三、

第二章 效用理论

1．现在我们来定义$[0,1]\times[0,1]$上的二元关系：如果$x_1>y_1$或者如果$x_1=y_1$且$x_2>y_2$，则定义$(x_1,x_2)\ge(y_1,y_2)$。试证明：

（1）如上定义的二元关系是一个偏好关系。

（2）如果$(x_1,x_2)\ge(y_1,y_2)$且$(y_1,y_2)\ge(x_1,x_2)$，则$x_1=y_1$且$x_2=y_2$。

（3）≥不能表示为一个效用函数。（提示：证明不存在一个可数≥-稠密子集）

1． 证明定理 4.2.5 中的其余四条性质，即：

a) 若$\tilde{x}\ge\tilde{y}\ge\tilde{z}$且$\tilde{x}>\tilde{z}$，则$\exists! a\in[0,1]$使得$\tilde{y}\sim a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}$

b) 若$\tilde{x}>\tilde{z},\tilde{y}>\tilde{u},a\in[0,1]$，则$a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}>a\tilde{z}+(1-a)\tilde{u}$

c) 若$\tilde{x}\sim\tilde{y},a\in[0,1]$，则$\tilde{x}\sim a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}$

d) 若$\tilde{x}\sim\tilde{y},a\in[0,1]$，则$a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}\sim a\tilde{y}+(1-a)\tilde{z}$

2． 三个资产的随机回报向量以相等的概率取下面两值：$(4\ \ 2\ \ 3)$和$(2\ \ 4\ \ 3)$。证明基于对数效用函数的最优投资策略不唯一，并请举出两种不同的最优策略。

3． HARA（hyperbolic absolute risk aversion）效用函数族有如下定义：

$$U(x)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{ax}{1-\gamma}+b\right)^{\gamma},b>0$$

请选择表达式中a,b,γ三个参数的值使 HARA 效用函数族包含如下特殊效用函数（或其等价情形）:

（1） 线性或风险中性：$U(x)=x$

（2） 二次效用函数：$U(x)=x-\frac{1}{2}cx^2$

（3） 指数效用函数：$U(x)=e^{-\alpha x}$（试试$\gamma=-\infty$）

（4） 幂效用函数：$U(x)=cx^{\gamma}$

（5） 对数效用函数：$U(x)=\ln x$