第一章 误差

1. 误差的来源
2. 浮点数、误差、误差限和有效数字
3. 相对误差和相对误差限
4. 误差的传播
5. 在近似计算中需要注意的一些现象

误差

- 模型误差
  - 实际问题用数学模型刻画时要忽略一些因素,从而造成数学的量u_1和实际的量u的误差—模型误差.
  - 人口增长模型：$y'(t) = ry$
- 数据误差
  - 数学模型用到的数据, 可能是观测到的(称观测误差),也可能是计算得到的,这种数据误差也造成数学量的近似u_2.
  - 地球重力加速度：约$9.8m/s^2$

误差

- 方法误差–截断误差
  - 解数学问题的方法给出的解也是近似的u_3,它与数学问题的准确解的差叫方法误差,也叫截断误差.

$$f(x) \approx P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

  - 截断误差:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

- 舍入误差
  - 近似的方法计算数据有误差的数学问题要用有限位数字,这就要舍入,计算得u_4.由此引起的误差称舍入误差.

$$R = \pi - 3.14159 = 0.0000026\cdots.$$

浮点数

- 规格化浮点数
  - $x = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t \times \beta^J, \alpha_1 \neq 0,\ 0 \le \alpha_j < \beta$
  - 阶(亦称指数):J整数,$L \le J \le U$
  - 尾数:$w = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t$
  - 计算机常用的双精度浮点数:

$$\beta = 2, t = 52,\quad -1023 \le J \le 1023$$

- 基−进制
  - β称为基
  - 这样表示的数称为β进制数
- 上溢、下溢

误差

- 误差
  - 准确数x，近似数x^*
  - 误差$e^* = x^* - x$、误差限$\varepsilon^* \geq |x^* - x|$
  - $x \leq x^* + \varepsilon^*$

准确数	近似数	误差	误差限
x	x^*	$e^*=x^*-x$	$\varepsilon^*\geq\|x^*-x\|$
π=3.141 592 65…	3	-0.14…	0.15,0.5,…
	3.14	-0.001 5…	0.001 6,0.005,…
	3.141 6	0.000 007…	0.000 008,…

- 四舍五入
  - 十进制数通常取若干位为其近似:若后位为4则舍，为5则进1。

有效数字

- 有效数字——准确到该位
  - 如果x^*的误差限是某位的半个单位，该位到x^*的第一位非零数字共n位，则称x^*有n位有效数字或x^*准确到该位
  - x^*可表成$x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_t \cdots \times 10^p$, (1.1)

$$\alpha_1 \neq 0, |x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$$

则x^*有n位有效数字

- 四舍五入所得近似数从第一位非零数字到最后一位都是有效数字
- 若误差为0，则认为有效数字有任意位

相对误差

- 相对误差
  - $e_r^* = \frac{x^*-x}{x}$，$x \neq 0$，或$e_r^* = \frac{x^*-x}{x^*}$
- 相对误差限
  - $\varepsilon_r^* \geq |\frac{x^*-x}{x}|$，或$\varepsilon_r^* \geq |\frac{x^*-x}{x^*}|$

准确数	近似数	相对误差	相对误差限
x	x^*	$e_r^*=(x^*-x)/x$或 $e_r^*=(x^*-x)/x^*$	$\varepsilon_r^*\geq\lvert(x^*-x)/x\rvert$ 或 $\varepsilon_r^*\geq\lvert(x^*-x)/x^*\rvert$
c	$2.997\,925\times10^{10}$		$3.3\ldots\times10^{-7}\approx3\times10^{-7}$
	3.00×10^{10}		$0.00067\ldots\approx0.0007$
$\pi=3.14159265\ldots$	3.1416	$2.3\ldots\times10^{-6}$	$2.4\times10^{-6}\approx2\times10^{-6}$

相对误差

- 设数x^*可表成(1.1),
- 若x^*有n位有效数字则有相对误差限$\frac{1}{2\alpha_1} \times 10^{1-n}$
  - $|x^* - x| \le \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$,
  - $|x^*| \ge \alpha_1 \times 10^{p-1}$，相除.
- 若x^*相对误差限$\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2(\alpha_1+1)} \times 10^{1-n}$，则$x^*$至少有$n$位有效数字
  - $|x^* - x| \le \varepsilon_r^* |x^*|$,
  - $|x^*| \le (\alpha_1 + 1) \times 10^{p-1}$，相乘。
- 例：e=2.71828…,取三位有效数字x^*=2.72，相对误差限1/(2×2)×10^{1-3}=0.0025；由定义,相对误差为0.0006….(如果再由0.0025≤1/(2×3) ×10^{1-2}则x^*有二位有效数字，估少了一位数字)

