Chebyshev多项式

- Chebyshev多项式（第一类）

$$T_n(x) = \cos\big(n\arccos(x)\big) - 1 \le x \le 1, n = 0,1,2,\cdots$$

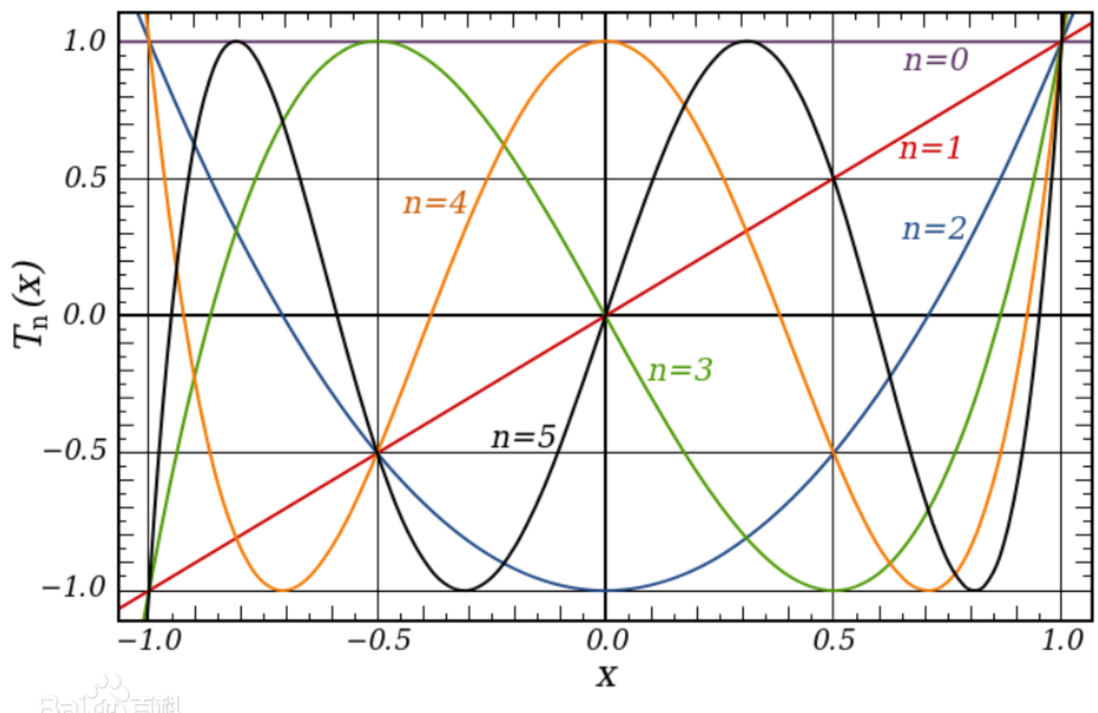
1. $T_n(x)$在$[-1,1]$上关于权函数$\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$正交

$$(T_i, T_j) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = 0\,,\; i \neq j$$

$$(T_i, T_i) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i^2(x) dx = \begin{cases} \pi, i = 0 \\ \pi/2\,, i \neq 0 \end{cases}$$

2. $$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$
$$n = 1,2,\cdots, T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

