1. 某人有 3 把伞放在家或办公室用于来往于家和办公室之间，当且仅当天下雨且手边有伞时，带一把伞走，到达后放下，下雨的概率为 $p, 0 < p < 1$. 用 X_n 表示他第 n 次出 (家或办公室) 门时手边的伞的数目，则 $\{X_n\}$ 是一时齐 Markov 链。

(1) 写出 $\{X_n\}$ 的状态空间和一步转移矩阵，并求它的平稳分布.

(2) 计算此人被雨淋的概率的极限，并证明不管 p 取何值，此极限小于 $\frac{1}{12}$.

(3) 计算此人相邻两次被雨淋的平均时间间隔.

2. 独立重复掷骰子，用 S_n 表示前 n 次点数之和，用 Z_n 表示 S_n 除以 4 的余数。

则 Z_n 是一时齐的 Markov 链。

(1) 写出 $\{Z_n\}$ 的状态空间和一步转移矩阵，并求它的平稳分布.

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} P(S_n$ 是 4 的倍数).

3.设$\{X_n\}$是时齐的不可约正常返**Markov**链.

根据结论"如果状态i正常返, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ii}^{(k)}=\frac{1}{\mu_i}$"

证明：(1)对所有状态i, j,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}$

(2)对所有j,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}P(X_k=j)=\frac{1}{\mu_j}$,不依赖于初始分布.

(3)设π是平稳分布，则对所有j有$\pi_j=\frac{1}{\mu_j}$

4.书本习题四 22，注意把状态空间改成$\{0,1,\ldots,m\}$,并且假设对所有状态i,都有$p_i>0$