Gauss型求积公式

- 问题
  - n次插值构造的插值求积公式至少有n次代数精确度.那么，最高能达多少次，又如何达到.
  - 考虑
$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$
  - 代入$1, x, x^2, \cdots, x^m$看左右相等最高的m是多少.这里x_k, A_k待定.乃有：
$$\begin{gathered}A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = \mu_1\\ A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + \cdots + A_nx_n^2 = \mu_2,\\ \cdots\\ A_1x_1^m + A_2x_2^m + \cdots + A_nx_n^m = \mu_m\\ \mu_k = \int_a^b x^k\, dx, k = 0,1,\cdots m\end{gathered}$$

Gauss型求积公式

- 最高代数精确度的插值求积公式
  - 当$m=2n-1$时方程数等于未知数个数.可望有解(此前节点指定,系数待定时，$m=n-1$有解).求得n个节点$2n-1$次代数精确度的插值求积公式.

练习 试构造高斯求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$.

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2, \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0, \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3}, \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) .$$

Gauss型求积公式

- 最高代数精确度的插值求积公式
  - 一般地
$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$
(其中权函数$w(x) \geq 0$,与各次多项式乘积的积分存在,a, b皆可取∞)也能得到n个节点$2n-1$次代数精确度的插值求积公式.
  - **定义：**若一组节点$a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$,使插值型求积公式具有$2n-1$次代数精度，则称此组节点为**高斯点**，并称此求积公式为**高斯求积公式**。
  - 利用正交多项式可方便地给出结果

Gauss型求积公式节点

- **定理**
  - 设有插值求积公式

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

则它有$2n-1$次代数精确度的充分必要条件是对一切次数不超过$n-1$多项式$q(x)$有

$$\int_a^b w(x)\omega(x)q(x)dx = 0\,,\omega(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$$

  - n次正交多项式在$[a,b]$恰有n个互异零点.取其零点作插值求积公式.

Gauss型求积公式

定理： 高斯求积公式的求积系数全是正的

且 $$w_i=\sum_{k=0}^{n}w_k l_i^2(x_k)=\int_a^b\rho(x)l_i^2(x)\mathrm{d}x,\quad (i=0,1,\cdots,n)$$

推论： 高斯求积公式是稳定的。

$$\because \int_a^b \rho_n(x)\omega_{n+1}^2(x)\mathrm{d}x>0$$

而 $$\sum_{k=0} w_k\omega_{n+1}^2(x_k)=0$$

高斯求积公式的特点：

(1) 代数精度达到最高$2n+1$次；

（2）节点是区间$[a,b]$上的$n+1$次正交多项式的$n+1$个零点.

Gauss型求积公式

- 定理：设f$(x) \in C_{[a,b]}^{2n}$，则Gauss型求积公式的截断误差为

$$R(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b w(x)\omega_n^2(x)dx$$

Gauss-Legendre求积公式

- Gauss-Legendre求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]} f^{(2n)}(\xi), |\xi| < 1$$

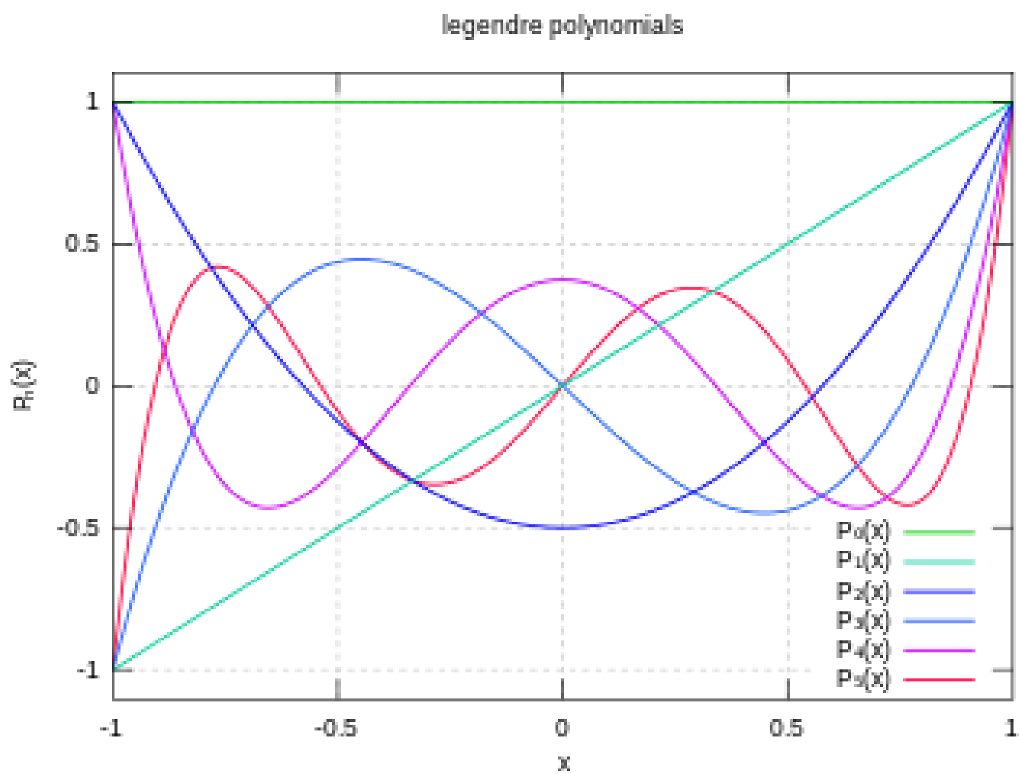
x_k(Legendre多项式的零点), A_k皆可查表.

