目录

第二章　效用理论

刻画个体在不确定情形下的投资消费决策是金融经济学研究的一项基础。这是因为：一个经济体是由许许多多投资者和消费者组成的，而金融市场中各种金融产品的价格波动，与其中个体的各种投资消费决策也有着相当密切的联系。从这个意义上来讲，要对一个金融市场有较好的理解，要对金融产品的价格变化规律及其相关性进行探索，要对各种金融产品进行合理的定价，我们首先需要对个体的消费投资决策进行研究。效用理论便是现代金融经济学为这方面的研究提供的一种方法。

2.1 中将讨论在选择集上如何利用公理化方法建立起偏好关系，以及如何利用效用函数来描述偏好关系；2.2 的讨论说明：在满足一定条件的情况下，随机计划集上的效用函数可以表示为期望的形式；2.3 中利用了前两部分中的讨论，使用效用函数来刻画个体在面临风险时的决策特征；2.4 中将尝试利用个体部分的决策特征来刻画个体的偏好。

2.1 效用函数

2.1.1 选择集上的偏好

让我们从一些投资决策问题开始关于偏好的讨论。

例 2.1.1 假设现在有两种无风险资产 A，B，它们之间唯一的不同就是收益率。A 的（总）收益率为 $r_A = 1.03$，B 的收益率为 $r_B = 1.05$。如果同一时间只能投资一项资产，那么投资者的决策会是投资 B 而不投资 A。理由很简单：B 的投资收益率高于 A。我们也可以说，投资者相较于 A 更**偏好** B。偏好关系的严格定义将在后面给出。□

例 2.1.2 假设有两种资产 A 和 B，A 是无风险资产，现在每投资 1 元，一年后能得到 1.5 元；B 是风险资产，现在每投资 1 元，一年后可能以 1/2 的概率得到 2.5 元，也可能以 1/2 的概率得到 0.5 元。如果投资者现在有 1 元，并且只能选 A、B 其一进行投资，他会选择哪一种资产呢？第一类投资者可能会选择 A，因为他觉得投资 A 能稳赚 0.5 元，而投资 B 会有亏 0.5 元的风险；第二类投资者可能会选择 B，因为他觉得投资 A 只能赚 0.5 元，而投资 B 却有赚 1.5 元的机会；第三类投资者可能觉得两者是一样的，因为 A 的收益率 $r_A = 1.5$，而 B 的**期望收益率**为

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_B] = \frac{0.5 \cdot \frac{1}{2} + 2.5 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 1.5$$

因为 A 的收益率等于 B 的期望收益率，因此 A 和 B 在他们看来是一样的。在这个例子中，对于同一组资产，三类投资者表现出了三种不同的投资偏好。□

下面我们给出偏好的严格定义。**选择集(Choice Set)** X 是所有待比较对象组成的集合。例如，在上面两个例子中，选择集均为 $X = \{A, B\}$。而在一般情形下，选择集可以根据我

们考察问题的需要灵活变动。例如，在考虑消费决策问题时，选择集可以取为消费者的消费计划集，其中包含待比较的所有消费计划，而在考虑投资决策问题时，选择集可以取为投资者的投资计划集，其中包含待比较的所有投资计划。

选择集 X 上的一个**无差异（Indifference）**关系 $\sim$ 是集合 X 上的一个等价关系，也就是说，$\sim$ 是 X 上的二元关系，且满足：

(a) 自反性（Reflexivity）：$\forall x \in X$，成立 $x \sim x$；

(b) 传递性（Transitivity）：$\forall x, y, z \in X$，如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$，则 $x \sim z$；

(c) 对称性（Symmetry）：$\forall x, y \in X$，如果 $x \sim y$，则 $y \sim x$

选择集 X 上的一个**偏好(Preference)**关系 $\leq$ 是集合 X 上的一个全序关系。也就是说，$\leq$ 是 X 上的二元关系，满足自反性、传递性，并且还满足如下两条性质：

(d) 反对称性（Anti-symmetry）：$\forall x, y \in X$，如果 $x \leq y$ 且 $y \leq x$，则 $x \sim y$；

(e) 完备性（Completeness）：$\forall x, y \in X$，必成立 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$。

我们还可以定义 X 上的**严格偏好关系** $<$：

$$x < y \text{ 等价于 } x \leq y \text{ 且 } y \not\leq x \text{。}$$

此外，为了叙述上的方便，我们再定义两个符号 $\geq$ 和 $>$：

$$x \geq y \text{ 等价于 } y \leq x\text{，}\quad x > y \text{ 等价于 } y < x \text{。}$$

根据上述定义，例 2.1.1 中的偏好关系可表示为 $A \geq B$，而例 2.1.2 中的三类消费者的偏好关系可分别表示为 $A \geq B$、$A \leq B$ 和 $A \sim B$。

2.1.2 效用函数

在上一部分中我们看到，个体的投资消费决策可以由偏好来表示。然而，当选择集 X 中有大量元素时，直接利用偏好关系来进行决策显得十分不方便。于是一个问题自然而然地产生：是否存在 X 上的一个具有较好性质的函数来反映偏好关系？如果存在，它便会为决策提供很大的帮助。效用函数便是这样的函数。

记 X 为选择集，$\leq$ 是其上的一个偏好关系。一个函数 $H: X \to \mathbb{R}$ 被称为描述了 $\leq$ 的**效用函数**，如果 $\forall x, y \in X$，$x \leq y$ 当且仅当 $H(x) \leq H(y)$[1]。例如在例 4.1 中定义 $H: X \to \mathbb{R}$，

$H(A) = 1$，$H(B) = 2$，则 H 便是效用函数。

但在一般情况下上述定义是有意义的吗？也就是说，任意选择集上的偏好关系都有对应的效用函数吗？下面的定理告诉我们：对于元素个数至多可数的选择集来说，是的；而对于元素个数不可数的选择集来说，必须有更强的条件。

定理 2.1.3 如果选择集 X 是有限集，则 X 上的任何偏好关系均存在相应的效用函数。

[1]在经济学中，此处定义的效用函数也往往被称为**序数效用函数**，因为函数值相对的大小用来反映偏好关系，而函数值本身并没有实际意义。与其相对的是**基数效用函数**，它的值反映的是个体得到的实际效用值，例如后面将要遇到的 von Neumann – Morgenstern 效用函数。

证明：设 X 基数为 N，且不妨设其元素有如下关系 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_N$。则取 H 使得 $H(x_1)=1$，

且 $H(x_k)=\begin{cases} H(x_{k-1})+1 & 如果 x_{k-1} < x_k \\ H(x_{k-1}) & 如果 x_{k-1} \sim x_k \end{cases}$，则 H 是 $\le$ 对应的效用函数。□

定理 2.1.4 如果选择集 X 是可数无限集，则 X 上的任何偏好关系均存在相应的效用函数。
证明：由于 X 是全序可数集，不妨设其元素有如下关系

$$\cdots \le x_{-n} \le \cdots \le x_{-1} \le x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le \cdots$$

则取 H 使得 $H(x_0)=0$，且 $\forall\ n>0$，

$$H(x_n)=\begin{cases} H(x_{n-1})+1 & 如果 x_{n-1} < x_n \\ H(x_{n-1}) & 如果 x_{n-1} \sim x_n \end{cases}$$

而 $\forall\ n<0$，

$$H(x_n)=\begin{cases} H(x_{n+1})-1 & 如果 x_n < x_{n+1} \\ H(x_{n+1}) & 如果 x_n \sim x_{n+1} \end{cases}$$

则 u 是 $\le$ 对应的效用函数。□

而在 X 不可数的情形下，由于不能将 X 中元素进行排列，上述方法已不能使用。例如 $[0,1]\times[0,1]$ 上的字典序偏好关系便不能用效用函数进行表示。因此，为了在不可数选择集上得到类似于有限、可数情形的结果，我们需要附加更多的条件。事实上，选择集上偏好关系的效用函数表示的存在性有如下的刻画。

设 $\le$ 为选择集 X 上的一个二元关系，若 $\exists$ 集合 Y，使得 $\forall x,y\in X$ 满足 $x<y$，$\exists z\in Y$，使得 $x\le z\le y$，则称 Y 是 X 的一个 $\le$ **稠密子集**。在这个定义的基础上，我们有：

定理 2.1.5 选择集 X 上二元关系 $\le$ 存在效用函数表示，当且仅当 $\le$ 是一个偏好关系并且 X 存在一个可数的 $\le$ 稠密子集。证明可参见[1]□

2.2 期望效用理论

确定情形下个体偏好的刻画显得相对简单，而在不确定情形中往往会有困难。回顾上节例 2.1.2，三类不同的投资者就有着完全不同的偏好。那么我们该如何利用效用函数刻画他们的决策特征呢？期望效用理论便是一种解决方法。本节中我们将引入随机计划集以及其上的效用函数的期望效用表示的概念，并且证明在一些公理的限制下，期望效用表示的存在性以及它拥有的一些性质。最后，我们将看到近年来期望效用理论遇到的挑战与其发展。

2.2.1 随机计划集

为了问题的简化，首先考虑两期决策问题。假设两个时期为 0 时期和 1 时期，0 时期是当期，而 1 时期是将来，在 1 时期可能发生的各种自然状态 ω 的集合称为**自然状态集**，记为 Ω。假设 F 是 Ω 生成的 σ 代数，P 是 F 上的一个概率测度。于是 (Ω, F, P) 是一个概率空间（后面仍将其简记为 Ω）。一个**随机计划**是定义在 (Ω, F, P) 上的随机变量。**随机计划集**是一些随机计划组成的集合，可以根据所考虑的问题自由选定。下面我们来看一个具体问题中的随机计划集。

例 2.2.1（投资计划集） 假设 1 时期有三种自然状态：$\omega_1 =$ 经济增长，$\omega_2 =$ 经济平稳，$\omega_3 =$ 经济衰退，自然状态集为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$。$P(\omega_i)$ 为状态 ω_i 发生的概率，

$$P(\omega_1) = 0.2\text{，}\ P(\omega_2) = 0.5\text{，}\ p(\omega_3) = 0.3$$

随机计划 $\tilde{x}$ 表示投资某资产 A 的数量，满足

$$\tilde{x}(\omega_1) = 10\text{，}\ \tilde{x}(\omega_2) = 5\text{，}\ \tilde{x}(\omega_3) = 2$$

因此，$\tilde{x}$ 给出了某投资者在 1 时期不确定的自然状态下投资资产 A 的数量：

1 时期自然状态	经济增长	经济平稳	经济衰退
资产 A 投资量	10	5	2

也就是说，$\tilde{x}$ 给出了个体的一项**投资计划**。该投资者可能还有其他的投资计划 $\tilde{x}'$，他所有的投资计划组成的集合 X 便是一个随机计划集，在本例中也是一个**投资计划集**。类似地，对于消费者也能提出消费计划集的概念。□

例 2.2.2（确定性计划）在上一个例子的假设下， 我们考虑这样一种特殊的投资计划 x：

$$x(\omega_1) = x(\omega_2) = x(\omega_3) = 5$$

也就是说，不论经济状况如何，投资的量都是一个不变的常数，我们把这样的随机计划称为确定性随机计划。更一般地，对于随机计划 x，如果存在常数 c，使得 $\forall \omega \in \Omega$，有

$$x(\omega) = c$$

则称 x 为确定性（随机）计划。□

当然根据定义，随机计划集也是一个选择集，在其上也能建立偏好关系，并且在一定条件下也能得到相应的效用函数。但由于随机计划集有其特殊的结构，后面我们可以看到，在一定条件下其上的效用函数有着更为具体的形式，这便是期望效用表示。

2.2.2 圣彼得堡悖论

本段将讨论决策问题中一个著名的悖论：**圣彼得堡悖论**（**Saint Petersburg Paradox**）。这个悖论于 1713 年由 N.Bernoulli 提出，于 1738 年被他的堂弟 D.Bernoulli 解决，其解决方法中蕴含了期望效用的思想。

