = \frac{(1 - l) R - n}{Z_a} \qquad (3.4.8)$$

$$\Rightarrow \quad w=\{\frac{(1-l)R-n}{Z_a^2}(1-l)\}\cdot\Sigma^{-1}e-n\Sigma^{-1}1 \tag{3.4.9}$$

分别左乘1^T和e^T：

$$\Rightarrow \begin{cases} 1=\{\frac{(1-l)R-n}{Z_a^2}(1-l)\}A-nC \\ R=\{\frac{(1-l)R-n}{Z_a{}^2}(1-l)\}B-nA \end{cases}$$ 从中消去$\frac{(1-l)R-n}{Z_a^2}(1-l)$，

$$\Rightarrow n=\frac{RA-B}{BC-A^2},$$ 带入上述第一式，

$$\Rightarrow \frac{(1-l)R-n}{Z_a^2}(1-l)=\frac{1+nC}{A}=\frac{RC-A}{BC-A^2},$$ 带入上述（3.4.9）式

$$\Rightarrow w=\frac{RC-A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}e-n\Sigma^{-1}1$$

最后，求解 Problem3： $$\begin{cases} -e+Z_a(w^T\Sigma w)^{-1/2}\Sigma w+le+n1=0 \\ w^Te=R \\ w^T1=1 \end{cases}$$

完全与 Problem2 同理可以解得： $w=\frac{RC-A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}e-n\Sigma^{-1}1$

从而，我们已经证明三个优化问题的最优解都是（3.4.7）。 W.