§2.4 常用分布与分布族

在统计学中常用的分布有很多，本节只能介绍一些最重要的分布. 在概率论中已经学过的一些重要分布族有:

§2.4 常用分布与分布族

在统计学中常用的分布有很多, 本节只能介绍一些最重要的分布. 在概率论中已经学过的一些重要分布族有:

二项分布族(Binomial distribution family)

$\{B(n,p) : 0 < p < 1\}$:

$$\mathsf{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n.$$

§2.4 常用分布与分布族

在统计学中常用的分布有很多, 本节只能介绍一些最重要的分布. 在概率论中已经学过的一些重要分布族有:

二项分布族(Binomial distribution family) $\{B(n,p):0<p<1\}$:

$$\mathsf{P}(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\quad x=0,1,\cdots,n.$$

泊松分布族(Poisson distribution family) $\{P(\lambda):\lambda>0\}$:

$$\mathsf{P}(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots.$$

均匀分布族(Uniform distribution family)

$\{U(a,b) : -\infty < a < b < \infty\}$:

$$p(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{if } x \in [a,b], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

均匀分布族(Uniform distribution family)

$\{U(a,b): -\infty < a < b < \infty\}$:

$$p(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{if } x \in [a,b], \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

指数分布族(Exponential distribution family)

$\{E(\lambda): \lambda > 0\}$:

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

正态分布族(Normal distribution family)

$\{N(\mu,\sigma^2): -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\}$:

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

正态分布族(Normal distribution family)

$\{N(\mu,\sigma^2): -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0\}$:

$$p(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

下面介绍数理统计中的其它一些重要分布:

Γ分布族 :$\{\Gamma(\alpha,\lambda):\alpha>0,\lambda>0\}$

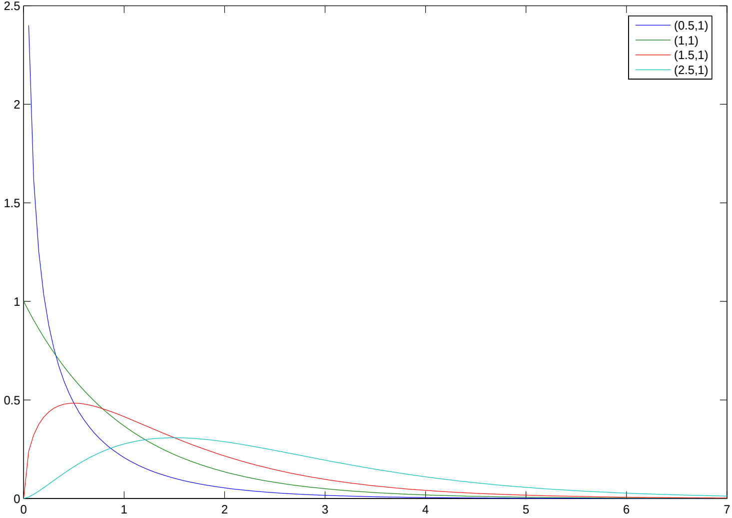
Definition

定义 具有下列密度函数的分布称为Γ分布:

$$p(x;\alpha,\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x},\qquad x>0,$$

记为$gamma(\alpha,\lambda)$、$Ga(\alpha,\lambda)$或$\Gamma(\alpha,\lambda)$, 其中，$\alpha>0$称为"形状参数"，$\lambda>0$称为"尺度参数".
$(\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt)$

Γ分布在正值随机变量的分布中占有重要的地位. $\Gamma(\alpha,1)$称为标准Γ分布.


(0.5,1)
(1,1)
(1.5,1)
(2.5,1)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
0
1
2
3
4
5
6
7

Γ分布的性质与“不完全Γ积分” $G(x;\alpha)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}dt$的性质有关. 标准$\Gamma$分布的分布函数与$G(x;\alpha)$只相差一个常数因子$1/\Gamma(\alpha)$. 对一般的$\Gamma$分布$\Gamma(\alpha,\lambda)$, 其分布函数

$$
\begin{aligned}
F(x;\alpha,\lambda) &= \int_0^x \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda y}dy = \int_0^{\lambda x} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-t}dt \\
&= \frac{G(\lambda x;\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = F(\lambda x;\alpha,1).
\end{aligned}
$$

因此，只要有$\Gamma(\alpha,1)$的分布函数值$F(x;\alpha,1)$的表, 给了λ的值就可以算出一般Γ分布的分布函数值.

Γ分布的k阶矩为

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}X^k &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{k+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{k+\alpha} x^{k+\alpha-1}}{\Gamma(k+\alpha)} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^k \Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

利用$\Gamma(\alpha)$ 的性质：

$$\Gamma(\alpha+k)=(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)...\alpha\Gamma(\alpha),$$

不难验证Γ分布的均值和方差分别为

$$E(\Gamma(\alpha,\lambda))=\frac{\alpha}{\lambda},\qquad \mathsf{Var}(\Gamma(\alpha,\lambda))=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Γ分布的负指数阶矩:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}X^{-\beta} &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} x^{-\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx \\
&= \lambda^{\beta} \frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha-\beta} x^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^{\beta}\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \beta < \alpha.
\end{aligned}
$$

Γ分布的矩母函数为

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}e^{tX} &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{tx-\lambda x} dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{(\lambda-t)^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\lambda-t)x} dx \\
&= (1-\frac{t}{\lambda})^{-\alpha}, \quad t<\lambda.
\end{aligned}
$$

Γ分布的矩母函数为

$$\begin{aligned}\mathsf{E}e^{tX} &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{tx-\lambda x} dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \int_0^\infty \frac{(\lambda-t)^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-(\lambda-t)x} dx \\ &= (1-\frac{t}{\lambda})^{-\alpha}, \quad t<\lambda.\end{aligned}$$

所以, Γ分布的特征函数为

$$\varphi(t) = \mathsf{E}e^{itX} = (1-\frac{it}{\lambda})^{-\alpha}.$$

Theorem

定理 设随机变量X_1, X_2 相互独立，$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$, 则$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Theorem

定理 设随机变量X_1, X_2 相互独立，$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$, 则$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Theorem

定理 设$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, 则$Y = X/k \sim \Gamma(\alpha, k\lambda)$, 其中$k > 0$.

Theorem

定理 设随机变量X_1, X_2 相互独立， $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$, 则$X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Theorem

定理 设$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, 则$Y = X/k \sim \Gamma(\alpha, k\lambda)$, 其中$k > 0$.

