1. 特征函数

特征函数对于研究随机变量的分布函数起着重要作用。

假设X是一个随机变量，具有分布函数$F(x)$。定义

$$\phi(t) = Ee^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x), \quad t \in \mathbb{R}$$

称$\phi(t)$为X的特征函数。

任何随机变量的特征函数总是存在的。

特征函数具有下列基本性质:

(1) $\phi(0)=1$;

(2) $|\phi(t)|\leq 1$;

(3) $\phi(t)$ 在$\mathbb{R}$上一致连续;

(4) $\phi(t)$是非负定的，即对任意实数$t_1,t_2,\cdots,t_m$和复数$z_1,z_2,\cdots,z_m$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} z_i\bar{z}_j\phi(t_i-t_j)\geq 0$$

(5) 如果$E|X|^k < \infty$，那么$\phi(t)$ k次可微，且在0处可进行Taylor展开：

$$\phi(t) = 1 + \sum_{m=1}^{k} \frac{i^m}{m!}\alpha_m t^m + \theta \frac{\beta_k}{(k+1)!} t^{k+1}$$

其中α_m为m-th 半不变累积量，β_k为k-th阶绝对矩，$|\theta| \leq 1$。

(6) 如果X, Y相互独立，那么

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

唯一性定理：分布函数和特征函数相互唯一确定。

(1) 逆转公式

(2) 如果随机变量X的特征函数$\phi(t)$绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|dt < \infty$$

那么X具有密度函数，

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t)dt$$

(3) 如果随机变量X的特征函数$\phi(t)$具有下列形式：

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{int}$$

并且

$$a_n \geq 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$

那么X是离散型随机变量，具有分布

$$P(X = n) = a_n$$

多维随机变量的特征函数

设$X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是n维随机变量，定义

$$\phi(t)=E[\mathrm{e}^{itX^T}]=E[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}],\ t=(t_1,\ldots,t_n)\in R^n,$$

称$\phi(t)$为X的特征函数.

唯一性定理：分布函数和特征函数相互唯一确定。

定理：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立当且仅当对任何 $t=(t_1,\ldots,t_n)\in R^n$，有

$$E[e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}] = E[e^{it_1X_1}]E[e^{it_2X_2}]\cdots E[e^{it_nX_n}],$$

即

$$\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}((t_1,\ldots,t_n)) = \phi_{X_1}(t_1)\phi_{X_2}(t_2)\cdots\phi_{X_n}(t_n).$$

2. *Gamma*分布

X服从参数为$\alpha>0$，$\beta>0$的$Gamma$分布，

$$X \sim \Gamma(\alpha,\beta) \equiv \mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$$

是指具有下面的概率密度函数：

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{for } x>0 \text{ and } \alpha,\beta>0$$

这里$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

$Gamma$函数$\Gamma(\alpha)$的性质：

1.$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0$

2.对正整数$n, \Gamma(n) = (n-1)!$

$Gamma$分布的性质：

1. 如果 $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ ，那么$E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$

2. $\Gamma(1, \beta)$就是参数为β的指数分布

3. 如果$X_1,\ldots,X_n$相互独立，且$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$，
那么$X_1+\ldots+X_n \sim \Gamma(\alpha_1+\ldots+\alpha_n, \beta)$

证明：$1.E(X)=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}x^{\alpha+1-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha+1)}dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

3.Beta分布

X服从参数为$\alpha>0$，$\beta>0$的$Beta$分布，

$X \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ 是指具有密度函数：

$$
\begin{aligned}
f(x;\alpha,\beta) &= \mathrm{constant} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\
&= \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\, du} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

性质：

1.如果$X \sim Beta(\alpha,\beta)$,那么$E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

2.$Beta(1,1)=U(0,1)$

3.如果$X_1,\ldots,X_n$独立同服从$U(0,1)$,对应的次序统计量为$X_{(1)}\le\ldots\le X_{(n)}$，那么

$X_{(k)} \sim Beta(k,n-k+1), k=1,2,\ldots,n$

证明:

$$1.E(X)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}\int_0^1 \frac{1}{B(\alpha+1,\beta)}x^{\alpha+1-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$=\frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

3.对$0<x<1$和最够小的$h>0$,

令N_I表示$X_1,\ldots,X_n$中落在区间I的个数，则

$$P(x<X_{(k)}\le x+h)$$

$$=P(N_{[0,x]}=k-1,N_{(x,x+h]}=1)$$

$$+P(x<X_{(k)}\le x+h,N_{(x,x+h]}\ge 2)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!1!(n-k)!}x^{k-1}h(1-x-h)^{n-k}+o(h)$$

这是因为$P(x < X_{(k)} \le x+h, N_{(x,x+h]} \ge 2)$

$$\le P(N_{(x,x+h]} \ge 2) = 1 - P(N_{(x,x+h]} = 0) - P(N_{(x,x+h]} = 1)$$

$$= 1-(1-h)^n - nh(1-h)^{n-1} = o(h)$$

所以对$0 < x < 1$,

$$f_{X_{(k)}}(x) = F'_{X_{(k)}}(x) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{P(x < X_{(k)} \le x+h)}{h}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$\therefore \quad X_{(k)} \sim Beta(k, n-k+1)$$