

# 计算几何入门

## 基础知识

### 精度

```
int dcmp(double x){
    if (fabs(x) < eps)
        return 0;
    return x > 0 ? 1 : -1;
}
```

## 二维几何

向量:  $\vec{v} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

点积:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = x_1y_1 + x_2y_2$

叉积:  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta = x_1y_2 - x_2y_1$

求长度:  $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

求三角形面积:  $|\vec{a} \times \vec{b}|/2$

加减法:  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

直线的表示: 点 + 方向向量

## 极角排序

先算象限, 象限相同再用叉积。

## 凸包

按照  $x$  为第一关键字,  $y$  为第二关键字排序, 分别求出下凸壳和上凸壳。

用栈来求, 求的时候用叉积看是不是在左转。

例. [CF 605C] Freelancer's Dreams (lyc)

有  $n$  个双属性物品，每个物品可以购买实数个。

请在物品总数尽量少的前提下让两个属性分别大于等于  $p, q$ 。

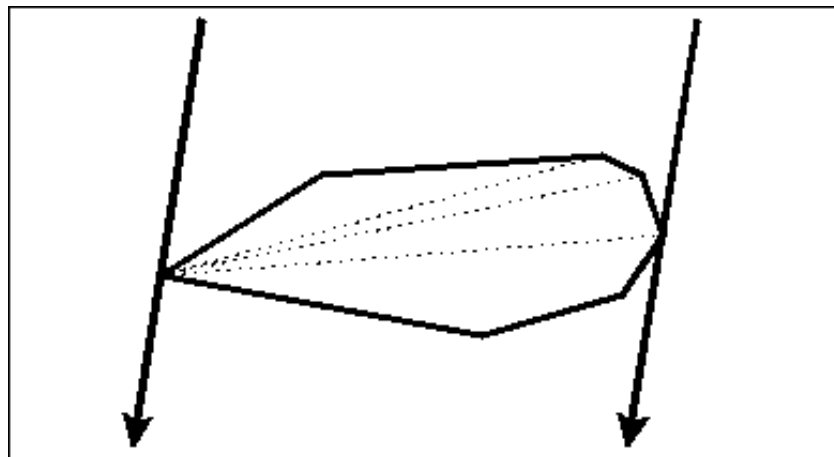
例. [OI Camp 16] 凸包

给出  $n \leq 2000$  个二维点，每个点有  $1/2$  的概率被选中。

问被选中的点集所构成的凸包上点数的期望。

答案乘上  $2^n$  对  $10^9 + 7$  取模。

## 旋转卡壳



例. [CF 682E] Alyona and Triangles (lyc)

给定  $N$  个点，保证从其中选出三个点，形成的最大三角形面积不超过  $S$ ，现在让你找一个面积不超过  $4S$  的三角形，使之覆盖所有点。

## 最小圆覆盖 (lyc)

随机增量法。

## 平面图的欧拉定理 (zlx)

$$R = E - V + 2$$

例. [ASC 05] Circles (zlx)

给出平面上的若干个圆，问能够把平面分成多少个区域。

## 最近点对

例. 平面最近点对

例. [Google CodeJam 09] Min Perimeter (zlx)

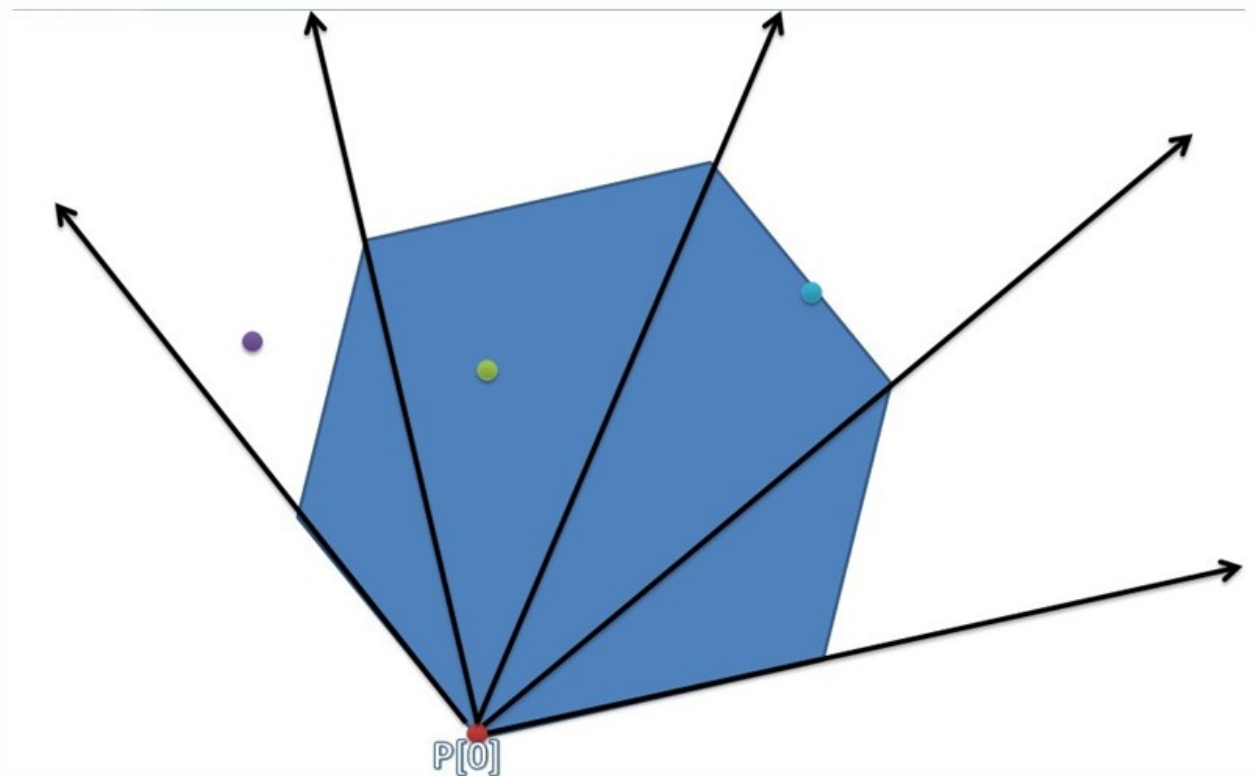
给出平面内的  $n \leq 10^5$  个点，求它们可以形成的周长最小的三角形的周长。

