

Newton-Cotes公式

当 $n = 4$ 时, 得到**柯特斯(cotes)** 公式

$$C = \frac{b-a}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)],$$

其中 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{4}$.

若 $f^{(6)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则柯特斯公式的余项为

$$R_4[f] = I - C = -\frac{2(b-a)}{945} \left(\frac{b-a}{4} \right)^6 f^{(6)}(\eta), \quad \eta \in [a, b].$$

求积公式代数精确度

▶ 定义

- 一个求积公式对一切次数不超过 m 的多项式是准确的,而有大于 m 的多项式不准确,则称该求积公式具有 m 次代数精确度,或该求积公式的代数精确度是 m .

▶ 例

- 梯形公式具有1次代数精确度
- 抛物线公式具有3次代数精确度
- 一般的Newton-Cotes公式的代数精确度
 - $m = n$, 当 $n = 2k + 1$
 - $m = n + 1$, 当 $n = 2k$

代数精确度的确定

- ▶ 一个求积公式的代数精确度 m 可以从它们的截断误差推出,也可按定义依次将 $1, x, x^2, x^3, \dots$ 代入求积公式从而检查出准确成立的最高次数.
 - 梯形公式具有1次代数精确度(二法皆可)
 - 抛物线公式具有3次代数精确度(依定义)
 - 一般的Newton-Cotes公式的代数精确度(依定义)
 - $m = n$, 当 $n = 2k + 1$
 - $m = n + 1$, 当 $n = 2k$

复化梯形公式

▶ 复化梯形公式

- 积分区间分成若干小区间在每个小区间上用梯形公式即得复化梯形公式.
- 公式: 令 $x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, n, h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

- 误差

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{h^3}{12} (f''(\eta_1) + f''(\eta_2) + \dots + f''(\eta_n)) \\ &= -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \end{aligned}$$

复化抛物线公式

▶ 复化抛物线公式

- 积分区间分成 $2n$ 个小区间在每两个小区间上用抛物线公式即得复化抛物线公式.
- 公式:令 $x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, 2n, h = \frac{b-a}{2n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$$

- 误差

$$R(f) = -\frac{h^5}{90} (f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) + \dots + f^{(4)}(\eta_n)) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta)$$

例 根据数据表利用复合求积公式求 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的值.

x_i	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
$f(x_i)$	1	0.9973978	0.8414709

$$T_8 = \frac{1}{8} \left[\frac{f(0)}{2} + f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{f(1)}{2} \right] \\ \approx 0.9456909.$$

$$S_4 = \frac{1}{4 \times 6} \left\{ f(0) + 4 \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] \right. \\ \left. + 2 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] + f(1) \right\} \approx 0.9460832$$

$$C_2 = \frac{1}{2 \times 90} \left\{ 7f(0) + 32 \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right] \right. \\ \left. + 12 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] + 14f\left(\frac{1}{2}\right) + 7f(1) \right\} \approx 0.9460829$$

误差估计

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xt) dt,$$

$$f^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{d^k}{dx^k} (\cos xt) dt = \int_0^1 t^k \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right) dt,$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f^{(k)}(x)| \leq \int_0^1 t^k \left| \cos\left(xt + \frac{k\pi}{2}\right) \right| dt \leq \frac{1}{k+1}.$$

$$R_T = |I - T_8| \leq \frac{1}{12} h^2 \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(\eta)| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{3} = 0.000434.$$

$$R_S = |I - S_4| \leq \frac{1}{2880} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1}{5} = 0.271 \times 10^{-6}.$$

梯形公式特殊情形

- 定理：若函数 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的解析函数，且是以 T 为周期函数。则利用复化梯形公式对

$$\int_0^T f(x) dx$$

的积分误差为

$$R = Ce^{-2ns}$$

其中 n 是积分离散点个数， C 和 s 是不依赖于 n 的常数(但依赖于 f)。

例

► $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - \cos x} dx$

```
n=14;  
h = 2*pi/(n+1);  
x = 0:h:2*pi-h;  
y = sqrt(2-cos(x));  
sum(y)*h
```

<i>n</i>	<i>I</i>
3	8.734378311304589
4	8.737121666143285
5	8.737625997686575
6	8.737725952859437
7	8.737746780722293
8	8.737751278900888
9	8.737752276857501
10	8.737752502950181
11	8.737752555039576
12	8.737752567206465
13	8.737752570081120
14	8.737752570766931