圣彼得堡悖论来自于一种“圣彼得堡”掷硬币游戏，其规则如下：若参与者第一次掷出正面，则得到 2 元并结束游戏，否则进行第二次抛掷；在第二次中如果掷出正面，则得到 $2^2=4$ 元并结束游戏，否则进行第三次抛掷，以此类推。一般地，如果参与者在第 k 次抛掷中（若需进行第 k 次抛掷）得到正面，则得到 2^k 元并结束游戏，否则进行第 $k+1$ 次抛掷。问题是：参与者需要为参加此游戏支付多少代价？换句话说，参与者最多愿意为此游戏支付多少代价？

让我们更仔细地考察此问题。游戏的参与者在结束游戏后得到的报酬是一个随机变量，记为 $\tilde{x}$，$\tilde{x}$ 的值域为 $\{2^k \mid k\in\mathbb{Z}^+\}$，且

$$P\{\tilde{x}=2^k\}=2^{-k}$$

如果不考虑时间因素，我们可以把这个游戏看作一个随机计划。若令 y_c 是 Ω 上的一个确定性计划，使得 $y_c\equiv c$，则原问题就转化为求

$$c \quad s.t.\ y_c \sim \tilde{x}$$

容易想到的一种方法便是计算参与者的期望收入，并认为只要支付金额不超过期望值，参与者均能接受。事实上

$$\mathbb{E}[\tilde{x}]=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot 2^{-k}=\infty$$

按上述说法，参与者应该愿意支付任何有限代价来参加这样的游戏。然而事实情况并非如此。大多数情况下人们只愿支付很少的代价，Hacking（1980）也说：“没有人愿意花 25 元去参加一次这样的游戏。”这便形成了一个悖论。

D.Bernoulli 在他 1738 年的论文里解释了这个悖论。论文中指出，个体决策准则是追求最大期望效用值而非最大期望金额值，并据此给出了自己的解决办法。他认为个体对财富的效用体现为 log 函数

$$u(c)=a\cdot\log(c)$$

其中 c 为财富量，而此游戏给他带来的期望效用为

$$E[u(\tilde{x})]=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\cdot\log 2^k=2\cdot\log 2=\log 4$$

而这正是确定的 4 元财富给他带来的效用，因此参与者至多愿意为此支付 4 元。

然而不难发现，如果将此游戏的规则稍作改动，例如将第 k 次正面朝上的支付额改为 10^{2^k}，则悖论仍然存在。但是 D.Bernoulli 的方法却为随机计划集上效用函数的表示提供了

一种思路，这就是下一节所要讨论的期望效用表示。

2.2.3 期望效用表示

遵循 2.2.1 节中的记号，假设$\left(\Omega, F, P\right)$为一概率空间，$X$ 为其上的随机计划集，$\forall \tilde{x} \in X$ 为其上的随机计划，$\geq$是 X 上的一个偏好关系。特别地，记 x_c 为退化到$c \in \mathbb{R}$上的确定性计划，也就是说，$x_c \equiv c$。假设H是 X 上的一个效用函数。期望效用表示理论考虑如下问题：是否存在确定性计划集上的函数u，使得H有如下表示：

$$H(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}} u(x_y) dF_{\tilde{x}}(y) \tag{2.2.1}$$

其中$F_{\tilde{x}}$为$\tilde{x}$的分布函数。上式也可以在形式上记为$H(\tilde{x}) = \mathbb{E}\left[u(\tilde{x})\right]$。

根据概率测度P选择的不同，(2.2.1)式有两种不同的含义。第一种将P看作是自然状态集Ω上的客观概率，与投资者无关。这种意义下的效用函数u被称为 ***von Neumann – Morgenstern* 效用函数**。第二种认为：P是由投资者主观估计出来的，并且这样的概率估计是投资者偏好的一个组成部分；在期望效用表示中，P和u是同时得到的。这种意义下的效用函数u被称为 ***Savage* 效用函数**。[1]但下文的讨论并不需要强调P的主观客观性，因此下文将(2.2.1)式中的u统称为 von Neumann – Morgenstern 效用函数。

需要说明的一点是，由于从概率角度看，确定性随机计划和常数没有区别，因此也可以说，von Neumann – Morgenstern 效用函数是定义在实数上的函数，(2.2.1)也相应变为：

$$H(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}} u(y) dF_{\tilde{x}}(y)$$

。下文中在涉及这点时将不再指出。

例 2.2.3（负指数效用函数）

$$u(x) = -e^{-bx},\ b > 0$$

这个效用函数有上界 0，无下界，并且满足：

$$u'(x) = be^{-bx} > 0$$
$$u''(x) = -b^2 e^{-bx} < 0$$

在后面我们将会看到，这样的效用函数表示个体偏好多而厌恶少，风险厌恶的特点。□

例 2.2.4（狭义幂效用函数）

$$u(x) = \frac{B}{B-1} x^{1-\frac{1}{B}}, x > 0, B > 0$$

[1]注：关于 Savage 效用函数的更多介绍可参见[2]，第 79 页

$$u'(x)=x^{-\frac{1}{B}}$$
$$u''(x)=-\frac{1}{B}x^{-\frac{1}{B}-1}$$
这个效用函数也表示了个体偏好多而厌恶少，风险厌恶的特点，但风险厌恶程度的表现与例2.2.3 中的负指数效用函数有所不同。我们将在 2.3.2 中对此进行讨论。□

下面引入一些概念和定理，为下一节存在性的证明做准备。设 $\tilde{x},\tilde{y}\in X$ ， $a\in[0,1]$，定义

$$a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}$$

为如下的一个分两步进行的随机计划：第一步以概率 a 执行 $\tilde{x}$，以概率 $(1-a)$ 执行 $\tilde{y}$；第二步执行所选的随机计划。这样的随机计划称为**复合随机计划**。

例 2.2.5 （复合随机计划） 记 $\tilde{x},\tilde{y}$ 为消费计划，$\tilde{x}$ 以 0.2 的概率消费 5 个单位商品，以 0.8 的概率消费 3 个单位商品；$\tilde{y}$ 以 0.4 的概率消费 3 个单位商品，以 0.6 的概率消费 2 个单位商品。则复合消费计划

$$0.3\tilde{x}+0.7\tilde{y}$$

表示如下消费计划：第一步以 0.3 的概率选择执行 $\tilde{x}$，以 0.7 的概率选择执行 $\tilde{y}$；第二步执行第一步所选的消费计划。不难看出，这个复合消费计划等价于如下的消费计划：以 0.08 的概率消费 5 个单位，以 0.56 的概率消费 3 个单位，以 0.36 的概率消费 2 个单位。□

例 2.2.6 （确定性随机计划的复合） 考察一个特殊的例子。令 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，$\tilde{x}$ 为其上的随机计划。令 $x_{\omega_1},x_{\omega_2}$ 为确定性随机计划，使得 $x_{\omega_1}\equiv\tilde{x}(\omega_1),x_{\omega_2}\equiv\tilde{x}(\omega_2)$，则 $\tilde{x}$ 可以如下方式表示为 $x_{\omega_1},x_{\omega_2}$ 的复合：

$$\begin{aligned}\tilde{x}&=P(\omega_1)x_{\omega_1}+P(\omega_2)x_{\omega_2}\\&=P(\omega_1)x_{\omega_1}+\left(1-P(\omega_1)\right)x_{\omega_2}\end{aligned}$$

□

为了得到期望效用表示的存在性定理，我们还需要两个公理对随机计划集 X 进行一定的限制：

独立性公理： $\forall\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in X$ 和 $a\in(0,1]$，如果 $\tilde{x}<\tilde{y}$，则有

$$a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}<a\tilde{y}+(1-a)\tilde{z}$$

阿基米德公理：$\forall \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in X$ 使得 $\tilde{x} < \tilde{y} < \tilde{z}$，存在 $a, b \in (0,1)$ 使得

$$a\tilde{x} + (1-a)\tilde{z} < y < b\tilde{x} + (1-b)\tilde{z}$$

我们先来看一下这两条公理的含义。独立性公理说，如果随机计划 $\tilde{y}$ 严格"优于"随机计划 $\tilde{x}$，那么 $\tilde{y}$ 和 X 中的任何随机计划 $\tilde{z}$ 的复合也严格优于 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{z}$ 以同样系数进行的复合。直观地说，$\tilde{y}$ 和 $\tilde{x}$ 间的偏好关系与 $\tilde{z}$ 的加入是无关的。阿基米德公理说，无论随机计划 $\tilde{x}$ 相比于 $\tilde{y}$ 有多坏，它和另一个优于 $\tilde{y}$ 的随机计划 $\tilde{z}$ 总能通过复合做到优于 $\tilde{y}$；反之，无论随机计划 $\tilde{z}$ 相比于 $\tilde{y}$ 有多好，它和另一个劣于 $\tilde{y}$ 的随机计划 $\tilde{x}$ 总能通过复合做到劣于 $\tilde{y}$。

定理 2.2.5 X 为随机计划集，$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u} \in X$，$\geq$ 为其上的偏好关系，如果 $\geq$ 满足独立性公理和阿基米德公理，则成立以下性质：

a) 若 $\tilde{x} > \tilde{y}$ 且 $0 \leq a < b \leq 1$，则 $b\tilde{x} + (1-b)\tilde{y} > a\tilde{x} + (1-a)\tilde{y}$

b) 若 $\tilde{x} \geq \tilde{y} \geq \tilde{z}$ 且 $\tilde{x} > \tilde{z}$，则 $\exists! a \in [0,1]$ 使得 $\tilde{y} \sim a\tilde{x} + (1-a)\tilde{z}$

c) 若 $\tilde{x} > \tilde{z}, \tilde{y} > \tilde{u}, a \in [0,1]$，则 $a\tilde{x} + (1-a)\tilde{y} > a\tilde{z} + (1-a)\tilde{u}$

d) 若 $\tilde{x} \sim \tilde{y}, a \in [0,1]$，则 $\tilde{x} \sim a\tilde{x} + (1-a)\tilde{y}$

e) 若 $\tilde{x} \sim \tilde{y}, a \in [0,1]$，则 $a\tilde{x} + (1-a)\tilde{z} \sim a\tilde{y} + (1-a)\tilde{z}$

我们先考察一下这五条性质的直观含义。a)说，两个有着严格偏好关系的随机计划以不同的权重组成复合随机计划时，较好的那个随机计划所占权重越高，复合随机计划就越好；b)说复合运算相对于偏好关系有某种连续性；c)是独立性公理的一个推广，它说"好"的随机计划的复合要比"差"的随机计划的复合要更好；d)和 e)说，对于复合运算而言，等价替换其中的随机计划并不会改变复合随机计划的"大小"，换句话说，等价的随机计划在复合的意义下可以看作相同的随机计划。

证明：只证 a)，其余四项留作练习。由于 $x > y$，根据替换性公理，有

$$bx + (1-b)y > by + (1-b)y \sim y \tag{2.2.2}$$

其中的等价关系由复合随机计划定义得到。如果 $a = 0$，则已得证。若 $a > 0$，注意到 $0 < \dfrac{a}{b} < 1$，对(2.2.2)再次应用替换性公理，有

$$
\begin{aligned}
& bx+(1-b)y \\
& \sim \frac{a}{b}\big(bx+(1-b)y\big)+\left(1-\frac{a}{b}\right)\big(bx+(1-b)y\big) \\
& > \frac{a}{b}\big(bx+(1-b)y\big)+\left(1-\frac{a}{b}\right)y \\
& \sim ax+\frac{a}{b}(1-b)y+\left(1-\frac{a}{b}\right)y \\
& \sim ax+(1-a)y
\end{aligned}
$$

最后两个等价性由复合随机计划的定义得到。□

2.2.4 期望效用表示的存在性

下面就来叙述并证明期望效用表示的存在性定理。首先只考虑取值在有限集 $Z\subset\mathbb{R}$ 的随机计划，并将所有这样的随机计划全体记为 X_Z。那么我们有：