$\Gamma(1, \lambda)$ 为指数分布$E(\lambda)$. 当n为正整数时, $\Gamma(n, \lambda)$ 可看成n个独立、具有相同刻度参数的指数分布变量的和.

Example

某种电子产品能经受外界若干次冲击,可当第k次冲击来到的时刻产品就失效了. 这样,该产品的寿命就是第k次冲击来到的时刻. 假设在$(0,t)$时间内产品受到的冲击次数X(t)服从如下的Poisson分布:

$$\mathsf{P}(X(t)=x)=\frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t},\quad x=0,1,\cdots.$$

求该产品寿命T的分布.

解: T的分布函数如下: 对$t > 0$, 有

$$\begin{aligned}F(t) =& 1 - \mathsf{P}(T \geq t) = 1 - \mathsf{P}(\text{产品在}(0,t)\text{时间内没失效})\\ =& 1 - \mathsf{P}(X(t) \leq k-1) = 1 - \sum_{x=0}^{k-1} \mathsf{P}(X(t) = x)\\ =& \sum_{x=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

解: T的分布函数如下: 对$t>0$, 有

$$\begin{aligned}F(t)=&1-\mathsf{P}(T\ge t)=1-\mathsf{P}(\text{产品在}(0,t)\text{时间内没失效})\\=&1-\mathsf{P}(X(t)\le k-1)=1-\sum_{x=0}^{k-1}\mathsf{P}(X(t)=x)\\=&\sum_{x=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

求导,得T的密度函数为

$$f(t)=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\lambda t}=\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

即$T\sim\Gamma(k,\lambda)$. 特别, $k=1$时, 它是$E(\lambda)$.

$\Gamma(\alpha,\lambda)$ 的另一个重要特例是$\Gamma(n/2,1/2)$，它就是$\chi^2(n)$分布.

χ^2分布

Definition

定义 设$X_1,X_2,...,X_n$, i.i.d.$\sim N(0,1)$，则

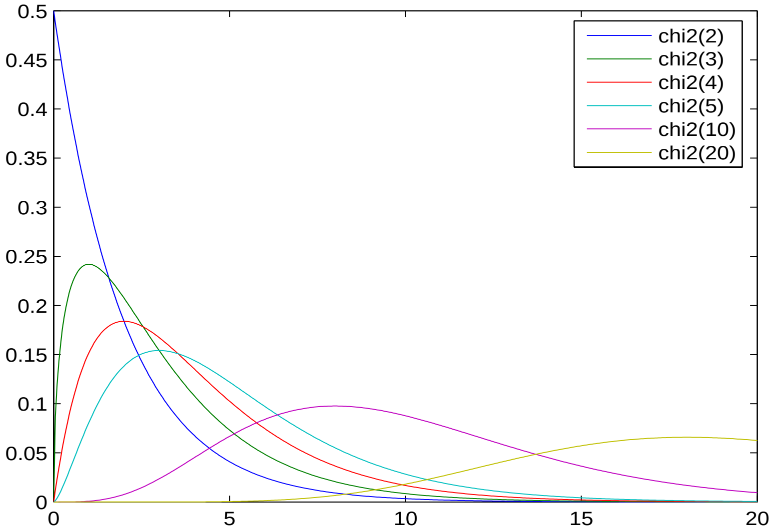
$$\xi=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

的分布定义为具有自由度n的χ^2分布，记为$\xi\sim\chi^2(n)$或$\xi\sim\chi_n^2$.

χ^2分布是刻画正态变量二次型的一种重要分布，它有一系列重要而应用广泛的性质. 这里先介绍一些基本性质.

χ^2分布的密度为

$$p(x;n)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2},\quad x>0, \tag{1}$$


chi2(2)
chi2(3)
chi2(4)
chi2(5)
chi2(10)
chi2(20)
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
20

下面先推导$\chi^2(n)$的密度函数确实如(1)所示.

设$X_1, X_2, ..., X_n$, i.i.d.,$\sim N(0,1)$.

我们只要证$X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \sim \Gamma(n/2, 1/2)$.

下面先推导$\chi^2(n)$的密度函数确实如(1)所示.
设$X_1, X_2, ..., X_n$, i.i.d.,$\sim N(0,1)$.
我们只要证$X_1^2+X_2^2+...+X_n^2\sim \Gamma(n/2,1/2)$.
记$Y=X_1^2$的分布函数为$F_Y(y)$, 则当$y\le 0$时, $F_Y(y)=0$. 而当$y>0$时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)=&\mathsf{P}(X_1^2<y)=\mathsf{P}(-\sqrt{y}<X_1<\sqrt{y})\\=&F_{X_1}(\sqrt{y})-F_{X_1}(-\sqrt{y}).\end{aligned}$$

而密度函数为

$$\begin{aligned} p_Y(y) =& [p_{X_1}(\sqrt{y}) + p_{X_1}(-\sqrt{y})]/(2\sqrt{y}) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}. \end{aligned}$$

所以$Y = X_1^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$. 由样本的代表性, 知$X_i^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2), i = 1, 2, \cdots, n$. 再由样本的独立性, 并结合$\Gamma$ 分布的可加性得$X_1^2 + \cdots + X_n^2 \sim \Gamma(n/2, 1/2)$.

再次利用Γ 分布的可加性,还可得

Corollary

推论 设$\xi_1 \sim \chi^2(n_1)$, $\xi_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立,
则$\xi_1 + \xi_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

此性质可以推广到任意有限个相加.

再次利用Γ 分布的可加性,还可得

Corollary

推论 设$\xi_1 \sim \chi^2(n_1)$, $\xi_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立,
则$\xi_1 + \xi_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

此性质可以推广到任意有限个相加.

另外,
设$\xi \sim \chi^2(n)$, 易得$E\xi = n$, $Var\xi = 2n$.

再次利用Γ 分布的可加性,还可得

Corollary

推论 设$\xi_1 \sim \chi^2(n_1)$, $\xi_2 \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立, 则$\xi_1 + \xi_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$.

此性质可以推广到任意有限个相加.

另外,
设$\xi \sim \chi^2(n)$, 易得$E\xi = n$, $Var\xi = 2n$.
χ^2 分布的特征函数为

$$\varphi(t; n) = (1 - 2it)^{-n/2}. \tag{2}$$

非中心χ^2分布

Definition

定义 设$X_1, ..., X_n$相互独立, $X_i \sim N(a_i, 1)$, a_i $(i = 1, \dots, n)$不全为0. 则

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

的分布定义为具有自由度n、非中心参数为$\lambda = a_1^2 + \cdots + a_n^2$(与书上不同)的非中心$\chi^2$分布，记为$\xi \sim \chi^2(n, \lambda)$或$\xi \sim \chi^2_{n,\lambda}$.