计算机精度

- 计算机表示数的误差
  - 数$x = 0.a_1a_2\ldots a_t\ldots \times 10^p$引入计算机时四舍五入表示成$t$位尾数$fl(x) = x^* = 0.a_1a_2\ldots a_t \times 10^q$，$q = p$或$p+1$
  - 令$\varepsilon = (fl(x) - x)/x$则$|\varepsilon| \le eps \equiv \frac{1}{2} \times 10^{1-t}$, $fl(x) = x(1+\varepsilon)$
  - 数x在t位尾数,β进制,舍入的计算机系统表为$fl(x)$则有$fl(x) = x(1+\varepsilon)$，$|\varepsilon| \le eps \equiv \frac{1}{2} \times \beta^{1-t}$
- 计算机的精度
  - 称$eps \equiv \frac{1}{2} \times \beta^{1-t}$为该计算机的精度
  - 双精度浮点数的精度为$2^{-52} \approx 2 \times 10^{-16}$

误差的传播

- 用微分来估计误差和误差限
  - 误差$e^* = x^* - x \approx dx$
  - 相对误差$e_r^* \approx d\ln x,\ d_r x = \left|\frac{dx}{x}\right| = |d\ln x|$
- 近似数参与运算时结果的误差
  - 四则运算时结果误差的估计
    - $d(x \pm y) = dx \pm dy$
    - $d(x \times y) = ydx + xdy$
    - $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$
  - 计算函数时误差的估计$df(x) = f'(x)dx$

误差的传播:相对误差

- 近似数参与运算时结果的误差
  - 四则运算时结果相对误差的估计
    - $d_r(x+y) = \left|\frac{dx+dy}{x+y}\right| \le \left|\frac{dx}{x}\frac{x}{x+y} + \frac{dy}{y}\frac{y}{x+y}\right| \le \max(d_r x, d_r y)$
    - $d_r(x-y) \le \frac{|x|d_r x+|y|d_r y}{|x-y|}$，$x, y$同号(**相近的数相减会放大误差！**)
    - $d_r(xy) \le d_r x + d_r y$
    - $d_r(x/y) \le d_r x + d_r y$
  - 计算函数时结果相对误差的估计
    - $d \ln f(x) = f'(x)dx/f(x)$
    - $d_r f(x) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| d_r x$

误差的传播:例

- 例 设$a = 1.21 \times 3.65 + 9.81$,其中每个数据的绝对误差限为0.005,求$a$的绝对误差限和相对误差限

$$da = d(1.21 \times 3.65) + d9.81$$

$$|da| \le 1.21 \times 0.005 + 3.65 \times 0.005 + 0.005$$

$$\approx 0.029\,3 \le 0.03$$

$$d_r a \approx \max(d_r\,(1.21 \times 3.65), d_r 9.81)$$

$$\approx \max(d_r 1.21 + d_r 3.65, d_r 9.81)$$

$$= \max(d\,1.21/1.21 + d\,3.65/3.65\,, d\,9.81/9.81)$$

$$= \max(0.005/1.21 + 0.005/3.65\,,\ 0.005/9.81)$$

$$\approx \max(0.005\,5,\ 0.000\,5) = 0.005\,5$$

  - 设$y = x^n$,y的相对误差与x的相对误差之间的关系:

$$d_r y = |d(\ln y)| = |nd(\ln x)| = nd_r x$$

浮点运算的误差

- 计算机中浮点运算的误差

  在一个t位尾数舍入的计算机系统中，两个机器数x, y作四则运算$\circ$ $(+$、$-$、$\times$、$\div)$,记为$x \circ y$，结果舍入得到$fl(x \circ y)$ 则有$fl(x \circ y) = (x \circ y)(1 + \varepsilon)$, $|\varepsilon| \le eps$ （计算机精度）

- 向前误差分析

- 向后误差分析
  - 把舍入误差归结为数据引出的误差

经验谈

- 在近似计算中需要注意的一些事项
  - 避免相近数相减
  - 防止大数‘吃’小数
  - 避免分母为零或比分子小得多
  - 注意简化计算步骤,减 少运算次数
    - 秦九韶算法
  - 选用稳定的公式
- 计算问题的敏感性与算法的稳定性

例

- 当x接近于零时$\frac{1-\cos x}{\sin x}$应变换为$\frac{\sin x}{1+\cos x}$
- 当x充分大时$\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$ 应变换为$\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$
- 计算多项式 $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$**秦九韶算法**
  $P(x)=(\cdots((a_n x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0$
- 尾数是3位十进制数字的浮点系统中运算求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 0.000\,1x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

  - 顺序消元$-10\,000x_2=-10\,000, x_2=1, x_1=0$
  - 方程交换再消元$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ 0.000\,1x_1+x_2=1 \end{cases}$, $x_2=1, x_1=1$

例

- 求$x^2-56x+1=0$的根. 取5位数字
  - 准确解$x_1=55.982\,137\,159\ldots$, $x_2=0.017\,862\,840\ldots$
  - $x_1=28+\frac{282-1}{2}=28+27.982=55.982$,
  - $x_2=28-\frac{282-1}{2}=28-27.982=0.018$
  - x_1同上, $x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{55.972}=0.01786288$
- 在三位尾数的计算机上计算$x=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{100}$，$a_0=0.1$，$a_1=a_2=\cdots=a_{100}=0.0001$
  - a_0+a_1得0.1，再加a_2还是0.1,$\cdots$, $x=0.1$
  - 如果从后往前加,0.0001+0.0001=0.0002，…最后$x=0.1+0.01=0.11$