逐次半分法

- ▶ 在实际计算中，运用复化梯形法（及抛物线法）求数值积分无法预知需要离散点个数 n
- ▶ 逐次半分法
 - 取初始离散点个数 n_0 ，以后每次将区间分半，等价于离散点数加倍
 - 充分利用前一次的结果计算下一次结果
 - 利用前后两次结果之差决定是否收敛到给定误差

逐次分半梯形法

- ▶ 复化梯形公式 T_n 与 T_{2n} 的关系

令 $x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, 2n, h = \frac{b-a}{2n}$ 可得

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + h(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))$$

- ▶ 推导:

$$\begin{aligned} T_{2n} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [f(x_{2i}) + 2f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{2i}) + f(x_{2i+2})] + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) \\ &= \frac{1}{2}T_n + h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}). \end{aligned}$$

逐次分半梯形法

- ▶ 据此依次计算 $T_1, T_2, T_4 \dots$
 - T_1 , 梯形公式
 - 重复进行: 区间分半, 积分值之半加上新点上函数值之和与 h 之积.
- ▶ 计算可用误差控制并限定分半次数

逐次分半梯形法

▶ 算法： 给定误差容许值 ϵ

```
n = 1, h =  $\frac{b-a}{2}$ ; T0 = h(f(a) + f(b))  
for k = 1:kmax  
    n = n + n, s = 0;  
    for i = 1:2:n  
        s = s + f(a + i * h);  
    end  
    T =  $\frac{T_0}{2}$  + h * s  
    if  $|\frac{T}{2} - T_0| < 3\epsilon$ , break, end  
    h =  $\frac{h}{2}$ ; T0 = T;  
end
```

逐次分半梯形法

- ▶ 例：用逐次分半梯形法计算

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0.946083070 \dots$$

- 结果

n	T	n	T
1	0.92073549240395	128	0.94608153854315
2	0.93979328480618	256	0.94608268741135
4	0.94451352166539	512	0.94608297462823
8	0.94569086358270	1024	0.94608304643245
16	0.94598502993439	2048	0.94608306438350
32	0.94605856096277	4096	0.94608306887126
64	0.94607694306006		

后验误差估计

▶ 判据 $|T_{h/2} - T_h| < 3\epsilon$

◦ 由 $I - T_h \approx Ch^2$ 及 $I - T_{\frac{h}{2}} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^2$ 相减得

$$T_{h/2} - T_h \approx (4 - 1)C\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

◦ 估计误差 $I - T_{h/2} \approx \frac{T_{h/2} - T_h}{4 - 1}$, 即 $|I - T_{h/2}| = \epsilon$,
故后验误差应为预定误差容许值 ϵ 的三倍

◦ 改进结果
$$I \approx \frac{4T_{h/2} - T_h}{4 - 1} = \frac{4}{3}T_{h/2} - \frac{1}{3}T_h$$

改进公式

- ▶ 梯形法改进公式： $\frac{4}{3}T_{h/2} - \frac{1}{3}T_h$

如, 当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 \\ &= \frac{4}{3} \frac{b-a}{4} [f(a) + 2f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] - \frac{1}{3} \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \\ &= \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)].\end{aligned}$$

一般地

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n.$$

- ▶ 即梯形法改进公式恰好是抛物线公式！

逐次分半抛物线公式

- ▶ 复化公式 S_n

令 $x_k = a + kh, k = 0, 1, 2, \dots, 2n, h = \frac{b-a}{2n}$ 可得

$$S_n = \frac{h}{3} (f(a) + f(b) + 2S_n^1 + 4S_n^2)$$

- ▶ 其中:

$$S_n^1 = (f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))$$

$$S_n^2 = (f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1}))$$

- ▶ 据此依次计算 $S_2, S_4 \dots$

逐次分半抛物线公式

▶ 判据 $|S_{h/2} - S_h| < 15\epsilon$

◦ 由 $I - S_h \approx Ch^4$ 及 $I - S_{h/2} \approx C\left(\frac{h}{2}\right)^4$ 相减得

$$S_{h/2} - S_h \approx (16 - 1)C\left(\frac{h}{2}\right)^4$$

◦ 估计误差 $I - S_{h/2} \approx \frac{S_{h/2} - S_h}{16 - 1}, \quad |I - T_h| \approx \epsilon,$

故后验误差应为预定误差容许值 ϵ 的15倍

◦ 改进结果 $I \approx \frac{16S_{h/2} - S_h}{16 - 1} = \frac{16}{15}S_{h/2} - \frac{1}{15}S_h$

◦ 这恰好是复化的Cotes公式($n=4$)