非中心χ^2分布的性质:

1. 若$\xi\sim\chi^2_{n,\lambda}$, 则$\xi$的特征函数为
$$\varphi(t;n)=(1-2it)^{-n/2}\exp\{\frac{it\lambda}{1-2it}\}.$$
2. 若$\xi_j\sim\chi^2_{n_j,\lambda_j}$, $j=1,\ldots,k$, 且相互独立,
则$\sum_{j=1}^k\xi_j\sim\chi^2_{n,\lambda}$, 其中$n=\sum_{j=1}^k n_j$, $\lambda=\sum_{j=1}^k\lambda_j$;
3. 若$\xi\sim\chi^2_{n,\lambda}$, 则$\mathsf{E}\xi=n+\lambda$, $\mathsf{Var}(\xi)=2(n+2\lambda)$.

证明: (2) 由(1)即得. 为证明(1)和(3), 由定义和独立性, 只需考虑$n=1$的情形, 这时可记$\xi=(\delta+\eta)^2$, 其中$\eta\sim N(0,1)$, $\lambda=\delta^2$. 那么

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\xi =&\mathsf{E}[\eta^2+2\delta\eta+\delta^2]=1+\delta^2=1+\lambda,\\
\mathsf{E}\xi^2 =&\mathsf{E}\left[\eta^4+4\eta^3\delta+6\eta^2\delta^2+4\eta\delta^3+\delta^4\right]\\
=&3+6\delta^2+\delta^4=3+6\lambda+\lambda^2.
\end{aligned}
$$

证明: (2) 由(1)即得. 为证明(1)和(3), 由定义和独立性, 只需考虑$n=1$的情形, 这时可记$\xi=(\delta+\eta)^2$, 其中$\eta\sim N(0,1)$, $\lambda=\delta^2$. 那么

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\xi =& \mathsf{E}[\eta^2+2\delta\eta+\delta^2]=1+\delta^2=1+\lambda,\\
\mathsf{E}\xi^2 =& \mathsf{E}\left[\eta^4+4\eta^3\delta+6\eta^2\delta^2+4\eta\delta^3+\delta^4\right]\\
=& 3+6\delta^2+\delta^4=3+6\lambda+\lambda^2.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathsf{Var}(\xi)=\mathsf{E}\xi^2-(\mathsf{E}\xi)^2=2+4\delta^2=2(1+2\lambda).$$

(3) 得证.

$\xi = (\delta + \eta)^2$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned} M(t) =& \mathsf{E} e^{t\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(y+\delta)^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ =& \cdots = (1-2t)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{t\delta^2}{1-2t} \right\} \\ =& (1-2t)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{t\lambda}{1-2t} \right\}, t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\xi = (\delta+\eta)^2$ 的矩母函数为

$$\begin{aligned} M(t) =& \mathsf{E} e^{t\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(y+\delta)^2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ =& \cdots = (1-2t)^{-1/2} \exp\left\{\frac{t\delta^2}{1-2t}\right\} \\ =& (1-2t)^{-1/2} \exp\left\{\frac{t\lambda}{1-2t}\right\}, t < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以ξ的特征函数为

$$M(it) = (1-2it)^{-1/2} \exp\left\{\frac{it\lambda}{1-2it}\right\}.$$

$\chi^2_{n,\lambda}$的特征函数为

$$\begin{aligned}
f(t) =& (1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{it\lambda}{1-2it}\right\}\\
=& (1-2it)^{-n/2}e^{-\lambda/2}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\frac{1}{1-2it}\right\}\\
=& e^{-\lambda/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}(1-2it)^{-n/2-j}.
\end{aligned}$$

$\chi^2_{n,\lambda}$的特征函数为

$$\begin{aligned} f(t) =&(1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{it\lambda}{1-2it}\right\} \\ =&(1-2it)^{-n/2}e^{-\lambda/2}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\frac{1}{1-2it}\right\} \\ =&e^{-\lambda/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}(1-2it)^{-n/2-j}. \end{aligned}$$

注意到$(1-2it)^{-n/2-j}$ 为χ^2_{n+2j} 的特征函数, 记$\chi^2(x, n+2j)$ 为χ^2_{n+2j} 的密度函数. 则

$\chi^2_{n,\lambda}$的特征函数为

$$\begin{aligned} f(t) =&(1-2it)^{-n/2}\exp\left\{\frac{it\lambda}{1-2it}\right\} \\ =&(1-2it)^{-n/2}e^{-\lambda/2}\exp\left\{\frac{\lambda}{2}\frac{1}{1-2it}\right\} \\ =&e^{-\lambda/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}(1-2it)^{-n/2-j}. \end{aligned}$$

注意到$(1-2it)^{-n/2-j}$ 为χ^2_{n+2j} 的特征函数, 记$\chi^2(x,n+2j)$ 为χ^2_{n+2j} 的密度函数. 则$\chi^2_{n,\lambda}$的密度函数为

$$g(x)=e^{-\lambda/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda/2)^j}{j!}\chi^2(x,n+2j),$$

t分布(Student's t distribution)

Definition

定义 设$X \sim N(0,1)$, $K \sim \chi^2(n)$, 且X 与K 相互独立, 则

$$T = \frac{X}{\sqrt{K/n}}$$

的分布定义为自由度为n的t分布，记为$T \sim t(n)$或$T \sim t_n$.

t分布(Student's t distribution)

Definition

定义 设$X \sim N(0,1)$, $K \sim \chi^2(n)$, 且X 与K 相互独立, 则

$$T = \frac{X}{\sqrt{K/n}}$$

的分布定义为自由度为n的t分布，记为$T \sim t(n)$或$T \sim t_n$.