  - 一般区间$[a,b]$可由变换$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$将其化成$[-1,1]$

- Legendre多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Gauss-Legendre求积公式



	$P_n(x)$
	1
	x
	$\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$
	$\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$
	$\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right)$
	$\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right)$
	$\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right)$
7	$\frac{1}{16}\left(429x^7-693x^5+315x^3-35x\right)$
8	$\frac{1}{128}\left(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35\right)$
9	$\frac{1}{128}\left(12155x^9-25740x^7+18018x^5-4620x^3+315x\right)$
10	$\frac{1}{256}\left(46189x^{10}-109395x^8+90090x^6-30030x^4+3465x^2-63\right)$

Gauss-Legendre求积公式

gauss点个数 n	gauss 点 x_i	权重 A_i	精度
1	x_1=0	A_1=2	1
2	$x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$	$A_1 = A_2 = 1$	3
3	$x_1 = -\sqrt{3/5}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{3/5}$	$A_1 = 5/9$ $A_2 = 8/9$ $A_3 = 5/9$	5
4	$x_1 = -\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$ $x_2 = -\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$ $x_3 = \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$ $x_4 = \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$A_1 = \frac{90-5\sqrt{30}}{180}$ $A_2 = \frac{90+5\sqrt{30}}{180}$ $A_3 = \frac{90+5\sqrt{30}}{180}$ $A_4 = \frac{90-5\sqrt{30}}{180}$	7

Gauss-Legendre求积公式

- 数值求积 $\int_0^1 \cos(x)\, dx = 0.841470984807897$

积分数值点	结果
1	0.877582561890373
2	0.841269847638218
3	0.841471416802676
4	0.841470984317385
5	0.841470984808241
6	0.841470984807896

- 积分精度要和计算量之间取得平衡

Gauss-Laguerre求积公式

- Gauss-Laguerre求积公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$R(f) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \xi > 0$$

x_k(Laguerre多项式的零点), A_k皆可查表.

- Laguerre多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Gauss-Hermite求积公式

- Gauss- Hermite求积公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$R(f) = \frac{(n!)\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \xi > 0$$

x_k(Hermite多项式的零点), A_k皆可查表.

- Hermite多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Gauss-Chebyshev求积公式

- Gauss- Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

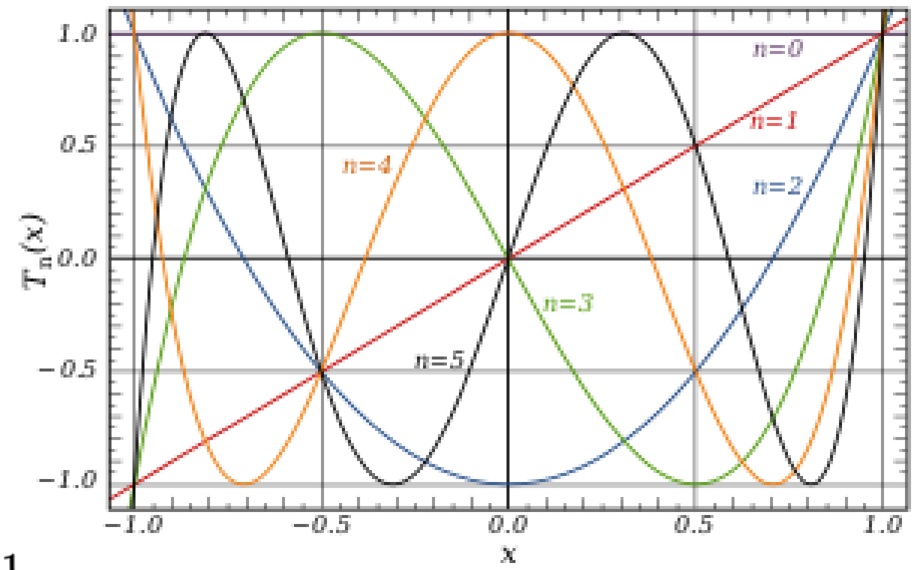
$$R(f) = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\xi), |\xi| < 1$$

x_k(Chebyshev多项式的零点).

- Chebyshev多项式

$$T_n(x) = \cos\big(n\,arccos(x)\big), -1 \le x \le 1$$

Gauss-Chebyshev求积公式



$$
\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\\
T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x\\
T_8(x) &= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1\\
T_9(x) &= 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x\\
T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1\\
T_{11}(x) &= 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x
\end{aligned}
$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

常用正交多项式

$w(t)$	$[a,b]$	Orth. Pol.	Notation	α_k	β_k
1	$[-1,1]$	Legendre	P_n	0	$2\ (k=0)$ $(4-k^{-2})^{-1}(k>0)$
$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	Chebyshev #1	T_n	0	$\pi\ (k=0)$ $\frac{1}{2}\ (k=1)$ $\frac{1}{4}\ (k>1)$
$(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	Chebyshev #2	U_n	0	$\frac{1}{2}\pi\ (k=0)$ $\frac{1}{4}\ (k>0)$
$(1-t)^{\alpha}\ (1+t)^{\beta}$ $\alpha>-1, \beta>-1$	$[-1,1]$	Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	known	known
$t^{\alpha}e^{-t}, \alpha>-1$	$[0,\infty]$	Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$2k+\alpha+1$	$\Gamma(1+\alpha)\ (k=0)$ $k(k+\alpha)\ (k>0)$
e^{-t^2}	$[-\infty,\infty]$	Hermite	H_n	0	$\sqrt{\pi}\ (k=0)$ $\frac{1}{2}k\ (k>0)$