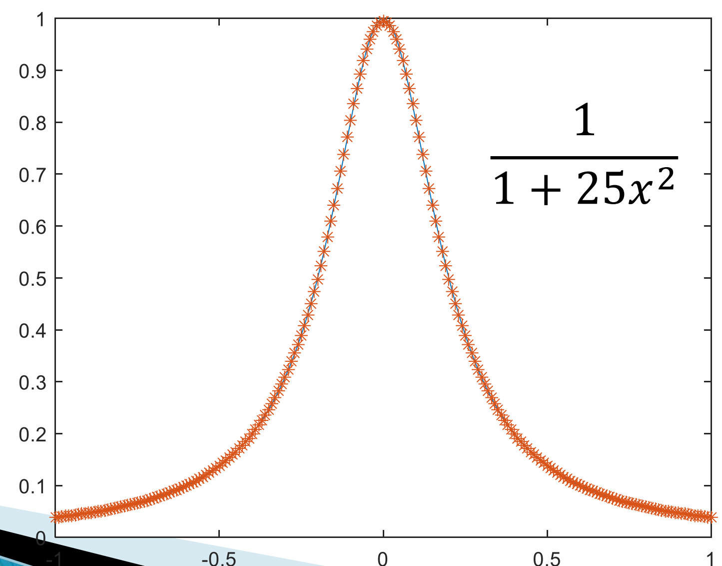
Chebyshev多项式



Chebyshev多项式

- 利用Chebyshev多项式的零点作多项式插值可以最大限度的降低插值误差！

- n 阶Chebyshev多项式的在区间[−1,1]上零点是 $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right),\ k=1,2,\cdots,n$



等距节点正交多项式

- 等距节点$0,1,\cdots,n$权为1的正交多项式:对于$m < n$

$$P_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k C_{m+k}^k \frac{x^{(k)}}{n^{(k)}}$$

其中 $x^{(k)}=x(x-1)\cdots(x-k+1)$

$$n^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

是正交多项式。前几个多项式如下

$$\mathrm{P}_{0,n}(x)=1$$

$$\mathrm{P}_{1,n}(x)=1-2\frac{x}{n}$$

$$\mathrm{P}_{2,n}(x)=1-6\frac{x}{n}+6\frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

第五章 数值积分与数值微分

- 插值求积公式
- Newton-Cotes公式
- 求积公式代数精确度
- 复合公式
- 逐次分半梯形法
- Richardson外推与 Romberg求积公式
- Gauss型求积公式
- 数值微分

数值积分公式

- 数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

- 需求
  - 原函数不一定能用初等函数表示：$\int_0^1 e^{-x^2}dx$
  - 原函数虽能用初等函数表示,但表达式太复杂不便计算: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}dx$
  - 函数由表格给出
- 构造
  - 可利用近似函数的积分作积分的近似，例如由Lagrange插值多项式、Newton插值多项式代入.

插值求积公式

- 将Lagrange插值公式代入积分:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)l_k(x)+R_n(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)+R(f)$$

其中$A_k, R(f)$分别是$l_k(x), R_n(f)$的积分.这样得到的数值积分公式称插值求积公式.

插值求积公式

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{w_n(x)}{(x-x_k)w_n'(x_k)}dx$$

$$R(f) = \int_a^b \frac{f^{n+1}(\xi)w_n(x)}{(n+1)!}dx$$

其中$w_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

- 称A_k为求积公式系数, $R(f)$为其截断断误差
- 易见对次数不超过n的多项式$R(f) = 0$

Newton-Cotes公式

- 梯形公式
  - 用一次插值构造的插值求积公式称梯形公式.几何上就是用梯形面积逼近曲边梯形的面积
  - 公式： 令 $h = b - a$

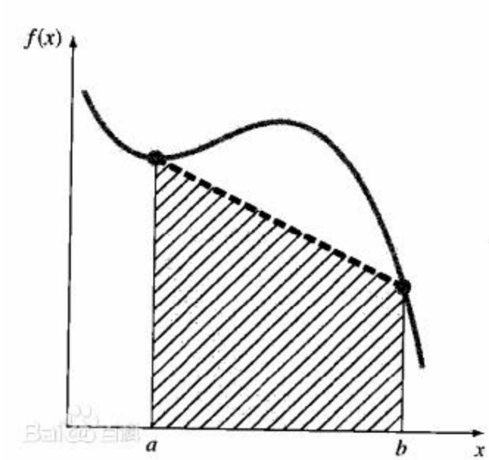
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