$t(n)$分布的密度为

$$p(t;n) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+\frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty.$$

证明： 令$S=K$. 考察变换:

$$\begin{cases} t=\frac{x}{\sqrt{y/n}}, \\ s=y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t\sqrt{s/n}, \\ y=s. \end{cases}$$

则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}=\begin{vmatrix} \sqrt{s/n} & \frac{t\sqrt{1/n}}{2\sqrt{s}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{s/n}.$$

所以(T,S)的密度函数为

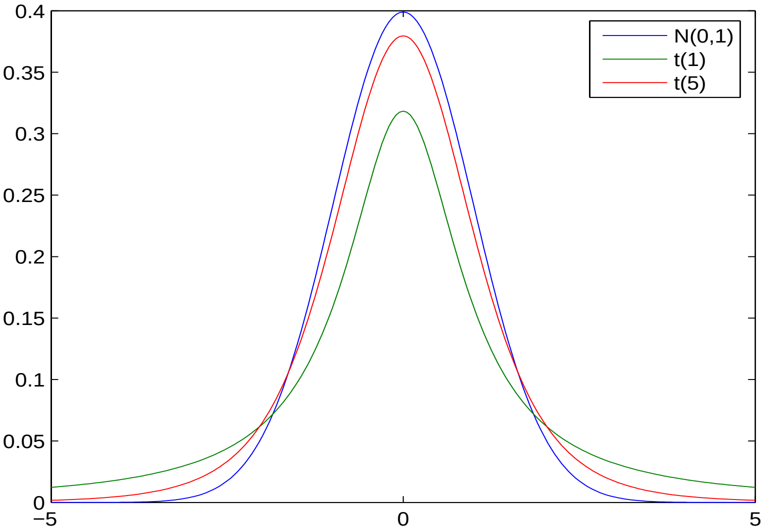
$$
\begin{aligned}
p(t,s) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 s/n}{2}} \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} s^{n/2-1} e^{-s/2} \sqrt{s/n} \\
=& \frac{(1/2)^{(n+1)/2}}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} s^{\frac{n+1}{2}-1} \exp\left\{-s\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)\right\}, \\
& -\infty < t < \infty, \quad s \geq 0.
\end{aligned}
$$

所以(T,S)的密度函数为

$$p(t,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2s/n}{2}}\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}s^{n/2-1}e^{-s/2}\sqrt{s/n}$$
$$=\frac{(1/2)^{(n+1)/2}}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}s^{\frac{n+1}{2}-1}\exp\left\{-s\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)\right\},$$
$$-\infty<t<\infty,\quad s\geq 0.$$

因此T的密度函数为

$$p(t)=\int_0^\infty p(t,s)ds=\frac{(1/2)^{(n+1)/2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1+t^2/n)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<t<\infty.$$


0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−5
0
5
N(0,1)
t(1)
t(5)

t分布与标准正态分布非常相似, 由t分布的密度式不难看出，t分布与标准正态分布有相似之处：它的密度也是以原点为对称中心的“钟形”曲线. 英国统计学家哥塞特(W. S. Gosset) 于1908年首先发现了这个分布, 并以学生(Student)的笔名发表了他的研究结果. 因此, t分布又称为“学生氏”分布.

t分布的发现, 与正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的均值μ的估计与检验问题相关. 如果$X_1,\ldots,X_n$是取出$N(\mu,\sigma^2)$的样本, 那么

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1) \ \ \text{即}\overline{X}-\mu\sim N(0,\sigma^2/n).$$

当σ已知时, 由上式可以大致知道μ与$\overline{X}$的距离.

t分布的发现, 与正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的均值μ的估计与检验问题相关. 如果$X_1,\ldots,X_n$是取出$N(\mu,\sigma^2)$的样本, 那么

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)\ \ 即\overline{X}-\mu\sim N(0,\sigma^2/n).$$

当σ已知时, 由上式可以大致知道μ与$\overline{X}$的距离.

当σ未知时, $\overline{X}-\mu$的分别与未知参数σ相关, 无法进行统计推断. 自然的办法是用样本方差S^2代替总体方差σ^2. 问题是,这时对应的分布是什么? 即

$$T=:\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim ?$$

统计学家E.S. Pearson一直认为仍然是正态分布.

当样本容量n比较大时, Pearson的结论差不多是正确的, 因为

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \xrightarrow{D} N(0,1), \quad n\to\infty.$$

相当一段时间没有人敢怀疑Pearson 的论断, 而且在实践中也是这样使用的.

但是, W. S. Gosset 恰好遇到的是小样本问题, 他发现, 在小样本场合用标准正态分布来近似T的分布效果不好，会低估误差. 他导出了T的分布是自由度为$n-1$的t 分布(见下面定理). 这个发现导致了对抽样分布的深入研究,并产生了丰富的成果. 因此, t分布的发现被认为是统计学发展史上的一件大事. 由此发现了t分布.

William Gosset(1876-1937)

- 1908年提出t-分布

Theorem

定理T1 设$X_1, ..., X_n$为来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}$为样本均值,S^2为样本方差, 则

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

定理T1的证明 记

$$T=\frac{n^{1/2}(\overline{X}-\mu)/\sigma}{\sqrt{((n-1)S^2/\sigma^2)/(n-1)}}=\frac{U}{\sqrt{K/(n-1)}},$$

其中$U=n^{1/2}(\overline{X}-\mu)/\sigma$, $K=(n-1)S^2/\sigma^2$. 由定理2.2.3, $U\sim N(0,1)$, $K\sim\chi^2(n-1)$, 且U与K相互独立. t 分布的定义知$T\sim t(n-1)$.

Theorem

定理T2 设$X_1, X_2, ..., X_m,\ i.i.d. \sim N(\mu_X, \sigma^2)$, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ $i.i.d.\ \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ (即两个总体的方差相等),
且$X_1, X_2, ..., X_m$与$Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 相互独立. 记$\overline{X}, S_X^2$分别为$X_1, X_2, ..., X_m$ 的样本均值和样本方差, $\overline{Y}, S_Y^2$为$Y_1, Y_2, ..., Y_n$的样本均值和样本方差. 并记

$$S_W^2 = \frac{1}{m+n-2}\{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2\},$$

则有

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_W\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2).$$

Theorem

定理T3 当$n \to \infty$时, $t(n)$依分布收敛到$N(0,1)$分布.

Theorem

定理T3 当$n \to \infty$时, $t(n)$依分布收敛到$N(0,1)$分布.

这说明, 当n足够大时, t分布与标准正态分布没有什么太大的区别.

