金融数学

基础金融资产

股票（Stock）

代表其持有者对股份公司的所有权

融资和融券

融券即股票的卖空交易

债券（Bond）

各类经济主体为筹措资金向债券投资者出具的，承诺按照一定利率支付利息，到期偿还本金的债权债务凭证

流动性风险

二级市场上债券价值受供求关系影响

通货膨胀风险

信用风险

信用变动，包括违约

商业票据（Commercial Paper）

无担保短期票据，短期融资券

外汇（Foreign Exchange）

狭义外汇

以各国货币表示的可用于国际债权债务结算的各种支付手段

可支付性、可获得性、可换性

广义外汇

一切以外币表示的资产

金融衍生品

用来规避二级市场中的不确定性风险

远期（Forward）

买卖双方承诺在将来某天以规定价格买进或卖出一定数量的标的物。

多头（Long Position）和空头（Short Position）

利用复制技术（Replication）、无套利原理（Absence of Arbitrage Principal）实现定价

套利机会

用X_t和Y_t表示两个资产在t时刻的价值，$X_T = Y_T$，若$\exists t_0 < T, X_{t_0} \neq Y_{t_0}$，则称这两个资产存在套利机会。

无套利原理

若$X_T = Y_T$，则对$\forall t_0 < T, X_{t_0} = Y_{t_0}$。

远期定价公式

组合一：一份远期多头和存款Ke^{-rT}

组合二：一份无红利股票多头

两者在时刻T的价值都为股票价值S_T，所以t时刻的远期多头价值为

$f_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

签订远期多头的价值f_t为0，利用无套利原理可知

$K_0 = S_0e^{rT}$

远期利率协议（Forward Rate Agreements，FRA）

买卖双方从未来某时刻开始，在特定时期内按协议利率借贷一笔数额确定的名义本金的协议。

用来规避利率风险

远期利率公式

组合一：本金为Ke^{tT_1}的T_1期存款，和一份本金为K的远期利率协议空头

组合二：本金为Ke^{rT_1}的T_2期存款

本金相同，利用无套利原理知：

$$Ke^{r_{12}(T_2-T_1)} = Ke^{-r_1T1}e^{r_2T_2}$$

$$r_{12} = \frac{r_2T_2-r_1T_1}{T_2-T_1}$$

远期外汇合约（Forward Exchange Contracts）

买卖双方在将来某一时间按约定汇率买卖外汇的合约。

直接远期外汇合约（Outright Forward Foreign Exchange Contracts）

远期外汇综合协议（Synthetic Agreement for Forward Exchange，SAFE）

即远期的远期外汇协议

期货（Future）

协议双方约定在将来某个日期按约定条件买卖一定数量的标的物的标准化协议。

期货是标准化合约，远期是非标准化合约

股指期货（Stock Index Future）

最重要的金融期货，不需要进行标的物的交割，只需要现金结算

期权（Option）

赋予购买者在规定期限内按约定价格买卖一定数量标的资产权利的合约。

看涨期权（Call Option）、看跌期权（Put Option）

欧式期权（European Option）、美式期权（American Option）、百慕大式期权（Bermudan Option）

欧式只能在到期日执行，美式能在任意时刻执行，百慕大式能在某几个约定时间执行

期权金

签订期权需要付出一定代价

价差（Spreads）组合

降低高杠杆的风险

欧式期权定价不等式

记$PV(\Pi_T)$为T时刻产生的现金流Π_T的现值（Present Value）

由于$(S_T-K)^+<S_T$，$PV((S_T-K)^+)<PV(S_T)$

即$C_t<S_t$

组合一：一个欧式看涨期权合约多头和存款Ke^{-rT}

组合二：一份不支付红利的股票多头

$\Pi_T^1 = (S_T - K)^+ + K \geq S_T = \Pi_T^2$

利用无套利原理有

$\Pi_t^1 \geq \Pi_t^2$

所以$C_t + Ke^{-rT} > S_t$

即$C_t > (S_t - Ke^{-rT})^+$

因而有

$(S_t - Ke^{-rT})^+ < C_t < S_t$

同理可证

$(Ke^{-rT} - S_t)^+ < P_t < Ke^{-rT}$

欧式期权平价公式

组合一：一个欧式看涨期权多头和存款Ke^{-rT}

组合二：一个欧式看跌期权多头和一份标的股票多头

$\Pi_T^1 = (S_T - K)^+ = \Pi_T^2$

从而有

$\Pi_0^1 = C_0 + Ke^{-rT} = P_0 + S_0 = \Pi_0^2$

美式期权定价不等式

美式期权定价必然不低于欧式期权

美式看涨期权提前实施没有价值

美式看跌期权在股价下跌到$K(1-e^{-r(T-t)})$时可以提前执行

价格上限同欧式期权

即$c_t < S_t$

价格下限由于美式期权可以随时执行，所以

$(S_t - K)^+ \le c_t$

同理有

$(K - S_t)^+ \le p_t < Ke^{-rT}$

美式期权平价不等式