定理 2.2.6（存在性） 对于 X_Z 和其上的偏好关系 $\geq$ 来说，以下两者等价：

a) 存在 X_Z 上描述了 $\geq$ 的效用函数 H，并且 H 存在期望效用表示；

b) $\geq$ 满足独立性公理和阿基米德公理。

先证一个引理。

引理 2.2.7 $\geq$ 是 X_Z 上的偏好关系，且满足独立性公理和阿基米德公理。则存在确定性计划 $x_{min}, x_{max}\in X_Z$ 使得 $\forall\tilde{x}\in X_Z$，

$$x_{max}\geq\tilde{x}\geq x_{min}$$

证明：不妨设 $Z=\{z_1,\dots z_n\}$，且 $x_{z_1}\geq x_{z_2}\geq\dots\geq x_{z_n}$。$\forall\tilde{x}\in X_Z$，$\exists a_1,a_2,\dots,a_n\in[0,1]$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$（取 $a_i=P(\tilde{x}=z_i)$），使得

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &\sim a_1 x_{z_1} + a_2 x_{z_2} + \cdots + a_n x_{z_n} \\
&\sim a_1 x_{z_1} + a_2 x_{z_2} + \cdots + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) x_{z_n} \\
&\sim b_{n-1}\left(\frac{a_1}{b_{n-1}} x_{z_1} + \frac{a_2}{b_{n-1}} x_{z_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} x_{z_{n-1}}\right) + \left(1 - b_{n-1}\right) x_{z_n}
\end{aligned} \tag{2.2.3}
$$

其中 $b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ 。注意到(2.2.3)中 $\frac{a_1}{b_{n-1}} x_{z_1} + \frac{a_2}{b_{n-1}} x_{z_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} x_{z_{n-1}}$ 的系数和为 1，可以用和上面相同的方法分解出最后一项。重复进行这样的步骤，最后可以得到

$$
\tilde{x} \sim b_{n-1}\left(b_{n-2}\left(\cdots b_1 x_{z_1} + \left(1 - b_1\right) x_{z_2} \cdots\right) + \left(1 - b_{n-2}\right) x_{z_{n-1}}\right) + \left(1 - b_{n-1}\right) x_{z_n} \tag{2.2.4}
$$

其中 $b_i \in [0,1]$。因为 $x_{z_2} \leq x_{z_1}$ 根据利用独立性公理，有

$$
b_1 x_{z_1} + \left(1 - b_1\right) x_{z_2} \leq x_{z_1}
$$

因为 $x_{z_n}, x_{z_{n-1}}, \ldots, x_{z_3} \leq x_{z_1}$， 重复利用独立性公理，由(2.2.4)得 $\tilde{x} \leq x_{z_1}$ 。同理可得 $\tilde{x} \geq x_{z_n}$ 。因此

$$
x_{z_1} \geq \tilde{x} \geq x_{z_n}
$$

取 $x_{max} = x_{z_1}, x_{min} = x_{z_n}$ 即可。□

定理 2.2.6 的证明： b)⇒a)。因为偏好关系≥满足独立性公理和阿基米德公理，根据引理 2.2.7，存在 x_{min}, x_{max} 使得 $x_{max} \geq \tilde{x} \geq x_{min}, \forall \tilde{x} \in X_Z$ 。

若 $x_{max} \sim x_{min}$， 则取 H 为常数，并取 $u \equiv H$ 即可。

若 $x_{max} > x_{min}$， 根据定理 2.2.5 b)， $\exists! a_{\tilde{x}} \in [0,1]$， 使得 $\tilde{x} \sim a_{\tilde{x}} x_{max} + (1 - a_{\tilde{x}}) x_{min}$ 。取

$$
H(\tilde{x}) = a_{\tilde{x}} \tag{2.2.5}
$$

则 H 在 X_Z 上有定义，且 $H(\tilde{x}) \in [0,1]$ 。并且根据定理 2.2.5 a)，易见 $H(\tilde{x}) \geq H(\tilde{y})$ 当且仅当 $\tilde{x} \geq \tilde{y}$ 成立。因此 H 描述了偏好关系≥。

下面证明 H 具有线性性。根据 H 的定义和定理 2.2.5 e)， $\forall \tilde{x}, \tilde{y} \in X_Z, a \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y} &\sim a\left(H(\tilde{x})x_{max}+\left(1-H(\tilde{x})\right)x_{min}\right) \\
&\quad +(1-a)\left(H(\tilde{y})x_{max}+\left(1-H(\tilde{y})\right)x_{min}\right) \\
&\sim \left(aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{max} \\
&\quad +\left(a\left(1-H(\tilde{x})\right)+(1-a)\left(1-H(\tilde{y})\right)\right)x_{min} \\
&\sim \left(aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{max} \\
&\quad +\left(1-aH(\tilde{x})-(1-a)H(\tilde{y})\right)x_{min}
\end{aligned}
$$

注意到上式右端项系数在 0 到 1 之间，且和为 1，因此有意义。根据 H 的定义，有

$$H(a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y})=aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{y})$$

即 H 是线性的。

最后证明期望效用表示的存在性。$\forall \tilde{x}\in X_Z$，

$$\tilde{x}\sim P(\tilde{x}=z_1)x_{z_1}+P(\tilde{x}=z_2)x_{z_2}+\cdots+P(\tilde{x}=z_n)x_{z_n}$$

根据 H 的线性性，并定义确定性计划集上的函数 u 使得 $u(x_{z_i})=H(x_{z_i}), i=1,\ldots,n$，则有

$$
\begin{aligned}
H(\tilde{x}) &= H\left(P(\tilde{x}=z_1)x_{z_1}+P(\tilde{x}=z_2)x_{z_2}+\cdots+P(\tilde{x}=z_n)x_{z_n}\right) \\
&= P(\tilde{x}=z_1)H(x_{z_1})+P(\tilde{x}=z_2)H(x_{z_2})+\cdots+P(\tilde{x}=z_n)H(x_{z_n}) \\
&= P(\tilde{x}=z_1)u(x_{z_1})+P(\tilde{x}=z_2)u(x_{z_2})+\cdots+P(\tilde{x}=z_n)u(x_{z_n}) \\
&= \mathbb{E}\left[u(\tilde{x})\right]
\end{aligned}
$$

a)⇒b) 已知存在 X_Z 上的效用函数 $H(\tilde{x})=\mathbb{E}\left[u(\tilde{x})\right]$，它描述了偏好关系 $\geq$，也就是说，$\tilde{x}\geq\tilde{y}$ 当且仅当 $H(\tilde{x})\geq H(\tilde{y})$。并且不难看出，$H$ 是线性的。下面先证独立性公理。$\tilde{x}>\tilde{y}$ 故 $H(\tilde{x})>H(\tilde{y})$，因此

$$
\begin{aligned}
H\left(a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}\right) &= aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{z}) \\
&> aH(\tilde{y})+(1-a)H(\tilde{z}) \\
&= H\left(a\tilde{y}+(1-a)\tilde{z}\right)
\end{aligned}
$$

故 $a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}>a\tilde{y}+(1-a)\tilde{z}$。

再证阿基米德公理。$\tilde{x}>\tilde{y}>\tilde{z}$ 得到 $H(\tilde{x})>H(\tilde{y})>H(\tilde{z})$。故当 $a\in(0,1)$ 足够小时，有

$$H\left(a\tilde{x}+(1-a)\tilde{y}\right)=aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{z})>H(\tilde{y})$$

因此

$$a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z}>\tilde{y}$$

同理取a足够大即可得反向不等式。□

以上证明了取值在有限集Z内的随机计划集X_Z存在期望效用表示。在一般情况下，比如考虑取值在无限集$\mathbb{R}^+$的随机计划集$X_{\mathbb{R}^+}$，定理 2.2.6 便不成立。但可以证明，若在独立性公理和阿基米德公理的基础上再附加一个**确实性公理**，则对于取值在一般无限集内的随机计划集来说，期望效用表示仍然存在。确实性公理说：设$\tilde{y}$为随机计划，$\forall D\subset\mathbb{R}$满足

$$x_d\geq\tilde{y},\quad\forall d\in D$$

则对于任意取值于D的随机计划$\tilde{x}$有

$$\tilde{x}\geq\tilde{y}$$

直观地说，如果随机计划$\tilde{x}$每种可能的状况都不比$\tilde{y}$差，那么$\tilde{x}$也不比$\tilde{y}$差。具体证明可参见[1]。

下面我们指出，von Neumann - Morgenstern 效用函数是有界的。

定理 2.2.8（有界性） 假设u是 von Neumann – Morgenstern 效用函数，满足

$$H(\tilde{x})=\mathbb{E}\left[u(\tilde{x})\right]$$

则u有界。

证明：如若不然，不妨设u无上界，则存在确定性随机计划序列x_{c_n}使得

$$u(x_{c_n})\geq 2^n,\quad\forall n\in\mathbb{N}^+$$

取随机计划$\tilde{x}$使得$P\left(\tilde{x}=c_n\right)=2^{-n},\quad\forall n\in\mathbb{N}^+$，则

$$H(\tilde{x})=\mathbb{E}\left[u(\tilde{x})\right]=\sum_{n=1}^{\infty}u(x_{c_n})P(\tilde{x}=c_n)\geq\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot 2^{-n}=\infty$$

也就是说，我们得到H是无界的。这与阿基米德公理矛盾。事实上，取随机计划$\tilde{y},\tilde{z}$使得

$$\tilde{x}>\tilde{y}>\tilde{z}$$

则由于H描述$\geq$的效用函数，有

$$+\infty=H(\tilde{x})>H(\tilde{y})>H(\tilde{z})$$

不难看出，$\forall a\in(0,1)$，

$$H(a\tilde{x}+(1-a)\tilde{z})=aH(\tilde{x})+(1-a)H(\tilde{z})=+\infty>H(\tilde{y})$$

这与阿基米德公理矛盾。□

但事实上在实际应用中，很多效用函数都是无界的，例如幂效用函数都无上界或者无下界，而负指数效用函数也无下界。然而这个矛盾可以利用一些技巧来回避，比如实际问题中只考虑有界的随机计划，如此效用函数在无穷点周围的表现便不再会影响问题的讨论。

上面我们的讨论限于二期情形，也就是说，只考虑 0 时期与 1 时期，0 期是当期，1 时期是不确定的将来，且消费只发生在 1 时期。当考虑多期问题时，只要对相应定义进行修改，期望效用表示的存在性仍然成立。

假设有 $N+1$ 个时期：$0,1,2,\dots N$ 时期。0 时期为当期，$1,2,\dots,N$ 时期为不确定的将来，且消费发生在 $1,2,\dots,N$ 时期。(Ω,F,P) 为概率空间，一个随机计划 $\tilde{x}$ 是其上的一个 N 维随机向量，也即 $\tilde{x}=(\tilde{x}^{(1)},\tilde{x}^{(2)},\dots,\tilde{x}^{(N)})$。$\geq$ 是随机计划集 X 上的偏好关系。$H(\tilde{x}):=H(\tilde{x}^{(1)},\tilde{x}^{(2)},\dots,\tilde{x}^{(N)})$ 是描述了 $\geq$ 的效用函数。假设 $Z\subset\mathbb{R}^N$ 为有限集，X_Z 表示取值于 Z 的随机计划全体，则类似定理 2.2.6，成立如下定理：

定理 2.2.6'（存在性，多期）对于 X_Z 和其上的偏好关系 $\geq$ 来说，以下两者等价：

a) 存在 X_Z 上描述了 $\geq$ 的效用函数 H，并且 H 存在期望效用表示；

b) $\geq$ 满足独立性公理和阿基米德公理。

在以后的讨论中我们常常会用到一种特殊的 von Neumann – Morgenstern 效用函数，它满足**时序可加性**：

$$u(x_z^{(1)},x_z^{(2)},\dots x_z^{(N)})=\sum_{i=1}^{N}u(x_z^{(i)})$$

注意，时序可加性是一个很强的要求。首先，它假设不同时期的效用互不影响，也就是说，你某一天消费得到的效用不影响第二天消费得到的效用：第一天消费的再多，第二天消费时所得到的乐趣也不会因为厌倦而减少。这个要求并不是在所有情况下都成立的。其次，它没有考虑贴现效应：在几天后消费的量与第一天相同，两天消费得到的效用也是相同的。这可能与现实情况不符：一件你想要的东西，现在买和十天后以相同的价格买，在一般情况下你当然更希望现在就买。