后验误差估计

► 进一步的结果

- 逐次分半梯形法序列改进所得是逐次分半抛物线法序列
- 逐次分半抛物线法序列又可改进得另一个序列
- 这一过程可继续下去
- 改进也称外推,其依据是Euler-Maclaurin公式

Euler–Maclaurin公式

- ▶ 对复化的梯形法误差进行更精确分析，可以得到Euler–Maclaurin公式：

$$T_h - I = \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 + \dots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ 与 h 无关, 与 f 有关

- ▶ 用于后验误差估计及改进结果推导中
 - 逐次分半梯形法序列改进一次误差是 $O(h^4)$
 - 外推(改进)两次所得序列的误差是 $O(h^6)$
 - 继续外推(改进)...每次外推序列的误差都能提高 h^2

Euler–Maclaurin公式

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = I + \alpha_1 \frac{h^2}{4} + \alpha_2 \frac{h^4}{16} + \cdots + \alpha_l \left(\frac{h}{2}\right)^{2l} + \cdots.$$

$$T_1(h) = \frac{4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3} = I + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots$$

$$T_1\left(\frac{h}{2}\right) = I + \beta_1 \frac{h^4}{16} + \beta_2 \frac{h^6}{64} + \cdots.$$

$$T_2(h) \triangleq \frac{16T_1\left(\frac{h}{2}\right) - T_1(h)}{15} = I + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots.$$

Richardson外推

- 根据Euler–Maclaurin公式,可作 T_h 和 $T_{\frac{h}{2}}$ 的线性组合得到误差 $O(h^4)$ 的值称Richardson外推(前称改进结果)于是
 - 逐次分半梯形法序列外推(改进)一次误差是 $O(h^4)$
 - 外推(改进)两次误差是 $O(h^6)$
 - 继续外推(改进)...每次外推序列的误差都能提高 h^2
- 这一过程可用Romberg求积公式实现

Romberg求积公式

► Romberg求积公式(逐次分半外推法)

k $m = 0$ $m = 1$ $m = 2$ $m = 3 \dots$

0 $T_0^{(0)}$ $T_1^{(0)}$ $T_2^{(0)}$ $T_3^{(0)}$

1 $T_0^{(1)}$ $T_1^{(1)}$ $T_2^{(1)}$ \vdots

2 $T_0^{(2)}$ $T_1^{(2)}$ \vdots \vdots

3 $T_0^{(3)}$ \vdots \vdots \vdots

\vdots \vdots \vdots \vdots

误差 $O(h^2)$ $O(h^4)$ $O(h^6)$ $O(h^8)$

系数 $4, -1$ $4^2, -1$ $4^3, -1$ $4^4, -1$

$$T_m^{(k)} = \frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)} - T_{m-1}^{(k)}}{4^m - 1}$$

Romberg求积公式

说明

- 每列是一个逐次分半法序列, $m = 0$ 是逐次分半梯形公式的值以后是外推(改进)一次、外推(改进)二次...的序列.
- 外推用公式,系数列于前列底.
- 计算可在算出梯形公式的新值后就外推至最右,即按 $m + k = 0, 1, \dots$ 自左而右计算.表中每行每列均收敛.但若Euler-Maclaurin公式中某项为零或因光滑性不够而中断时将不再有上述效果.
- 停止判据: $\left| T_m^{(0)} - T_{m-1}^{(0)} \right| < \epsilon$ (容许误差)

Romberg求积公式例

► Romberg求积公式例(/ 同逐次分半梯形法 例)

k	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0	0.9207355	0.9461459	0.9460830	0.9460831
1	0.9397933	0.9460869	0.9460831	
2	0.9445135	0.9460833		
3	0.9456909			
误差	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
系数	$4, -1$	$4^2, -1$	$4^3, -1$	$4^4, -1$

算法

- 可在逐次分半梯形公式算法上增加外推並存储

```
n = 1, h =  $\frac{b-a}{2}$ ; T(1) = h(f(a) + f(b))
for k = 2: kmax
    n = n + n, s = 0;
    for i = 1:2:n
        s = s + f(a + i * h);
    end
    T(k) =  $\frac{T(k-1)}{2} + h * s$ ;
    M = 1; t = T(1);
    for j = k - 1:-1:1
        M = 4 * M; T(j) =  $\frac{M * T(j+1) - T(j)}{M - 1}$ ;
    end
    h =  $\frac{h}{2}$ ; T
    if |T(1) - t| < ε, break, end
end
```