Markov链应用例子

赵敏智
Zhejiang University

April 13, 2019

某商店经营某种产品, 仓库能容纳c单位的货物. 每天早上8：00开始营业, 下午5：00停止营业并进行检查, 若发现库存小于等于m, 则补充到c $(0 \leq m < c$且m, c都是整数). 用D_n 表示第n天的需求量. 用X_n表示第n天停止营业检查前的库存. 则:

仓库储存模型

某商店经营某种产品, 仓库能容纳c单位的货物. 每天早上8：00开始营业, 下午5：00停止营业并进行检查, 若发现库存小于等于m, 则补充到c ($0 \leq m < c$且m, c都是整数). 用D_n 表示第n天的需求量. 用X_n表示第n天停止营业检查前的库存. 则:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (c - D_{n+1})^+, & \text{若} X_n \leq m; \\ (X_n - D_{n+1})^+, & \text{若} m < X_n \leq c. \end{cases}$$

这里$a^+ = \max(a, 0)$.

设$X_0 \in \{0,1,\cdots,c\}$, $D_1, D_2, \cdots$,独立同分布,
$P(D_1 = i) = p_i, i = 0,1,\cdots$,且$\{D_n; n \geq 1\}$与$X_0$独立.
则$\{X_n\}$是一时齐的Markov链, 状态空间
$I = \{0,1,\cdots,c\}$,

设$X_0 \in \{0,1,\cdots,c\}$, $D_1, D_2, \cdots$,独立同分布,
$P(D_1 = i) = p_i, i = 0,1,\cdots$,且$\{D_n; n \geq 1\}$与$X_0$独立.
则$\{X_n\}$是一时齐的Markov链, 状态空间
$I = \{0,1,\cdots,c\}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{c-j}, & \text{若} i \leq m, j > 0; \\ \sum\limits_{k \geq c} p_k, & \text{若} i \leq m, j = 0; \\ p_{i-j}, & \text{若} m < i \leq c, 0 < j \leq i; \\ \sum\limits_{k \geq i} p_k, & \text{若} m < i \leq c, j = 0; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

1. 每次装运货物费用a元;

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

1. 每次装运货物费用a元;
2. 销售单位货物获利b元;

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

1. 每次装运货物费用a元;
2. 销售单位货物获利b元;
3. $E(D_1) = \mu < \infty$;

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

1. 每次装运货物费用a元;
2. 销售单位货物获利b元;
3. $E(D_1) = \mu < \infty$;
4. X_n不可约非周期, 则正常返, 存在唯一平稳分布π (与m有关).

接下来考虑获利. 固定c, 获利与m有关.

假设:

1. 每次装运货物费用a元;
2. 销售单位货物获利b元;
3. $E(D_1)=\mu<\infty$;
4. X_n不可约非周期, 则正常返, 存在唯一平稳分布π (与m有关).

则:

1. 第$n+1$天的货物装运费为: $a1_{\{X_{n+1}\leq m\}}$;

则:

1. 第$n+1$天的货物装运费为: $a1_{\{X_{n+1}\le m\}}$;
2. 第$n+1$天的销售利润为: $b(D_{n+1}-f(X_n,D_{n+1}))$, 这里$f(X_n,D_{n+1})$是第$n+1$天货物不足部分,为:

$$f(X_n,D_{n+1})=\begin{cases}(D_{n+1}-c)^+, & 若X_n\le m;\\ (D_{n+1}-X_n)^+, & 若m<X_n\le c.\end{cases}$$

则:

1. 第$n+1$天的货物装运费为: $a1_{\{X_{n+1}\le m\}}$;
2. 第$n+1$天的销售利润为: $b(D_{n+1}-f(X_n,D_{n+1}))$, 这里$f(X_n,D_{n+1})$是第$n+1$天货物不足部分,为:

$$f(X_n,D_{n+1})=\begin{cases}(D_{n+1}-c)^+, & \text{若} X_n\le m;\\ (D_{n+1}-X_n)^+, & \text{若} m<X_n\le c.\end{cases}$$

所以第$n+1$天净利润的均值为:

$$w_{n+1}=-aE(1_{\{X_{n+1}\le m\}})+bE(D_{n+1})-bE(f(X_n,D_{n+1})).$$

则：

1. 第$n+1$天的货物装运费为: $a1_{\{X_{n+1}\le m\}}$;
2. 第$n+1$天的销售利润为: $b(D_{n+1}-f(X_n,D_{n+1}))$, 这里$f(X_n,D_{n+1})$是第$n+1$天货物不足部分,为:

$$f(X_n,D_{n+1})=\begin{cases}(D_{n+1}-c)^+, & 若X_n\le m;\\ (D_{n+1}-X_n)^+, & 若m<X_n\le c.\end{cases}$$

所以第$n+1$天净利润的均值为：

$$w_{n+1}=-aE(1_{\{X_{n+1}\le m\}})+bE(D_{n+1})-bE(f(X_n,D_{n+1})).$$

目标：找m使得$\lim_{n\to\infty} w_{n+1}$最大,即使得长远来看平均每天净利润最大.