2.2.5 期望效用理论遇到的挑战

在上一节中，我们在几个公理的条件下得到了随机计划集上效用函数的期望效用表示，整个过程中巧妙地用到了数学公理化方法，显得十分漂亮。但是我们知道，一个金融模型好坏的评价标准并不在于它用到了多么精妙的数学，而在于它解释历史和预测未来的能力，以

及它与现实的相符程度。随着效用理论研究的深入，不少研究表明，期望效用理论并没有很好地反映现实情况。期望效用理论也因此受到了相当大的挑战。

Allais 悖论

这个悖论说，现实中人们的偏好可能不满足独立性公理。考虑下面两组选择问题，其中 A_1, A_2, B_1, B_2 均是随机计划：

A_1：确定地获得 1 百万美元；

A_2：以 0.1 的概率获得 5 百万美元，0.89 的概率获得 1 百万美元，0.01 的概率一无所得；

B_1：以 0.1 的概率获得 5 百万美元，0.9 的概率一无所得；

B_2：以 0.11 的概率获得 1 百万美元，0.89 的概率一无所得。

问：A_1 和 A_2 中你选择哪项？B_1 和 B_2 中你又选择哪项？

实验表明，大多数人会选择 A_1 和 B_1。他们更喜欢确定的 1 百万而不喜欢一无所获，哪怕概率非常小；他们喜欢更高的收益，哪怕它的概率比低收益的概率稍小。但这便与独立性公理矛盾。事实上，记 x_5, x_1, x_0 分别为得到 5 百万、1 百万和 0 美元的确定性计划，则实验结果表明：

$$A_1 \sim x_1 \sim 0.11x_1 + 0.89x_1$$
$$A_2 \sim 0.1x_5 + 0.89x_1 + 0.01x_0 \sim 0.11\left(\frac{1}{11}x_0 + \frac{10}{11}x_5\right) + 0.89x_1$$

由于 $A_1 > A_2$，由独立性公理得

$$x_1 > \frac{1}{11}x_0 + \frac{10}{11}x_5 \tag{2.2.6}$$

而

$$B_1 \sim 0.1x_5 + 0.9x_0 \sim 0.11\left(\frac{1}{11}x_0 + \frac{10}{11}x_5\right) + 0.89x_0$$
$$B_2 \sim 0.11x_1 + 0.89x_0$$

由于 $B_1 > B_2$，由独立性公理得

$$\frac{1}{11}x_0+\frac{10}{11}x_5>x_1 \tag{2.2.7}$$

(2.2.6)与(2.2.7)矛盾。这是因独立性公理引起的。

这个例子说明，相比于不确定性，人们更偏好确定性。这种现象也被称为确定性效应（Certainty Effect）。

Ellsberg 问题

这个问题说，两个在概率意义上完全相同的随机计划能拥有不同的偏好程度，也就是说，它们之间有严格的偏好关系。假设有 100 个球，它们可能有两种颜色：红色和黑色。考虑两个赌博 E_1 和 E_2：

E_1：已知红黑两色的球各有 50 个。参与者从红黑两色中选出一种颜色，并从 100 个球中抽出一个。如果抽出的球的颜色与所选的颜色相同，则获得 1 万美元，否则一无所获。

E_2：红黑两色球的数量未知，出现各种情况（从 0 红 100 黑到 100 红 0 黑）的可能性相同。

其余规则和 E_2 相同。

问你会选择哪一种？

实验表明，大多数人会选择 E_1 而非 E_2。但事实上，E_1 和 E_2 在概率意义下是相同的。E_1 是以同为 0.5 的概率获得 1 万美元或者一无所得的随机计划，而对于 E_2，得到 1 万美元的概率为

$$\frac{1}{101}\cdot\frac{0}{100}+\frac{1}{101}\cdot\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{101}\cdot\frac{100}{100}=\frac{50}{100}=0.5$$

故 E_2 亦是以同为 0.5 的概率获得 1 万美元或者一无所得的随机计划。因此，随机计划 E_1 和 E_2 在概率上完全相同，却有不同的偏好。这便导致了“$\tilde{x}>\tilde{x}$”式的矛盾。

偏好反转现象

偏好反转（preference reversals）现象表明，有时甚至连偏好的传递性也会出问题。考虑如下两个随机计划 P,Q：

P：以 35/36 的概率获得 4 美元，1/36 的概率损失 1 美元；

Q：以 11/36 的概率获得 16 美元，25/36 的概率损失 1.5 美元。

实验表明，在 P 和 Q 间进行选择时，绝大多数被试者选择 P；但在对两者进行最低定价时，绝大多数被试者给 Q 的定价高于 P。最低定价是指，作为拥有者，你对出售这份随机计划（彩票）的最低要价。记 A_P 和 A_Q 分别为 P 和 Q 的最低定价，则上述事实说明：

$$\begin{aligned}&P > Q\\&A_p \sim P, A_Q \sim Q\\&A_p < A_Q\end{aligned}$$

这显然与偏好关系的传递性相矛盾。

以上三个例子表明，虽然期望效用理论在形式上相当漂亮，但它在现实中并不成立。这可能有很多原因，其一便是数学模型与现实情况存在差异：模型中用公理的假设与严格的推导机械地做出选择，而现实中活生生的人却根据各种不同因素做出选择，其中还包括情感因素。两个在概率上完全相同的随机计划，在人们看来可能有相当大的区别，因为“我不喜欢复杂的选择”或者“我的直觉告诉我，选择前者肯定没错”。人不是机器，人并非“理性”。

为了解决期望效用理论出现的问题，研究者提出了不少理论，其中最著名的要数 Kahneman 和 Tversky 提出的展望理论（Prospect Theory）。由此也引出了一门全新的学科——行为金融学。行为金融学强调一种“描述性分析”，在分析过程中结合了当代心理学，更多地考虑多变的现实世界，而不仅是机械的数学理论。有关行为金融学的详细内容请参见相关教材，如[3]。

2.3 风险态度及其度量

上一节中我们讨论了不确定情形下个体效用的度量。本节中我们将利用上一节的结果来考察个体面对风险时的风险态度，以及风险态度的度量方法。

2.3.1 风险态度

首先我们需要明确风险这个概念的含义。金融中的风险并不是日常生活中所谓的造成损失的可能性，而是泛指包括损失和获利在内的不确定性。另外需要注意的是，为了方便起见，下文中所说的不确定性是一种可知的随机性：虽然我们不知道将会出现什么结果，但能够掌握出现的规律，也就是其分布。

一个**公平赌博** $\tilde{x}$ 是指一个期望为零的、只有两种结果的随机计划，也就是说，$P\{\tilde{x}=a\}=p,\quad P\{\tilde{x}=b\}=1-p$，且

$$pa+(1-p)b=0$$

个体的风险态度分为三种：严格风险厌恶、风险中性以及严格风险偏好。说某个个体是**风险厌恶**（**Risk Aversion**）的，如果他不愿意接受任何公平赌博；说某个个体是**风险中性**（**Risk Neutral**）的，如果他不在乎是否接受任何公平赌博；说某个个体是**风险偏好**（**Risk Preference**）的，如果他总愿意接受任何公平赌博。

用 von Neumann – Morgenstern 效用函数（实函数）表示，风险厌恶等价于

$$u(W_0) > pu(W_0+a)+(1-p)u(W_0+b) \tag{2.3.1}$$

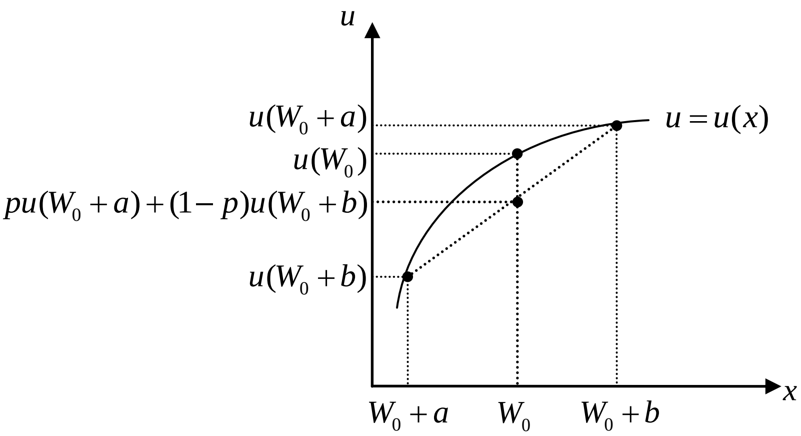
风险中性等价于

$$u(W_0) = pu(W_0+a)+(1-p)u(W_0+b)$$

而风险偏好等价于

$$u(W_0) < pu(W_0+a)+(1-p)u(W_0+b)$$

其中W_0为任意财富水平。下图展示了风险厌恶的效用函数u 。



下文中除非特别指出，恒假设u二阶连续可导。从数学上看，(2.3.1)式等价于u是严格凹函数。事实上，$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in (0,1)$，

$$\begin{aligned} u(\lambda x+(1-\lambda)y) &= u(W_0+\lambda(x-W_0)+(1-\lambda)(y-W_0)) \\ &> \lambda u(W_0+(x-W_0))+(1-\lambda)u(W_0+(y-W_0)) \\ &= \lambda u(x)+(1-\lambda)u(y) \end{aligned}$$

其中$W_0=\lambda x+(1-\lambda)y$，而严格不等式是因为$\lambda(x-W_0)+(1-\lambda)(y-W_0)=0$和严格风险厌恶的定义。

根据凹函数的性质：如果u二阶连续可导，则u在区间I内是凹函数当且仅当$u''(x)>0, \quad \forall x \in I$。于是我们进一步地有下面的结论：

个体是风险厌恶的$\Leftrightarrow u$是严格凹函数$\Leftrightarrow u''>0$ 。

对于风险中性与风险偏好情形我们也可以进行类似的讨论，并得到如下定理：

定理 2.3.1（风险态度的等价条件） 假设u是某个体的 von Neumann – Morgenstern 效用函

数，则

$$\text{个体风险厌恶} \Leftrightarrow u \text{ 是严格凹函数} \Leftrightarrow u'' > 0$$
$$\text{个体风险中性} \Leftrightarrow u \text{ 是线性函数} \Leftrightarrow u'' \equiv 0$$
$$\text{个体风险偏好} \Leftrightarrow u \text{ 是严格凸函数} \Leftrightarrow u'' < 0$$

□

例 2.3.1（风险厌恶的效用函数）回顾例 2.2.3 与例 2.2.4，我们知道负指数效用函数

$$u(x) = -e^{-bx},\ b > 0$$

与狭义幂效用函数

$$u(x) = \frac{B}{B-1} x^{1-\frac{1}{B}}, x > 0, B > 0$$

都表现了风险厌恶的特征。□

2.3.2 风险厌恶的局部度量

在上一节中，我们得到了三种不同的风险态度：风险厌恶、风险中性和风险偏好。在理论分析中，我们一般假设个体是风险厌恶的。然而，风险厌恶的个体在不同财富水平下的厌恶程度可能是不同的，不同的风险厌恶个体的风险厌恶程度也可能是不同的，因此我们需要对这种风险厌恶程度进行衡量。本节我们将对不同财富水平下的风险厌恶程度进行度量，也就是风险厌恶的局部度量。