  - 误差

$$R(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)dx = -\frac{h^3}{12}f''(\eta),$$

$$a < \eta < b$$

  - 对次数不超过一的多项式梯形公式是准确的



Newton-Cotes公式

- 例：$\int_0^1 \sin x dx$
- 精确值

$$\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1 = 0.459697694131860$$

- 数值积分值：

$$I \approx \frac{\sin 0}{2} + \frac{\sin 1}{2} = 0.420735492403948$$

- 误差：

$$err = 0.038962201727912$$

- 利用误差公式计算得

$$R = \frac{1}{12}\sin 1 = 0.070122582067325$$

Newton-Cotes公式

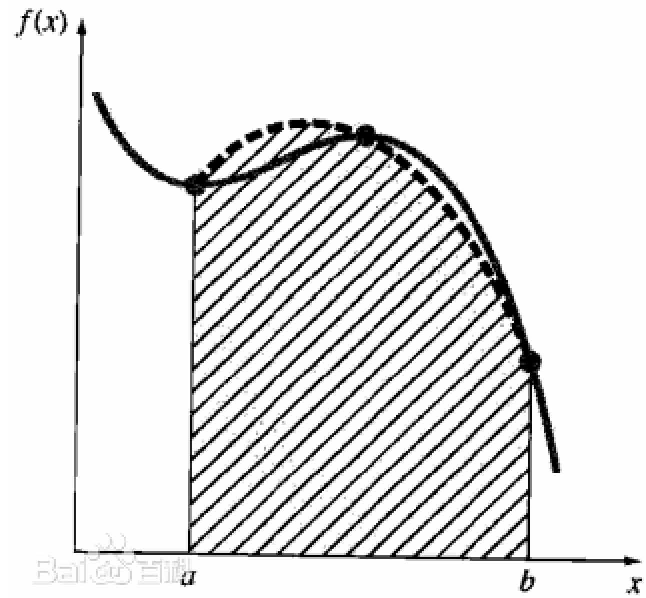
- 抛物线公式（也称Simpson公式）
  - $x_k = a + kh, k = 0,1,2, h = \frac{b-a}{2}$,作二次插值构造的插值求积公式称抛物线公式.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$$

  - 误差

$$R(f) = \frac{-h^5}{2880} f^{(4)}(\eta), a < \eta < b$$

  - 对次数不超过三的多项式抛物线公式是准确的



Newton-Cotes公式

- 例：$\int_0^1 \sin x dx$
- 精确值

$$\int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1 = 0.459697694131860$$

- 数值积分值：

$$I \approx \frac{1}{6}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{1}{2} + \sin 1\right) = 0.459862189870785$$

- 误差：

$$err = 0.000164495739245$$

- 利用误差公式计算得

$$R = \frac{1}{2880}\sin 1 = 0.000292177425280 5$$

Newton-Cotes公式

- 一般的Newton-Cotes公式
  - 取$x_k = a + kh, k = 0,1,2,\cdots,n, h = \frac{b-a}{n}$,作$n$次插值,构造的插值求积公式通称Newton-Cotes公式,亦称等距基点插值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

  - $A_k = \frac{(-1)^{n-k}h}{k!(n-k)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}dt$
  - 定义: $C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-k}dt$, $C_k^{(n)}$称为Cotes系数,则$A_k = (b-a)C_k^{(n)}$
  - 系数$C_k^{(n)}$有表可查.

Newton–Cotes公式

n	$C_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

Newton-Cotes公式

- 从误差考虑应当采用系数A_k皆正的那些公式，即取$n = 1,2,\cdots,7$
- 稳定性：

定义 若$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 只要$\left| f(x_k) - \tilde{f}_k \right| \le \delta\ (k = 0,\cdots,n)$, 就有

$$|I_n(f) - I_n(\tilde{f})| = \left| \sum_{k=0}^{n} w_k [f(x_k) - \tilde{f}(x_k)] \right| \le \varepsilon,$$

则称求积公式是稳定的.

定理 若求积公式中系数$A_k > 0(0,1,\cdots,n)$, 则求积公式是稳定的.