当n较小时, t分布与标准正态分布的区别还是不能忽略的. 注意观察t分布的密度式可以看出,
当$|x| \to \infty$时,$p(x;n)$是$|x|^{-(n+1)}$数量级的; 而标准正态分布的密度函数为$e^{-x^2/2}$数量级的. 我们可以形象地说: t分布的"尾重"; 而标准正态分布的"尾轻".

t分布的矩:

只有当$r < n$ $(n > 1)$时，r阶矩才存在. $t(n)$的密度函数是偶函数, 故其奇数阶矩为0,而偶数阶矩为

$$\begin{aligned} \mathsf{E}T^r =& \mathsf{E}N(0,1)^r \mathsf{E}\left(\chi(n)/n\right)^{-r/2} \\ =& \frac{n^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{r+1}{2})\Gamma(\frac{n-r}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad r < n \text{ 为偶数.} \end{aligned}$$

特别地

$$\mathsf{E}(t(n)) = 0, \quad n \geq 2;$$

$$\mathsf{Var}(t(n)) = \frac{n}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

因此, t分布的方差（当存在时）比标准正态分布的方差大.

非中心t分布

Definition

定义 设$X \sim N(\delta, 1)$, $K \sim \chi^2(n)$, 且X 与K 相互独立, 则

$$T = \frac{X}{\sqrt{K/n}}$$

的分布定义为自由度为n、非中心参数为δ的非中心t分布，记为$T \sim t(n, \delta)$或$T \sim t_{n,\delta}$.

$t_{n,\delta}$**的密度:** 令$S=K$. 考察变换:

$$\begin{cases} t=\frac{x}{\sqrt{y/n}}, \\ s=y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t\sqrt{s/n}, \\ y=s. \end{cases}$$

则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}=\begin{vmatrix} \sqrt{s/n} & \frac{t\sqrt{1/n}}{2\sqrt{s}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\sqrt{s/n}.$$

所以(T,S)的密度函数为

$$
\begin{aligned}
p(t,s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t\sqrt{s/n}-\delta)^2}{2}} \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} s^{n/2-1} e^{-s/2} \sqrt{s/n} \\
&= e^{-\delta^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 s/n}{2}} e^{\delta t\sqrt{s/n}} \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} s^{n/2-1} e^{-s/2} \sqrt{s/n} \\
&= e^{-\delta^2/2} \frac{(1/2)^{(n+1)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\delta t)^j}{j!} \frac{1}{n^{\frac{j+1}{2}}} s^{\frac{n+j+1}{2}-1} \exp\left\{-s\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$-\infty < t < \infty, \quad s \geq 0.$$

所以(T,S)的密度函数为

$$p(t,s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t\sqrt{s/n}-\delta)^2}{2}}\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}s^{n/2-1}e^{-s/2}\sqrt{s/n}$$

$$=e^{-\delta^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2s/n}{2}}e^{\delta t\sqrt{s/n}}\frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}s^{n/2-1}e^{-s/2}\sqrt{s/n}$$

$$=e^{-\delta^2/2}\frac{(1/2)^{(n+1)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\delta t)^j}{j!}\frac{1}{n^{\frac{j+1}{2}}}s^{\frac{n+j+1}{2}-1}\exp\left\{-s\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$-\infty<t<\infty,\quad s\geq 0.$$

因此T的密度函数为

$$p(t)=\int_0^{\infty}p(t,s)ds$$

$$=e^{-\delta^2/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\delta^j}{j!}\frac{(1/2)^{(n+1)/2}\Gamma(\frac{n+j+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n/2)n^{\frac{j+1}{2}}}\left(\frac{t^2}{2n}+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n+j+1}{2}}t^j$$

F分布

(Snedecor's F distribution/Fisher - Snedecor distribution)

Definition

定义 设$K_1 \sim \chi^2(m)$, $K_2 \sim \chi^2(n)$, 且K_1与K_2相互独立, 则

$$F = \frac{K_1/m}{K_2/n}$$

的分布定义为具有自由度(m, n)(或称为第一自由度为m, 第二自由度为n)的F分布, 记为$F \sim F(m, n)$或$F \sim F_{m,n}$.

F分布

(Snedecor's F distribution/Fisher - Snedecor distribution)

Definition

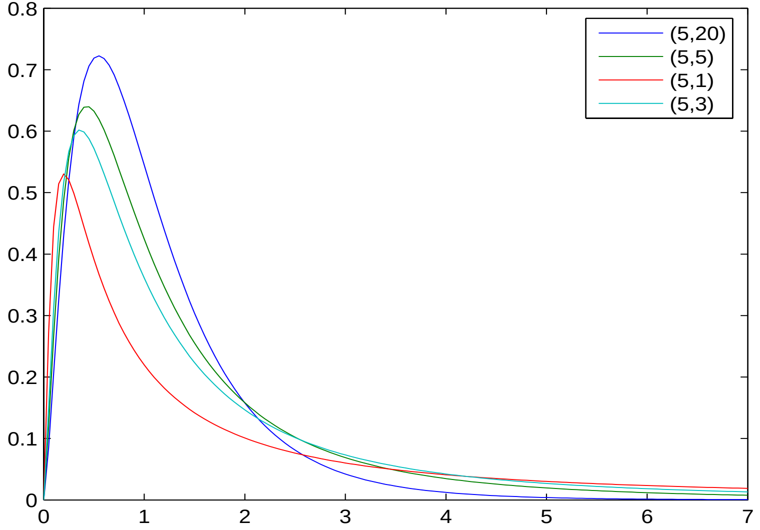
定义 设$K_1 \sim \chi^2(m)$, $K_2 \sim \chi^2(n)$, 且K_1与K_2相互独立, 则

$$F = \frac{K_1/m}{K_2/n}$$

的分布定义为具有自由度(m,n)(或称为第一自由度为m, 第二自由度为n)的F分布, 记为$F \sim F(m,n)$或$F \sim F_{m,n}$.

$F(m,n)$的密度函数为

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} \frac{x^{m/2-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}, \quad x > 0.$$


(5,20)
(5,5)
(5,1)
(5,3)
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7

性质: 若$F \sim F(n,m)$, 则$1/F \sim F(m,n)$.

F分布的主要用途是在方差分析中. 在两正态总体的方差比检验中要用到下面的定理.