考虑如下的个体投资决策模型。假设个体是严格偏好多而厌恶少的，并且是严格风险厌恶的，也就是说他的效用函数u严格单调递增，并且二阶导数严格大于零。假设共有 0、1 两个时期。0 时期是确定的当期，1 时期是不确定的将来。0 时期个体的初始财富为W_0。共有$N+1$种资产$A_0, A_1, \ldots A_N$，其中A_0为无风险资产，无风险净收益率为r_f；$A_1, \ldots A_N$为风险资产，其随机净收益率分别为$\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_N$。假设投资在 0 期进行，并且在 1 期收到回报。个体的投资决策的目的是 1 时期财富的期望效用最大。记个体的投资决策向量为$I = (i_0, i_1, \ldots i_N)$，其中$i_j$为资产$A_j$的投资量，$j = 0, 1, \ldots, N$，并记$\tilde{W}$为个体在 1 期的（随机）财富量，则上述问题可以表述为求

$$I_0 = \arg\max_I \mathbb{E}\left[u(\tilde{W})\right]$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{W} &= \left(W_0 - \sum_{j=1}^{N} i_j\right)\left(1 + r_f\right) + \sum_{j=1}^{N} i_j\left(1 + \tilde{r}_j\right) \\ &= W_0\left(1 + r_f\right) + \sum_{j=1}^{N} i_j\left(\tilde{r}_j - r_f\right)\end{aligned}$$

下面我们首先讨论只有一种无风险资产 A_0 和一种风险资产 A_1（随机收益率为 $\tilde{r}$ ）的情形。此时上述问题可简化为求最优的无风险资产投资量

$$i_0 = \arg\max_i \mathbb{E}\left[u\left(W_0(1+r_f)+(W_0-i)(\tilde{r}-r_f)\right)\right]$$

由于 $i_0 \in [0, W_0]$，上述 i_0 可能在三种地方取到：

a) $i_0 = W_0$

在这种情形下，个体不投资风险资产。因为 u 严格凹，最大值在区间右端点取到的充要条件为

$$\frac{d}{di}\left(\mathbb{E}\left[u(\tilde{W})\right]\right)\Big|_{i=W_0} = \mathbb{E}\left[-u'(W_0(1+r_f))(\tilde{r}-r_f)\right] \geq 0$$

此即

$$u'(w_0(1+r_f))\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] \leq 0$$

又因为 $u' > 0$，故上式等价于

$$\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] \leq 0$$

上面的讨论表明，在只有一种无风险资产和一种风险资产的情况下，当且仅当 $\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] > 0$，即风险资产有严格正的风险溢价时，投资者才会投资风险资产。这个结论显然符合我们的常识：如果一种风险资产的期望收益率相对于无风险利率太低，我们当然不愿意进行投资。

b) $i_0 = 0$

在这种情形下，个体将所有财富投资于风险资产。而最大值在区间左端点取到的必要条件为

$$\frac{d}{di}\left(\mathbb{E}\left[u(\tilde{W})\right]\right)\Big|_{i=0} = \mathbb{E}\left[-u'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)\right] \leq 0$$

即

$$\mathbb{E}\left[u'(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)\right] \geq 0 \tag{2.3.2}$$

将 $u'(x)$ 在 $W_0(1+r_f)$ 附近展开，则

$$u'(W_0(1+\tilde{r})) = u'(W_0(1+r_f)) + u''(W_0(1+r_f)) \cdot W_0(\tilde{r}-r_f) + o(\tilde{r}-r_f)$$

代入(2.3.2)式，则有

$$u'(W_0(1+r_f))\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] + u''(W_0(1+r_f))W_0 \cdot \mathbb{E}\left[(\tilde{r}-r_f)^2\right] + o\left(\mathbb{E}\left[(\tilde{r}-r_f)^2\right]\right) \geq 0$$

当 $\mathbb{E}\left[(\tilde{r}-r_f)^2\right]$ 很小时，由上式可以得到

$$\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] \geq -\frac{u''(W_0(1+r_f))}{u'(W_0(1+r_f))} W_0 \cdot \mathbb{E}\left[(\tilde{r}-r_f)^2\right]$$

记 $R_A(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$，则上式可表示为

$$E[\tilde{r}-r_f] \geq R_A(W_0(1+r_f))W_0 \cdot \mathbb{E}\left[(\tilde{r}-r_f)^2\right] \tag{2.3.3}$$

(2.3.3)式说明：当风险资产随机收益率与无风险利率偏差不大时，个体将所有财富投资于风险资产的必要条件是风险资产的风险溢价高于某个下界。值得注意的一点是，a)中投资风险资产的条件只与客观的资产收益率有关，而此处的下界不但与 $\tilde{r}$ 和 r_f 有关，还与 R_A 有关，也就是说，与个体的主观特征有关。处在相同财富水平的两个个体，R_A 相对更大的个体所要求的下界相对更高；若要将所有财富投资与风险资产，R_A 相对更大的个体要求的风险溢价也更高。从这个意义上看，R_A 衡量了个体的风险厌恶程度：R_A 越大，风险厌恶程度越高。因此，(2.3.3)式中的 R_A 函数通常被称为 **Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数**。

c) $i \in (0, W_0)$

除上面两种极端的情形外，个体在投资决策中会同时投资无风险资产与风险资产。除非特别说明，本节剩余部分讨论的都是这种情形。此时我们关心如下问题：对于同一个体，在不同的初始财富水平 W_0 下，i 的大小有何变化？i 在 W_0 中所占比例又有何变化？从下面的讨论中我们将会看到，第一个问题与 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数有关，而第二个问题则与将要引入的 Arrow-Pratt 相对风险厌恶系数有关。

首先考虑第一个问题。最大值点处满足一阶条件为零，也即

$$\frac{d}{di}\left(\mathbb{E}\left[u(\tilde{W})\right]\right) = \mathbb{E}\left[-u'(W_0(1+r_f)+(W_0-i)(\tilde{r}-r_f))\cdot(\tilde{r}-r_f)\right] = 0 \tag{2.3.4}$$

由于要考虑当 W_0 变化时 i 的表现，因此我们将 i 看作 W_0 的函数，并假设 $i(W_0)$ 满足一定的可导性。在上式两边关于 W_0 求一阶导数，得到

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[-u''(W_0(1+r_f)+(W_0-i)(\tilde{r}-r_f))\cdot(1+r_f+(1-i'(W_0))(\tilde{r}-r_f))\cdot(\tilde{r}-r_f)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[u''(W_0(1+r_f)+(W_0-i)(1+\tilde{r}))\right]\left\{(1+r_f)(\tilde{r}-r_f)+(1-i'(W_0))(\tilde{r}-r_f)^2\right\} \\
&= -\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f) - \mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right](1-i'(W_0))
\end{aligned}$$

因此

$$i'(W_0)=1+\frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)}{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]} \tag{2.3.5}$$

根据 $\frac{dR_A(x)}{dx}$ 符号的不同，我们可以得到不同的结果。记 $a:=W_0-i$ 为风险资产的投资额。事实上，成立如下结论：

定理 2.3.2 在本节开始的模型下，假设只有一种无风险资产和风险资产，则

1) 若 $\frac{dR_A(x)}{dx}<0,\quad \forall x$，则 $\frac{da}{dW_0}>0,\quad \forall W_0$

2) 若 $\frac{dR_A(x)}{dx}=0,\quad \forall x$，则 $\frac{da}{dW_0}=0,\quad \forall W_0$

3) 若 $\frac{dR_A(x)}{dx}>0,\quad \forall x$，则 $\frac{da}{dW_0}<0,\quad \forall W_0$

我们先来看一下这个定理的含义。在情形 1)中，对于绝对风险厌恶系数递减的个体来说，当初始财富增加时，对风险资产的投资也相应增加，“钱多了投资也增加了”，因此风险资产对此个体来说是正常品。在情形 2)中，对于绝对风险厌恶系数为常数的个体来说，风险资产的投资量与初始财富无关。有意思的是情形 3)，对于绝对风险厌恶系数递增的个体来说，当初始财富增加时，风险资产的投资量反而减少。这就好像生活中的劣质品：当生活窘迫时，我们被迫选择它们；但当生活条件变好时，我们会减少它们的消费量，转而消费质量较好的产品。

定理 2.3.2 证明：

只证情形 1)，其余情形可类似证明。

当 $\tilde{r}-r_f\geq 0$ 时，

$$\tilde{W}=W_0(1+r_f)+(W_0-i)(\tilde{r}-r_f)\geq W_0(1+r_f)$$

故

$$R_A(\tilde{W})\leq R_A(W_0(1+r_f))$$

两边乘以 $-u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)$，得

$$u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\geq -R_A(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) \tag{2.3.6}$$

同样地，当 $\tilde{r}-r_f<0$ 时，有

$$R_A(\tilde{W})>R_A(W_0(1+r_f))$$

两边乘以$-u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)$，得

$$u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) > -R_A(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) \qquad (2.3.7)$$

综合(2.3.6)和(2.3.7)式，我们有

$$u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) > -R_A(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) \qquad (2.3.8)$$

又注意到$u''(\tilde{W})<0$，故(2.3.5)式中

$$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]<0$$

将(2.3.8)代入(2.3.5)式，并注意到一阶条件(2.3.4)，得到

$$\begin{aligned} i'(W_0) &= 1+\frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)}{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]} \\ &< 1-\frac{R_A(W_0(1+r_f))\mathbb{E}\left[u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)}{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]}=1 \end{aligned}$$

令$a:=W_0-i$为风险资产的投资额，则从上式可得

$$\frac{da}{dW_0}=\frac{d(W_0-i)}{dW_0}=1-\frac{di}{dW_0}>0$$

□

定理 2.3.2 回答了第一个问题，即当初始财富W_0增加时，风险资产的投资额a的变化情况。但上述讨论并没有很好的回答第二个问题，即当初始财富W_0增加时，风险资产投资额a在初始财富W_0中所占比例$\dfrac{a}{W_0}$变化情况。在定理 2.3.2 的情形 2)和 3)中，显然$\dfrac{a}{W_0}$是减小的；但在情形 1)中，由于W_0和a同时增加，a在W_0所占比例变化情况尚不确定，需进一步的考察。为此我们引入 **Arrow-Pratt 相对风险厌恶系数**$R_R(x)$的概念，它被定义为

$$R_R(x)=R_A(x)\cdot x\text{。}$$

为了考虑a在W_0所占比例变化情况，我们再引入**风险资产的初始财富需求弹性**η：

$$\eta:=\frac{da/a}{dW_0/W_0}=\frac{da}{dW_0}\frac{W_0}{a}$$

如果$\eta > 1$，则说明当W_0以某个百分比增加时，a以一个更大的百分比增加，因此a在W_0中所占比例也会增加。同理如果$\eta = 1$，则说明当W_0增加时a在W_0中所占比例不变，如果$\eta < 1$则当W_0增加时a在W_0中所占比例减小。由此我们看出，为了讨论初始财富W_0增加时风险投资额a的变化情况，只需考察η与 1 的大小关系。

根据定义

$$\eta = \frac{da/a}{dW_0/W_0} = 1 + \frac{(da/dW_0)W_0 - a}{a} \tag{2.3.9}$$

根据(2.3.5)我们有

$$\frac{da}{dW_0} = -\frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)}{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]}$$

代入(2.3.9)，有

$$\begin{aligned}
\eta &= 1 + \frac{(da/dW_0)W_0 - a}{a} \\
&= 1 + \frac{-\dfrac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)}{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]}W_0 - a}{a} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right](1+r_f)W_0 + a\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]}{-a\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\left((1+r_f)W_0 + (W_0 - i)(\tilde{r}-r_f)\right)\right]}{-a\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right]}{-a\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)^2\right]}
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

由于上式右端分母为正，故η与 1 的大小关系取决于$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right]$的符号：

$$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right] < 0 \text{ 则 } \eta > 1$$

$$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right] = 0 \text{ 则 } \eta = 1$$

$$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right] > 0 \text{ 则 } \eta < 1$$

下面我们类似定理 2.3.2 的证明来讨论$\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right]$的符号。

如果$\dfrac{dR_R(x)}{dx} > 0$，则当$\tilde{r} - r_f \geq 0$，有

$$R_R(W_0(1+r_f)+(W_0-i)(\tilde{r}-r_f)) \geq R_R(W_0(1+r_f))$$

不等式两边同时乘以$-u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)$，得到

$$u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f) \leq -R_R(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)$$

同理，当$\tilde{r}-r_f<0$时有

$$u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f) < -R_R(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)$$

