第一章

一. 解:(1) 设X_i为对第i枚硬币抛掷10次出现正面的次数,则$X = X_1 + \cdots + X_N$. 对于非负整数n, 在$N = n$的条件下, $X_1, \cdots, X_n$相互独立且$X_i \sim B(10, 0.5)$, 所以

$$E(X|N = n) = E(X_1 + \cdots + X_N|N = n) = E(X_1 + \cdots + X_n|N = n) = n \times 10 \times 0.5 = 5n.$$

故$E(X|N) = 5N$.

(2)

$$E(X) = E[E(X|N)] = E(5N) = 5E(N) = 5\lambda.$$

二. 解:(1) 由题意$X_1 \sim U(0, 1)$, 且在$X_1 = x_1$的条件下, $X_2 \sim U(0, x_1)$. 所以对于任意$0 < x_1 < 1$有$E(X_2|X_1 = x_1) = x_1/2$, 因此$E(X_2|X_1) = X_1/2$, 从而

$$E(X_2) = E[E(X_2|X_1)] = E(X_1)/2 = 1/4.$$

(2) 由题意在$X_2 = x_2$的条件下, $X_3 \sim U(0, x_2)$. 所以对于任意$0 < x_2 < 1$有
$E(X_3|X_2 = x_2) = x_2/2$, 因此$E(X_3|X_2) = X_2/2$, 从而

$$E(X_3) = E[E(X_3|X_2)] = E(X_2)/2 = 1/8.$$

第6题(书). 解:(2) 对于任意非负整数n,

$$\begin{aligned}
P(X = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = n|N = k)P(N = k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} P(X = n|N = k)P(N = k) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} C_k^n p^n (1-p)^{k-n} (e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}) \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^{k-n}}{(k-n)!} \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

由上知X服从参数为$p\lambda$的泊松分布.

第9题(书). 解:

$$\begin{aligned} E(X, X\text{为奇数}) &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= \lambda P(X\text{ 为偶数}). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} P(X\text{ 为偶数}) &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right] \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{2}\left[e^{\lambda}+e^{-\lambda}\right] \\ &= \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} E(X|X\text{为奇数}) &= \frac{E(X, X\text{为奇数})}{P(X\text{为奇数})} \\ &= \frac{\lambda P(X\text{ 为偶数})}{1-P(X\text{ 为偶数})} \\ &= \lambda\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}. \end{aligned}$$

第27题(书). 证明:(1)

$$E(X)=E(\int_0^X dx)=E(\int_0^{\infty}1_{\{x<X\}}dx).$$

由于$1_{\{x<X\}}$非负,由Fubini定理得:

$$E(X)=\int_0^{\infty}E(1_{\{x<X\}})dx=\int_0^{\infty}[1-F(x)]dx.$$

(2) 令$Y=X\wedge c$, 则Y非负且$F_Y(x)=P(Y\le x)=\begin{cases} F(x), & x<c; \\ 1, & x\ge c. \end{cases}$ 由(1)知:

$$E(X\wedge c)=E(Y)=\int_0^{\infty}[1-F_Y(x)]dx=\int_0^{c}[1-F(x)]dx.$$

(3) 由于$|X1_{\{X>x\}}|\le X$且$EX<\infty$, 又$\lim_{x\to\infty}X1_{\{X>x\}}=0$,由$Lebesgue$控制收敛定理知: $\lim_{x\to\infty}E(X1_{\{X>x\}})=0$. 又由于对任何$x>0$,有

$$0\le xP(X>x)=xE(1_{\{X>x\}})\le E(X1_{\{X>x\}}).$$

所以$\lim_{x\to\infty} xP(X > x)$.