Theorem

定理F1 设$X_1, X_2, ..., X_m$, $i.i.d.\sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ $i.i.d. \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, 且$X_1, X_2, ..., X_m$与$Y_1, Y_2, ..., Y_n$ 相互独立. 记S_X^2为$X_1, X_2, ..., X_m$ 的样本方差, S_Y^2 为$Y_1, Y_2, ..., Y_n$的样本方差. 则

$$F = \frac{{S_X}^2/\sigma_X^2}{{S_Y}^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

定理F1的证明 由定理2.2.3,

$$K_1 = (m-1){S_X}^2/\sigma_X^2 \sim \chi^2(m-1),$$

$$K_2 = (n-1){S_Y}^2/\sigma_Y^2 \sim \chi^2(n-1),$$

且由$X_1,...,X_m$与$Y_1,...,Y_n$相互独立知${S_X}^2$ 与${S_Y}^2$相互独立，因而K_1与K_2相互独立. 由F分布定义有

$$F = \frac{K_1/(m-1)}{K_2/(n-1)} \sim F(m-1, n-1).$$

非中心F分布

Definition

定义 设$K_1 \sim \chi^2(m, \lambda)$, $K_2 \sim \chi^2(n)$,且K_1与K_2相互独立, 则

$$F = \frac{K_1/m}{K_2/n}$$

的分布定义为具有自由度(m, n)和非中心参数为λ的非中心F分布.记为$F \sim F(m, n, \lambda)$或$F \sim F_{m,n,\lambda}$.

$F_{m,n,\lambda}$ 的密度函数为

$$f_{m,n,\lambda}(x) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} f_{m+2j,n}(x),$$

其中$f_{m+2j,n}(x)$ 为$F(m+2j,n)$的密度函数.

$F_{m,n,\lambda}$ 的密度函数为

$$f_{m,n,\lambda}(x) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} f_{m+2j,n}(x),$$

其中$f_{m+2j,n}(x)$ 为$F(m+2j,n)$的密度函数.

$$\chi^2(x,n,\lambda) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \chi^2(x, n+2j).$$

有了统计量T的密度函数或分布函数后，我们可以计算$\mathsf{P}(T < x)$的概率，

有了统计量T的密度函数或分布函数后，我们可以计算$\mathsf{P}(T < x)$的概率，在统计中我们常常要计算的是，给定一个概率α，找t_α使得

$$P(T < t_\alpha) = \int_{-\infty}^{t_\alpha} p_T(t)dt = \alpha.$$

t_α就是α分位数.

分布的上α分位点

Definition

定义 设X的概率密度函数为$f(x)$, 对于给定的正数α, $0<\alpha<1$, 若存在实数x_α满足

$$\mathsf{P}(X \geq x_\alpha) = \int_{x_\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \alpha, \qquad (*)$$

则称点x_α为X的上侧α分位点(或上侧α分位数), 简称上α分位点(或上α分位数).

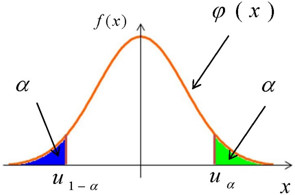
若X服从某分布, 则称x_α为该分布的上α分位点.

标准正态分布的上α分位数

设$X \sim N(0,1)$,对于给定的α, $0<\alpha<1$,称满足条件

$$P\{X>u_\alpha\}=\int_{u_\alpha}^{\infty}\varphi(x)\,dx=\alpha$$

的点u_α为标准正态分布的上α分位数, u_α值可查标准正态分布表.



标准正态分布的上α分位数

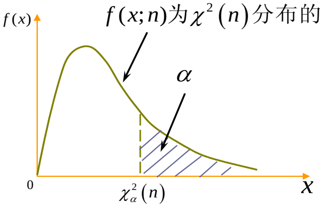
$$\boxed{u_{1-\alpha}=-u_\alpha}$$

χ^2分布的上α分位数

对给定的$\alpha, 0<\alpha<1$,称满足条件

$$\int_{\chi_\alpha^2(n)}^{\infty} f(x;n)dy = \alpha$$

的点$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位数,其中$f(x;n)$为$\chi^2(n)$分布的概率密度函数.上α分位数$\chi_\alpha^2(n)$的值可查χ^2分布表得到.



χ^2分布的上α分位数

当$n>45$时,有

$$\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2,$$

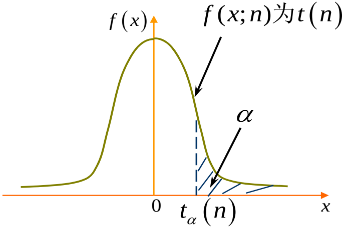
其中u_α为标准正态分布的上α分位数.

t分布的上α分位数

对给定的α，$0<\alpha<1$, 称满足条件

$$\int_{t_\alpha(n)}^{\infty} f(x;n)\,dx=\alpha$$

的点$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位数，其中$f(x;n)$为$t(n)$分布的概率密度函数. 上α分位数$t_\alpha(n)$可查t分布表得到.



t分布的上α分位数

$$\boxed{t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)}$$

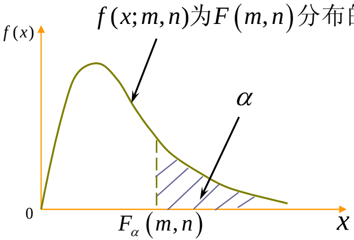
当$n>45$时，有
$t_\alpha(n)\approx u_\alpha$.

F分布的上α分位数

对于给定的α，$0<\alpha<1$，称满足条件

$$\int_{F_\alpha(m,n)}^{\infty} f(x;m,n)\,dx=\alpha$$

的点$F_\alpha(m,n)$为$F(m,n)$分布的上α分位数，其中$f(x;m,n)$为$F(m,n)$的概率密度函数. $F_\alpha(m,n)$的值可查F分布表.



F分布的上α分位数

$$F_{1-\alpha}(m,n)=[F_\alpha(n,m)]^{-1}$$

beta分布

Definition

定义 具有下列密度函数的分布称为beta分布:

$$p(x;a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\qquad 0<x<1.$$

其中$a>0$, $b>0$为形状参数.

beta分布

Definition

定义 具有下列密度函数的分布称为beta分布:

$$p(x;a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\qquad 0<x<1.$$

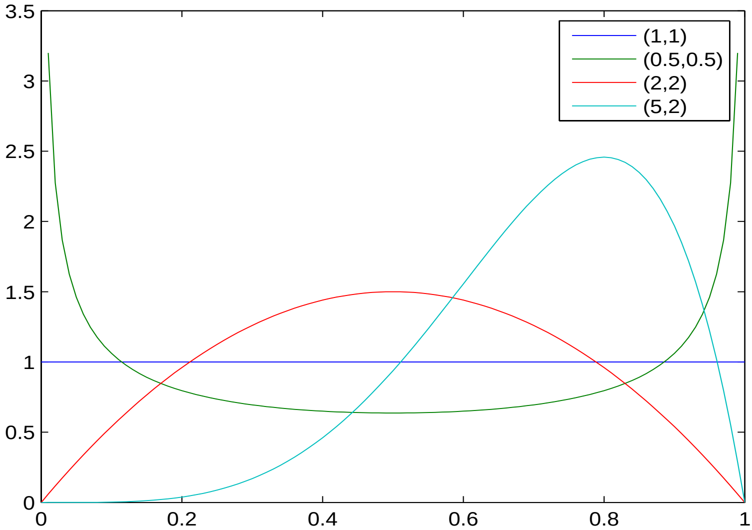
其中$a>0$, $b>0$为形状参数.

