第二章　插值法

- 引言
- 线性插值
- 二次插值
- n次插值
- 分段线性插值
- Hermite插值
- 分段三次Hermite插值
- 三次样条函数
- 三次样条函数插值
- 数值微分

引言

- 提法
  - 已知函数表$y_i = f(x_i)$即n个点$(x_i, y_i), i = 0,1,2,\cdots,n$,找近似函数$\phi(x)$满足$\phi(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n$
  - 插值节点(互异): $x_i, i = 0,1,2,\cdots,n$
  - 插值函数:$\phi(x)$
- 背景
  - 函数表达式太繁不便使用
  - 函数由表给出
- 代数插值、三角插值

线性插值

- 线性插值问题

  已知$y_i = f(x_i), i = 0,1,\cdots,n$

  求 $\phi(x) = a_0 + a_1 x$

  满足 $\phi(x_i) = y_i, i = 0,1$

  - 二元一次方程组 $a_0 + a_1 x_0 = y_0$

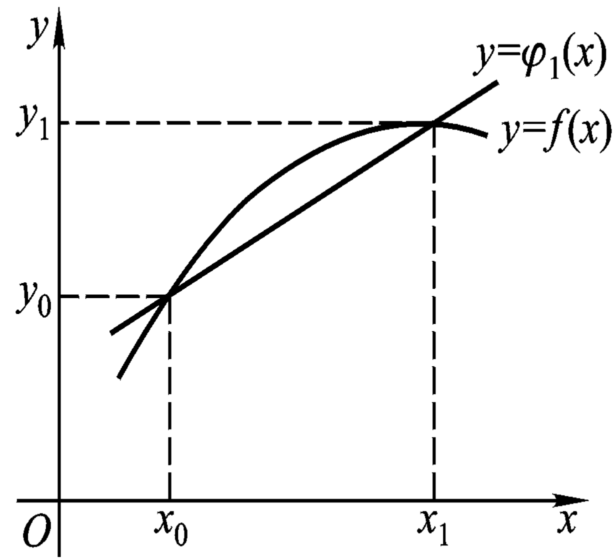
    $a_0 + a_1 x_1 = y_1$

  - 过两点作一直线

线性插值惟一性

- 解的存在惟一性
  - 根据Cramer法则解存在而且惟一

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0 \neq 0$$



  - 几何上过两点有一条且仅有一条直线

线性插值：Newton公式

- 点斜式:Newton公式

$$\phi(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x - x_0\ )$$
$$= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

  - 一阶均差(差商)

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

  - 均差是对称的： $f[x_1, x_0] = f[x_0, x_1]$
    - 定义可见
    - 都是线性插值函数首项系数(惟一)

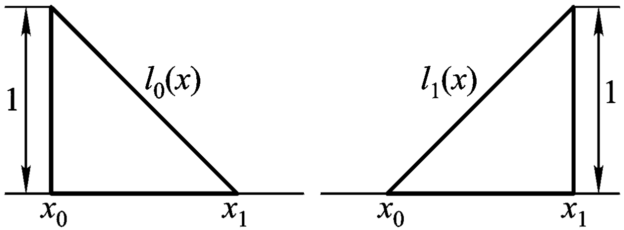
线性插值：Lagrange公式

- 两点式:Lagrange公式

$$\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$$

  - 线性插值基函数

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$



  - 特解

x_i	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

线性插值：Aitken公式

- Aitken公式

$$\phi(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} y_0 & x-x_0 \\ y_1 & x-x_1 \end{vmatrix}$$

- 余项定理
  - 设$\phi(x)$是$f(x)$过x_0,x_1的线性插值函数，$f(x)\in C^2[a,b],x_0,x_1,x\in[a,b]$,则有$\xi\in(a,b)$,使

$$R(x)=f(x)-\phi(x)=\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)$$

  - 特别，若$x_0\le x\le x_1$,则有

$$|R(x)|\le\frac{1}{8}(x_1-x_0)^2\max|f''(x)|$$

二次插值

- 二次插值问题
  - 求 $\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$
    满足 $\phi(x_i) = y_i, i = 0,1,2$
  - 三元一次方程组

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

二次插值惟一性

- 解的惟一性
  - 根据Cramer法则解存在而且惟一

$$D=\begin{vmatrix}1 & x_0 & x_0^2\\ 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\end{vmatrix}=(x_1-x_0)(x_2-x_0)(x_2-x_1)\neq 0$$

  - 由代数基本定理: 设$\psi(x)$也是插值函数,则差$h(x)=\phi(x)-\psi(x)$是二次多项式,并有三个零点x_0,x_1,x_2.由代数基本定理可知$h(x)\equiv 0,\phi(x)\equiv\psi(x)$

二次插值:Newton公式

- Newton公式

$$\phi(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ +f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

  - 二阶均差(差商)

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$

  - 对称性:二阶均差自变量任意排列时不变. 因为二阶均差都等于a_2,二次插值函数首项系数惟一.

