

## ODABRANA POGLAVLJA MATEMATIKE - OPTIMIZACIJA CIJENE HOTELSKE SOBE

Prije nekoliko godina otvorili ste hotel na našoj obali s ukupno 100 soba. Detaljno ste analizirali podatke o noćenjima i došli do raznih, vrlo preciznih i korisnih zaključaka, ali još vam nedostaje odgovor na glavno pitanje: Koja je optimalna cijena noćenja u vašem hotelu koja bi vam dugoročno maksimizirala vaš profit.

Označimo s  $Y_n$  broj novo zainteresiranih osoba koje  $n$ -tog dana žele iznajmiti sobu u vašem hotelu. Nakon dugogodišnje analize, ustanovili ste da su  $(Y_n)_{n \geq 0}$  nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable koje prate Poissonovu distribuciju s parametrom  $f(c)$ , gdje je  $c$  cijena noćenja u vašem hotelu (u kunama), a

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{je dana s} \quad f(c) = \frac{10000}{c}.$$

Ako u trenutku kada vam dođu novi gosti nemate slobodnu sobu na raspolaganju, na vašu žalost, zainteresirani gosti će otići iznajmiti sobu kod vaše konkurencije. Sobe se mogu iznajmiti na više dana, a vaši prikupljeni podaci su vam pokazali da je broj noćenja koliko gosti ostaju u vašem hotelu geometrijska slučajna varijabla s parametrom  $1 - g(c)$ , gdje  $c$  opet predstavlja cijenu noćenja (u kunama), a

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, 1 \rangle \quad \text{je dana s} \quad g(c) = \frac{e^{-0.002 \cdot (c-500)}}{1 + e^{-0.002 \cdot (c-500)}}.$$

Uočite da ovo zapravo znači da na početku sljedećeg radnog dana gosti odlaze iz hotela (nezavisno jedni o drugima) s vjerojatnošću  $1 - g(c)$ . Označimo s  $X_n(c)$  ukupan broj iznajmljenih soba na kraju  $n$ -tog dana. Radi jednostavnosti, ponekad pišemo samo  $X_n$  i ne naglašavamo eksplicitno ovisnost o  $c$ .

Uočite da vrijedi

$$X_{n+1} = \min\{100, B(X_n, g(c)) + Y_{n+1}\},$$

gdje  $B(n, p)$  predstavlja binomnu slučajnu varijablu s parametrima  $n$  i  $p$ .

Dokažite da je  $(X_n)_{n \geq 0}$  ergodičan Markovljev lanac (prisjetite se koja svojstva mora imati Markovljev lanac da bi bio ergodičan i provjerite ima li lanac  $X$  sva ta svojstva).

Nadalje, s obzirom na to da vam je glavni cilj odrediti cijenu koja će dugoročno maksimizirati vaš profit, nađite  $c$  koji maksimizira funkciju

$$P(c) = \mathbb{E}[X(c)] \cdot c,$$

gdje je

$$\mathbb{E}[X(c)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n(c)].$$

Uputa: Prilikom traženja optimalne cijene, gledajte različite cijene i nacrtajte graf prosječnog dnevnog profita u odnosu na te cijene. Za određivanje optimalne cijene koristite simulacije: simulirajte  $X_1(c), \dots, X_n(c)$  i procijenite očekivani broj iznajmljenih soba  $\mathbb{E}[X(c)] = \sum_{k=0}^{100} k \cdot \pi_k$  (gdje  $\pi$  predstavlja stacionarnu distribuciju Markovljevog lanca  $X$ ) pomoću nepristranog procjenitelja  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(c)$ . Uočavate

li (promatranjem konkretnih vrijednosti Markovljevog lanca  $X_1(c), \dots, X_n(c)$ ) kako biste mogli dobiti još bolju procjenu od  $\mathbb{E}[X(c)]$ ?