由于$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$,所以beta分布的密度函数可写为:

$$p(x;a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},\qquad 0<x<1$$

其中$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$.

以后我们用$beta(a,b)$或$Be(a,b)$或$\beta(a,b)$来记beta分布.


(1,1)
(0.5,0.5)
(2,2)
(5,2)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

在β分布中，

当$a=b=1$时，我们就得到$(0,1)$区间上的均匀分布$U(0,1)$.

当$a=b=1/2$时，我们就得到$beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\quad 0<x<1,$$

此分布为反正弦分布.

β分布的k阶矩为

$$\mathsf{E}X^k = \frac{B(a+k,b)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}.$$

β分布的均值和方差分别为

$$\mathsf{E}(beta(a,b)) = \frac{a}{a+b},$$

$$\mathsf{Var}(beta(a,b)) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Example

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. 则

$$X_{(k)} \sim beta(k, n-k+1).$$

Example

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. 则

$$X_{(k)} \sim beta(k, n-k+1).$$

事实上，$X_{(k)}$的密度函数为

$$p(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \quad 0 < x < 1.$$

Example

设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim U(0,1)$. 则

$$X_{(k)} \sim beta(k, n-k+1).$$

事实上, $X_{(k)}$的密度函数为

$$p(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \quad 0 < x < 1.$$

一般地, 设$X \sim F(x)$, $F(x)$是连续函数, 可以证明, $F(X) \sim U(0,1)$. 因此

$$F(X_{(k)}) \sim beta(k, n-k+1).$$

β分布与Γ分布的关系

Theorem

定理 设$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$,$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且$X_1$与$X_2$独立, 则

$$
\begin{aligned}
Y_1 =& X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda), \\
Y_2 =& \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim beta(\alpha_1, \alpha_2),
\end{aligned}
$$

且Y_1与Y_2独立.

证明:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 y_2, \\ x_2 &= y_1(1-y_2), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 1-y_2 & -y_1 \end{vmatrix} = -y_1.$$

(Y_1,Y_2)的密度函数为

$$\begin{aligned} p(y_1,y_2) =& \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}(y_1y_2)^{\alpha_1-1}e^{-\lambda y_1 y_2} \\ & \cdot \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(y_1(1-y_2))^{\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1(1-y_2)}y_1 \\ =& \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}y_1^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda y_1}\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}y_2^{\alpha_1-1}(1-y_2)^{\alpha_2-1}. \end{aligned}$$

Fisher Z分布(βII型分布)

Definition

定义 具有下列密度函数的分布称为Z分布:

$$p(x;a,b)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}},\qquad x>0.$$

其中$a>0$, $b>0$. 记为$Z(a,b)$.

Z分布的密度函数可写为:

$$p(x;a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}},\qquad x>0.$$

Z分布的k阶矩为

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}X^k &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^\infty \frac{x^{k+a-1}}{(1+x)^{(k+a)+(b-k)}}dx \\
&= \frac{B(a+k,b-k)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(b-k)}{\Gamma(b)} \\
&= \frac{(a+k-1)(a+k-2)\cdots a}{(b-1)(b-2)\cdots(b-k)}.
\end{aligned}$$

Z分布的k阶矩为

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X^k &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^\infty \frac{x^{k+a-1}}{(1+x)^{(k+a)+(b-k)}}dx \\ &= \frac{B(a+k,b-k)}{B(a,b)} = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\Gamma(b-k)}{\Gamma(b)} \\ &= \frac{(a+k-1)(a+k-2)\cdots a}{(b-1)(b-2)\cdots(b-k)}. \end{aligned}$$

特别地

$$\mathsf{E}X = \frac{a}{b-1}, \quad b>1; \quad \mathsf{E}X^2 = \frac{(a+1)a}{(b-1)(b-2)}, \quad b>2.$$

Z分布与β分布的关系

$$Y \sim beta(a,b) \implies X = \frac{Y}{1-Y} \sim Z(a,b),$$

$$X \sim Z(a,b) \implies Y = \frac{X}{1+X} \sim beta(a,b).$$

Corollary

推论1 设随机变量X_1，X_2相互独立，$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$，$i = 1, 2$，则

$$X_1/(X_1 + X_2) = \frac{X_1/X_2}{1 + X_1/X_2} \sim beta(\alpha_1, \alpha_2).$$

Z分布与F分布的关系

Corollary

推论2

$$F \sim F(n,m) \Longrightarrow \frac{n}{m}F \sim Z(\frac{n}{2},\frac{m}{2}).$$

Z分布与F分布的关系

Corollary

推论2

$$F \sim F(n,m) \Longrightarrow \frac{n}{m}F \sim Z(\frac{n}{2},\frac{m}{2}).$$

证：写$F=\frac{X_1/n}{X_2/m}$，其中$X_1 \sim \chi^2(n)=\Gamma(n/2,1/2)$，$X_2 \sim \chi^2(m)=\Gamma(m/2,1/2)$，且$X_1$与$X_2$独立. 从而可得

$$\frac{n}{m}F=\frac{X_1}{X_2} \sim Z(\frac{n}{2},\frac{m}{2}).$$

因此,F分布的密度函数可利用Z分布的密度函数导出.

$$\mathsf{E}F(n,m)=\frac{m}{n}\mathsf{E}Z(n/2,m/2)=\frac{m}{n}\frac{n/2}{m/2-1}=\frac{m}{m-2}.$$

因此,F分布的密度函数可利用Z分布的密度函数导出.

$$\mathsf{E}F(n,m)=\frac{m}{n}\mathsf{E}Z(n/2,m/2)=\frac{m}{n}\frac{n/2}{m/2-1}=\frac{m}{m-2}.$$

此外

Corollary

推论3 设随机变量$X\sim F(n,m)$,
则$(nX/m)/(1+nX/m)\sim\beta(n/2,m/2)$.