综上两式，

$$u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f) < -R_R(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f) \tag{2.3.11}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u''(\tilde{W})\tilde{W}(\tilde{r}-r_f)\right] &< \mathbb{E}\left[-R_R(W_0(1+r_f))u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right] \\ &= -R_R(W_0(1+r_f))\mathbb{E}\left[u'(\tilde{W})(\tilde{r}-r_f)\right] \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

其中最后一个等号是因为一阶条件(2.3.4)。综上讨论，我们得到：

如果$\dfrac{dR_R(x)}{dx}>0$，则$\eta<1$

通过类似的推导，我们可以得到如下定理：

定理 2.3.3 在本节开始的模型下，假设只有一种无风险资产和风险资产，则有：

1) 若$\dfrac{dR_R(x)}{dx}>0, \quad \forall x$，则$\eta<1, \quad \forall W_0$
2) 若$\dfrac{dR_R(x)}{dx}=0, \quad \forall x$，则$\eta=1, \quad \forall W_0$
3) 若$\dfrac{dR_R(x)}{dx}<0, \quad \forall x$，则$\eta>1, \quad \forall W_0$

□

例 2.3.2 回忆例 2.2.3 中的负指数效用函数

$$u(x)=-e^{-bx},\ b>0$$

通过直接的计算不难得到

$$R_A(x)=b$$

故$\dfrac{dR_A(x)}{dx}=0$，而$\dfrac{dR_R(x)}{dx}=b>0$。故负指数效用函数表现了与财富水平无关的绝对风险厌恶和严格递增的相对风险厌恶。□

例 2.3.3 回忆例 2.2.4 中的狭义幂效用函数

$$u(x)=\frac{B}{B-1}x^{1-\frac{1}{B}},\ x>0,\ B>0$$

通过简单的计算可知

$$R_A(x)=\frac{1}{B}x^{-1}$$

故

$$\frac{dR_A(x)}{dx}=-\frac{1}{B}x^{-2}<0,\quad \frac{dR_R(x)}{dx}=0$$

因此，狭义幂效用函数表现了严格递减的绝对风险厌恶和与财富水平无关的相对风险厌恶。□

2.3.3 风险厌恶的整体度量

在上一节中我们对个体风险厌恶的度量事实上是一种局部的度量，也就是说，对于同一个体在不同初始财富水平下的风险厌恶程度的度量与比较。在本节中，我们将对不同个体的风险厌恶程度进行整体的度量。

本节中仍考虑风险厌恶的个体，其效用函数为 u。记 W_0 为给定的初始财富水平，$\tilde{\epsilon}$ 为公平赌博。考虑如下情形：

$$u(W_0)=\mathbb{E}\left[u(W_0+z+\tilde{\epsilon})\right]$$

其中 $z\in\mathbb{R}$。我们知道，风险厌恶的个体不愿意接受任何公平赌博。上式说，要让一个风险厌恶的个体愿意参与公平赌博 $\tilde{\epsilon}$，必须给他一个大小为 $z=z(\tilde{\epsilon})$ 的**风险补偿**。令 $\omega=W_0+z$，则上式变为

$$u(\omega-z)=\mathbb{E}\left[\omega+\tilde{\epsilon}\right] \tag{2.3.13}$$

那么如何比较两个风险厌恶个体的风险厌恶程度呢？考虑个体 1 和个体 2，他们有各自的效用函数 u_1 和 u_2，以及风险补偿 z_1 和 z_2，并满足：

$$u_1(\omega-z_1(\tilde{\epsilon}))=\mathbb{E}\left[u_1(\omega+\tilde{\epsilon})\right]$$

$$u_2(\omega-z_2(\tilde{\epsilon}))=\mathbb{E}\left[u_2(\omega+\tilde{\epsilon})\right]$$

如果对于任意公平赌博 $\tilde{\epsilon}$，成立 $z_1(\tilde{\epsilon})>z_2(\tilde{\epsilon})$，也就是说，对于任何公平赌博，个体 1 要求的风险补偿都要比个体 2 大。在这种意义下，我们可以说个体 1 比个体 2 更厌恶风险。下面的定理说明，这种整体的风险厌恶程度仍然可以用 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数来衡量。

定理 2.3.4 **（Pratt 定理）**假体风险厌恶个体 1 和 2 的效用函数分别为 u_1 和 u_2，它们作

为实函数均二阶连续可导，且严格单调递增。R_A^1 和 R_A^2 分别是个体 1 和 2 的 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数。则下面三条陈述等价：

1) $R_A^1(x) > R_A^2(x), \quad \forall x$；

2) 存在单调递增且严格凹的函数 G，使得 $u_1(x) = G(u_2(x)), \quad \forall x$；

3) 在任何财富水平 W_0 下，$\forall$ 公平赌博 $\tilde{\epsilon}$，都有 $z_1(\tilde{\epsilon}) > z_2(\tilde{\epsilon})$，满足：

$$u_1(\omega - z_1(\tilde{\epsilon})) = \mathbb{E}\left[u_1(\omega + \tilde{\epsilon})\right]$$

$$u_2(\omega - z_2(\tilde{\epsilon})) = \mathbb{E}\left[u_2(\omega + \tilde{\epsilon})\right]$$

证明：

1)⇒2) 由于 u_2 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递增，存在其逆 $u_2^{-1}(x)$ 使得 $u_2^{-1}(u_2(x)) = x, \quad \forall x$。取

$$G := u_1 \circ u_2^{-1}$$

则成立

$$u_1(x) = G(u_2(x)), \quad \forall x$$

对上式两边关于 x 求导，得

$$u_1'(x) = G'(u_2(x)) \cdot u_2'(x) \tag{2.3.14}$$

由于 $u_1'(x) > 0, u_2'(x) > 0$，故 $G'(u_2(x)) > 0$，即 G 单调递增。对(2.3.14)式再求一次导数，得

$$u_1''(x) = G''(u_2(x))\left[u_2'(x)\right]^2 + G'(u_2(x))u_2''(x) \tag{2.3.15}$$

将(2.3.15)与(2.3.14)相除，得

$$\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} = \frac{G''(u_2(x))}{G'(u_2(x))} \cdot u_2'(x) + \frac{u_2''(x)}{u_2'(x)}$$

根据条件，

$$\begin{aligned} 0 < R_A^1(x) - R_A^2(x) &= -\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} + \frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} \\ &= -\frac{G''(u_2(x))}{G'(u_2(x))} \cdot u_2'(x) \end{aligned}$$

又因为 $G'(x) > 0, u_2'(x) > 0$，故得

$$G''(u_2(x)) < 0$$

即 G 严格凹。

2)⇒3) 因为G严格凹，根据 Jensen 不等式，

$$\mathbb{E}\left[G(\tilde{x})\right] < G\left(\mathbb{E}[\tilde{x}]\right), \forall \tilde{x} \qquad (2.3.16)$$

$\forall \tilde{\epsilon}$，

$$\begin{aligned} u_1(\omega - z_1(\tilde{\epsilon})) &= \mathbb{E}\left[u_1(\omega+\tilde{\epsilon})\right] = \mathbb{E}\left[G\left(u_2(\omega+\tilde{\epsilon})\right)\right] \\ &< G\left(\mathbb{E}\left[u_2(\omega+\tilde{\epsilon})\right]\right) = G\left(u_2(\omega - z_2(\tilde{\epsilon}))\right) = u_1(\omega - z_2(\tilde{\epsilon})) \end{aligned}$$

因为u_1单调递增，故

$$z_1(\tilde{\epsilon}) > z_2(\tilde{\epsilon})$$

3)⇒1) 取随机计划$\tilde{\epsilon}$使得$\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon}\right] = 0$，且$\|\tilde{\epsilon}\| = \left\{|y| : \tilde{\epsilon}(\omega) = y, \omega \in \Omega\right\} < \delta$，$\delta$为足够小的正数。由 Taylor 展开得

$$u(\omega+\tilde{\epsilon}) = u(\omega) + u'(\omega)\tilde{\epsilon} + \frac{1}{2}u''(\omega)\tilde{\epsilon}^2 + o(\tilde{\epsilon}^2)$$

故

$$\mathbb{E}u(\omega+\tilde{\epsilon}) \approx u(\omega) + \frac{1}{2}u''(\omega)\mathbb{E}[\tilde{\epsilon}^2] = u(\omega) + \frac{1}{2}u''(\omega)Var[\tilde{\epsilon}^2]$$

同理

$$u(\omega - z(\tilde{\epsilon})) \approx u(\omega) - u'(\omega)z(\tilde{\epsilon})$$

又因为

$$u(\omega - z(\tilde{\epsilon})) = \mathbb{E}u(\omega+\tilde{\epsilon})$$

故得

$$u'(\omega)z(\tilde{\epsilon}) \approx -\frac{1}{2}u''(\omega)Var[\tilde{\epsilon}]$$

即

$$z_1(\tilde{\epsilon}) \approx -\frac{1}{2}\frac{u_1''(\omega)}{u_1'(\omega)}Var[\tilde{\epsilon}] = \frac{1}{2}R_A^1(\omega)Var[\tilde{\epsilon}]$$

同理我们可得

$$z_2(\tilde{\epsilon}) \approx -\frac{1}{2}\frac{u_2''(\omega)}{u_2'(\omega)}Var[\tilde{\epsilon}] = \frac{1}{2}R_A^2(\omega)Var[\tilde{\epsilon}]$$

综上两式，并注意到$z_1(\tilde{\epsilon}) > z_2(\tilde{\epsilon})$，故有

$$R_A^1(\omega) > R_A^2(\omega), \forall \omega$$

□

2.3.4 风险资产多于一种的情形

本节至此的绝大多数讨论都是基于只存在一种无风险资产和一种风险资产的假设的。可以证明，当可供投资的风险资产多于一种时，几乎前面得到的所有结论，包括定理 2.3.2 和定理 2.3.3，都不再成立。

在只有一种无风险资产和一种风险资产的情形中，当这种风险资产有严格正的风险溢价时，它就会有严格正的投资额。然而当有多于一种风险资产时，$\mathbb{E}\left[\tilde{r}_i - r_f\right] > 0$ 并不能推出资产 i 的投资额 $a_i > 0$。沿用前面的记号，事实上成立着如下结论：

$$若\ \exists i\ s.t.\ \mathbb{E}\left[\tilde{r}_i - r_f\right] > 0，则\ \exists j\ s.t.\ a_j > 0$$

当存在多于一种风险资产时，定理 2.3.2 和定理 2.3.3 都不再成立：当初始财富 W_0 增加时，个体并不一定会增加所有风险资产的投资额。事实上，他可能会对风险资产的投资进行某种结构性调整：在增加一部分风险资产的投资额时，减少另一部分风险资产的投资额，从而达到最优的目的。

上述现象的深层次原因之一，是在数学中高维最优问题的复杂性远高于一维最优问题。为了减少这种复杂性，我们需要引入一些假设。例如，假设个体投资各种风险资产的比例固定，也就是说，个体将所有风险资产打包成一个投资组合进行投资。在这种假设下，打包而成的投资组合的随机收益率已知，因此我们可以将其看作一种风险资产，从而原来复杂的投资问题便转化为我们讨论过的只有一种无风险资产和一种风险资产的情形。

此假设也被称为**两项基金的货币分离**。Cass 和 Stiglitz 证明了，两项基金的货币分离成立的充要条件是边际效用满足下面两种形式之一：

1) $u'(x) = (A+Bx)^C$，其中 $B>0, C<0, x \ge \max\{0, -(A/B)\}$，或者 $A>0, B<0, C>0, 0 \le x \le -(A/B)$；

2) $u'(x) = Ae^{Bx}$，其中 $A>0, B<0, x \ge 0$。

这个定理的证明比较复杂，详情可参见[4]。□

2.4 随机占优

2.4.1 随机占优的思想

在 2.1～2.3 中，我们采用了如下的策略对随机计划集上的偏好关系进行刻画：在偏好关系满足一些公理的条件下，利用期望效用表示，将偏好关系用 von Neumann – Morgenstern 效用函数的期望形式进行描述。换个角度也就是说，对于一个个体，我们只要具体地知道他的效用函数，就掌握了他的所有偏好特征。但事实上，要得到个体效用函数的具体形式是相