Newton公式推导

- 推导

二次插值函数可由一次插值函数加一个二次项:

$$\varphi(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+C(x-x_0)(x-x_1)$$

只要选择 C 使得 $\varphi(x_2)=y_2$,即

$$f(x_2)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_0)+C(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

可得

$$C=(f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1])/(x_2-x_1)$$

引入函数在 x_0,x_1,x_2 的二阶均差(差商)的定义:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1}$$

则有 $\varphi(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$

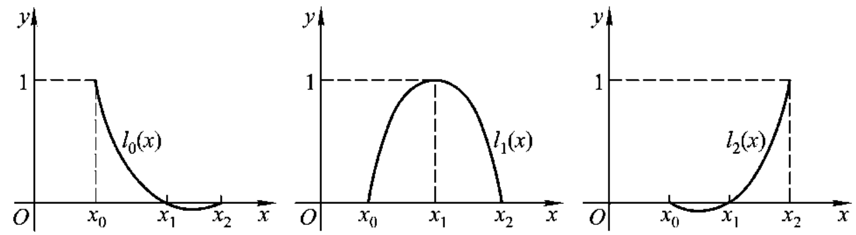
二次插值:Lagrange公式

- Lagrange公式
  - $\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$
  - 二次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$



x_i	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

二次插值:Aitken公式

- Aitken公式
$$\phi_{012}(x) = \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix}\phi_{01}(x) & x - x_1 \\ \phi_{02}(x) & x - x_2\end{vmatrix}$$
- 余项定理
  - 设$\phi(x)$是$f(x)$过x_0, x_1, x_2的二次插值函数 $f(x) \in C^3[a,b], x_0, x_1, x_2, x \in [a,b]$, 则有$\xi \in (a,b)$,使
$$R(x) = f(x) - \phi(x)$$
$$= \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

插值举例

- 例：取节点$x_0 = 0, x_1 = 1$,对函数e^x作一次插值.
  - Newton型

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = e^{-1} - 1$$

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] = 1 + x(e^{-1} - 1)$$

  - Lagrange型

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = -(x - 1)$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x$$

$$\varphi_1(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) = -(x - 1) + x e^{-1}$$

  - 逐次线性插值

$$\varphi_{01}(x) = \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_1) & x - x_1 \end{vmatrix} = -(x - 1) + x e^{-1}$$

二次插值例

- 例: 取节点$x_0=0, x_1=1$和$x_2=\frac{1}{2}$,对e^x作二次插值多项式
  - Newton型

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=e^{-1}-1$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=2(e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}})$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=2+2e^{-1}-4e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2(x)=1+x(e^{-1}-1)+x(x-1)(2+2e^{-1}-4e^{-1/2})$$

  - Lagrange型

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=2x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=-4x(x-1)$$

$$\varphi_2(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-1}-4x(x-1)e^{-1/2}$$

二次插值例

- 逐次线性插值

$$\varphi_{01}(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix} f(x_0) & x-x_0 \\ f(x_1) & x-x_1 \end{vmatrix}=-(x-1)+xe^{-1}$$

$$\varphi_{02}(x)=\frac{1}{x_0-x_2}\begin{vmatrix} f(x_0) & x-x_0 \\ f(x_2) & x-x_2 \end{vmatrix}=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2xe^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{012}(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} \varphi_{01}(x) & x-x_1 \\ \varphi_{02}(x) & x-x_2 \end{vmatrix}=$$

$$=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)+2x\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-1}-4x(x-1)e^{-\frac{1}{2}}$$

n次插值

- n次插值问题
  - 求$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
    满足 $\phi(x_i) = y_i, i = 0,1,2,\cdots,n$
  - $n+1$元一次方程组

$$
\begin{gathered}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
\cdots\cdots \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}
$$

n次插值惟一性

- 解的惟一性
  - 根据Cramer法则解存在而且惟一
    - 系数行列式是Vandermonde行列式,非零
  - 由代数基本定理: 设$\psi(x)$也是插值函数,则差$h(x) = \phi(x) - \psi(x)$是次数不超过n的多项式,并有$n + 1$个零点$x_0, x_1, \cdots, x_n$.由代数基本定理可知$h(x) \equiv 0, \phi(x) \equiv \psi(x)$

n次插值：Newton公式

- Newton公式
  - 易对 $n = 2,3,\cdots$ 导出下列各项

$\phi(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x -$

均差表

- Newton公式计算须均差表.求值应使用秦九韶算法，均差表(n=3)

x_i	y_i	一阶均差	二阶均差	三阶均差
x_0	y_0			
x_1	y_1	$f[x_0,x_1]$		
x_2	y_2	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	y_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

n次插值:Lagrange公式

- Lagrange公式

$$\phi(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \cdots + y_n l_n(x)$$

  - n次插值基函数

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$= \frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}, i = 0,1,\cdots,n$$

其中$\omega_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$l_0(x_i)$	1	0	…	0
$l_1(x_i)$	0	1	…	0
…	…	…	…	
$l_n(x_i)$	0	0	…	1

n次插值:Aitken公式

- Aitken公式

$$\phi_{01\cdots n}(x)=\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\begin{vmatrix}\phi_{01\cdots(n-2)(n-1)}(x) & x-x_{n-1}\\ \phi_{01\cdots(n-2)n}(x) & x-x_n\end{vmatrix}$$

x_i	y_i	一次插值	二次插值	三次插值	$x-x_i$
x_0	y_0				$x-x_0$
x_1	y_1	$\varphi_{01}(x)$			$x-x_1$
x_2	y_2	$\varphi_{02}(x)$	$\varphi_{012}(x)$		$x-x_2$
x_3	y_3	$\varphi_{03}(x)$	$\varphi_{013}(x)$	$\varphi_{0123}(x)$	$x-x_3$

N次插值:余项

- 余项:微商形式、差商形式
  - 设$\phi(x)$是$f(x)$过$x_0, x_1, \cdots, x_n$的n次插值函数,

    $f(x) \in C^{n+1}[a,b], x_0, x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 则有$\xi \in (a,b)$,使

$$R(x) = f(x) - \phi(x)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$= f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

- 差商与微商关系
  - $f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$