§2.6 指数型分布族(Exponential family)

Definition

定义 设有参数分布族$\mathcal{F} = \{p(x;\theta) : \theta \in \Theta\}$, $p(x;\theta)$ 为分布的密度函数(pdf: probability density function) 或分布列(pmf: probability mass function). 若$p(x;\theta)$可表示成如下形式

$$p(x;\theta) = c(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\theta)T_j(x)\right\} h(x),$$

则称此分布族称为指数型分布族，或简称为指数族. 其中$c(\theta) > 0$, $Q_j(\theta)$ $(j = 1, ..., k)$为定义在参数空间Θ上的函数,与x无关, $h(x) \geq 0$, $T_j(x)$ $(j = 1, ..., k)$ 为与θ无关的函数.

特别地,当$k = 1$时,此分布族称为单参数指数型分布族.

如果令$\lambda_j = Q_j(\theta)$, 若$c(\theta)$可表示成$\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$的函数$c^*(\widetilde{\lambda})$, 那么$p(x;\theta)$可表示成

$$p(x;\widetilde{\lambda}) = c^*(\widetilde{\lambda}) \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_j(x)\right\} h(x).$$

这种形式称为指数型分布族的自然形式(natural form). 此时

$$\Lambda = \left\{\widetilde{\lambda} : \int \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_j(x)\right\} h(x)dx < \infty\right\}$$

称为自然参数空间(natural parametric space).

有很多常用分布族是属于指数型分布族的.

Example

正态分布族$\mathcal{F}=\{N(\mu,\sigma^2),-\infty<\mu<\infty,\sigma>0\}$是指数型分布族.因为它的概率密度可以表示为

$$\begin{aligned} p(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{\mu x}{\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

若取

$$c(\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right\},\quad h(x)=1,$$

$$Q_1(\mu,\sigma)=-\frac{1}{2\sigma^2},\quad Q_2(\mu,\sigma)=\frac{\mu}{\sigma^2},$$

$$T_1(x)=x^2,\qquad T_2(x)=x.$$

根据定义,即可看出这是一个指数型分布族.

Example

二项分布族$\{B(n,\theta):0<\theta<1\}$是指数型分布族.

Example

二项分布族$\{B(n,\theta):0<\theta<1\}$是指数型分布族.

解. 二项分布$b(n,\theta)$的概率分布列为

$$
\begin{aligned}
p(x;\theta) &= \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}\cdot I\{x=0,1,2,\cdots,n\} \\
&= (1-\theta)^n\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^x\binom{n}{x}\cdot I\{x=0,1,2,\cdots,n\} \\
&= (1-\theta)^n\exp\left\{x\log\frac{\theta}{1-\theta}\right\}\binom{n}{x}\cdot I\{x=0,1,2,\cdots,n\}
\end{aligned}
$$

若取

$$c(\theta) = (1-\theta)^n, \quad Q_1(\theta) = \log\frac{\theta}{1-\theta},$$

$$T_1(x) = x, \quad h(x) = \binom{n}{x} \cdot I\{x = 0, 1, 2, \cdots, n\},$$

根据定义,即可看出这是一个指数型分布族.

若取

$$c(\theta) = (1-\theta)^n, \quad Q_1(\theta) = \log \frac{\theta}{1-\theta},$$

$$T_1(x) = x, \quad h(x) = \binom{n}{x} \cdot I\{x = 0, 1, 2, \cdots, n\},$$

根据定义,即可看出这是一个指数型分布族.

若令$\log \frac{\theta}{1-\theta} = \lambda$, 那么二项分布的自然指数族形式为

$$p(x;\lambda) = (1+e^{\lambda})^{-n} \exp\{\lambda x\} \binom{n}{x} \cdot I\{x = 0, 1, 2, \cdots, n\}.$$

自然参数空间为$(-\infty, \infty)$.

Example

均匀分布族$\mathcal{F} = \{U(0,\theta), \theta > 0\}$不是指数型分布族.因为它的概率密度可以表示为

$$p(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x < \theta,$$

其支撑为$(0,\theta)$依赖于参数θ,所以均匀分布族不是指数型分布族.

Theorem

如果总体分布族是指数型分布族, 那么从中抽取的简单随机样本的分布族也是指数型分布族.

Theorem

如果总体分布族是指数型分布族，那么从中抽取的简单随机样本的分布族也是指数型分布族.

因为如果总体X的pdf或pmf为

$$c(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}Q_j(\theta)T_j(x)\right\}h(x),$$

那么样本$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的joint pdf或pmf为

$$c^n(\theta)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}Q_j(\theta)\{T_j(x_1)+\ldots+T_j(x_n)\}\right\}h(x_1)\cdots h(x_n).$$

指数族有一些重要的性质. 首先, 我们定义一个随机变量分布的支撑集为集合$S = \{x : p(x) > 0\}$, 其中$p(x)$为pdf或pmf. 分布的支撑集也就是在求概率时实质上起作用的集合.

指数族有一些重要的性质. 首先, 我们定义一个随机变量分布的支撑集为集合$S=\{x:p(x)>0\}$, 其中$p(x)$为pdf或pmf. 分布的支撑集也就是在求概率时实质上起作用的集合.

由定义不难看出,对于指数族, 支撑集$\{x:p(x;\theta)>0\}=\{x:h(x)>0\}$, 显然与$\theta$无关.

指数族的第一个重要性质是:

指数族分布的支撑集与参数θ无关.

指数族有一些重要的性质. 首先, 我们定义一个随机变量分布的支撑集为集合$S = \{x : p(x) > 0\}$, 其中$p(x)$为pdf或pmf. 分布的支撑集也就是在求概率时实质上起作用的集合.

由定义不难看出,对于指数族, 支撑集$\{x : p(x; \theta) > 0\} = \{x : h(x) > 0\}$, 显然与$\theta$无关.

指数族的第一个重要性质是:

指数族分布的支撑集与参数θ无关.

指数族的第二个重要的性质是: 它有较好的解析性质.

Theorem

设指数族的自然形式中，自然参数空间有内点，其内点集为Θ_0.
设$g(x)$为任一实函数，使得积分

$$G(\theta)=\int_{\mathcal{X}} g(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j T_j(x)\right\} h(x)dx$$

在Θ_0 内有限，则$G(\theta)$的任意阶偏导数在Θ_0内存在且在积分号下求得，

$$\frac{\partial^m G(\theta)}{\partial\theta_1^{m_1}\cdots\partial\theta_k^{m_k}} = \int_{\mathcal{X}} \frac{\partial^m}{\partial\theta_1^{m_1}\cdots\partial\theta_k^{m_k}}\left[g(x)\exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\theta_j T_j(x)\right\} h(x)\right] dx.$$