

53)

由于正态分布是指数族，自然参数空间有内点

所以 \bar{X} 是充分完全统计量

令 $Y_i = X_i - a$ ，得极差分布与 a 无关

所以 $\bar{X}, X_{(n)} - X_{(1)}$ 相独立

1)

利用下面的引理

$f(y_1, \dots, y_k)$ 在 (c_1, \dots, c_k) 处连续，若 $y_{n1} \xrightarrow{a.s.} c_1, \dots, y_{nk} \xrightarrow{a.s.} c_k$ ，则
 $f(y_1, \dots, y_k) \xrightarrow{a.s.} f(c_1, \dots, c_k)$

可以证明样本的 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的强相合估计

所以 S^2 是 σ^2 的强相合估计

且由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} E|S^2 - \sigma^2|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E(S^4 + \sigma^4 - 2S^2\sigma^2) = 0$

是均方相合估计

3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(T(X) - \mu \geq \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k X_i / n(n+1) - \mu \geq \epsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k X_i / n(n+1) - \mu \geq \epsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu + \delta - \mu \geq \epsilon) = 0 \end{aligned}$$