

# 科学计算

## 第二次作业

2020 年 3 月 1 日

1. 已知函数  $y = f(x)$  的观测数据为  $f(1) = 1, f(2) = 1, f(4) = 2$ , 试以 1, 2, 4 为基点的 Lagrange 插值公式, 求  $f(1.5)$  的近似值。
2. 设  $x_0, x_1, \dots, x_n$  为  $n+1$  个相异的插值点,  $l_i(x), i = 0, 1, 2, \dots, n$  为 Lagrange 基本多项式, 证明
  - (a)  $\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1$ ;
  - (b)  $\sum_{i=0}^n x_i^j l_i(x) = x^j, j = 1, 2, \dots, n$
  - (c)  $\sum_{i=0}^n (x_i - x)^j l_i(x) = 0, j = 1, 2, \dots, n$
  - (d)  $\sum_{i=0}^n l_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1, j = 0 \\ 0, j = 1, 2, \dots, n \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, j = n+1 \end{cases}$
3. 假定要造计算零阶 Bessel 函数  $I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$  在  $x \in [0, \pi]$  上的等距数值表, 问如何选取表距  $h$ , 使得利用这个数值表作线性插值时, 误差不超过  $10^{-6}$ ?
4. 设  $f(x)$  为  $x$  的  $n$  次多项式。证明, 当  $k > n$  时, 有  $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$ 。
5. 编程计算: 使用插值公式找出  $f(x) = e^{x^2}$  的 4 阶插值多项式  $P_4(x)$ , 其中插值点为  $x_0 = 0.6, x_1 = 0.7, x_2 = 0.8, x_3 = 0.9, x_4 = 1$ , 利用插值公式, (1) 计算  $P_4(0.82)$  和  $P_4(0.98)$ 。(2) 使用插值误差公式找出当  $x = 0.82, x = 0.98$  时的误差上界, 相对误差界和实际误差。(3) 分别画出在区间  $[0.5, 1]$  和  $[0, 2]$  上实际的插值误差  $P_4(x) - e^{x^2}$  (取 100 个等距点)。