## 闵科夫斯基和 (zyh)

例. [JSOI2018]战争

给出两个凸包  $A, B$  和一些向量，问  $B$  整体按向量  $v$  移动后是否与  $A$  有交。

如何快速判断点在凸包内？



例. 最大有向面积 (zyh)

## 皮克定理 (zyh)

对于一个顶点在格点上的多边形，它内部的整点数  $a$ ，边界上的点数  $b$ ，它的面积  $S$ ，满足

$$2s = 2a + b - 2$$

例. [Bangkok 16] Find C (zyh)

二维平面上有  $A, B$  两个整点，构造  $K$  个整点  $C_1 \dots C_K$ ，使得所有三角形  $ABC_i$  内都没有整点

## 圆的k重面积并 (zyh)

## 三角剖分

[CF 437E] The Child and Polygon (zyh)

给出一个简单多边形，求它的三角剖分数。

假设点逆时针排好并编号 $0 \sim n-1$ ， $dp(i, j)$ 表示 $i \sim j$ 这些点构成的简单多边形的三角剖分数( $i < j$ )，每次从 $i+1 \sim j-1$ 这些点中找出一个 $k$ 与 $i$ 和 $j$ 组成一个三角形，那么这个简单多边形就被分成 $i, i+1, \dots, k$ 构成的简单多边形和 $k, k+1, \dots, j$ 构成的简单多边形，进而有转移方程 $dp(i, j) = \sum(dp(i, k) * dp(k, j))$ ，其中 $i+1 \leq k \leq j-1$ ，且 $k$ 的选择需使得由 $i, j, k$ 三点构成的三角形与划分出来的两个简单多边形不会相交，判这个太麻烦，不如每次都选择向量 $ij$ 右边的点 $k$ ，这样就算相交出现不合法情况在之后的转移中迟早会找不到一个合法的 $k$ 以供转移进而不会对答案有不合法的贡献

## 三维几何

叉积： $\vec{a} \times \vec{b}$ 的大小是三角形的面积，方向垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，可用于求平面法向量。

平面的表示：点 + 法向量

例. [Bytedance Camp] Ray Shoots Planes (zky)

给出  $n \leq 1111$  个平面，保证任意三个平面恰好只有一个公共点。

找出一条从原点出发的射线最多能经过多少个平面。

例. 求四点外接球

## 题目选讲

题解：

乘上  $2^n$  就是求所有情况的点数之和。

凸包上的点数和边数是相同的，所以考虑求边数之和。

枚举一个点，把其余点按照极角排序，然后two pointers。

题解：

如果射线的方向向量  $\vec{r}$  和平面的法向量  $\vec{n}$  的夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ ，则射线可以经过平面。

考虑以射线为法向量的平面  $P$ ，若某个平面的法向量  $\vec{n}$  对应的点在  $P$  的上方（或恰在  $P$  上，可以进行微小的旋转使得它被移到平面上方），则可以被射线经过。

枚举一个给定点  $T$ ， $P$  绕着  $OT$  旋转，从  $OT$  方向看过去，则问题变成了，使得最多的点在一条直线的上方。

这个问题只需要极角排序 + two pointers 就行。

最小圆覆盖 (lyc)

闵科夫斯基和 (zyh)