因为$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i,\ i \in I$,所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} w_{n+1} &= -a\sum_{i=0}^{m}\pi_i + b\mu - b\sum_{i=0}^{m}\pi_i E(D_1 - c)^+ \\ &\quad -b\sum_{i=m+1}^{c}\pi_i E(D_1 - i)^+.\end{aligned}$$

因为$\lim_{n\to\infty} P(X_n = i) = \pi_i,\ i \in I$,所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} w_{n+1} &= -a\sum_{i=0}^{m}\pi_i + b\mu - b\sum_{i=0}^{m}\pi_i E(D_1 - c)^+ \\ &\quad -b\sum_{i=m+1}^{c}\pi_i E(D_1 - i)^+.\end{aligned}$$

令$u_i = E(D_1 - i)^+$. 则只需找m使得

$$h_m := a\sum_{i=0}^{m}\pi_i + b\sum_{i=0}^{m}\pi_i u_c + b\sum_{i=m+1}^{c}\pi_i u_i$$

最小.

设$b=1$. 设$P(D_1=k)=\frac{1}{2^{k+1}}, k=0,1,\cdots$. 则

$$u_i \;=\; E(D_1-i)^+=\sum_{k=1}^{\infty}P((D_1-i)^+\geq k)$$

设$b=1$. 设$P(D_1=k)=\frac{1}{2^{k+1}}, k=0,1,\cdots$. 则

$$\begin{aligned} u_i &= E(D_1-i)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} P((D_1-i)^+ \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(D_1 \geq k+i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

设$b=1$. 设$P(D_1=k)=\frac{1}{2^{k+1}}, k=0,1,\cdots$. 则

$$\begin{aligned} u_i &= E(D_1-i)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} P((D_1-i)^+ \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(D_1 \geq k+i) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^i}. \end{aligned}$$

设$c=3$, 则$m=0,1,2$.

当$m=2$时,

$$P=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi=(1/8,1/8,1/4,1/2),$$

当$m=2$时,

$$P = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi = (1/8, 1/8, 1/4, 1/2),$$

$$h_2 = a\sum_{i=0}^{2}\pi_i + \sum_{i=0}^{2}\pi_i u_3 + \pi_3 u_3 = a/2 + 1/8.$$

当$m=1$时,

$$P=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi=(1/6,1/6,1/3,1/3),$$

当$m=1$时,

$$P=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi=(1/6,1/6,1/3,1/3),$$

$$h_1=a\sum_{i=0}^{1}\pi_i+\sum_{i=0}^{1}\pi_i u_3+\sum_{i=2}^{3}\pi_i u_i=a/3+1/6.$$

当$m=0$时,

$$P=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi=(1/4,1/4,1/4,1/4),$$

当$m=0$时,

$$P=\begin{pmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\pi=(1/4,1/4,1/4,1/4),$$

$$h_0=a\pi_0+\pi_0 u_3+\sum_{i=1}^{3}\pi_i u_i=a/4+1/4.$$

比较h_0, h_1, h_2的大小：

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

$h_2 - h_1 = a/6 - 1/24 > 0$当且仅当$a > 1/4$;

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

$h_2 - h_1 = a/6 - 1/24 > 0$当且仅当$a > 1/4$;

结论：

1. 当$a > 1$时，$h_2 > h_1 > h_0$，所以$m = 0$最优;

比较h_0,h_1,h_2的大小：
$h_1-h_0=a/12-1/12>0$当且仅当$a>1$;
$h_2-h_1=a/6-1/24>0$当且仅当$a>1/4$;
结论：

1. 当$a>1$时，$h_2>h_1>h_0$，所以$m=0$最优;
2. 当$a=1$时，$h_2>h_1=h_0$，所以$m=0$或$m=1$最优;

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

$h_2 - h_1 = a/6 - 1/24 > 0$当且仅当$a > 1/4$;

结论：

1. 当$a > 1$时，$h_2 > h_1 > h_0$，所以$m = 0$最优;
2. 当$a = 1$时，$h_2 > h_1 = h_0$，所以$m = 0$或$m = 1$最优;
3. 当$1/4 < a < 1$时，$h_1 < h_0, h_1 < h_2$，所以$m = 1$最优;

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

$h_2 - h_1 = a/6 - 1/24 > 0$当且仅当$a > 1/4$;

结论：

1. 当$a > 1$时，$h_2 > h_1 > h_0$，所以$m = 0$最优;
2. 当$a = 1$时，$h_2 > h_1 = h_0$，所以$m = 0$或$m = 1$最优;
3. 当$1/4 < a < 1$时，$h_1 < h_0, h_1 < h_2$，所以$m = 1$最优;
4. 当$a = 1/4$时，$h_1 = h_2 < h_0$，所以$m = 1$或$m = 2$最优;

比较h_0, h_1, h_2的大小：

$h_1 - h_0 = a/12 - 1/12 > 0$当且仅当$a > 1$;

$h_2 - h_1 = a/6 - 1/24 > 0$当且仅当$a > 1/4$;

结论：

1. 当$a > 1$时, $h_2 > h_1 > h_0$, 所以$m = 0$最优;
2. 当$a = 1$时, $h_2 > h_1 = h_0$, 所以$m = 0$或$m = 1$最优;
3. 当$1/4 < a < 1$时, $h_1 < h_0, h_1 < h_2$, 所以$m = 1$最优;
4. 当$a = 1/4$时, $h_1 = h_2 < h_0$, 所以$m = 1$或$m = 2$最优;
5. 当$a < 1/4$时, $h_2 < h_1 < h_0$, 所以$m = 2$最优