当困难的，而采用一些特殊的效用函数，如指数效用函数、对数效用函数，事实表明它们与现实并不相符。

我们也可以换个策略：既然得到个体效用函数具体形式有困难，我们是否可以退一步，只要求得到效用函数的某些特性，例如连续性、单调性、凹凸性等，也就是说，只需要得到个体的部分决策特征，例如严格偏好多而厌恶少、风险厌恶等，来得到随机计划集上的偏好关系？这便是随机占优的思路。当然后面的讨论说明，由于信息减少，我们能得到的结论也相应减弱：此时只能得到随机计划集中的满足特定形式的子集上的偏好关系。

根据所给的信息不同，随机占优有着不同的形式。若仅仅知道个体效用函数u是连续并且严格单调递增的，相应的结论称为一阶随机占优；若仅仅知道效用函数u二阶连续可导，且$u''<0$，相应的结论称为二阶随机占优；若知道其他的信息，我们还可以得到其他形式的随机占优，如二阶单调随机占优、三阶随机占优。下面几节将分别对这几种情形进行讨论。

在下文的讨论中，除非特别指出，恒假设u为个体的 von Neumann – Morgenstern 效用函数（实函数），假设A和B为风险资产，且它们的净随机收益率$\tilde{r}_A, \tilde{r}_B \in [0,1]$。记$F_A(r)$和$F_B(r)$分别为$\tilde{r}_A$和$\tilde{r}_B$的分布函数。

2.4.2 一阶随机占优

如果对于任意具有连续且单调递增的效用函数u的个体，都有$A \geq B$，则称A**一阶占优**（**First-order Stochastic Dominance**）于B，记为

$$A \underset{FSD}{\geq} B$$

不失一般性地，假设个体的初始财富$W_0 = 1$，则A一阶占优于B等价于：对于任意具有连续且单调递增的效用函数u的个体，成立

$$\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right] \geq \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] \tag{2.4.1}$$

下面的定理给出了一阶随机占优的两个等价条件：

定理 2.4.1 （**一阶随机占优等价条件**）下列三者等价：

1) $A \underset{FSD}{\geq} B$；

2) $F_A(r) \leq F_B(r), \forall r \in [0,1]$；

3) $\tilde{r}_A \overset{d}{=} \tilde{r}_B + \tilde{\epsilon}$，其中$\tilde{\epsilon} \geq 0$，$\overset{d}{=}$表示分布函数相等。

证明：

2)⇒1) 即证明(2.4.1)。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right]-\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] \\
&=\int_{[0,1]} u(1+x)d\left[F_A(x)-F_B(x)\right] \\
&=u(1)\left[F_A(0)-F_B(0)\right]+\int_{(0,1]} u(1+x)d\left[F_A(x)-F_B(x)\right] \\
&=u(1)\left[F_A(0)-F_B(0)\right]+u(1+x)\left[F_A(x)-F_B(x)\right]\Big|_0^1 \\
&\quad-\int_{(0,1]}\left[F_A(x)-F_B(x)\right]du(1+x) \\
&=u(2)\left[F_A(1)-F_B(1)\right]-\int_0^1\left[F_A(x)-F_B(x)\right]du(1+x) \\
&=-\int_{(0,1]}\left[F_A(x)-F_B(x)\right]du(1+x)
\end{aligned}
\tag{2.4.2}
$$

最后一个等号是因为$F_A(1)=F_B(1)=1$。又因为$F_A(x)-F_B(x)\le 0, \forall x\in[0,1]$，而$u$单调递增，故上式右端非负，即

$$\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right]-\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right]\ge 0 \tag{2.4.3}$$

1)得证。

1)⇒2) 用反证法。假设$\exists r_0\in[0,1]$，使得

$$F_A(r_0)>F_B(r_0)$$

故令$G(r):=F_A(r)-F_B(r)$，则$G(r_0)>0$。

若$r_0\in[0,1)$，由于$G(r)$右连续，$\delta>0$使得

$$G(r)>0, \forall r\in[r_0,r_0+\delta)\subset[0,1]$$

由于 2.4.3 对于所有连续且单调递增的效用函数u均成立，不妨取

$$u(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,r_0-1] \\ k(x-r_0) & x\in(r_0-1,r_0+\delta-1] \\ k\delta & x\in(r_0+\delta-1,+\infty)\end{cases}$$

其中常数$k>0$，则u连续且单调递增，并且显然

$$\int_{(0,1]}\left[F_A(x)-F_B(x)\right]du(1+x)>0$$

但根据(2.4.2)，这与(2.4.3)即 1)矛盾。

3)⇒1) 因为$\tilde{r}_A\overset{d}{=}\tilde{r}_B+\tilde{\epsilon}$，$\tilde{\epsilon}\ge 0$，故

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right]&=\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B+\tilde{\epsilon})\right]=\int_\Omega u(1+\tilde{r}_B(\omega)+\tilde{\epsilon}(\omega))dP \\
&\ge\int_\Omega u(1+\tilde{r}_B(\omega))dP=\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right]
\end{aligned}
$$

1)得证。

1)⇒3) 由于过程太过技巧性，故此处省略证明。□

例 2.4.1（一阶随机占优） 若随机计划 A 和 B 的净收益率分别为 $\tilde{r}_A, \tilde{r}_B$，满足：

$$\begin{aligned} &P\{\tilde{r}_A = 0\} = 0.3 \\ &P\{\tilde{r}_A = 0.5\} = 0.3, \\ &P\{\tilde{r}_A = 1\} = 0.4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &P\{\tilde{r}_B = 0\} = 0.25 \\ &P\{\tilde{r}_B = 0.5\} = 0.25 \\ &P\{\tilde{r}_B = 0.75\} = 0.1 \\ &P\{\tilde{r}_B = 1\} = 0.4 \end{aligned}$$

则有 $B \underset{FSD}{\geq} A$。事实上，

$$F_A(x) = \begin{cases} 0.3 & x \in [0, 0.5) \\ 0.6 & x \in [0.5, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$F_B(x) = \begin{cases} 0.25 & x \in [0, 0.5) \\ 0.5 & x \in [0.5.0.75) \\ 0.6 & x \in [0.75, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

因此

$$F_A(x) \geq F_B(x), \quad \forall x \in [0,1]$$

根据定理 2.4.1 便得 $B \underset{FSD}{\geq} A$。□

2.4.3 二阶随机占优

如果对于任意具有二阶连续可导且凹（即 $u'' \leq 0$）的效用函数的个体，都有 $A \geq B$，则称 A **二阶随机占优（Second-order Stochastic Dominance）**于 B，记为

$$A \underset{SSD}{\geq} B$$

假设个体初始财富为 $W_0 = 1$，则 $A \geq B$ 等价于(2.4.1)，即

$$\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right] \geq \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right]$$

类似一阶随机占优的情形，二阶随机占优也有如下的等价刻画：

定理 2.4.2 （二阶随机占优的等价条件）下面三者等价：

1) $A \underset{SSD}{\geq} B$

2) $\mathbb{E}\left[\tilde{r}_A\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{r}_B\right]$，且 $\int_0^x (F_A(r) - F_B(r))dr \leq 0, \quad \forall x \in [0,1]$

3) $\tilde{r}_B \overset{d}{=} \tilde{r}_A + \tilde{\epsilon}$，其中 $\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right] = 0$

条件 2)和 3)有各自的特殊含义。若 F_A 和 F_B 连续，则

$$\mathbb{E}\left[\tilde{r}_A\right] = \int_0^1 x dF_A(x) = xF_A(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F_A(x)dx = 1 - \int_0^1 F_A(x)dx$$

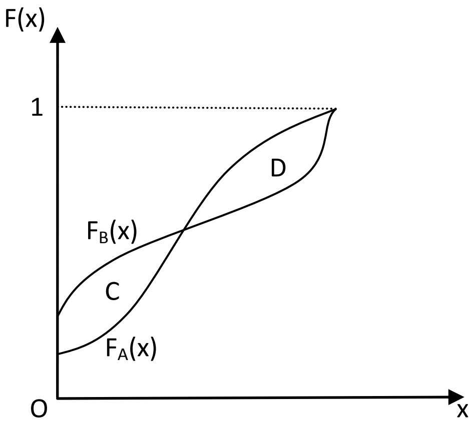
同理

$$\mathbb{E}\left[\tilde{r}_B\right] = \int_0^1 x dF_B(x) = xF_B(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F_B(x)dx = 1 - \int_0^1 F_B(x)dx$$

故由 $\mathbb{E}\left[\tilde{r}_A\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{r}_B\right]$ 得到

$$\int_0^1 F_A(x)dx = \int_0^1 F_B(x)dx$$

这就是说，F_A 和 F_B 两条曲线在[0,1]区间上形成的两个曲边梯形面积相等。下图便是可能的一种情况，其中 C 和 D 两块图形的面积相等。



而在 3)中，$\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right] = 0$ 表明

$$\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon}\right] = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right]\right\} = 0$$

从而

$$\begin{aligned} Cov\left[\tilde{\epsilon}, \tilde{r}_A\right] &= \mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon}\left(\tilde{r}_A - \mathbb{E}[\tilde{r}_A]\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon}\left(\tilde{r}_A - \mathbb{E}[\tilde{r}_A]\right) \middle| \tilde{r}_A\right]\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\left(\tilde{r}_A - \mathbb{E}[\tilde{r}_A]\right)\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right]\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned} Var\left[\tilde{r}_B\right] = Var\left[\tilde{r}_A + \tilde{\epsilon}\right] &= Var\left[\tilde{r}_A\right] + Var\left[\tilde{\epsilon}\right] + Cov\left[\tilde{r}_A, \tilde{\epsilon}\right] \\ &= Var\left[\tilde{r}_A\right] + Var\left[\tilde{\epsilon}\right] \geq Var\left[\tilde{r}_A\right] \end{aligned}$$

于是上面的讨论说明，如果$A \underset{SSD}{\geq} B$，则$\mathbb{E}[\tilde{r}_A]=\mathbb{E}[\tilde{r}_B]$且$Var[\tilde{r}_A] \leq Var[\tilde{r}_B]$。在下一章我们将看到，这便是说：$A$在期望方差准则的意义下优于$B$。

定理 2.4.2 证明：
思路与定理 2.4.1 的证明类似。

2)⇒1) 根据(2.4.2)式，并令$S(x):=\int_0^x (F_A(r)-F_B(r))dr$，则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_A)]-\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_B)]\\&=-\int_0^1[F_A(x)-F_B(x)]du(1+x)\\&=-\int_0^1 u'(1+x)dS(x)\\&=-u'(1+x)S(x)\Big|_0^1+\int_0^1 S(x)u''(1+x)dx\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

注意到$S(0)=0$，并且

$$\begin{aligned}S(1)&=\int_0^1[F_A(r)-F_B(r)]dr\\&=r[F_A(r)-F_B(r)]\Big|_0^1-\int_{[0,1]} rd[F_A(r)-F_B(r)]\\&=0-\mathbb{E}[\tilde{r}_A]+\mathbb{E}[\tilde{r}_B]\\&=0\end{aligned}$$

故由(2.4.4)简化为

$$\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_A)]-\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_B)]=\int_0^1 S(x)u''(1+x)dx \tag{2.4.5}$$

根据条件，$S(x)\leq 0$且$u''\leq 0$，故由上式得

$$\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_A)]-\mathbb{E}[u(1+\tilde{r}_B)]\geq 0$$

