科学计算
第七次作业：实验作业

2020 年 4 月 12 日

注意事项：**实验报告必须包含：1.问题；2.数学理论和算法；3.程序；4.结果；5.结论或讨论**。

利用以下方法，分别计算积分

$$I_c = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = 1.809048475800\ldots, \tag{1}$$

$$I_s = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = 0.620536603446\ldots \tag{2}$$

根据和真实值的对比，探讨各种方法的优劣。

1. 利用n个等分区间的复化梯形公式计算(1)，区间长度为$h = 1/n$，第一个区间$[0, h]$的左端点$x = 0$的函数值用0 代替，其中$n = 100 : 100 : 1000$(即从n=100开始，每次增加100个点，直到1000个点)。

2. 首先推导下列带权的Newton-Cotes公式，

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \approx Af(0) + Bf(1) \tag{3}$$

   找出A,B使得公式(3)的代数精度为1。然后利用n个等分区间的复化梯形公式计算(1)，区间长度为$h = 1/n$，但第一个区间$[0, h]$ 使用带权的Newton-Cotes公式(3)计算，其中$n = 100 : 100 : 1000$。

3. 对积分(1)先利用变量代换$x = t^2$,然后再利用n个等分区间的复化梯形公式计算变换后的积分，其中$n = 20 : 20 : 200$。

4. 承接上题，利用Gauss-Legendre积分计算变换后的积分，其中$n = 1 : 1 : 5$。

5. 首先推导正交多项式$\{p_k(x), k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$，其中$p_k(x)$是首项系数为1的$k$次多项式，使得

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} p_k(x) p_j(x) dx \quad = \quad 0, j \neq k \tag{4}$$

   利用多项式$\{p_k(x)\}$，推导出相应的Gauss型求积公式（称为Gauss-Joacbi积分），然后计算积分(1)，其中$n = 1 : 1 : 5$。

提示：Gauss-Legendre积分的积分点可以通过课堂PPT里面Legendre多项式，并调用MATLAB里面"roots"命令求多项式的根获得积分点。在获得积分点后，积分系数可以通过求解线性方程获得，这里线性方程求解可直接调用MATLAB的"\" 命令。Gauss-Joacbi 积分的积分点和积分系数可以可以先求出多项式，后同理获得。