1)⇒2) 首先证明

$$\mathbb{E}[\tilde{r}_A]=\mathbb{E}[\tilde{r}_B]$$

由于$A \underset{SSD}{\geq} B$，对于任意二阶连续可导的u，使得$u''\leq 0$，都有

$$\int_{[0,1]} u(1+x)d[F_A(x)-F_B(x)]\geq 0 \tag{2.4.6}$$

取$u_1(x)=x-1,\quad u_2(x)=-x+1$，分别代入(2.4.6)得

$$\int_{[0,1]} xd[F_A(x)-F_B(x)]\geq 0 \tag{2.4.7}$$

$$\int_{[0,1]} -xd[F_A(x)-F_B(x)]\geq 0 \tag{2.4.8}$$

由上两式得

$$\mathbb{E}\left[\tilde{r}_A\right]=\mathbb{E}\left[\tilde{r}_B\right]$$

故由 2)⇒1)的推导以及(2.4.5)，知

$$\int_0^1 S(x)u''(1+x)dx \geq 0 \tag{2.4.9}$$

是 1)的必要条件。假设 2)不成立，则只能是$\exists x_0 \in [0,1]$使得

$$S(x_0)>0$$

由于$S(x)$的连续性，$\exists \delta>0$使得

$$S(x)>0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [0,1]$$

取$u(x)=\int_0^x h(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$，其中

$$h(t)=\begin{cases} 1 & x \in [-\infty, x_0-\delta-1] \\ \cos\left(\dfrac{x+\delta-x_0}{2\delta}\pi\right) & x \in (x_0-\delta-1, x_0+\delta-1) \\ -1 & x \in [x_0+\delta-1, +\infty] \end{cases}$$

则

$$u''(x)=h'(x)=\begin{cases} 0 & x \in (-\infty, x_0-\delta-1] \\ -\dfrac{\pi}{2\delta}\sin\left(\dfrac{x+\delta-x_0}{2\delta}\pi\right) & x \in (x_0-\delta-1, x_0+\delta-1) \\ 0 & x \in [x_0+\delta-1, +\infty] \end{cases}$$

故u二阶连续可导且$u'' \leq 0$。但此时

$$\int_0^1 S(x)u''(1+x)dx<0$$

这与(2.4.9)矛盾，故与 1)矛盾。

3)⇒1) 由 3)知，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] &= \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\epsilon})\right] \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A+\tilde{\epsilon}) \middle| \tilde{r}_A\right]\right\} \\ &\leq \mathbb{E}\left\{u\left(\mathbb{E}\left[1+\tilde{r}_A+\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right]\right)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right] \end{aligned}$$

其中的不等号是因为凹函数的 Jensen 不等式

$$\mathbb{E}\left[G(\tilde{x})\right] \leq G\left(\mathbb{E}[\tilde{x}]\right), \forall \tilde{x}$$

故 1)得证。

1)⇒3) 由于过程太过技巧性，故此处省略证明。详情请参见[5]。□

例 2.4.2（二阶随机占优） 若随机计划 A 和 B 的净收益率分别为 $\tilde{r}_A, \tilde{r}_B$，满足：

$$\begin{array}{ll} P\left\{\tilde{r}_A = 0\right\} = 0.2 & P\left\{\tilde{r}_B = 0\right\} = 0.25 \\ P\left\{\tilde{r}_A = 0.5\right\} = 0.35 & P\left\{\tilde{r}_B = 0.5\right\} = 0.25 \\ P\left\{\tilde{r}_A = 0.75\right\} = 0.1 , & P\left\{\tilde{r}_B = 0.75\right\} = 0.1 \\ P\left\{\tilde{r}_A = 1\right\} = 0.35 & P\left\{\tilde{r}_B = 1\right\} = 0.4 \end{array}$$

则有 $A \underset{SSD}{\geq} B$。事实上，首先容易得到

$$\mathbb{E}\left[\tilde{r}_A\right] = 0.6 = \mathbb{E}\left[\tilde{r}_B\right] \tag{2.4.10}$$

并且

$$F_A(x) = \begin{cases} 0.2 & x \in [0, 0.5) \\ 0.55 & x \in [0.5.0.75) \\ 0.65 & x \in [0.75,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$F_B(x) = \begin{cases} 0.25 & x \in [0, 0.5) \\ 0.5 & x \in [0.5.0.75) \\ 0.6 & x \in [0.75,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

利用定理 2.4.2 证明中的记号，由上两式并通过简单的计算可知

$$S(x) := \int_0^x (F_A(r) - F_B(r))dr = \begin{cases} -0.05x & x \in [0, 0.5) \\ -0.025 + 0.05(x - 0.5) & x \in [0.5, 0.75) \\ -0.0125 + 0.05(x - 0.75) & x \in [0.75, 1] \end{cases}$$

因此

$$S(x) \leq 0 \quad x \in [0,1] \tag{2.4.11}$$

故由(2.4.10)和(2.4.11)和定理 2.4.2 知

$$A \underset{SSD}{\geq} B$$

□

2.4.4 其他形式的随机占优

除了上两节介绍的一阶随机占优和二阶随机占优外，随机占优还有不少其他的形式。本节将介绍另两种随机占优：二阶单调随机占优与三阶随机占优。它们给出了更为细腻的刻画。

二阶单调随机占优

若对于任何具有二阶连续可导且$u' \geq 0, u'' \leq 0$的效用函数u的个体，都有$A \geq B$，则称A**二阶单调随机占优**于B。

从定义中不难看出，二阶单调随机占优综合了一阶、二阶随机占优对个体效用函数特征的要求。同样，二阶单调随机占优也存在等价的判断条件：

定理 2.4.3 （二阶单调随机占优的等价条件） 下面三者等价：

1) A二阶单调随机占优于B；
2) $\int_0^x \left[F_A(r) - F_B(r)\right] dr \leq 0, \quad \forall x \in [0,1]$；
3) $\tilde{r}_B \overset{d}{=} \tilde{r}_A + \tilde{\epsilon}$，其中$\mathbb{E}\left[\tilde{\epsilon} \middle| \tilde{r}_A\right] \leq 0$。

证明：类似定理 2.4.2 证明可得。□

三阶随机占优

若对于任何具有三阶连续可导且$u' > 0, u'' \leq 0, u''' \geq 0$的效用函数$u$的个体，都有$A \geq B$，则称$A$**三阶随机占优**于$B$。

在三阶随机占优的定义中，$u''' \geq 0$事实上也是一个比较自然的条件。回忆 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数的概念：

$$R_A := -\frac{u''}{u'}$$

于是

$$R_A' = -\frac{u''' \cdot u' - (u'')^2}{(u')^2} = -\frac{u'''}{u'} + \left(\frac{u''}{u'}\right)^2 \tag{2.4.12}$$

如果R_A单调递减，(2.4.12)表明

$$-\frac{u'''}{u'} + \left(\frac{u''}{u'}\right)^2 \leq 0$$

由$u' > 0$便得$u''' \geq 0$。也就是说，对于具有严格递减的 Arrow-Pratt 绝对风险厌恶系数的个体来说，$u''' \geq 0$。

三阶随机占优也有如下等价刻画：

定理 2.4.4 （三阶随机占优的等价条件） A三阶随机占优于B当且仅当

$$\int_0^x \int_0^y \left[F_A(r) - F_B(r)\right] dr dy \leq 0, \quad \forall x \in [0,1] \tag{2.4.13}$$

以及

$$\int_0^1 \left[F_A(r)-F_B(r)\right]dr \le 0 \tag{2.4.14}$$

证明：（充分性）记

$$H_1(x) := F_A(x)-F_B(x)$$
$$H_2(x) := \int_0^x F_A(x)-F_B(x)dx = \int_0^x H_1(x)dx$$
$$H_3(x) := \int_0^x H_2(x)dx$$

则

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right]-\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] \\
&= \int_{[0,1]} u(1+x)dH_1(x) \\
&= u(1)H_1(0)+\int_0^1 u(1+x)dH_1(x) \\
&= u(1)H_1(0)+u(1+x)H_1(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(1+x)dH_2(x) \qquad (2.4.15)\\
&= u(1)H_1(0)+u(1+x)H_1(x)\Big|_0^1 - u'(1+x)H_2(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u''(1+x)dH_3(x) \\
&= u(1)H_1(0)+u(1+x)H_1(x)\Big|_0^1 - u'(1+x)H_2(x)\Big|_0^1 \\
&\quad + u''(1+x)H_3(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u'''(1+x)H_3(x)dx
\end{aligned}$$

注意到 $H_1(0)=H_2(0)=H_3(0)=H_1(1)=0$，又因为

$$u'>0, u''\le 0, u'''\ge 0$$

且由(2.4.13)与(2.4.14)，有

$$H_2(1)=\int_0^1 \left[F_A(r)-F_B(r)\right]dr \le 0$$

$$H_3(x)=\int_0^x\int_0^y \left[F_A(r)-F_B(r)\right]drdy \le 0$$

故由(2.4.15)得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right]-\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] \\
&\quad = -u'(2)H_2(1)+u''(2)H_3(1)-\int_0^1 u'''(1+x)H_3(x)dx \\
&\quad \ge 0
\end{aligned}$$

故充分性得证。

（必要性）利用反证法。假设(2.4.13)与(2.4.14)至少有一个不成立，即成立下列三者其一：

a) $\begin{cases} H_2(1)>0 \\ H_3(x)\le 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} H_2(1) > 0 \\ H_3(x) \le 0, \quad 0 \le x \le c^* \\ H_3(x) > 0, \quad c^* < x \le 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} H_2(1) \le 0 \\ H_3(x) \le 0, \quad 0 \le x \le c^* \\ H_3(x) > 0, \quad c^* < x \le 1 \end{cases}$

取效用函数

$$u_0(x) := \begin{cases} P(x-1) + Q(x-1) & 0 \le x \le c \\ P(x-1) & c < x \le 1 \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} P(x) &= -Ac^2x^2/4 + Bc^2x/2 + C \\ Q(x) &= -D(c-x)^4/24 \end{aligned}$$

且 $B > A \ge 0, D \ge 0, c$ 待定。容易验证，在 $\forall x \in [0,1]$，$u_0(1+x)$ 满足 $u_0' > 0, u_0'' \le 0, u_0''' \ge 0$，故由(2.4.15)，

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_A)\right] - \mathbb{E}\left[u(1+\tilde{r}_B)\right] \\ &= \left(-Ac^2/4 + Bc^2/2 + C\right)H_1(1) + \left(c^2(A-B)/2\right)H_2(1) \\ &\quad + \left(c^2B/2 + Dc^3/6\right)H_2(0) \\ &\quad - (Ac^2/2)H_3(1) + \left(Ac^2/2 + Dc^2/2\right)H_3(0) \\ &\quad - \int_0^c D(c-x)H_3(x)dx \\ &= \left(c^2(A-B)/2\right)H_2(1) - (Ac^2/2)H_3(1) - \int_0^c D(c-x)H_3(x)dx \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

不难验证，在情形a)和b)中取 $c = c^*$，固定 A 和 D 并取 B 足够大，在情形c)中取 $c = c^*$，固定 A 和 B 并取 D 足够大，都能使(2.4.16)为负，从而与 A 三阶随机占优于 B 矛盾。□

从以上关于随机占优的讨论可以看出，一阶随机占优刻画了效用函数具有某种一阶（导数）特征的个体的偏好，等价条件中包含了对于 $H_1(x)$ 的要求；二阶（单调）随机占优刻画了效用函数具有某种二阶特征的个体的偏好，等价条件中包含了对 $H_2(x)$ 的要求；三阶随机占优刻画了效用函数具有某种三阶特征的个体的偏好，等价条件中包含了对 $H_3(x)$ 的要求。这也就是它们名称以及本质不同之所在。

参考文献：

[1] Fishburn. P. 1970. Utility Theory for Decision Making. John Wiley & Sons. New York.

[2] Stephen. F. LeRoy & Jan Werner. 2001. 金融经济学原理（Principles of Financial Economics）. 上海财经大学出版社.

[3] 易宪容，赵春明. 行为金融学. 社会科学文献出版社

[4] Cass, D. & J. Stiglitz. 1970. The structure of investor preferences and asset returns, and separability in portfolio allocation: A contribution to the pure theory of mutual funds. Journal of Economic Theory 2:122-160.

[5] Rothschild. M. & J. Stiglitz. 1970. Increasing Risk I: A Definition, Journal of Economic Theory 2:225-243.

[6] G. A. Whitmore. Third-Degree Stochastic Dominance. The American Economic Review, Vol. 60, No. 3 (Jun., 1970), pp.457-459.